Quelques théorèmes sur le moment cinétique d'un corps solide.

Memoria di EDGAR B. SCHIELDROP (a Oslo)

À M. Enrico Bompiani pour son Jubilé scientifique.

Résumé. - *Les équations de mouvement rotationel d'un corps solide relatif à un point Q (fixe dans l'espace ou centre de gravité du corps) admettent, on le sait, des intégrales premières immédiattes dans les deux cas suivantes:* 1. *Un axe de direction fixe passant par Q est sans moment des forces.* 2. *Le même pour un axe de symétrie dans le corps.*

On démontre que ces deux axes spéciaux appartiennent à une classe renfrenant une infinité d'autres qui dans les mêmes conditions rendent le même service.

On va dans la suite considérer le mouvement d'un corps solide dans le but de démontrer l'existence de quelques théorèms sur le moment cinétique. Nous supposons d'abord que le corps posède une symétrie axiale dans ce sens que l'ellipsoïde central d'inertie soit de révolution autour d'un axe dit ici l'axe de symétrie, et traiterons préalablement le mouvement d'un tel corps relatif à des axes de directions fixes passant par le centre de gravité.

On connait dans le probleme ainsi posé, deux cas où l'existence d'un axe par rapport auquel le moment des forces s'annule constammant (dit ici «axe de moment nul») admet une conclusion direct à l'égard du moment cinétique par rapport au centre de gravité sous la forme d'une intégral première des équations de mouvement. La projection du moment cinétique, soit sur un axe de direction fixe dans l'espace, soit sur un axe de symétrie dans le corps, restera, on le sait, constante en cas que l'un ou l'autre de ces axes soit un axe de moment nul.

Or, ces deux cas n'epuisent point les possibilités. En effet, les axes fixes et les axes de symétrie appartiennent à une classe renfermant une infinité d'autres qui nous permettent de même manière d'écrire immédiatement une intégrale première portant sur le moment cinétique.

Si G (fig. 1, a) est l'intérsection de deux axes Gz e $G\zeta$ qui font un angle *variable*

$$\Theta \equiv zG\zeta, \tag{1}$$

on va par la notion «un parallélogramme porté par les axes Gz et $G\zeta$» entendre un parallélogramme ayant son point central à G, des cotés constammant parallèles à Gz et $G\zeta$, et où les longueurs des cotés, $2l$ et $2e$, fois une choisies, resteront les mêmes pour toutes valeurs de l'angle Θ.

La notion renfermera aussi les cas limites où deux cotés deviendront zero et le parallélogramme dégenéra, soit en une droite de longueur $2l$ portée par Gz, (fig. 1, *b*), soit en une droite de longueur $2e$ portée par $G\zeta$ (fig. 1, *c*).

Soient dans un tel parallélogramme (fig. 2)

$$D_1 \quad , \quad D_2$$

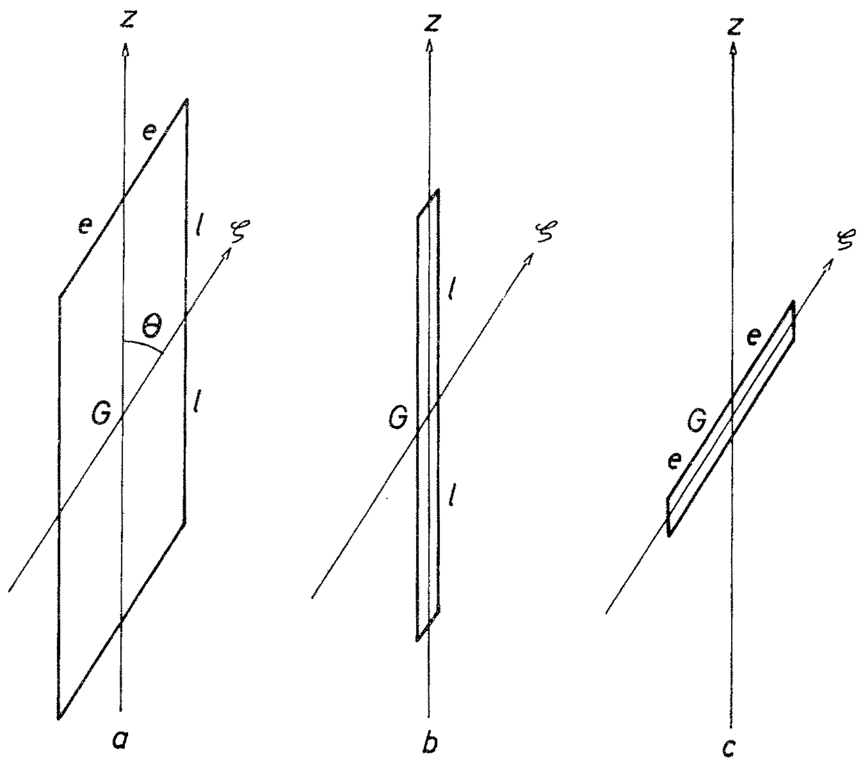

Fig. 1

les deux diagonales, et

$$0 \leqq \Phi_1 \leq \Theta \qquad \Theta \leqq \Phi_2 \leq \pi \tag{2}$$

les angles qu'ils font, avec $G\zeta$, de manière qu'on ait en mettant $e : l = \varepsilon$

$$\sin \Phi_1 = \frac{2l}{D_1} \sin \Theta, \ \cos \Phi_1 = \frac{2l}{D_1} (\cos \Theta + \varepsilon) \tag{3}$$

$$\sin \Phi_2 = \frac{2l}{D_2} \sin \Theta, \ \cos \Phi_2 = \frac{2l}{D_2} (\cos \Theta - \varepsilon).$$

En désignant par D_{ik} la projection de D_i sur la direction de D_k, on a de plus

$$D_1 D_{21} = D_2 D_{12} = 4(1 - \varepsilon^2) l^2, \tag{4}$$

c'est-à-dire $D_i D_{ki}$ indépendant de Θ.

Cela étant, prenont maintenant G (fig. 2) comme le centre de gravité, Gz comme un axe à direction fixe dans l'espace et $G\zeta$ comme l'axe de symétrie d'un corps en mouvement. Soit de plus $G\xi\eta\zeta$ un trièdre où $G\eta$ est dans le même plan que Gz et $G\zeta$, de manière que $G\xi$ soit constamment perpendiculaire à $G\xi\eta\zeta$.

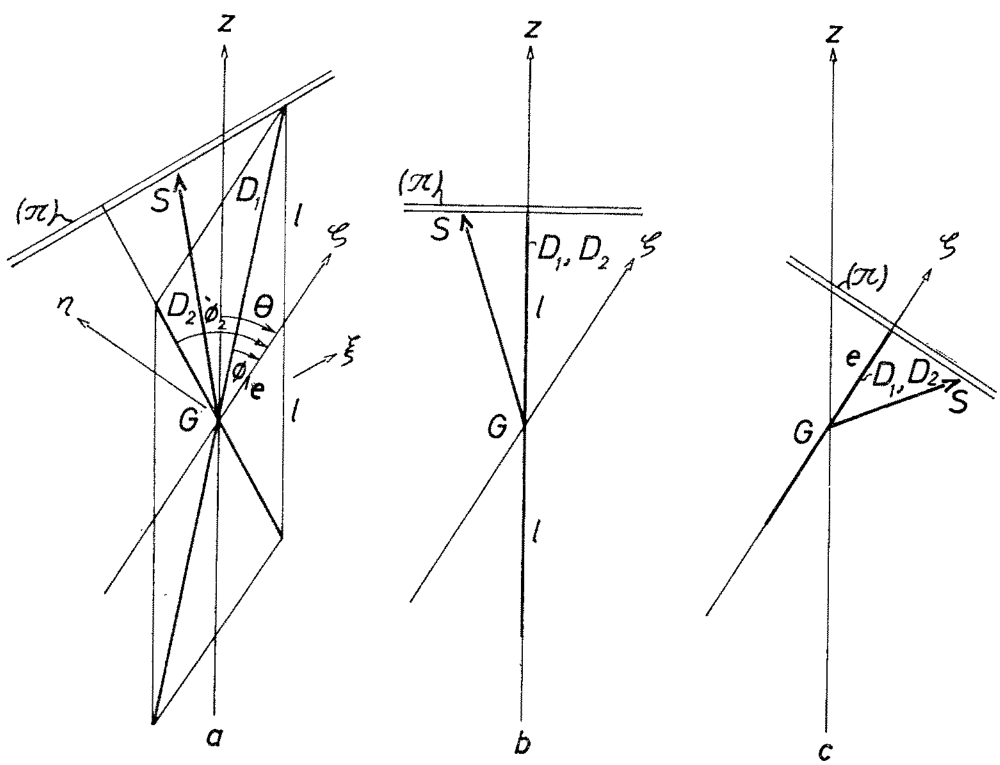

Fig. 2

Avec les notations coutumières on a donc pour les projections de la vitesse angulaire du corps sur les axes $G\xi\eta\zeta$

$$p = \dot{\Theta} \quad , \quad q = \dot{\psi} \sin \Theta \quad , \quad r = \dot{\psi} \cos \Theta + \dot{\varphi}, \tag{5}$$

et comme des équations de mouvement relatif au centre de gravité

$$
\begin{aligned}
&A\ddot{\Theta} + (Cr - Aq \cot g\Theta)q = L \\
(6)\qquad &A\dot{q} - (Cr - Aq \cot g\Theta)\dot{\Theta} = M \\
&C\dot{r} \qquad\qquad\qquad\qquad\quad = N
\end{aligned}
$$

L, M, N étant les moments, A, A, C les moments d'inertie par rapport aux axes du trièdre.

En cas que l'un des diagonales D_1 et D_2 conincide avec un axe de moment nul on va l'appeler «un diagonale de moment nul». La condition nécessaire et suffisante pour que D_1 soit de moment nul, s'écrit donc

$$(7)\qquad M \sin \Phi_1 + N \cos \Phi_1 = 0,$$

ce qui, en vertu de (3), est équivalent à

$$(8)_1\qquad M \sin \Theta + N(\cos \Theta + \varepsilon) = 0.$$

L'addition des deux dernières equations (6) apres les avoir multipliées respectivement par $\sin \Theta$ et $(\cos \Theta + \varepsilon)$ donne alors dans ce cas

$$(9)\qquad A\dot{q} \sin \Theta + Aq\dot{\Theta} \cos \Theta + C\dot{r}(\cos \Theta + \varepsilon) - Cr\dot{\Theta} \sin \Theta = 0$$

ou, en intégrant,

$$(10)_1\qquad Aq \sin \Theta + Cr(\cos \Theta + \varepsilon) = \lambda_1.$$

Or en multipliant cette équation par l'equation (2) écrite

$$\frac{2l}{D_1} = \frac{D_{21}}{2(1-\varepsilon^2)l}.$$

et en tenant compte de (3), obtient enfin

$$(11)_1\qquad Aq \sin \Phi_1 + Cr \cos \Phi_1 = \varkappa_1 D_{21},$$

$\varkappa_1$ étant une costante d'intégration.

A l'autre coté, pour que le diagonale D_2 soit de moment nul, il faut que

$$(7)_2\qquad M \sin \Phi_2 + N \cos \Phi_2 = 0$$

ou

$$(8)_2\qquad M \sin \Theta + N(\cos \Theta - \varepsilon) = 0,$$

et par un raisonnement tout à fait analogue à celui plus haut on trouve

$$(10)_2 \qquad Aq \sin \Theta + Cr(\cos \Theta - \varepsilon) = \lambda_2,$$

et ensuite

$$(11)_2 \qquad Aq \sin \Phi_2 + Cr \cos \Phi_2 = \varkappa_2 D_{12},$$

où $\varkappa_2$ est une constante d'intégration.

Dans chacune des intégrals premières $(11)_1$ et $(11)_2$ figurent deux projections sur le diagonale de moment nul, à savoir la projection du moment cinétique et celle de l'autre diagonale. Les intégrals expriment que le rapport entre ces projections-là reste constant pendant toute la durée du mouvement.

Le résultat obtenue peut etre énoncé sous la forme du THÉORÈME I suivant:

Si dans le mouvement d'un corps relatif à son centre de gravité G il existe un parallélogramme porté par un axe Gz de direction fixe dans l'espace et un axe de symétrie Gζ du corps de sorte qu'un diagonale soit de moment nul, le vecteur

$$\overrightarrow{GS},$$

representant le moment cinétique par rapport à G, aura constammant son extrémité S dans un plan (π) perpendiculaire au diagonale de moment nul et passant par une des extrémités de l'autre diagonale.

Fig. 2, *a* met en évidence l'intersection du plan (π) et du plan $zG\zeta$ en cas que D_2 soit le diagonale de moment nul. Le plan (π) peu passer par l'une ou l'autre des extrémités du diagonal D_1, suivant le sens du moment cinétique initial, dont le valeur determira l'échelle à laquelle il faut mesurer les longueurs dans la figure.

Le théorème s'applique à des cas limites où l'un ou l'autre des axes Gz et $G\zeta$ est de moment nul. Dans le premier cas le parallélogramme dégénère, nous venons de le voir, en une droite de longueur $2l$ portée par Gz. Les deux diagonales se confondent, et leur longueur commune $2l$ est aussi celle de la projection de l'un sur l'autre. Le plan (π) lieu de l'extremité S du moment cinétique devient un plan perpendiculaire à Gz passant ou par le point $z = l$, ou par le point $z = -l$ (fig. 2, *b*). Quand $G\zeta$ est un axe de moment nul, on voit par un raisonnement analogue que (π) devient un plan perpendiculaire à $G\zeta$ passant soit par le point $\zeta = e$, soit par le point $\zeta = -e$ (fig. 2, *c*).

Les équations (6), qui constituent la seule base des considérations au-de-sus, ont été regardées jusqu'ici comme les équations de mouvement relatif au centre de gravité du corps. Or, ces équations s'appliquant également au mouvement absolu d'un corps tournant autour d'un point O fixe et dans l'espace et dans le corps, il en suit que le théorème I subsistera encore si l'on y substitue un tel point O à la place du centre de gravité G.

On va tenir compte du dernier remarque dans un énoncé qui renferme tous les résultats obtenus, et qui se prête d'une manière instructive et pratique à certaines applications.

Une surface sphérique (Σ) ayant sont centre à un point fixe dans un corps solide, soit à Q, soit à L sur un axe $Q\zeta$ de symétrie de l'éllipsoïde d'inertie par rapport à Q, et dont le rayon l, une fois choisi, restera constant pendant le mouvement du corps, sera dite: «*une sphère de moment cinétique liée à* Q».

Cette notion nous permet d'énoncer le Théorème II suivant: (fig. 3, *a*)

Soit $\overline{PP'}$ de direction fixe dans l'espace un diamètre d'une sphère de moment cinétique liée au point Q d'un corps en mouvement, alors si PQ est un axe de moment nul, le vecteur $\overrightarrow{QS}$ moment cinétique par rapport à Q aura son extrémité S dans un plan (π) perpendiculaire à PQ et passant par P', pourvu que Q soit ou le centre de gravité du corps, ou un point fixe dans l'espace.

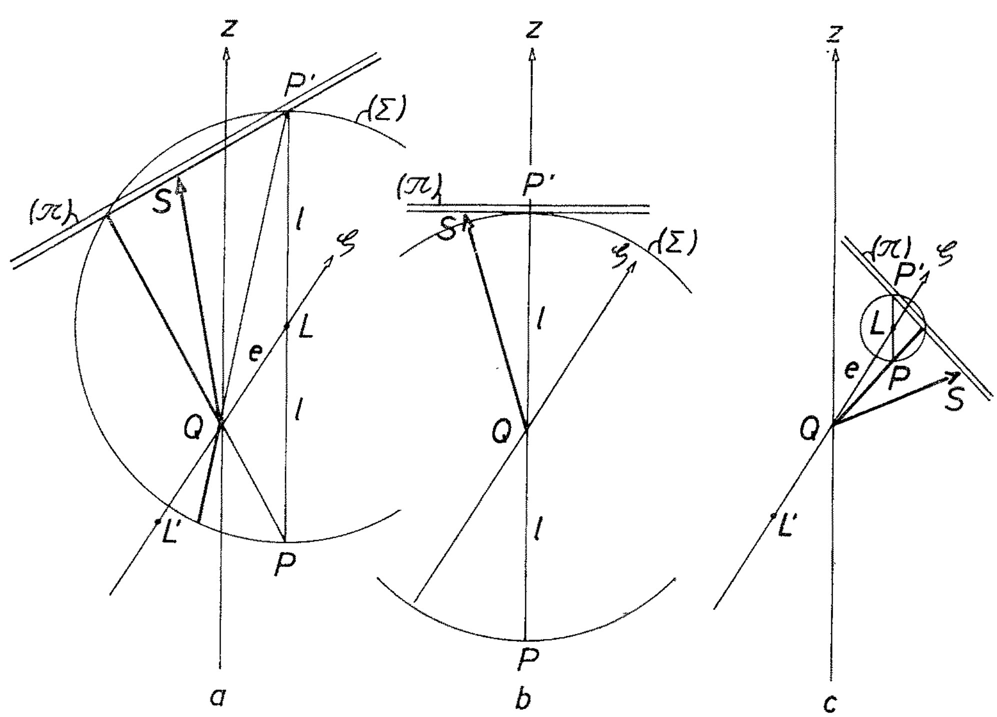

Fig. 3

Ce théorème renforme tous les cas qui admettent une intégral première du gengre envisagé. Pour un corps quelconque ne posedant aucun axe de symétrie Q, le centre de la sphère de moment cinétique liée à Q sera nécessairement le point Q il-même. L'axe PQ aura alors, comme le montre fig. 3, *b*, la même direction que le diamètre $\overline{PP'}$, c'est-à-dire une direction fixe dans l'espace. Si PQ est un axe de moment nul, on se trouve alors dans le cas où le moment par rapport à un axe de direction fixe passant par Q est zero. Le moment cinétique dans cette diretion est donc constant, conformement au fait que le plan (π) du théorème est dans ce cas perpendiculaire à $\overline{PP'}$ et à distance constante de Q (fig. 3, *b*).

Fig. 3, *c* sert à illustrer comment pour un corps symétrique l'axe PQ s'approche à l'àxe de symétrie $Q\zeta$ à mesure que le rayon l de la sphère (Σ) devient de moins en moins petit. Dans le cas limit $l=0$ les deux axes se confondront et (π) deviendra un plan perpendiculaire à $Q\zeta$ et passera par L à distance constante de Q. C'est donc le deuxiem cas d'intégrabilité connu.

REMARQUE. - Pour tenir compte d'un sens du moment cinétique $\overrightarrow{QS}$ opposé à celui supposé dans les figures 3, il aurait fallu de choisir le centre de (Σ) à L' sur le coté negatif de $Q\zeta$ ou dans fig. 3, *b*, de metre P', porteur du plan (π), à la place de P et inversement. Or, dans certaines applications il serait peut-être plus commode, on va tout suite en voir un exemple, de prendre un vecteur ayant son *origine* dans le plan (π) et son extrémité à Q comme reprentant du moment cinétique.

Considérons, à titre d'application du théorème, le mouvement relatif au centre de gravité G d'un corps possédant un axe de symétrie $G\zeta$ et limité par une surface sphérique (S) ayant son centre sur $G\zeta$. Pendant le mouvement cette surface (S) est constammant en contact ponctuel avec un plan (P) horizontal fixe dans l'espace, et la pesanteur est la seule force donnée.

On voit qu'en ce cas on peut regarde la surface (S) du corps elle-même comme la surface (Σ) du théorème (comparez fig. 3, *a* ou Q est maintenant G), P étant le point de contact avec le plan (P) et $\overline{PP'}$ étant vertical. L'échelle sera determiner par le moment cinétique initial $\overrightarrow{GS}$ ou $\overrightarrow{SG}$ (voyez le remarque plus haut.

Le théorème II met donc en évidence que dans ce mouvement le corps fournirà, pour ainsidire, il-même la représentation graphique d'une intégral première des équations de mouvement. Dans une conférence faite à une séance à Istituto Matematico dell'Università di Roma présidée par il Professore ENRICO BOMPIANI, j'ai déja utilisé ce fait pour expliquer un mouvement assez suprenant d'un tel corps en rotation rapide.