Sulle curve sghembe.

Nota di GIACOMO SABAN (a Istanbul)

A Enrico Bompiani in occasione del suo Giubileo scientifico.

Sunto. - *Associate, in maniera metricamente intrinseca, ad una curva sghemba* (X) *in* E_n *due superficie rigate* $\mathfrak{R}$ *e* $\mathfrak{C}$, *di cui l'una sviluppabile e l'altra un cono, passanti ambedue per* (X) *ed aventi un raccordo in corrispondenza ad un punto* X^0 *generico su questa curva, vengono esaminati gli ordini di contatto delle due curve* (r) *e* (c) *segate su queste due superficie da un iperpiano* π. *L'ordine del contatto stesso risulta indipendente sia dalla scelta di* (X) *che da quella di* X^0.

Data una curva sghemba (X) *ed un punto regolare* X^0 *su questa, si considerino il cono proiettante la curva da* X^0 *e la sviluppabile circoscritta ad* (X). *Un piano* π *generico dello spazio sega cono e sviluppabile in due curve, tangenti nel punto* X^π *proiezione di* X^0 *su* π, *il cui invariante di contatto in quel punto è* $3/4$ *ed è quindi indipendente da* π, *da* X^0 *e da* (X).

Di questo bel teorema, dovuto al Professor BOMPIANI [1], ho dato alcuni anni fa una estensione a spazi di dimensione qualsivoglia [2].

In questa nota invece, associate ad una curva generica (X) di E_n una coppia di rigate $\mathfrak{R}$ e $\mathfrak{C}$, di cui l'una sviluppabile e l'altra un cono, scelte però in modo che passino ambedue per (X) ed abbiano un raccordo in corrispondenza ad un punto generico X^0 di questa curva, si esaminano gli ordini di contatto delle curve (r) e (c) segate su queste due superficie da un iperpiano π. Si dimostra che questo contatto, indipendentemente dalla scelta del punto X^0 e della curva (X), è di ordine *uno* per un iperpiano π generico, di ordine *due* per un iperpiano passante per X^0, di ordine j per un iperpiano contenente lo spazio E_{j-2} $(j-2)$-osculatore di (X) in X^0. Le curve (r) e (c) hanno in questo caso un contatto di ordine $j-2$ con la curva (X).

Nel nn. 1 a 3 vengono definite le superficie rigate $\mathfrak{R}$ e $\mathfrak{C}$ a cui si è accennato sopra e si considerano alcune proprietà, essenziali per gli sviluppi successivi, degli elementi che intervengono nella loro costruzione. I nn. 4 e 5 sono riservati allo studio del contatto di ordine uno delle curve (r) e (c) ottenute segando queste superficie con un iperpiano qualsiasi, mentre nel n. 6 si passa al caso di un contatto di ordine due. Alcuni lemmi stabiliti nel n. 7 permettono di passare poi al caso di un contatto di ordine j (nn. 8 e 9). Infine nel n. 10, ristretta l'indagine allo spazio euclideo di dimensione tre, si applicano a questo i teoremi ottenuti in precedenza.

1. Consideriamo, entro uno spazio euclideo reale E_n, una curva sghemba qualsiasi (X), descritta dal punto X di raggio vettore $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(s)$ s essendo la lunghezza di arco di questa. Siano inoltre $\boldsymbol{a}_i = \boldsymbol{a}_i(s)$ $(i = 1, 2, \dots, n)$ i versori, mutuamente ortogonali, del riferimento principale di tale curva nel medesimo punto X [3]. Sia ancora $\boldsymbol{p}$ il raggio vettore del punto P che descrive l'iperpiano ortogonale al versore $\boldsymbol{a}_i$ in X: questo iperpiano ha quindi per equazione

$$[\boldsymbol{p} - \boldsymbol{x}(s)] \cdot \boldsymbol{a}_i(s) = 0. \tag{1}$$

Ponendo allora

$$\mathfrak{L}_j = [\boldsymbol{p} - \boldsymbol{x}(s)] \cdot \boldsymbol{a}_j(s), \qquad (j = 1, 2, \dots, n) \tag{2}$$

l'equazione precedente (1) si riscrive

$$\mathfrak{L}_i = 0. \tag{3}$$

Al variare di X sulla curva (X) l'iperpiano considerato descrive una varietà luògo di ∞^1 iperpiani, di cui passiamo a considerare le successive caratteristiche: per ottenere la caratteristica di ordine j basta considerare il sistema di equazioni

$$\mathfrak{L}_i = 0, \qquad \mathfrak{L}_i' = 0, \qquad \mathfrak{L}_i'' = 0, \dots, \qquad \mathfrak{L}_i^{(j)} = 0, \tag{4}$$

ove gli apici denotano una derivazione rispetto ad s. Ciascuna delle equazioni costituenti il sistema (4) essendo lineare, tale caratteristica è ovviamente uno spazio lineare che avrà in generale dimensione $n - j - 1$. Il valore $j = n - 1$ fornisce i punti caratteristici, i quali costituiscono una curva (Γ) di E_n di cui gli iperpiani della famiglia considerata sopra sono gli iperpiani osculatori.

Per le note formule di derivazione,

$$\begin{aligned} &\frac{d\boldsymbol{x}}{ds} = \boldsymbol{a}_1, \\ &\frac{d\boldsymbol{a}_i}{ds} = -\rho_{i-1}\boldsymbol{a}_{i-1} + \rho_i \boldsymbol{a}_{i+1}, \qquad (i = 1, 2, \dots, n), \end{aligned} \tag{5}$$

(dove $\rho_0 = \rho_n = 0$, essendo $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_{n-1}$ le successive curvature di (X) nel punto considerato) il sistema (4) si riscrive nella forma

$$\begin{aligned} &\mathfrak{L}_i = 0 \\ &-\rho_{i-1}\mathfrak{L}_{i-1} + \rho_i\mathfrak{L}_{i+1} - \boldsymbol{a}_1 \cdot \boldsymbol{a}_i = 0 \\ &-\rho_{i-1}'\mathfrak{L}_{i-1} + \rho_{i-1}\rho_{i-2}\mathfrak{L}_{i-2} + \rho_i'\mathfrak{L}_{i+2} + \rho_i\rho_{i+1}\mathfrak{L}_{i+2} - \rho_1\boldsymbol{a}_2 \cdot \boldsymbol{a}_i \\ &\quad + 2\rho_{i-1}\boldsymbol{a}_1 \cdot \boldsymbol{a}_{i-1} - 2\rho_i\boldsymbol{a}_i \cdot \boldsymbol{a}_{i+1} = 0 \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{aligned} \tag{6}$$

Le successive equazioni così ottenute contengono, oltre ai prodotti scalari espressi mediante le $\mathfrak{L}_j$, altri dati nella forma $\boldsymbol{a}_h \cdot \boldsymbol{a}_k$, i quali, vista l'ortogonalità $\boldsymbol{a}_j$ di indici diversi, saranno tutti nulli salvo se $h = k$. Si osservi però che mentre un'equazione omogenea nelle quantità $\mathfrak{L}_j$ rappresenta un iperpiano che passa per l'origine del riferimento, cioè per il punto X, una equazione contenente un termine avente a fattore un prodotto $\boldsymbol{a}_h \cdot \boldsymbol{a}_k$ non nullo cessa invece di rappresentare un iperpiano per X, ossia lo spazio lineare caratteristico corrispondente all'ordine j non passa più per X se nell'equazione $(j-1)$-esima del sistema precedente appare un termine siffatto.

Ci proponiamo di associare ora alla curva (X) una superficie rigata sviluppabile, sulla quale la (X) sia tracciata: dobbiamo quindi determinare l'indice i nell'equazione di partenza (3) in maniera che il sistema di iperpiani considerato abbia per caratteristica di ordine $n-2$ una retta passante per X; ciò implica dunque che nel sistema (6) dovranno essere nulli tutti i prodotti della forma $\boldsymbol{a}_h \cdot \boldsymbol{a}_k$ fin nella $(n-1)$-esima equazione inclusa. Ora si verifica immediatamente per induzione, sempre ragionando sul sistema (6), che la j-esima equazione del sistema contiene senz'altro il prodotto $\boldsymbol{a}_{j-1} \cdot \boldsymbol{a}_i$. Conseguentemente devono anzitutto essere

$$\boldsymbol{a}_1 \cdot \boldsymbol{a}_i = \boldsymbol{a}_2 \cdot \boldsymbol{a}_i = \ldots = \boldsymbol{a}_{n-2} \cdot \boldsymbol{a}_i = 0, \tag{7}$$

il che non è possibile che per $i = n$ oppure per $i = n - 1$. Nel primo caso l'iperpiano iniziale (3) è l'iperpiano $\mathfrak{L}_n = 0$, cioè l'iperpiano *osculatore* di (X), ed è noto che in tal caso la curva (Γ) che da essa si deduce si identifica con la curva (X) medesima, la rigata $\mathfrak{R}$ riducendosi allora alla sviluppabile delle tangenti di (X). Questo caso essendo già stato esaurientemente studiato, non rimane che passare alla seconda eventualità e considerare la sviluppabile individuata a partire dall'iperpiano di equazione

$$\mathfrak{L}_{n-1} = 0. \tag{8}$$

Esaminando, nel caso di $i = n - 1$, la forma che assume il sistema (6), si dimostra che nelle ipotesi espresse dalle (7) *le successive caratteristiche fino a quello di ordine $n-2$ incluso passano per X, mentre invece non passano per questo punto quelle di ordine $n-1$*; cioè le (7) costituiscono una condizione che non solo è necessaria, ma è anche sufficiente.

Difatti il punto Γ risulta in queste ipotesi individuato dal sistema

$$\begin{gathered} \mathfrak{L}_{n-1} = 0, \\ -\rho_{n-2}\mathfrak{L}_{n-2} + \rho_{n-1}\mathfrak{L}_n = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{gathered} \tag{9}$$

Per stabilire la legge di formazione delle successive equazioni del sistema (9), riscriviamone le prime due nella forma

$$(10)\qquad \begin{aligned} A_1 \mathcal{S}_n + B_1 \mathcal{S}_{n-1} &= 0, \\ A_2 \mathcal{S}_n + B_2 \mathcal{S}_{n-2} &= 0, \end{aligned}$$

con

$$(11)\qquad A_1 = 0, \qquad B_1 = 1, \qquad A_2 = \rho_{n-1}, \qquad B_2 = -\rho_{n-2},$$

ed ammettiamo per ipotesi che le $(j-1)$-esima e j-esima equazioni del sistema $(j \leq n-1)$ siano rispettivamente

$$(12)\qquad \begin{aligned} A_{j-1} \mathcal{S}_n + B_{j-1} \mathcal{S}_{n-j+1} &= 0, \\ A_j \mathcal{S}_n + B_j \mathcal{S}_{n-j} &= 0. \end{aligned}$$

Derivando l'ultima equazione si trova

$$(13)\qquad A'_j \mathcal{S}_n + B'_j \mathcal{S}_{n-j} - \rho_{n-j-1} B_j \mathcal{S}_{n-j-1} - \rho_{n-j} B_j \mathcal{S}_{n-j+1} = 0$$

e sostituendo i valori di $\mathcal{S}_{n-j}$ ed $\mathcal{S}_{n-j+1}$ dedotti dalle (12) risulta

$$(14)\qquad A'_j \mathcal{S}_n - B'_j \frac{A_j}{B_j} \mathcal{S}_n - \rho_{n-j} B_j \frac{A_{j-1}}{B_{j-1}} \mathcal{S}_n - \rho_{n-j-1} B_j \mathcal{S}_{n-j-1} = 0,$$

cioè posto

$$(15)\qquad \begin{aligned} A_{j+1} &= A'_j - B'_j \frac{A_j}{B_j} - \rho_{n-j} B_j \frac{A_{j-1}}{B_{j-1}} = B_j \left[\left(\frac{A_j}{B_j} \right)' - \rho_{n-1} \frac{A_{j-1}}{B_{j-1}} \right], \\ B_{j+1} &= -\rho_{n-j-1} B_j, \end{aligned}$$

si ha ancora

$$(16)\qquad A_{j+1} \mathcal{S}_n + B_{j+1} \mathcal{S}_{n-j-1} = 0.$$

Da ciò segue che per $j = n-1$ le (12) si riscrivono

$$(17)\qquad \begin{aligned} A_{n-2} \mathcal{S}_n + B_{n-2} \mathcal{S}_2 &= 0, \\ A_{n-1} \mathcal{S}_n + B_{n-1} \mathcal{S}_1 &= 0, \end{aligned}$$

per cui, derivando l'ultima di queste, si ottiene infine

$$(18)\qquad A'_{n-1} \mathcal{S}_n + B'_{n-1} \mathcal{S}_1 + \rho_1 B_{n-1} \mathcal{S}_2 - B_{n-1} = 0$$

e con ciò risulta dimostrato l'asserto.

Introducendo, poi, nella (18) le espressioni di $\mathcal{L}_1$ ed $\mathcal{L}_2$ dedotte dalle (17) si ha ancora

$$\mathcal{L}_n = \frac{B_{n-1}}{A'_{n-1} - B'_{n-1}\dfrac{A_{n-1}}{B_{n-1}} - \rho_1 B_{n-1}\dfrac{A_{n-2}}{B_{n-2}}} = \frac{B_{n-1}}{A_n}. \tag{19}$$

Questa equazione, assieme alla (16), che si riscrive nella forma

$$\mathcal{L}_j = -\frac{A_{n-j}}{B_{n-j}}\mathcal{L}_n, \tag{20}$$

essendo le quantità A_j e B_k definite dalle (15), serve a determinare completamente il punto Γ, il cui raggio vettore γ sarà dato dunque dall'espressione

$$\gamma(s) = \boldsymbol{x}(s) - \mathcal{L}_n(s)\left[\sum_{j=1}^{n-2}\frac{A_{n-j}(s)}{B_{n-j}(s)}\boldsymbol{a}_j(s) - \boldsymbol{a}_n(s)\right]. \tag{21}$$

2. Prima di proseguire, conviene stabilire alcune proprietà delle quantità A_j e B_k che avremo bisogno di utilizzare nel seguito.

Osserviamo anzitutto che dalla (1; 15) (*), tenendo presente le (1; 11) risulta essere

$$B_{j+1} = (-1)^j \prod_{i=1}^{j} \rho_{n-i-1}. \tag{1}$$

Si ha allora

$$\begin{aligned} B_{n-1} &= (-1)^{n-2}\prod_{i=1}^{n=2}\rho_{n-i-1} \\ &= \Big[(-1)^{n-j-1}\prod_{i=1}^{n-j}\rho_{n-i-1}\Big]\Big[(-1)^{j-1}\prod_{i=n-j}^{n-2}\rho_{n-i-1}\Big] \\ &= B_{n-j}C_{n-j} \end{aligned} \tag{2}$$

avendo posto

$$C_{n-j} = (-1)^{j-1}\prod_{i=n-j}^{n-2}\rho_{n-i-1}. \tag{3}$$

Si ha ancora

$$\begin{aligned} C_{n-1} &= 1, \\ C_1 &= (-1)^{n-2}\prod_{i=1}^{n-2}\rho_{n-i-1} = B_{n-1}, \end{aligned} \tag{4}$$

(*) La numerazione delle formule riprende ad ogni paragrafo. Le formule dei paragrafi precedenti vengono richiamate indicando prima il numero del paragrafo e quindi il numero della formula stessa.

e, tenendo presente la seconda delle (1; 15), dalla

$$C_j B_j = C_{j+1} B_{j+1} \; (= B_{n-1}) \tag{5}$$

come pure dalla (3) segue che

$$C_j = -\rho_{n(+j-1)} C_{j+1}. \tag{6}$$

Inoltre, sempre in base alle (1; 15), si ha

$$\begin{gathered} A_1 = 0, \quad A_2 = \rho_{n-1}, \quad A_3 = -\rho_{n-3}\left(\frac{\rho_{n-1}}{\rho_{n-2}}\right)', \\ A_4 = \rho_{n-3}\rho_{n-2}\left\{\left[-\rho_{n-3}\left(\frac{\rho_{n-1}}{\rho_{n-2}}\right)'\right]' - \rho_{n-3}\left(\frac{\rho_{n-1}}{\rho_{n-2}}\right)'\right]\right\} \end{gathered} \tag{7}$$

e quindi se si assume quale ipotesi che

$$\begin{gathered} A_{k+1} = f_{k+1}(\rho_{n-1}, \; \rho'_{n-1}, \ldots, \rho_{n-1}^{(k-1)}, \; \rho_{n-2}, \; \rho'_{n-2}, \ldots, \rho_{n-2}^{(k-1)}, \; \rho_{n-3}, \; \rho'_{n-3}, \ldots, \rho_{n-3}^{(k-2)}, \\ \rho_{n-4}, \; \rho'_{n-4}, \ldots, \rho_{n-4}^{(k-3)}, \ldots, \rho_{n-k}, \; \rho'_{n-k}) \end{gathered} \tag{8}$$

ancora per via della (1; 15) si trova

$$\begin{gathered} A_{k+2} = f_{k+2}(\rho_{n-1}, \; \rho'_{n-1}, \ldots, \rho_{n-1}^{(k)}, \; \rho_{n-2}, \; \rho'_{n-2}, \ldots, \rho_{n-2}^{(k)}, \; \rho_{n-3}, \; \rho'_{n-3}, \ldots, \rho_{n-3}^{(k-1)}, \\ \rho_{n-4}, \; \rho'_{n-4}, \ldots, \rho_{n-4}^{(k-2)}, \ldots, \rho_{n-k}, \; \rho'_{n-k}, \; \rho''_{n-k}, \; \rho_{n-k-1}, \; \rho'_{n-k-1}) \end{gathered} \tag{9}$$

il che costituisce la dimostrazione per induzione della formula (8) medesima.

Infine aggiungiamo che la prima delle (1; 15) si può riscrivere nella maniera seguente

$$\left(\frac{A_j}{B_j}\right)' = \rho_{n-j}\frac{A_{j-1}}{B_{j-1}} + \frac{A_{j+1}}{B_j}. \tag{10}$$

Ora

$$\left(\frac{A_j}{B_j}\right) = \frac{A_j C_j}{B_{n-1}} \tag{11}$$

per cui

$$\left(\frac{A_j}{B_j}\right)' = -\frac{B'_{n-1}}{B^2_{n-1}} A_j C_j + \frac{(A_j C_j)'}{B_{n-1}} = \rho_{n-j}\frac{A_{j-1} C_{j-1}}{B_{n-1}} + \frac{A_{j+1} C_j}{B_{n-1}} \tag{12}$$

e quindi

$$(A_j C_j)' = \rho_{n-j} A_{j-1} C_{j-1} + A_{j+1} C_j + \frac{B'_{n-1}}{B^2_{n-1}} A_j C_j . \tag{13}$$

3. In base a quanto precede la (1; 20) si riscriverà

$$\mathfrak{L}_j = -\frac{A_{n-j} C_{n-j}}{B_{n-1}} \mathfrak{L}_n \tag{1}$$

per cui l'espressione vettoriale (1; 21) diventa

$$\gamma(s) = \boldsymbol{x}(s) - \frac{\mathfrak{L}_n(s)}{B_{n-1}(s)} \boldsymbol{D}(s) \tag{2}$$

ove si è posto

$$\boldsymbol{D}(s) = \sum_{j=1}^{n-2} A_{n-j} C_{n-j} \boldsymbol{a}_j - C_1 \boldsymbol{a}_n . \tag{3}$$

Consideriamo ora il vettore tangente alla curva (Γ) nel punto Γ, il quale corrispondendo al punto X della curva (X), ha parimenti per parametro il medesimo valore s. Si ha

$$\begin{aligned}
\gamma' = \boldsymbol{a}_1 &- \left(\frac{\mathfrak{L}_n}{B_{n-1}}\right)' \left[\sum_{j=1}^{n-2} A_{n-j} C_{n-j} \boldsymbol{a}_j - C_1 \boldsymbol{a}_n\right] \\
&- \frac{\mathfrak{L}_n}{B_{n-1}} \left[\sum_{j=1}^{n-2} (A_{n-j} C_{n-j})' \boldsymbol{a}_j + A_{n-1} C_{n-1} \rho_1 \boldsymbol{a}_2 + C_1 \rho_{n-1} \boldsymbol{a}_{n-1} \right. \\
&\qquad \left. - C'_1 \boldsymbol{a}_n + \sum_{j=2}^{n-2} A_{n-j} C_{n-j} (-\rho_{j-1} \boldsymbol{a}_{j-1} + \rho_j \boldsymbol{a}_{j+1})\right] \\
= &\left\{ 1 - \frac{\mathfrak{L}_n}{B_{n-1}} [(A_{n-1} C_{n-1})' - A_{n-2} C_{n-2} \rho_1] - \left(\frac{\mathfrak{L}_n}{B_{n-1}}\right)' A_{n-1} C_{n-1} \right\} \boldsymbol{a}_1 \\
&- \sum_{j=2}^{n-3} \left\{ \frac{\mathfrak{L}_n}{B_{n-1}} \left[(A_{n-j} C_{n-j})' - A_{n-j-1} C_{n-j-1} \rho_j + A_{n-j+1} C_{n-j+1} \rho_{j-1} \right] + \right. \\
&\qquad \left. \left(\frac{\mathfrak{L}_n}{B_{n-1}}\right)' A_{n-j} C_{n-j} \right\} \boldsymbol{a}_j \\
&- \left\{ \frac{\mathfrak{L}_n}{B_{n-1}} \left[(A_2 C_2)' + A_3 C_3 \rho_{n-3} \right] + \left(\frac{\mathfrak{L}_n}{B_{n-1}}\right)' A_2 C_2 \right\} \boldsymbol{a}_{n-2} \\
&- \frac{\mathfrak{L}_n}{B_{n-1}} [C_1 \rho_{n-1} + A_2 C_2 \rho_{n-2}] \boldsymbol{a}_{n-1} + \left[\frac{\mathfrak{L}_n}{B_{n-1}} C'_1 + \left(\frac{\mathfrak{L}_n}{B_{n-1}}\right)' C_1 \right] \boldsymbol{a}_n
\end{aligned} \tag{4}$$

e basterà tenere conto delle (2; 6) e (2; 7) per verificare immediatamente che il coefficiente del versore $\boldsymbol{a}_{n-1}$ si annulla. Invece, in base alle (1; 19) e (2; 13) si verifica che il coefficiente a^j del versore $\boldsymbol{a}_j$ $(j = 1, 2, \ldots, n-2)$ si semplifica, ottenendosi infine

$$a^j = -\frac{\mathfrak{L}'_n}{B_{n-1}} A_{n-j} C_{n-j}, \tag{5}$$

mentre il coefficiente a^n del versore $\boldsymbol{a}_n$, avendosi $C_1 = B_{n-1}$, è

$$a^n = \frac{\mathfrak{L}'_n}{B_{n-1}} C_1. \tag{6}$$

Si ha quindi

$$\gamma'(s) = -\frac{\mathfrak{L}'_n(s)}{B_{n-1}(s)} \boldsymbol{D}(s), \tag{7}$$

per cui *la superficie rigata* $\mathfrak{R}$, passante per (X), data mediante l'equazione vettoriale

$$\boldsymbol{r}(s, t) = \boldsymbol{x}(s) + t\boldsymbol{D}(s), \tag{8}$$

è la sviluppabile delle tangenti della curva (Γ). La curva (Γ) stessa si ottiene ponendo nell'equazione della rigata

$$t = H(s), \tag{9}$$

ove

$$H(s) = -\frac{\mathfrak{L}_n(s)}{B_{n-1}(s)}. \tag{10}$$

Conviene rilevare una ultima proprietà del vettore $\boldsymbol{D}$, che si ottiene derivando la (2) ed identificando il risultato così ottenuto con il secondo membro della (7): si trova allora

$$\boldsymbol{D}' = \frac{B'_{n-1}}{B_{n-1}} \boldsymbol{D} + \frac{B_{n-1}}{\mathfrak{L}_n} \boldsymbol{a}_1 \tag{11}$$

per cui sussiste la relazione lineare

$$H(s)B'_{n-1}(s)\boldsymbol{D}(s) + [\boldsymbol{a}_1(s) - H(s)\boldsymbol{D}'(s)]\, B_{n-1}(s) = 0 \tag{12}$$

che avremo occasione di richiamare nel seguito.

4. Si consideri ora sulla curva (X) un punto X^0 *generico* e cioè tale che in esso non si annullino né risultino infinite le successive curvature di (X) e le quantità A_h, B_j o C_k. Si scelga X^0 come origine della lunghezza d'arco s sulla curva (X) e sia inoltre Γ^0 il punto della curva (Γ) che corrisponde ad X^0: il punto Γ^0, in base alle ipotesi formulate poc'anzi sulla natura di X^0, sarà situato in una regione finita di E_n.

Consideriamo ancora il cono $\mathcal{C}$ di vertice Γ^0 e direttrice (X), il quale ha per equazione vettoriale

$$\boldsymbol{c}(s,\ u) = \gamma(0) + u[\boldsymbol{x}(s) - \gamma(0)], \tag{1}$$

ed ha ovviamente in comune con la sviluppabile $\mathcal{R}$ la generatrice per X^0. Queste due superficie si *raccordano*, anzi, su questa generatrice, in quanto hanno ambedue per piano tangente fisso lungo la generatrice comune il piano individuato dalla generatrice stessa e dalla tangente alla curva (X) in X^0.

Siano (r) e (c) le due curve ottenute intersecando la sviluppabile $\mathcal{R}$ ed il cono $\mathcal{C}$ mediante un iperpiano generico π, soggetto per ora alla sola condizione di non contenere il punto Γ^0. Queste due curve (r) e (c) passano ambedue per il punto P^0, nel quale la retta $\Gamma^0 x^0$ interseca l'iperpiano π, ed hanno in quel punto un *contatto*, avendo ivi in comune anche la tangente, che risulta essere l'intersezione del piano di raccordamento con l'iperpiano π.

Per analizzare la natura di questo contatto, conveniamo anzitutto di indicare con la sola lettera iniziale di una funzione di s, sia essa scalare o vettoriale, il valore che questa assume per $s = 0$, riservandoci di indicare la variabile s esplicitamente quando questa non è nulla. Spostiamo inoltre l'origine delle coordinate al punto X^0 prescelto, in modo che sia

$$\boldsymbol{x} = 0 \tag{2}$$

e quindi

$$\gamma = H\boldsymbol{D}. \tag{3}$$

Infine, l'iperpiano π abbia per equazione

$$\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{v} = \bar{\omega}, \tag{4}$$

$\boldsymbol{p}$ essendo il raggio vettore del punto generico P che percorre questo iperpiano, $\boldsymbol{v}$ il versore ortogonale a π e $\bar{\omega}$ la distanza di π dall'origine. Sostituendo quindi a $\boldsymbol{p}$ le equazioni parametriche della sviluppabile $\mathcal{R}$ e del cono $\mathcal{C}$, fornite rispettivamente dalla (3; 8) e dalla (1), si ottengono i valori di t e di u che determinano le intersezioni di queste superficie coll'iperpiano π, cioè appunto quei valori di t e di u che danno le curve (r) e (c). La condizione di non appartenenza del punto Γ^0 all'iperpiano π si esprime allora scrivendo

$$HD\cdot v - \bar{\omega} \neq 0. \tag{5}$$

Nel primo caso si ha dunque

$$[x(s) - tD(s)]\cdot v = \bar{\omega} \tag{6}$$

cioè

$$t = \frac{\bar{\omega} - x(s)\cdot v}{D(s)\cdot v}. \tag{7}$$

Ora, sviluppando in serie,

$$x(s) = \sum_{h=1}^{\infty} \frac{s^h}{h!} x^{(h)}, \tag{8}$$

$$D(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{s^k}{k!} D^{(k)}, \tag{9}$$

e quindi

$$- x(s)\cdot v = \sum_{h=1}^{\infty} \frac{s^h}{h!} X_h, \tag{10}$$

$$D(s)\cdot v = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{s^k}{k!} D_k, \tag{11}$$

ove si è posto

$$- X_h = x^{(h)}\cdot v, \quad D_k = D^{(k)}\cdot v. \tag{12}$$

Si osservi che in virtù della (2) la prima delle (12) non definisce una quantità X_0 e quindi, allo scopo di mantenere la simmetria delle formule, poniamo

$$X_0 = \bar{\omega}. \tag{13}$$

L'espressione della t, fornita dalla (7) si può allora riscrivere nella maniera seguente:

$$t = \frac{\sum\limits_{h=0}^{\infty} \frac{s^h}{h!} X_h}{\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{s^k}{k!} D_k} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{s^j}{j!} T_j. \tag{14}$$

I coefficienti di questo sviluppo si determinano osservando che

$$\sum_{h=0}^{\infty} \frac{s^h}{h!} X_h = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{s^k}{k!} D_k\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{s^j}{j!} T_j\right) \tag{15}$$

quindi

$$X_h = \sum_{j=0}^{h} \binom{h}{j} D_{h-j} T_j, \tag{16}$$

per cui

$$T_h = \frac{1}{D_0}\left[X_h - \sum_{j=0}^{h-1} \binom{h}{j} D_{h-j} T_j\right]. \tag{17}$$

Nel secondo caso invece è

$$\{\gamma + u[\boldsymbol{x}(s) - \gamma]\}.\boldsymbol{v} = \bar{\omega} \tag{18}$$

ossia

$$u = \frac{\bar{\omega} - \gamma \cdot \boldsymbol{v}}{\boldsymbol{x}(s) \cdot \boldsymbol{v} - \gamma \cdot \boldsymbol{v}}. \tag{19}$$

Questa espressione di u si riscrive nella forma

$$u = \frac{\gamma \cdot \boldsymbol{v} - \bar{\omega}}{\gamma \cdot \boldsymbol{v} - \bar{\omega} + \bar{\omega} - \boldsymbol{x}(s) \cdot \boldsymbol{v}} \tag{20}$$

ossia, in base alle (8), (12) e (13)

$$u = \frac{1}{1 + \sum_{h=0}^{\infty} \frac{s^h}{h!} \frac{X_h}{HD_0 - X_0}} = 1 + \sum_{i=0}^{\infty} \frac{s^i}{i!} U_i : \tag{21}$$

la divisione per $\gamma \cdot \boldsymbol{v} - \bar{\omega} = HD_0 - X_0$ essendo lecita in base alla (5). Si ha quindi, per determinare i coefficienti U_i, l'equazione

$$1 = \left(1 + \sum_{h=0}^{\infty} \frac{s^h}{h!} \frac{X_h}{HD_0 - X_0}\right)\left(1 + \sum_{i=0}^{\infty} \frac{s^i}{i!} U_i\right) \tag{22}$$

ossia

$$\sum_{h=0}^{\infty} \frac{s^h}{h!}\left[\frac{X_h}{HD_0 - X_0} + U_h + \sum_{i=0}^{h} \binom{h}{i} U_i \frac{X_{h-i}}{HD_0 - X_0}\right] = 0. \tag{23}$$

Ne segue che deve essere nulla l'espressione fra parentesi quadre: risolvendo l'equazione così ottenuta rispetto ad U_h si trova infine

$$U_h = -\frac{1}{D_0 H}\left[X_h - \sum_{i=0}^{h-1} \binom{h}{i} U_i X_{h-i}\right]. \tag{24}$$

Dalla (14) segue dunque che la curva (r) ha per equazione vettoriale

$$r(s) = x(s) + \sum_{i=0}^{\infty} \frac{s^i}{i!} T_i D(s) \tag{25}$$

mentre sostituendo ad u nella (1) l'espressione fornita dalla (21) si trova per la curva (c)

$$\begin{aligned} c(s) &= \gamma + [x(s) - \gamma](1 + \sum_{i=0}^{\infty} \frac{s^i}{i!} U_i) \\ &= x(s) + [x(s) - \gamma] \sum_{i=0}^{\infty} \frac{s^i}{i!} U_i. \end{aligned} \tag{26}$$

Si trova dunque

$$\begin{aligned} r(s) - c(s) &= D(s) \sum_{i=0}^{\infty} \frac{s^i}{i!} T_i - [x(s) - \gamma] \sum_{h=0}^{\infty} \frac{s^h}{h!} U_h \\ &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{s^k}{k!} D^{(k)} \right) \left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{s^i}{i!} T_i \right) - \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{s^k}{k!} x^{(k)} - HD \right) \left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{s^i}{i!} U_i \right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{s^k}{k!} \left[\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} T_{k-i} D^{(i)} - \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} U_{k-i} x^{(i)} + HU_k D \right] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{s^k}{k!} \Delta_k \end{aligned} \tag{27}$$

con

$$\begin{aligned} \Delta_k &= HU_k D + \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} (T_{k-i} D^{(i)} - U_{k-i} x^{(i)}) \\ &= (HU_k + T_k) D + \sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i} (T_{k-i} D^{(i)} - U_{k-i} x^{(i)}). \end{aligned} \tag{28}$$

5. Dalle formule (4; 17) e (4; 24) risulta essere

$$T_0 = X_0/D, \quad U_0 = -X_0/HD \tag{1}$$

e quindi

$$HU_0 + T_0 = 0, \tag{2}$$

mentre, sempre per via delle medesime formule, si ha

$$HU_1 + T_1 = -\frac{X_1}{D_0} - \frac{U_0 X_1}{D_0} + \frac{X_1}{D_0} \frac{D_1 T_0}{D_0} = -\frac{1}{D_0} (U_0 X_1 + D_1 T_0). \tag{3}$$

Ne segue che il vettore Δ_0, dedotto dalla formula (4; 28) è

$$\Delta_0 = (HU_0 + T_0)\boldsymbol{D} = 0, \tag{4}$$

il che conferma che le curve (r) e (c) hanno un punto in comune, come d'altronde è stato stabilito all'inizio del n. 4 con ragionamenti puramente geometrici. Ma si ha inoltre

$$\begin{aligned}\Delta_1 &= (HU_1 + T_1)\boldsymbol{D} + T_0\boldsymbol{D}^{(1)} - U_0\boldsymbol{x}^{(1)} \\ &= -\frac{U_0}{D_0}[(X_1 - HD_1)\boldsymbol{D} + HD_0\boldsymbol{D}' + D_0\boldsymbol{a}_1]\end{aligned} \tag{5}$$

e sostituendo a $\boldsymbol{D}'$ l'espressione di questo vettore fornita dalla (3; 11)

$$\Delta_1 = -\frac{U_0}{D_0}\frac{1}{B_{n-1}}[B_{n-1}(X_1 - HD_1) + B'_{n-1}HD_0]\boldsymbol{D}. \tag{6}$$

Orbene, l'espressione racchiusa fra parentesi quadre è *nulla*, come immediatamente si vede moltiplicando scalarmente col versore $\boldsymbol{v}$ la relazione lineare (3; 12) e dunque

$$\Delta_1 = 0, \tag{7}$$

come d'altronde è stato in precedenza affermato. Ne segue che *le curve (r) e (c) segate sulle rigate $\mathfrak{R}$ e $\mathfrak{C}$ da un iperpiano generico π hanno un contatto di ordine* almeno *eguale ad uno*.

Per precisare l'ordine di questo contatto è necessario passare al vettore Δ_2, che si scrive

$$\Delta_2 = (HU_2 + T_2)\boldsymbol{D} + 2T_1\boldsymbol{D}^{(1)} - 2U_1\boldsymbol{x}^{(1)} + T_0\boldsymbol{D}^{(2)} - U_0\boldsymbol{x}^{(2)}. \tag{8}$$

Ora

$$\begin{aligned}HU_2 + T_2 &= -\frac{1}{D_0}(X_2 + U_0X_2 + 2U_1X_1) + \frac{1}{D_0}(X_2 - D_2T_0 - 2D_1T_1) \\ &= -\frac{1}{D_0}(U_0X_2 + 2U_1X_1 + D_2T_0 + 2D_1T_1)\end{aligned} \tag{9}$$

e, per la (3; 11)

$$\boldsymbol{D}^{(2)} = \frac{B''_{n-1}}{B_{n-1}}\boldsymbol{D} + \frac{1}{H}\left(\frac{H'}{H} - \frac{B'_{n-1}}{B_{n-1}}\right)\boldsymbol{a}_1 - \frac{\rho_1}{H}\boldsymbol{a}_2. \tag{10}$$

Ne segue che

$$\begin{aligned}
\Delta_2 &= \left[2T_2\frac{B'_{n-1}}{B_{n-1}} + T_0\frac{B''_{n-1}}{B_{n-1}} - \frac{1}{D_0}(U_0X_2 + 2U_1X_1 + D_2T_0 + 2D_1T_1)\right]\boldsymbol{D} \\
(11)\qquad & + \left[\frac{T_0}{H}\left(\frac{H'}{H} - \frac{B'_{n-1}}{B_{n-1}}\right) - 2\frac{T_1}{H} - 2U_1\right]\boldsymbol{a}_1 \\
&= \delta_2\boldsymbol{D} + \alpha_2\boldsymbol{a}_1
\end{aligned}$$

cioè il vettore Δ_2 è la somma di due vettori, rispettivamente diretti come $\boldsymbol{D}$ ed $\boldsymbol{a}_1$. Consideriamo ora il coefficiente di $\boldsymbol{D}$ in questa somma, cioè δ_2: essendo

$$\begin{aligned}
D_2 &= \sum_{j=1}^{n-2}(A_{n-j}C_{n-j})''\boldsymbol{a}_j\cdot\boldsymbol{v} + 2\sum_{j=1}^{n-2}(A_{n-j}C_{n-j})'[(-\rho_{j-1}\boldsymbol{a}_{j-1} + \rho_j\boldsymbol{a}_{j+1})\cdot\boldsymbol{v}] \\
(12)\qquad & + \sum_{j=1}^{n-2}A_{n-j}C_{n-j}[(-\rho_{j-1}\boldsymbol{a}_{j-1} + \rho_j\boldsymbol{a}_{j+1})'\cdot\boldsymbol{v}] - C''_1\boldsymbol{a}_n\cdot\boldsymbol{v} + 2C'_1\rho_{n-1}\boldsymbol{a}_{n-1}\cdot\boldsymbol{v} \\
& + C_1\rho'_{n-1}\boldsymbol{a}_{n-1}\cdot\boldsymbol{v} + C_1\rho_{n-1}[(-\rho_{n-2}\boldsymbol{a}_{n-2} + \rho_{n-1}\boldsymbol{a}_n)\cdot\boldsymbol{v}],
\end{aligned}$$

δ_2 contiene un termine della forma

$$(13)\qquad -\frac{T_0}{D_0}(A_{n-1}C_{n-1})''\boldsymbol{a}_1\cdot\boldsymbol{v}$$

che in base alle (2; 8), contiene le derivate di ρ_{n-2} e di ρ_{n-1} fino a quelle di ordine $n-1$ incluso e nessuno dei rimanenti termini di δ_2 contiene derivate di queste curvature di un ordine così elevato, suscettibili quindi di eliminarle. Questo bastà per dimostrare che il coefficiente δ_2 non si annulla e di conseguenza non si annulla neppure il vettore Δ_2, per cui *in generale il contatto delle curve* (*r*) *e* (*c*) *è precisamente di ordine* uno.

6. Osserviamo però che l'ostacolo al quale abbiamo accennato alla fine del n. precedente può venir rimosso supponendo nullo sia il prodotto scalare $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{v}$ (e cioè X_1) che il coefficiente T_0 (cioè X_0). Ciò indica che per una scelta particolare dell'iperpiano π le curve (*r*) e (*c*) possono eventualmente avere un contatto di ordine superiore ad uno.

Ma la prima delle due possibilità or ora segnalate non conduce ad un risultato, come facilmente si verifica prendendo in considerazione, assieme a δ_2 il coefficiente α_2 che figura nella (5; 11).

Difatti in questo caso la componente su $\boldsymbol{a}_1$ del vettore Δ_2, quando si esprima anche $\boldsymbol{D}$ in funzione dei versori $\boldsymbol{a}_j$, contiene un termine della forma

$$\frac{T_0 H'}{H^2}, \tag{1}$$

cioè contiene, per le (1; 19) e (2: 8), derivate di ρ_{n-2} e ρ_{n-1} di ordine $n-1$ incluso che nessuno degli altri termini contenuti nell'espressione di questa componente può annullare. Se ne conclude che ancora in questo caso Δ_2 rimane diverso da zero.

Non così invece, se T_0 si annulla, cioè se si suppone X_0 nullo. In tal caso si ha

$$\begin{gathered} X_0 = T_0 = U_0 = 0, \quad T_1 = X_1/D_0, \quad U_1 = -X_1/D_0 H, \\ HU_2 + T_2 = -\frac{2}{D_0}(U_1 X_1 + D_1 T_1) = \frac{2X_1}{D_0 H}(X_1 - D_1 H) \end{gathered} \tag{2}$$

quindi (5; 11) diventa

$$\Delta_2 = \frac{2X_1}{D_0^2 H}\frac{1}{B_{n-1}}[D_0 H B'_{n-1} + (X_1 - D_1 H) B_{n-1}]\boldsymbol{D} \tag{3}$$

ed è evidentemente nulla in base alla (3; 12).

Ora l'ipotesi $X_0 = 0$ equivale a supporre che l'iperpiano π passi per l'origine del riferimento, cioè per il punto X^0, ed in tal caso è

$$\Delta_0 = \Delta_1 = \Delta_2 = 0: \tag{4}$$

per determinare l'esatta natura del contatto che in tal caso si presenta è necessario passare al vettore Δ_3. Nelle ipotesi riassunte dalle (2) questo si scrive

$$\begin{aligned} \Delta_3 &= \left[3T_1 \frac{B''_{n-1}}{B_{n-1}} + 3T_2 \frac{B'_{n-1}}{B_{n-1}} + (HU_3 + T_3)\right]\boldsymbol{D} \\ &\quad + 3\left[\frac{T_1}{H}\left(\frac{H'}{H} - \frac{B'_{n-1}}{B_{n-1}}\right) - \frac{T_2}{H} - U_2\right]\boldsymbol{a}_1 \\ &= \delta_3 \boldsymbol{D} + \alpha_3 \boldsymbol{a}_1 \end{aligned} \tag{5}$$

e, considerando, come si è fatto nel n. precedente, la composizione dei coefficienti δ_3 ed α_3 si verifica nuovamente che questi contengono derivate delle due ultime curvature di (X) in X^0 di ordine elevato, che non si possono eliminare e quindi, se non si aggiunge qualche altra condizione alle ipotesi espresse dalle (2), il vettore Δ_3 è diverso dallo zero. Si ha quindi che *se l'iperpiano π passa per il punto X^0 le curve che sega sulle rigate $\mathfrak{R}$ e $\mathfrak{C}$ hanno in quel punto un contatto di ordine* due.

7. Per procedere oltre, conviene dimostrare alcune proposizioni a carattere generale.

Osserviamo anzitutto che se

$$(1)\qquad X_0 = X_1 = X_2 = \dots = X_{k-2} = 0, \quad X_{k-1} \neq 0 \qquad (\text{per } k \geqq 2),$$

si ha immediatamente, per la (4; 24), che

$$(2)\qquad U_0 = U_1 = U_2 = \dots = U_{k-2} = 0, \quad U_{k-1} \neq 0 \qquad (\text{per } k \geqq 2).$$

Inoltre, dalla (4; 7) risulta anzitutto

$$(3)\qquad T_0 = X_0/D_0 = 0.$$

Ma ancora, avendosi ora $X_0 = T_0 = 0$, la medesima formula dà

$$(4)\qquad T_1 = 0$$

e si può completare questo risultato per induzione, supponendo, assieme alle (1), anche

$$(5)\qquad T_0 = T_1 = T_2 = \dots = T_{i-1} = 0 \qquad \text{con } i-1 < k-2.$$

Sempre per la (4; 7) si trova ancora

$$(6)\qquad T_i = 0$$

e possiamo quindi enunciare il seguente

LEMMA: *Se*

$$X_0 = X_1 = X_2 = \dots = X_{k-2} = 0, \quad X_{k-1} \neq 0 \qquad (\textit{per } k \geqq 2),$$

allora si ha anche

$$U_0 = U_1 = U_2 = \dots = U_{k-2} = 0, \quad U_{k-1} \neq 0 \qquad (\textit{per } k \geqq 2)$$

e

$$T_0 = T_1 = T_2 = \dots = T_{k-2} = 0, \quad T_{k-1} \neq 0 \qquad (\textit{per } k \geqq 2).$$

In secondo luogo, consideriamo la forma che assume, nelle ipotesi espresse dalle (1) e con le conclusioni alle quali si giunge per il lemma testè enunciato, il vettore Δ_k. Dalla (4; 28) risulta

$$(7)\qquad \Delta_k = (HU_k + T_k)\mathbf{D} + k(T_{k-1}\mathbf{D}' - U_{k-1}\mathbf{x}')$$

e, sempre nelle medesime ipotesi si ha

$$(8)\qquad \begin{gathered} T_{k-1} = X_{k-1}/D_0, \quad U_{k-1} = -X_{k-1}/D_0 H, \\ HU_k + T_k = -X_k H \frac{1}{D_0 H} + \frac{1}{D_0}(X_k - kD_1 T_{k-1}) = -k\frac{D_1 T_{k-1}}{D_0} = -k\frac{D_1}{D_0^2} X_{k-1}. \end{gathered}$$

Quindi

$$(9)\qquad \begin{aligned} \Delta_k &= -k\frac{X_{k-1}}{D_0^2} D_1 \boldsymbol{D} + k\frac{X_{k-1}}{D_0}\boldsymbol{D}' + k\frac{X_{k-1}}{D_0 H}\boldsymbol{a}_1 \\ &= -k\frac{X_{k-1}}{D_0^2 H}[D_1 H\boldsymbol{D} - D_0(H\boldsymbol{D}' + \boldsymbol{a}_1)] \end{aligned}$$

e sostituendo il valore di $\boldsymbol{D}'$ fornito dalla (3; 11) si ha

$$(10)\qquad \begin{aligned} \Delta_k &= -k\frac{X_{k-1}}{D_0^2 H}\left[D_1 H\boldsymbol{D} - D_0 H\frac{B'_{n-1}}{B_{n-1}}\boldsymbol{D} + D_0 H\frac{1}{H}\boldsymbol{a}_1 - D_0\boldsymbol{a}_1\right] \\ &= -k\frac{X_{k-1}}{D_0^2 H}\frac{1}{B_{n-1}}(B_{n-1}D_1 - B'_{n-1}D_0)\boldsymbol{D} = 0 \end{aligned}$$

essendo nuovamente nulla l'espressione fra parentesi, per via della forma che assume la (3; 12), moltiplicata scalarmente con il versore $\boldsymbol{v}$, quando $X_1 = 0$. Si giunge così ad un secondo

LEMMA: *Se*

$$X_0 = X_1 = X_2 = \ldots = X_{k-2} = 0, \quad X_{k-1} \neq 0 \qquad \textit{per } k > 2$$

allora è anche

$$\Delta_0 = \Delta_1 = \Delta_2 = \ldots = \Delta_k = 0.$$

Esaminiamo infine, sempre nelle medesime ipotesi, il vettore Δ_{k+1}; si ha

$$(11)\qquad \begin{aligned} \Delta_{k+1} = (HU_{k+1} + T_{k+1})\boldsymbol{D} + \tbinom{k+1}{1}(T_k\boldsymbol{D}' - U_k\boldsymbol{x}') + \\ + \tbinom{k+2}{2}(T_{k-1}\boldsymbol{D}'' - U_{k-1}\boldsymbol{x}'') \end{aligned}$$

e, sempre nelle ipotesi espresse dalle (1),

$$(12)\qquad \begin{gathered} T_k = (X_k - kD_1 T_{k-1})/D_0, \quad U_k = -X_k/D_0 H, \\ HU_{k+1} + T_{k+1} = -\frac{k+1}{D_0}\left(\frac{k}{2}D_2 T_{k-1} + D_1 T_k\right), \end{gathered}$$

per cui, utilizzando anche la (3; 11) e la (5; 10), risulta essere

$$
\begin{aligned}
\Delta_{k+1} = \frac{k+1}{D_0} \Big\{ (X_k - kD_1T_{k-1}) \frac{B'_{n-1}}{B_{n-1}} - \left[\frac{k}{2} D_2 T_{k-1} + \frac{D_1}{D_0} (X_k - D_1 T_{k-1}) \right] \\
(13) \qquad + \frac{k}{2} D_0 T_{k-1} \frac{B''_{n-1}}{B_{n-1}} \Big\} \boldsymbol{D} + \\
+ \binom{k+1}{2} \frac{T_{k-1}}{D_0} \left[2D_1 + \frac{1}{H} \left(\frac{H'}{H} - \frac{B'_{n-1}}{B_{n-1}} \right) \right] \boldsymbol{a}_1 \\
= \delta_{k+1} \boldsymbol{D} + \alpha_{k+1} \boldsymbol{a}_1 .
\end{aligned}
$$

Da questa espressione del vettore Δ_{k+1} risulta che la componente di questo secondo $\boldsymbol{D}$, δ_{k+1}, contiene un solo termine nel quale appaiono le derivate di ordine $n-1$ delle due ultime curvature della curva (X) nel punto X^0 e nessuno degli altri monomi che figurano in questo coefficiente racchiude derivate di ordine così elevato di queste curvature: questa componente non può quindi essere nulla e di conseguenza è

$$
(14) \qquad \Delta_{k+1} \neq 0.
$$

Si giunge dunque alla conclusione seguente: *la condizione necessaria e sufficiente perchè sia*

$$
\Delta_0 = \Delta_1 = \Delta_2 = \ldots = \Delta_k = 0, \quad \Delta_{k+1} \neq 0 \qquad \textit{per} \quad k > 2
$$

è che si abbia

$$
X_0 = X_1 = X_2 = \ldots = X_{k-2} = 0, \quad X_{k-1} \neq 0.
$$

Che questa condizione sia sufficiente, lo si è visto sopra: che sia necessaria segue ancora dalla (13), perchè per eliminare il monomio che contiene le derivate delle curvature, cioè per eliminare D_2 deve essere $T_{k-1} = 0$, cioè $X_{k-1} = 0$ ma in tal caso è pure nullo $\Delta_{k+1} = 0$: basterà esprimere questo risultato per k anzichè per $k+1$ per completare la dimostrazioue.

8. Il teorema ottenuto alla fine del n. precedente risolve completamente il problema che ci siamo proposti. Espresso in forma generale il risultato ottenuto è il seguente:

Le curve (r) e (c), segate dall'iperpiano π sulle rigate $\mathcal{R}$ e $\mathcal{C}$ hanno un contatto di ordine k se, e soltanto se,

$$
X_0 = X_1 = X_2 = \ldots = X_{k-2} = 0, \quad X_{k-1} \neq 0 \qquad \textit{per} \quad k > 2.
$$

Ora, questa condizione, tenuto conto della (1; 5), equivale a scrivere

(1) $$\bar{\omega}=0, \quad \boldsymbol{a}_1\cdot\boldsymbol{v}=\boldsymbol{a}_2\cdot\boldsymbol{v}=\ldots=\boldsymbol{a}_{k-2}\cdot\boldsymbol{v}=0,$$

poichè si suppone il punto X^0 generico e cioè tale che in esso non si annulli nessuna delle curvature di (X). La condizione (1) a sua volta significa che l'iperpiano π passa per X^0 e che il versore $\boldsymbol{v}$ ad esso ortogonale si mantiene perpendicolare ai versori $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_{k-2}$. Ciò significa che l'iperpiano contiene questi versori, cioè contiene lo spazio lineare da essi sotteso, spazio lineare che è osculatore alla curva (X) nel punto X^0. Si ha quindi il teorema:

Sia (Γ) *l'orlo di regresso della sviluppabile* $\mathfrak{R}$, *associata ad una generica curva sghemba* (X) *di* E_n, *e prescelto su* (Γ) *un punto* Γ^0, *sia* $\mathfrak{C}$ *il cono che proietta* (X) *da* Γ^0. *Sia altresì* X^0 *il punto di* (X) *che corrisponde al punto* Γ^0 *di* (Γ) *e che si suppone generico.*

Intersecando $\mathfrak{R}$ *e* $\mathfrak{C}$ *con un iperpiano qualsivoglia, non passante per* Γ^0, *si ottengono due curve* (r) *e* (c) *aventi un contatto di ordine uno nel punto* P^0, *traccia di* Γ^0X^0 *su questo iperpiano.*

Se l'iperpiano passa per lo spazio lineare di dimensione j, *osculatore alla curva* (X) *in* X^0, *le curve* (r) *e* (c) *da esso segate hanno invece un contatto di ordine* $j+2$ *in* X^0.

Vi sono dunque ∞^n iperpiani che intersecano la coppia di rigate $\mathfrak{R}$ e $\mathfrak{C}$ in due curve con contatto semplice, ∞^{n-1} iperpiani che intersecano queste superficie in una coppia di curve con contatto di ordine due, ..., ∞^{n-j} iperpiani che intersecano queste superficie in una coppia di curve con contatto di ordine $j+1, \ldots$

Evidentemente, non si può andare oltre la condizione

(2) $$\bar{\omega}=0, \quad \boldsymbol{a}_1\cdot\boldsymbol{v}=\boldsymbol{a}_2\cdot\boldsymbol{v}=\ldots=\boldsymbol{a}_{n-1}\cdot\boldsymbol{v}=0$$

perchè allora il versore $\boldsymbol{v}$ risulta completamente determinato ed uguale ad $\boldsymbol{a}_n$: l'iperpiano π si riduce quindi all'iperpiano osculatore alla curva (X) in X^0 e dunque *solo l'iperpiano osculatore ad* (X) *in* X^0 *interseca le superficie* $\mathfrak{R}$ *e* $\mathfrak{C}$ *secondo una coppia di curve* (r) *e* (c) *aventi un contatto di ordine* $n+1$.

Aggiungiamo infine che la tangente comune alle due curve (r) e (c), che nei casi di un contatto di ordine *uno* o *due* è l'intersezione del piano tangente di raccordo delle due superficie con l'iperpiano π, a partire del contatto di ordine *tre* si riduce alla tangente alla (X) nel punto X^0.

9. Si possono completare i risultati precedenti aggiungendo un'osservazione sul contatto che le curve (r) e (c) hanno con la (X).

Difatti, la condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza di un contatto di ordine h fra le curve (r) e (c) s'è visto essere

(1) $$X_0 = X_1 = X_2 = \ldots = X_{h-2} = 0, \quad X_{h-1} \neq 0 \qquad (\text{per } h > 2)$$

ed il lemma del n. 7 afferma che in tal caso si ha parimenti

(2) $$T_0 = T_1 = T_2 = \ldots = T_{h-2} = 0, \quad T_{h-1} \neq 0 \qquad (\text{per } h > 2),$$

(3) $$U_0 = U_1 = U_2 = \ldots = U_{h-2} = 0, \quad U_{h-1} \neq 0 \qquad (\text{per } h > 2),$$

per cui dalle (4; 25) e (4; 26) segue che

(4) $$\boldsymbol{r}(s) - \boldsymbol{x}(s) = \sum_{i=h-1}^{\infty} \frac{s^i}{i!} T_i \boldsymbol{D}(s)$$

(5) $$\boldsymbol{c}(s) - \boldsymbol{x}(s) = \sum_{j=h-1}^{\infty} \frac{s^j}{j!} U_j [\boldsymbol{x}(s) - \gamma].$$

Si ha dunque che *se le curve (r) e (c) hanno un contatto di ordine h, ciascuna di esse a sua volta ha un contatto di ordine $h-2$ con la curva (X).*

10. Nel caso di una curva generica (X) in E_3, la sviluppabile $\mathfrak{R}$ di equazione

(1) $$\boldsymbol{r}(s, t) = \boldsymbol{x}(s) + t\boldsymbol{D}(s)$$

si riduce alla *sviluppabile rettificante* della curva (X), avendosi, per la (3; 3)

(2) $$\boldsymbol{D}(s) = A_2 C_2 \boldsymbol{a}_1 - C_1 \boldsymbol{a}_3 = \rho_2 \boldsymbol{a}_1 + \rho_1 \boldsymbol{a}_3 .$$

I risultati generali ottenuti al n. 8 si raccolgono quindi nel teorema seguente:

Sia (Γ) l'orlo di regresso della sviluppabile rettificante $\mathfrak{R}$ di una qualsiasi curva sghemba (X) da Γ^0. Sia altresì X^0 il punto di (X) che corrisponde al punto Γ^0 di (Γ), e che si suppone generico. Allora

I. *Intersecando $\mathfrak{R}$ e $\mathfrak{C}$ con un piano π qualsivoglia, non passante per Γ^0 si ottengono due curve (r) e (c) aventi un contatto di ordine* uno *nel punto P^0, traccia di $\Gamma^0 X^0$ su π.*

II. *Se il piano π passa per X^0 le curve (r) e (c) da esso segate hanno in X^0 un contatto di ordine* due.

III. *Se il piano π, oltre che passare per X^0, è inoltre uno dei piani tangenti ad (X) in quel punto, le curve (r) e (c) da esso segate hanno ivi un contatto di ordine* tre.

IV. *Infine se il piano π coincide col piano osculatore di (X) in X^0, le curve (r) e (c) da esso segate hanno in X^0 un contatto di ordine* quattro.

Il teorema enunciato alla fine del n. 9 trova ora applicazione solo per $h=3$ ed $h=4$. Se $h=3$, il contatto fra (X) e le curve (r) e (c) è di ordine *uno*, e conviene calcolare gli invarianti di contatto. Sempre dalle (4; 25) e (4; 26) segue che

$$
\begin{aligned}
&\frac{d\boldsymbol{r}(s)}{ds}=\boldsymbol{a}_1(s)+\sum_{i=1}^{\infty}\frac{s^{i-1}}{(i-1)!}T_i\boldsymbol{D}(s)+\sum_{i=0}^{\infty}\frac{s^i}{i!}T_i\boldsymbol{D}'(s),\\
&\frac{d^2\boldsymbol{r}(s)}{ds^2}=\rho_1(s)\boldsymbol{a}_2(s)+\sum_{i=2}^{\infty}\frac{s^{i-2}}{(i-2)!}T_i\boldsymbol{D}(s)+2\sum_{i=1}^{\infty}\frac{s^{i-1}}{(i-1)!}T_i\boldsymbol{D}'(s)+\sum_{=1}^{\infty}\frac{s^i}{i!}T_i\boldsymbol{D}''(s)\\
(3)\quad&\\
&\frac{d\boldsymbol{c}(s)}{ds}=\boldsymbol{a}_1(s)+\sum_{j=1}^{\infty}\frac{s^{j-1}}{(j-1)!}U_j[\boldsymbol{x}(s)-\gamma]+\sum_{j=0}^{\infty}\frac{s^j}{j!}U_j\boldsymbol{a}_1(s),\\
&\frac{d^2\boldsymbol{c}(s)}{ds^2}=\rho_1(s)\boldsymbol{a}_2(s)\Big(1+\sum_{j=0}^{\infty}\frac{s^j}{j!}U_j\Big)+2\sum_{j=1}^{\infty}\frac{s^{j-1}}{(j-1)!}U_j\boldsymbol{a}_1(s)+\sum_{j=2}^{\infty}\frac{s^{j-2}}{(j-2)!}U_j[\boldsymbol{x}(s)-\gamma]
\end{aligned}
$$

e quindi, per $s=0$ si ha

$$
\begin{aligned}
&\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}=\boldsymbol{a}_1+T_1\boldsymbol{D}+T_0\boldsymbol{D}'\\
&\qquad=(1+T_1\rho_2+T_0\rho'_2)\boldsymbol{a}_1+(T_1\rho_1+T_0\rho'_1)\boldsymbol{a}_3,\\
&\frac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2}=\rho_1\boldsymbol{a}_2+T_2\boldsymbol{D}+2T_1\boldsymbol{D}'+T_0\boldsymbol{D}''\\
&\qquad=(T_2\rho_2+2T_1\rho'_2+T_0\rho''_2)\boldsymbol{a}_1+[\rho_1+T_0(\rho'_2\rho_1-\rho'_1\rho_2)]\boldsymbol{a}_2+\\
&\qquad\qquad+(T_2\rho_1+2T_1\rho'_1+T_0\rho''_1)\boldsymbol{a}_3,\\
(4)\quad&\\
&\frac{d\boldsymbol{c}}{ds}=(1+U_0)\boldsymbol{a}_1-U_1\gamma\\
&\qquad=(1+U_0-U_1H\rho_2)\boldsymbol{a}_1-U_1H\rho_1\boldsymbol{a}_3,\\
&\frac{d^2\boldsymbol{c}}{ds^2}=\rho_1(1+U_0)\boldsymbol{a}_2+2U_1\boldsymbol{a}_1-U_2\gamma\\
&\qquad=(2U_1-U_2H\rho_2)\boldsymbol{a}_1+\rho_1(1+U_0)\boldsymbol{a}_2-U_2H\rho_2\boldsymbol{a}_3.
\end{aligned}
$$

Siccome poi nel caso preso in considerazione si ha

$$
(5)\qquad \begin{aligned} &X_0 = X_1 = 0, \quad T_0 = T_1 = 0, \quad U_0 = U_1 = 0, \\ &X_2 = -\rho_1 \boldsymbol{a}_2 \cdot \boldsymbol{v}, \quad T_2 = -\boldsymbol{a}_2 \cdot \boldsymbol{v}/\boldsymbol{a}_3 \cdot \boldsymbol{v}, \quad U_2 = \boldsymbol{a}_2 \cdot \boldsymbol{v}/H(\boldsymbol{a}_3 \cdot \boldsymbol{v}), \end{aligned}
$$

le flessioni di (r) e (c) in X^0 saranno rispettivamente

$$
(6)\qquad \begin{aligned} \rho_{1,r}^2 &= \frac{\begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 \\ 1 & 0 & 0 \\ T_2\rho_2 & \rho_1 & T_2\rho_1 \end{vmatrix}^2}{1} = (1 + T_2^2)\rho_1^2, \\ \rho_{1,c}^2 &= \frac{\begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 \\ 1 & 0 & 0 \\ -U_2H\rho_2 & \rho_1 & -U_2H\rho_1 \end{vmatrix}^2}{1} = (1 + U_2^2H^2)\rho_1^2. \end{aligned}
$$

Gli invarianti di contatto di (X) con (r) e con (c) siano allora $\mathfrak{J}_r$ ed $\mathfrak{J}_c$: si ha

$$
(7)\qquad \mathfrak{J}_r = \frac{\rho_1}{\rho_{1,r}} = \frac{1}{\sqrt{1 + T_2^2}}; \quad \mathfrak{J}_c = \frac{\rho_1}{\rho_{1,c}} = \frac{1}{\sqrt{1 + U^2H^2}}
$$

e ponendo

$$
(8)\qquad \boldsymbol{v} = \boldsymbol{a}_3 \cos\theta - \boldsymbol{a}_2 \operatorname{sen}\theta
$$

troviamo infine

$$
(9)\qquad \mathfrak{J}_r = \cos\theta, \quad \mathfrak{J}_c = \cos\theta.
$$

Si giunge dunque alla conclusione seguente: *date la sviluppabile rettificante $\mathfrak{R}$ di una generica curva (X) ed il cono $\mathfrak{C}$ che proietta (X) da un punto prescelto sull'orlo di regresso di questa sviluppabile, sia X^0 il punto di (X) attraverso il quale passa la generatrice di raccordo di queste due superficie. Un piano tangente alla curva (X) in X^0 sega queste superficie $\mathfrak{R}$ e $\mathfrak{C}$ secondo due curve (r) e (c) che hanno in X^0 un contatto di ordine uno con la curva (X) ed un invariante di contatto uguale a* $\cos\theta$, *ove* θ *è l'angolo che il piano tangente segante fa col piano osculatore alla curva in X_0.*

Per $h = 4$ si ha invece un altro teorema, ugualmente espressivo, che si può così enunciare: *la sviluppabile rettificante di una generica curva* (X) *è segata da un qualsiasi piano osculatore di* (X) *secondo una curva che nel punto di osculazione ha un contatto di ordine* due *con la* (X) *medesima.*

BIBLIOGRAFIA

[1] ENRICO BOMPIANI, *Sulle curve sghembe,* in "Scritti matematici offerti a Luigi Berzolari", Pavia, pp. 515-552 (1936).

[2] GIACOMO SABAN, *Sulle curve sghembe in uno* S_n, "Rend. di Matematica e delle sue applicazioni", 5, IX, Roma, pp. 309-321 (1950).

[3] A. R. FORSYTH, *Geometry of Four Dimensions,* Vol. I, Cambridge, pp. 328-351 (1930).