Una proprietà della rigata cubica di Cayley e sua generalizzazione.

Memoria di ALESSANDRO TERRACINI (a Torino)

A Enrico Bompiani in occasione del suo Giubileo scientifico.

Sunto. - *In S_3, le cubiche sghembe che sono asintotiche di una data rigata cubica di* CAYLEY *hanno tutte in comune, nel punto cuspidale di questa, l'elemento curvilineo composto $E_{2,1}$. Per una coppia qualunque di esse, i loro $E_{2,2}$ danno costantemente luogo al valore 1/3 per il loro invariante proiettivo γ. La proprietà viene convenientemente estesa agli iperspazi.*

1. In una mia ricerca in corso ho trovato la seguente proprietà delle asintotiche curve di una rigata cubica di CAYLEY, la quale peraltro risulterà stabilita anche dai risultati della presente Nota, applicati al caso particolare $n = 2$. Come è notissimo, chiamando O il punto cuspidale, o la retta doppia e ω il piano singolare di una R^3 di CAYLEY, le asintotiche curve di questa sono cubiche sghembe passanti per O, e aventi ivi come retta tangente la o e come piano osculatore il piano ω. Ebbene, la proprietà alla quale ho alluso consiste in ciò, che tutte le cubiche sghembe asintotiche della R^3 hanno comune l'elemento curvilineo composto $E_{2,1}$ (1) di supporto $Oo\omega$, e che gli $E_{2,2}$ di due cubiche sghembe asintotiche tra loro distinte hanno il loro invariante γ costantemente eguale ad 1/3.

Nella presente Nota questi risultati vengono opportunamente estesi (v. gli enunciati nel n. 4) al caso segnalato da P. BUZANO vari anni fa (2), nel quale — passando da S_3 ad uno spazio S_{n+1} ($n \geq 2$) — si considera una certa superficie rigata R^{n+1} che a più di un titolo può considerarsi come una generalizzazione della rigata cubica di CAYLEY. BUZANO, l. c. (2) *a*), è giunto alla R^{n+1} in questione, considerando le generatrici di una R^3 di CAYLEY ottenute a partire da una cubica sghemba come rette passanti per i singoli punti di questa, contenute nei rispettivi piani osculatori e appoggiate ad una tangente

(1) La nozione di elemento curvilineo composto, al pari delle altre ad essa relative che qua occorrono, sarà richiamata tra poco, nel n. 2.

(2) P. BUZANO, a) *Un'estensione iperspaziale della rigata cubica di Cayley*, « Boll. Unione matematica italiana », 1937, pp. 173-177; b) *Rigate di ordine n dello spazio a n dimensioni aventi ∞^n omografie in sè*, « Rend. Lincei », (6) XXVI, 1937, pp. 61-65.

fissa della medesima cubica. In S_{n+1}, partendo da una c^{n+1} razionale normale, BUZANO considera per ogni punto di questa una retta giacente nel relativo iperpiano osculatore e appoggiata ad una retta tangente fissa o della medesima c^{n+1} (retta tangente fissa, il cui punto di contatto si designerà nel seguito con O). Il luogo di tale retta è appunto la R^{n+1} in questione (la quale possiede la retta tangente fissa o come doppia). Inoltre, secondo quanto BUZANO ha dimostrato in l. c. (2) b), la R^{n+1} è — all'infuori dei còni — l'unica rigata di ordine $n+1$ dello S_{n+1} che ammette ∞^{n+1} omografie in sè. È poi essenziale ricordare per il seguito che — come BUZANO ha mostrato in l. c. (2) a) — la R^{n+1} in questione possiede come quasi asintotiche $\gamma_{1,n}$ ∞^{n-1} c^{n+1} razionali normali (che per $n=2$ si riducono alle asintotiche curve della R^3 di CAYLEY), passanti tutte per il punto O, ivi tangenti alla retta o, e aventi inoltre in comune tutti i successivi spazi osculatori nel punto O (una di tali c^{n+1} è appunto quella dalla quale si è ottenuta la R^{n+1} mediante la costruzione dianzi ricordata). Precisamente, assunte coordinate omogenee di punto $x_0, x_1, \ldots, x_{n+1}$, con un simplesso di riferimento $A^0A^1\ldots A^nA^{n+1}$, dove $A^{n+1}\equiv O$, $A^{n+1}A^0\equiv o$, e con ulteriori particolarità atte a dare alle equazioni parametriche della c^{n+1} considerata la forma

$$x_0 : x_1 : \ldots : x_n : x_{n+1} = t : t^2 : \ldots : t^{n+1} : 1,$$

si può supporre (3) che le equazioni parametriche delle c^{n+1} quasi asintotiche (indicando con t il parametro), siano

$$\left\{\begin{aligned} \rho x_0 &= t+t^3\Theta \\ \rho x_i &= t^{i+1} \qquad (1\leq i\leq n) \\ \rho x_{n+1} &= 1+(n+1)t^2\Theta, \end{aligned}\right. \tag{1.1}$$

dove abbiamo posto

$$\Theta = k_0 + k_1t + k_2t^2 + \ldots + k_{n-3}t^{n-3} + k_{n-2}t^{n-2}, \tag{1.2}$$

essendo le $k_0, k_1, \ldots, k_{n-3}, k_{n-2}$ costanti arbitrarie.

---

(3) Ciò a norma di BUZANO, l. c. (2) a) a meno di varianti affatto inessenziali nelle notazioni. — Sebbene non ci interessino nel seguito, richiamiamo anche che, rispetto a opportuni parametri u, v, le equazioni parametriche della R^{n+1} risultano allora:

$$\rho x_0 = u^n + v,\ \rho x_i = u^{n-i}\ (1\leq i\leq n),\ \rho x_{n+1} = u^{n+1} + (n+1)uv.$$

2. Riassumiamo molto brevemente nel presente n., nei limiti in cui ciò interessa per il presente lavoro, la nozione di elemento curvilineo composto (4) e le nozioni che vi si collegano.

In S_{n+1}, quale si è considerato nel n. 1, detto m un intero positivo o nullo, chiamando ω_q lo spazio $A^{n+1}A^0A^1A^2 \dots A^{q-1} (1 \leq q \leq n)$. con $A^{n+1} \equiv O$, $\omega_1 \equiv o \equiv A^{n+1}A^0$, un *elemento curvilineo composto* $E_{2,m}$ *di supporto* $Oo\omega_2\omega_3 \dots \omega_n$ è definito dalle

$$(2.1) \qquad \frac{x_i}{x_{n+1}} = \sum_{k=0}^{m} a_{i,i+k} x^{i+k+1} + [i+m+2] \qquad (1 \leq i \leq n;\ a_{ii} \neq 0),$$

essendo

$$(2.2) \qquad x = \frac{x_0}{x_{n+1}}.$$

Come risulta da l. c. (4) *a*), la nozione così definita ha significato geometrico.

Considerando poi due elementi curvilinei composti $E_{2,m+1}$ contenenti il medesimo $E_{2,m}$, se per essi si chiamano rispettivamente $a_{i,i+m+1}$, $a'_{i,i+m+1}$ $(1 \leq i \leq n)$ i due primi coefficienti sottintesi nelle (2.1), ciascuna delle espressioni

$$(2.3) \qquad \gamma_{ij} = \frac{a_{i,i+m+1} - a'_{i,i+m+1}}{a_{ii}} : \frac{a_{j,j+m+1} - a'_{j,j+m+1}}{a_{jj}}$$

$$(1 \leq i \leq n,\ 1 \leq j \leq n,\ i \neq j)$$

è un invariante proiettivo della coppia di $E_{2,m+1}$ considerata (5).

Per evitare la considerazione di invarianti non essenzialmente distinti, basta limitarsi agli invarianti γ_{ij} con $i < j$. Per $n = 2$, cioè nello spazio ordinario, si ha così il solo invariante γ_{12}, che, omettendo gli indici, si può indicare con γ.

---

(4) A. TERRACINI, a) *Sugli elementi curvilinei composti*, « Atti dell'Acc. delle Scienze di Torino », Vol. 88, 1953-54, pp. 7-15. V. anche A. TERRACINI, b) *Sulle coppie di rami con la stessa origine e gli stessi spazi osculatori*, « Rend. del Seminario Matem. Univ. e Polit. di Torino », Vol. 12, 1953, pp. 265-281; c) *Relazioni tra invarianti proiettivi duali di coppie di elementi curvilinei*, « Boll. Un. Matem. Italiana », (3), 8, 1953, pp 368-374; d) *Su alcuni sistemi di elementi curvilinei*, ibid., (3), 13, 1958. pp. 395-405; e) *Su certi sistemi* ∞^7 *di linee spaziali*, ibid. (3), 13, 1958, pp. 564-573; f) *Sugli invarianti proiettivi di una coppia di elementi curvilinei composti*, ibid. (3), 15, 1960, pp. 390-401. - In una ricerca non ancora pubblicata, BOMPIANI considera degli enti geometrici che si possono riguardare come una generalizzazione degli elementi curvilinei composti.

(5) Un significato geometrico di questi invarianti è assegnato in l. c. (4) b).

3. Ciò premesso, passiamo a dimostrare intanto il seguente:

TEOREMA. - *Nella rappresentazione* (2.1) *dell'elemento composto* $E_{2,m}$ *uscente da* $O = A^{n+1}$ *della linea* (1.1) *si ha:*

$$\left.\begin{array}{ll}(3.1) & a_{ii} = 1 \\ (3.2) & a_{i,\,i+1} = 0 \\ (3.3) & a_{i,\,i+2} = (ni-1)k_0\end{array}\right\} \quad (1 \leq i \leq n).$$

Inoltre, per $m \geq 3$, *si ha:*

$$(3.4) \qquad a_{i,\,i+m} = (ni-1)k_{m-2} + \varphi_{im}(k_0, k_1, \dots, k_{m-3}) \qquad (1 \leq i \leq n,\ 3 \leq m \leq n),$$

dove φ_{im} *indica un polinomio in* $k_0, k_1, \dots, k_{m-}$.

Verifichiamo anzitutto le (3.1), (3.2), (3.3).

In base alla posizione (2.2) le (1.1) forniscono ora

$$(3.5) \qquad x = \frac{t(1 + t^2\Theta)}{1 + (n+1)t^2\Theta}$$

da cui

$$(3.6) \qquad x = t - nk_0t^3 + \{4\},$$

dove $\{4\}$ indica una serie di potenze in t, che comincia con un termine in t^4 (e un'analoga convenzione si adotta nel seguito).

La (3.6) si inverte nella

$$(3.7) \qquad t = x + nk_0x^3 + [4].$$

D'altro lato, le (1.1) dànno

$$\frac{x_i}{x_{n+1}} = t^{i+1} - (n+1)k_0t^{i+3} + \{i+4\} \qquad 1 \leq i \leq n)$$

cioè, sostituendo t a norma della (3.7),

$$(3.8) \qquad \frac{x_i}{x_{n+1}} = x^{i+1} + (ni-1)k_0x^{i+3} + [i+4] \qquad (1 \leq i \leq n).$$

La (3.8) prova senz'altro le (3.1), (3.2), (3.3).

Per dimostrare la (3.4), occorre portare più avanti i calcoli che ci hanno condotto alle (3.6), (3.7), (3.8). A tale scopo osserviamo quanto segue.

a) Si riconosce subito che, posto

$$\frac{1}{1+(n+1)t^2\Theta}=1+\sum_{m=2}^{n}\lambda_m t^m+\{n+1\}, \tag{3.9}$$

il primo coefficiente del secondo membro che dipende da k_{m-2} è λ_m, e si ha

$$\lambda_m=-(n+1)k_{m-2}+\omega_m, \qquad (2\leq m\leq n) \tag{3.10}$$

dove $\omega_2=0$, mentre, per $m\geq 3$, ω_m è un polinomio in $k_0, k_1, \ldots, k_{m-3}$.

b) A norma della (3.5), ne segue che, posto

$$x=t+\sum_{l=2}^{n}\tau_{l+1}t^{l+1}+\{n+2\}, \tag{3.11}$$

il primo coefficiente del secondo membro che dipende da k_{m-2} è τ_{m+1} e si ha

$$\tau_{m+1}=-nk_{m-2}+\psi_{m+1} \qquad (2\leq m\leq n) \tag{3.12}$$

dove $\psi_3=0$, mentre, per $m\geq 3$, ψ_{m+1} è un polinomio in $k_0, k_1, \ldots, k_{m-3}$.

c) Invertendo la (3.11), poniamo

$$t=x+\sum_{p=2}^{n}\rho_{p+1}x^{p+1}+[n+2]. \tag{3.13}$$

Dico che si ha

$$\rho_{p+1}=nk_{p-2}+\psi_{p+1}, \tag{3.14}$$

dove $\psi_3=0$, mentre, per $p\geq 3$, ψ_{p+1} è un polinomio in $k_0, k_1, \ldots, k_{p-3}$. Invero sostituendo nel secondo membro della (3.13) x a norma della (3.11), si ha un'identità in t, dalla quale si ricava

$$\rho_{p+1}=-\tau_{p+1}-\sum_{q=2}^{p-2}\rho_{q+1}b_{p+1}^{(q+1)} \qquad (2\leq p\leq n) \tag{3.15}$$

dove le $b_{p+1}^{(q+1)}$ risultano definite dalla

$$\left(t+\sum_{l=2}^{n}\tau_{l+1}t^{l+1}\right)^{q+1}=t^{q+1}+\sum_{s=q+3}^{n+1}b_s{}^{(q+1)}t^s+\{n+2\} \qquad (2\leq q\leq n).$$

Ora, ragionando per ricorrenza rispetto a p, la (3.14) dice che il fattore ρ_{q+1} che nella (3.15) compare sotto il segno di sommatoria è un polinomio nelle k con indici che non raggiungono $p-2$. Altrettanto vale ovviamente del secondo fattore: sostituendo τ_{p+1} secondo la (3.12), la (3.14) risulta dimostrata.

d) Posto

$$\left(x + \sum_{p=2}^{n} \rho_{p+1} x^{p+1}\right)^h = x^h + \sum_{\alpha=h+2}^{h+n} c_\alpha^{(h)} x^\alpha + [h+n+1] \qquad (2 \leq h \leq n+1) \tag{3.16}$$

si ha

$$c_\alpha^{(h)} = hnk_{\alpha-h-2} + \pi_\alpha \qquad (2 \leq h \leq n+1,\ h+2 \leq \alpha \leq h+n), \tag{3.17}$$

dove $\pi_{h+2} = 0$, mentre, per $\alpha > h+2$, π_α è un polinomio in $k_0, k_1, \dots, k_{\alpha-h+3}$. Invero nello sviluppo del primo membro della (3.16) tra i termini in x^α vi è $h\rho_{\alpha-h+1}x^\alpha$, e gli altri termini in x^α non involgono nessuna ρ con indice $> \alpha - h$. Applicando la (3.14) se ne deduce la (3.17).

e) Posto ancora

$$\frac{1}{1+(n+1)t^2\Theta} = 1 + \sum_{r=2}^{n} \mu_r x^r + [n+1], \tag{3.18}$$

si ha

$$\mu_m = -(n+1)k_{m-2} + Q_m \qquad (2 \leq m \leq n) \tag{3.19}$$

dove $Q_2 = 0$, mentre, per $m \geq 3$, Q_m è un polinomio in $k_0, k_1, \dots, k_{m-3}$. Esprimiamo infatti il primo membro della (3.18) mediante la (3.9), sostituendo poi in questa la t secondo la (3.13), e quindi le potenze di t secondo la (3.16). Si ricava così [6]

$$\mu_m = \sum_{s=2}^{m} \lambda_s c_m^{(s)} \qquad (2 \leq m \leq n).$$

---

[6] Nella sommatoria abbiamo limitato superiormente h mediante m perchè le potenze

$$\left(x + \sum_{p=2}^{n} \rho_{p+1} x^{p+1}\right)^h$$

con esponente $h > m$ non contengono ovviamente termini in x^m. Inoltre, come è ovvio, nell'ultima eguaglianza scritta $c_m^{(m-1)}$, $c_m^{(m)}$ devono essere sostituiti rispettivamente con 0 e con 1.

Basta allora esplicitare nel secondo membro le λ_s secondo la (3.10) e le $c_m^{(s)}$ secondo la (3.17) per concludere la (3.19).

f) Giungiamo finalmente alla verifica della (3.4), in quanto $a_{i,\,i+m}$ è il coefficiente di x^{i+m+1} nello sviluppo di

$$\frac{t^{i+1}}{1+(n+1)t^i\Theta}=\left(x+\sum_{p=2}^{n}\rho_{p+1}x^{p+1}\right)^{i+1}\left(1+\sum_{r=2}^{n}\mu_r x^r\right)+[i+n+1],$$

cioè, assunto $h=i+1$, nello sviluppo di

$$\left(x^h+\sum_{\alpha=h+2}^{h+n}c_\alpha^{(h)}x^\alpha\right)\left(1+\sum_{r=2}^{n}\mu_r x^r\right).$$

Ne segue, applicando *d*) ed *e*),

$$a_{i,\,i+m}=\mu_m+c^{(h)}{}_{h+m}+A_{i,\,i+m},$$

da cui

$$a_{i,\,i+m}=-(n+1)k_{m-2}+hnk_{m-2}+B_{i,\,i+m},$$

avendo designato sia con $A_{i,\,i+m}$, sia con $B_{i,\,i+m}$ dei polinomi in $k_0, k_1, \ldots, k_{m-3}$, oppure zero.

La (3.4) è così dimostrata.

4. Le (3.1), (3.2), dicono intanto che *le* $\infty^{n-1}c^{n+1}$ *quasi asintotiche della* R^{n+1} *hanno tutte in comune l'elemento lineare composto* $E_{2,1}$ *uscente dal punto* O. Ma esse non hanno più in comune l'elemento $E_{2,2}$ uscente dallo stesso punto, come appare dalla (3.3): anzi, secondo questa, vi è una corrispondenza biunivoca tra gli $E_{2,2}$ delle quasi asintotiche uscenti dal punto O ed i valori di k_0. Più generalmente, applicando anche le (3.4), risulta che, *per* $2\leq m\leq n$ *vi è corrispondenza biunivoca tra gli* $E_{2,m}$ *delle quasi asintotiche uscenti dal punto* O *ed i sistemi di valori di* $k_0, k_1, \ldots, k_{m-2}$.

È anche chiaro che, *assunto comunque* m *con* $2\leq m\leq n-1$ [7], *per l'*$E_{2,m}$ *uscente da* O *di una quasi asintotica della* R^{n+1} *passano* ∞^{n-m} *quasi asintotiche di questa.*

Consideriamo ora due quasi asintotiche della R^{n+1} aventi in comune l'elemento $E_{2,m-1}$ uscente da O [8], ma $E_{2,m}$ distinti ($2\leq m\leq n$). Secondo

---

[7] Invece l'$E_{2,n}$, ancora uscente da O, di una quasi asintotica non appartiene ad altre quasi asintotiche, come emerge da quanto si è detto più sopra.

[8] Occorre appena avvertire che per $m=2$ questa condizione è sempre soddisfatta, come si è rilevato esplicitamente più sopra.

quanto si è già rilevato, disposti i parametri k nell'ordine degli indici crescenti, i primi $m-2$ tra essi sono gli stessi per le due curve, mentre il successivo (k_{m-2}, rispettivamente k'_{m-2}) assume per esse valori diversi. L'invariante γ_{ij} relativo ai due $E_{2,m}$ uscenti da O delle due quasi asintotiche considerate, calcolato in base alle (2.3), (3.[illegible]) si riduce a

$$(4.1)\qquad \gamma_{ij} = \frac{ni-1}{nj-1} \qquad (1 \leq i \leq n,\ 1 \leq j \leq n,\ i \neq j).$$

Perciò, *assunto comunque m con $2 \leq m \leq n$, ciascuno degli invarianti γ_{ij} $(1 \leq i \leq n,\ 1 \leq j \leq n;\ i \neq j)$ di due $E_{2,m}$ uscenti da O, tra loro distinti, di due quasi asintotiche della R^{n+1} contenenti uno stesso $E_{2,m-1}$ ha un valore fisso, dipendente unicamente dagli interi n, i, j, quale è espresso dalla* (4.1).

P. e. per $n=2$, $i=1$, $j=2$, si ha $\gamma = 1/3$, come si è enunciato al principio del n. 1.

5. Per quanto riguarda il caso $n=2$, cioè nello spazio ordinario, il risultato raggiunto si può invertire nella forma seguente (mentre in un iperspazio qualunque non vi è luogo ad una inversione strettamente analoga).

Nello spazio S_3, fissati una cubica sghemba, un suo punto O (con retta tangente o), un suo ulteriore punto P, ed una retta r per P, situata nel piano osculatore in questo ed incidente alla retta o, una cubica sghemba variabile, avente in comune con quella fissa l'elemento composto $E_{2,1}$ uscente da O, e tale che l'invariante γ degli $E_{2,2}$ uscenti da O della cubica variabile e di quella fissa valga $1/3$, con la condizione ulteriore che la cubica variabile sia incidente alla retta r (9) *ha come luogo una rigata cubica di Cayley (della quale le cubiche variabili e quella fissa costituiscono le asintotiche curve).*

Accenniamo brevemente il modo di dimostrarlo, che si riduce ad una verifica materiale senza alcuna difficoltà. Chiamando p la retta tangente in P, e rispettivamente ω, π i piani osculatori in O, P alla cubica fissa, si assumano i vertici del tetraedro di riferimento ponendo $A^3 \equiv O$, $A^2 \equiv P$, $A^1 \equiv \omega p$, $A^0 \equiv o\pi$, mentre la retta r è la A^2A^0. Posto

$$x = \frac{x_0}{x_3}, \quad y = \frac{x_1}{x_3}, \quad z = \frac{x_2}{x_3},$$

(9) Questa condizione ulteriore, che evidentemente è nello spirito del teorema che si vuole ottenere, serve anche a ridurre a ∞^1 le cubiche sghembe che si considerano.

disponiamo del punto unità in modo che la cubica fissa abbia p. e. equazioni

$$y = -\frac{2}{9}x^2, \quad z = \frac{2}{27}x^3. \tag{5.1}$$

Le equazioni parametriche della più generale cubica sghemba appoggiata alla retta r, e avente in comune con la cubica fissa l'elemento composto $E_{2,1}$ uscente da O (disponendo del parametro t in modo che esso si annulli in O e sia infinito nel punto comune alla cubica considerata ed alla retta r), si possono supporre

$$x = \frac{t + \alpha t^3}{1 + \delta t^2}, \quad y = -\frac{2}{9}\frac{t^2}{1 + \delta t^2}, \quad z = \frac{2}{27}\frac{t^3}{1 + \delta t^2} \tag{5.2}$$

essendo α, δ costanti arbitrarie. Quindi per essa

$$\begin{cases} y = -\frac{2}{9}x^2 - \frac{2}{9}(\delta - 2\alpha)x^4 + [5], \\ z = \frac{2}{27}x^3 + \frac{2}{27}(2\delta - 3\alpha)x^5 + [6]. \end{cases} \tag{5.3}$$

L'invariante γ degli $E_{2,2}$ uscenti da O delle cubiche (5.1), (5.2) è perciò

$$\gamma = \frac{\delta - 2\alpha}{2\delta - 3\alpha}.$$

Imponendo, secondo l'enunciato, che sia $\gamma = 1/3$, si può dunque porre $\delta = 3\alpha$, con α arbitrario. Sostituendo questo valore nelle (5.2), ed eliminando tra queste i due parametri t, α, si ha subito come equazione del luogo della cubica (5.2) la

$$-x_1^3 + x_0x_1x_2 + x_2^2x_3 = 0,$$

che è appunto l'equazione di una rigata cubica di CAYLEY. Si riscontra anche che le sue asintotiche curve sono appunto le cubiche sghembe variabili considerate (e quella fissa). Il Teorema è così completamente dimostrato.