La decomposizione tattica di un piano grafico finito associata a un k-arco.

Memoria di LUCIO LOMBARDO-RADICE (a Roma)

A Enrico Bompiani in occasione del suo Giubileo scientifico.

Résumé. - *On appelle, avec* DEMBOWSKI, *décomposition tactique (d. t.) d'un plan projectif fini π une décomposition de π en classes (disjointes) de droites et de points telle que le nombre des points d'une classe donnée appartenants à une droite d'une classe donnée est toujours le même, et dualmen (n. 1). On pervient à une d. t. de π associée à un k-arco (dans le sens de* B. SEGRE*) de π avec un procédé récoursif (n. 2). On applique le procédé du n. 2 à un particulier 6-arc arguésien du plan $S_{2,7}$, qui est complet, mais qui n'est pas une conique. La construction s'appuie sur une d. t. auxiliaire définie par voie arithmétique (n. 3).*

1. Le "decomposizioni tattiche„ secondo DEMBOWSKI [2].

Sia dato un piano finito, π (arguesiano o non); sia G un gruppo di collineazioni di π [1]; siano r e p due classi (sistemi) di transitività di G, costituite, la prima da i rette $r_1, \dots, r_i$, la seconda da j punti $p_1, \dots, p_j$. Sulla retta r_h della classe r giacciano t punti, $p_{k_1}, \dots, p_{k_t}$, della classe p; poichè, per ipotesi, esiste (almeno) una collineazione g_{kh} di G tale che $g_{kh}(r_k)=r_h$, e poichè la g_{kh} opera una sostituzione sui punti p_n, alla r_h apparterranno esattamente i t punti: $g_{kh}(p_{k_1}), \dots, g_{kh}(p_{k_t})$ della classe p. Valendo anche la considerazione duale, si può concludere, con DEMBOWSKI ([2], Teor. 1) che:

Date due classi di transitività p e r, risp. di punti e di rette, di un gruppo di collineazioni G di un piano grafico finito:

1) *ogni retta di r appartiene a uno stesso numero di punti di p;*

2) *ogni punto di p appartiene a uno stesso numero di rette di r.*

Se con CARMICHAEL [1], diciamo che un sistema di «punti», p, e un sistema di «rette», r, tra i «punti» e le «rette» dei quali sia definita una relazione di appartenenza o «incidenza», costituiscono una *configurazione tattica* quando siano verificate le (1) e le (2) del teorema precedente, potremo enunciare il teorema stesso dicendo che:

Uua classe di transitività di punti punti, p, e una classe di transitività di rette, r, di un gruppo di collineazioni G, di un piano grafiico finito π, costituiscono una configurazione tattica (rispetto alla relazione di incidenza punto-retta esistente in π).

---

(1) Una collineazione si definirà (anche nel caso non-arguesiano) come una rappresentazione di π su di sè che muta rette in rette.

Questa osservazione è il punto di partenza della Memoria [2] di P. DEMBOWSKI. Egli generalizza la decomposizione dei punti e delle rette di un piano grafico in classi di transitività rispetto a un gruppo di collineazioni introducendo la seguente definizione di *decomposizione tattica* (d. t.) ([2]):

Una partizione delle rette e dei punti di un piano grafico finito π *in classi disgiunte di rette e di punti si chiama una decomposizione tattica* (d. t.) *di* π *quando, scelte comunque una classe* r *di rette e una classe* p *di punti, esse costituiscono una configurazione tattica* (v. sopra);

cioè piu esplicitamente, quando, comunque si scelgano p ed r:

(1) ogni retta della classe r appartiene a un medesimo numero di punti della classe p;

(2) ogni punto di p appartiene a uno stesso numero di rette di r.

Dallo studio delle d. t. or ora definite, il DEMBOWSKI deduce una serie di risultati (alcuni dei quali assai riposti) di carattere aritmetico-geometrico relativi a questioni di transitività, agli «ordini ammissibili» e così via, i quali non interessano però la nostra presente ricerca. Ci limiteremo a ricordare il Teorema 2 della [2]:

In una decomposizione tattica di un piano grafico finito il numero delle classi di punti uguaglia quello delle classi di rette.

2. Decomposizione tattica di un piano grafico finito associata a un k-arco.

Sia K un k-arco ([3]) di un piano grafico finito, π, di rango q (il rango, o «ordine», di π essendo il numero dei punti di una retta diminuito di uno). Le rette di π, rispetto a K, possono inizialmente suddividersi in 3 classi:

R^0_1: *tangenti*, cioè rette che incontrano K in *un* punto;

R^0_2: *secanti*, » » » » » » *due* punti;

R^0_3: *esterne*, (o «passanti»), » » » *zero* punti.

([2]) Il titolo della Memoria [1] è, appunto, *Generalizzazioni delle classi di transitività di piani proiettivi finiti.* Il DEMBOWSKI, in verità, definisce le d. t per «strutture di incidenza» assai più generali dei piani grafici; a noi, però, interessa, ora e nel seguito, soltanto la definizione più ristretta che abbiamo sopra riportata.

([3]) Nel senso di B. SEGRE, cioè un insieme di k punti di π 3 a 3 non allineati. La teoria dei k-archi in un piano lineare finito è stata ampiamente sviluppata da B. SEGRE e dalla sua scuola a partire dal 1955; per una sintesi dei risultati, e per una bibliografia completa, rinviamo alla Memoria [6] e alla conferenza [7] di SEGRE. Parecchi risultati sono ora esposti in forma trattatistica in SEGRE [8].

Di conseguenza, i punti di π potranno essere suddivisi in classi, P_j^1, ponendo in una medesima classe P_j^1 tutti e soli i punti di π per ciascuno dei quali passano j tangenti. Allora ogni elemento $p_{t,j} = p$ di una data classe P_j^1 ha un medesimo numero di incidenze colle rette della classe R_2^0, e con quelle della classe R_3^0, oltre che con le tangenti R_1^0; passando infatti per p j tangenti, per p passano di conseguenza $i = (k - j)/2$ secanti e $q + 1 - - j - (k - j)/2 = q + 1 - (k + j)/2$ rette esterne (4).

Consideriamo ora le incidenze delle rette di una classe R_i^0 con i punti di una classe P_j^1. Suddividiamo le classi R_i^0 in sottoclassi R_k^1, ponendo in una medesima classe R_k^1 due rette di una classe R_i^0 quando esse appartengono a uno stesso numero di punti della classe P_j^1, quale che sia il valore di j (5). Potrà accadere che le classi R^1 coincidano con le classi R^0. In tal caso, le classi $R^0 \equiv R^1$ di rette e le classi P^1 di punti costituiscono una decomposizione tattica del piano π, che chiameremo la *d. t. di π associata al k-arco K.* Se il rango del piano è un numero dispari, q, tale caso si presenta per un (eventuale) $(q + 1)$-arco, o « ovale » (certo esistente, e coincidente con l'insieme dei punti di una conica, a norma di un teorema di SEGRE, nel caso arguesiano); un $(q + 1)$-arco in un piano, arguesiano o non, di rango dispari q, divide le rette nelle tre classi R^0, i punti nelle tre classi P^1 dei punti dell'ovale, dei punti « esterni » e dei punti « interni », per ciascuno dei quali passano risp. una, due, nessuna tangente, e le R^0, P^1 costituiscono una d. t. del piano (vedi, per es., DEMBOWSKI [2] p. 79).

Se invece non si verifica l'ipotesi ora presa in considerazione, suddividiamo ulteriormente le classi P^1 in sottoclassi P^2, ponendo in una medesima classe P^2 due punti di una P^1 quando essi appartengano a un medesimo numero di rette di una classe R^1 (ciò valendo per *ogni* classe R^1). Se le classi P^2 coincidono con le classi P^1, le classi di rette R^1 e le classi di punti $P^2 = P^1$ costituiscono una d. t. del piano, giacchè, per il modo stesso nel quale sono state costruite, soddisfanno alle condizioni (1) e (2) della definizione di d. t. (v. sopra).

---

(4) La considerazione delle classi P^1 equivale alla introduzione di un *indice, i,* per ogni punto di π, i essendo il numero delle corde di K passante per il punto; sotto questa forma la cosa si trova già in SCE [1], [5], e in SEGRE [6] (dove si studia il « sistema diofanteo » che lega tra di loro gli interi c_i che danno il numero dei punti di indice i, cioè — nel nostro linguaggio — il numero dei punti appartenenti a una classe P_j^1).

(5) Il numero j delle tangenti a K per un punto p, dovendo avere la stessa parità di k (numero dei punti dell'arco K), se p non appartiene a K, sarà suscettibile solo di determinati valori, che qui non interessa precisare. Lo stesso dicasi per l'indice i (numero delle secanti per p). Nello studio di un k-arco arguesiano, SEGRE [6], [7] prende in considerazione il numero d_i dei punti di una retta non situati su K e avente indice i: tale considerazione, come è evidente, è assai vicina a quella delle classi R^1. Vedi anche SCE [8].

Nell'ipotesi contraria, iteriamo il procedimento, suddividendo le classi R^1 in sottoclassi R^2 in modo che, prese comunque una R^2 e una P^2, il numero dei punti della P^2 appartenenti a una retta r di R^2 sia costante al variare della r entro R^2; e così via.

Nota Bene. A questo punto conviene, per la chiarezza e la rapidità del discorso introdurre i simboli:

$$\{R, P\} \quad ; \quad \{P, R\}$$

i quali denoteranno, risp., il numero dei punti di una classe P appartenenti a una classe di rette R e il numero delle rette di R passanti per un punto di P, essendo P, R classi risp. di punti e di rette di una d. t. del piano.

Il procedimento di costruzione delle classi di rette R^i a partire dalle classi di punti P^i, e delle classi di punti P^{i+1} a partire dalle classi di rette R^i, dovrà bene avere un termine, in questo senso: esisterà un t intero positivo minimo per il quale le classi R^t, P^t costituiscono una d. t. del piano, per il quale, cioè, si può parlare tanto dei numeri $\{R^t, P^t\}$ quanto dei numeri $\{P^t, R^t\}$ (per valori inferiori a t, invece, hanno significato *tutti* i simboli di *una* sola delle due serie $\{R, P\}$, $\{P, R\}$). Il numero delle rette e quello dei punti è, infatti, finito, essendo il piano per ipotesi finito; al crescere di i, il numero dei punti di P^i (delle rette di R^i) non può crescere, per il modo stesso nel quale la costruzione è stata definita; se diminuisce, si potrà al più pervenire, dopo un numero finito di passi, a classi R^t, P^t formate ciascuna da un sol punto e da una sola retta, le quali costituiscono la decomposizione tattica « banale » del piano, isomorfa al piano stesso. Possiamo pertanto introdurre le seguenti definizioni:

Dato un k-arco K in un piano grafico finito, chiamiamo profondità di K il più piccolo intero positivo t per il quale le classi P^t, R^t (v. sopra) *costituiscono una decomposizione tattica, D_K, del piano; t è, ovviamente, un carattere proiettivo di K.*

La d. t. D_K, pienamente determinata dall'arco K, si chiamerà la decomposizione tattica associata all'arco K.

OSSERVAZIONE. Sia G_K il gruppo delle collineazioni di π che mutano in sè il k-arco K. Evidentemente, $G_K = G$ trasforma in sè ciascuna delle classi R_i^0 delle rette tangenti, secanti, esterne rispetto a K; di conseguenza, G trasforma in sè ciascuna delle classi P_j^1 formata dai punti « j-tangenti »; quindi, ragionando per ricorrenza, G trasforma in sè le classi R^t, P^t della d. t. D_K associata a K. Possiamo perciò concludere che:

La d. t. D_G associata al gruppo $G_K = G$ delle collineazioni di π che mutano in sè un k-arco K, è costituita da classi di rette R^G (da classi di punti P^G) ciascuna delle quali è una sottoclasse di una classe di rette R^t (di una classe di punti P^t) della d. t. associata a K.

Tra le d. t. di π si può introdurre un ordinamento parziale, mediante la relazione d'ordine « naturale »; date, cioè, due d. t. D e D', si porrà:

« $D' \leq D$ se e soltanto se ogni classe R' (P') di D' è contenuta in una classe R (P) di D ».

Il precedente risultato è allora concisamente espresso dalla relazione:

$$D_G \leq D_K. \tag{1}$$

OSSERVAZIONE. Il segno di uguale può ben valere, come dimostra il primo e più semplice esempio, quello di una conica K in un piano arguesiano finito di rango q dispari: in questo caso, infatti, il gruppo delle collineazioni che mutano in sè la conica è transitivo sulle rette tangenti, secanti, esterne, sui punti della conica, sui punti interni e su quelli esterni. Non siamo a conoscenza di archi K per i quali nella (1) valga la disuguaglianza in senso stretto; cio è però dovuto con ogni probabilità al fatto che tanto il gruppo G_K quanto la d. t. D_K ci sono noti in un numero estremamente limitato di casi (v. il successivo n. 3); sulla questione ci proponiamo di ritornare in successive ricerche.

3. Un esempio: la d. t. associata a un 6-arco completo di $S_{2,7}$.

In questo lavoro ci limitiamo ad applicare il procedimento generale delineato nel n. 2 in un caso (non banale, e diverso dall'unico già noto, quello dei $(q+1)$-archi con q dispari) che può essere trattato in modo relativamente agile.

Nel piano $S_{2,7}$ sopra il campo di GALOIS $GF(7)$ con 7 elementi consideriamo la conica C, di equazione (in coordinate non-omogenee):

$$xy - 1 = 0. \tag{2}$$

Tra gli 8 punti della conica (2) scegliamo: a) i due punti impropri (0) e (∞) che sono i punti impropri risp. degli assi x e y; b) i 3 punti propri costituenti il « ramo dei residui », e cioè i tre punti (q, q^{-1}) della C per i quali q è un quadrato di $GF(7)$, che sono i punti: (1, 1): (2, 4); (4, 2) (i quadrati di $GF(7)$ sono 1, 2, 4). Ai 5 punti di C così scelti aggiungiamo l'origine, (0, 0). Si ha allora che: [6]

I 6 punti

$$(0);\ (\infty);\ (0, 0);\ (1, 1);\ (2, 4);\ (4, 2) \tag{3}$$

[6] La definizione di K, e il risultato sottolineato, costituiscono un caso particolare di una definizione e di un risultato più generale: v. LOMBARDO-RADICE [3].

costituiscono un 6-arco K che è completo, cioè non contenuto in un arco di $S_{2,7}$ dotato di un maggior numero di punti (in altri termini: per ogni punto di $S_{2,7}$ passa almeno una secante di K).

La costruzione della d. t., D_K, associata a K può essere eseguita, nei suoi successivi « passi », a partire da una d. t., D'_K, contenuta in D_K, che può essere assegnata in modo diretto: è proprio questa circostanza che rende più agile il procedimento, in questo particolare caso [7].

Classi di punti D'_K. Consideriamo dapprima i punti propri di $S_{2,7}$ non appartenenti agli assi. Tali punti vengono da noi suddivisi in 12 classi che indicheremo con i simboli:

$$(k)_{q,q}\ ;\quad (k)_{n,n}\qquad ,\ k = 1,\ 2,\ 4\ (= \text{quadrato});$$
$$(h)_{q,n}\ ;\quad (h)_{n,q}\qquad ,\ h = 3,\ 5,\ 6\ (= \text{non quadrato}).$$

Il significato dei simboli è il seguente: a) $(k)_{q,q}$ ovvero $(k)_{n,n}$ è l'insieme dei punti di $S_{2,7}$ tali che il prodotto delle loro coordinate è un determinato quadrato non nullo k e tali che le due coordinate sono insieme due quadrati (ovvero insieme due non-quadrati): b) $(h)_{q,n}$ (ovvero $(h)_{n,q}$) è l'insieme dei punti di $S_{2,7}$ tali che il prodotto delle loro coordinate è un determinato non-quadrato h e tali che la prima coordinata è un quadrato, la seconda no (ovvero la prima coordinata non è un quadrato, la seconda sì) [8].

I punti propri degli assi coordinati vengono suddivisi in 5 classi:

$$(0)_{0,0}\ ;\quad (0)_{q,0}\ ;\quad (0)_{n,0}\ ;\quad (0)_{0,q}\ ;\quad (0)_{0,n}\ ,$$

costituite rispettivamente: dalla sola origine; dai punti dell'asse $y = 0$ aventi per ascissa un quadrato non nullo (un non-quadrato); dai punti dell'asse $x = 0$ aventi per ordinata un quadrato non nullo (ovvero un non-quadrato).

Infine i punti impropri vengono suddivisi in 4 classi:

$(\infty)_q$, $(\infty)_n$, formata dai punti impropri delle rette aventi come « coefficiente angolare » un quadrato, risp. un non-quadrato:

$(\infty)_0$, costituita dal solo punto improprio della $y = 0$;

$(\infty)_\infty$, costituita dal solo punto improprio della $x = 0$.

Si hanno così in tutto 21 *classi di punti*, delle quali 18 contengono 3 punti ciascuna, 3 invece un solo punto ciascuna.

---

(7) Per tutti gli altri archi completi della classe di K (e dei quali in Lombardo-Radice [3]) la decomposizione analoga alla D'_K non è più una decomposizione tattica. Ciò è legato al fatto che solo in $GF(7)$ il cubo di un quadrato (non nullo) è sempre 1 (v. oltre).

(8) Ricordiamo che per il prodotto di quadrati e non-quadrati vale una regola del tutto analoga alla « regola dei segni »: il prodotto di due quadrati, e così quello di due non-quadrati, è un quadrato, mentre il prodotto di un quadrato per un non-quadrato è un non-quadrato.

OSSERVAZIONE. Le classi formate dai punti propri non appartenenti agli assi di D'_K sono suscettibili di una semplice interpretazione geometrica: esse sono i « rami » delle « iperboli equilatere » di equazione $xy =$ cost.

Classi di rette di D'_K. Le 21 classi di rette di D'_K si ottengono dalle 21 classi di punti per dualità, considerando le coordinate non omogenee di retta m e p della retta di equazione: $y = mx + p$.

Se $m \neq 0$, $p \neq 0$, otteniamo le 12 classi:

$$[k]_{q,q}\ ;\qquad [k]_{n,n}\ ;\qquad\qquad k = 1,\ 2,\ 4\ ;$$

$$[h]_{q,n}\ ;\qquad [h]_{n,q}\ ;\qquad\qquad h = 3,\ 5,\ 6\ .$$

(Il significato dei simboli di classe si ottiene per dualità da quello dei simboli analoghi introdotti per le classi di punti).

Se (almeno) una delle due coordinate m, p è nulla, abbiamo le 4 classi:

$$[0]_{0,0}\ ;\qquad [0]_{q,0}\ ;\qquad [0]_{n,0}\ ;\qquad [0]_{0,q}\ ;\qquad [0]_{0,n}\ .$$

La prima di esse ha come elemento la sola retta $y = 0$; le altre, invece, sono costituite risp. dalle rette di equazione: $y = qx$, q quadrato; $y = nx$, n non-quadrato; $y = q$, q quadrato (non nullo); $y = n$, n non-quadrato.

Abbiamo infine 4 classi per le quali è necessario introdurre il simbolo $[\infty]$, e precisamente:

$$[\infty]_0\ ;\qquad [\infty]_\infty\ ;\qquad [\infty]_q\ ;\qquad [\infty]_n\ .$$

Le prime due sono costituite da una sola retta, risp.: l'asse $x = 0$, la retta impropria; la terza e la quarta sono composte risp. dalle rette di equazione: $x = q$, q quadrato non nullo; $x = n$, n non-quadrato.

Abbiamo in tutto (così come nel caso delle classi di punti) 21 classi, delle quali tre contengono una sola retta ciascuna, le rimanenti 18 contengono tre rette ciascuna.

D'_K è una decomposizione tattica.

Occorre far vedere che le « incidenze tra classi » (di punti e di rette, di rette e di punti) non dipendono dalla scelta dei « rappresentanti ». Ora ciò è immediato quando una delle due classi è contrassegnata dal simbolo O, oppure ∞. Consideriamo perciò un punto (x', y') della classe $(k)_{r,s}$; una retta $[m, p]$ (cioè una retta di equazione $y = mx + p$) della classe $[h]_{u,v}$, con k, h elementi di $GF(7)$ non nulli; r, s (e così u, v) sono invece simboli suscettibili dei valori « q » ed « n », cioè « quadrato » e « non-quadrato ». Supponiamo che la retta passi per il punto, cioè che si abbia:

$$y' = mx' + p.$$

Allora, essendo t uno (qualsiasi) dei tre quadrati non nulli di $GF(4)$, si ha:

$$ty' = mt^{-1} \cdot t^2x' + pt,$$

e tale relazione esprime l'appartenenza del punto:

$$T = (t^2x',\ ty')$$

alla retta:

$$\tau = [mt^{-1},\ pt].$$

Ma T è ancora un punto della classe $(k)_{r,s}$, giacchè: a) $t^2x' \cdot ty' = t^3 \cdot x'y' = x'y' = k$ (9); b) t^2x' e ty' hanno, ordinatamente, lo stesso carattere di quadrati o non-quadrati posseduto da x' e y'.

Inoltre, τ è ancora una retta della classe $[h]_{u,v}$ perchè: a) $mt^{-1} \cdot pt = mp = h$; b) mt^{-1} e pt hanno, ordinatamente, lo stesso carattere di quadrati o non-quadrati posseduto da m, p.

Di qui, dal fatto che al variare di t $(= 1, 2, 4)$ si ottengono tutti i punti (tutte le rette) della classe, dalla possibilità di ragionare allo stesso modo nel calcolare le rette di $[h]_{u,v}$ passanti per un punto di $(k)_{r,s}$, si deduce subito l'asserto.

Costruzione della decomposizione tattica D_K associata al 6-arco completo K di $S_{2,7}$ a partire dalla decomposizione D'_K.

L'arco K è l'unione delle classi:

$$(1)_{q,q}\ ; \qquad (0)_{0,0}\ ; \qquad (\infty)_0\ ; \qquad (\infty)_\infty,$$

di D'_K. Pertanto, *le classi R_1^0, R_2^0, R_3^0 delle rette tangenti, secanti, esterne* rispetto all'arco K si possono ottenere come unione delle classi $[t]$ di rette di D'_K per le quali il numero:

$$\{[t],\ (1)_{q,q}\} + \{[t],\ (0)_{0,0}\} + \{[t],\ (\infty)_0\} + \{[t],\ (\infty)_\infty\}$$

vale risp. 1, 2, 0.

---

(9) In $GF(q)$, i quadrati sono tutti e soli gli elementi per i quali $t^{(q-1)/2} = 1$; pertanto in $GF(7)$ i quadrati t sono tutti e soli gli elementi per i quali $t^3 = 1$. È proprio questa circostanza aritmetica che dà luogo alla decomposizione tattica D'_K in $S_{2,7}$.

Si ottiene così:

$$R_1^0 = [0]_{n,0} \cup [0]_{0,n} \cup [\infty]_n \cup [2]_{q,q} \cup [4]_{q,n} \cup [5]_{n,q}\,; \quad 18 \text{ rette};$$

$$R_2^0 = [0]_{0,0} \cup [0]_{q,0} \cup [0]_{0,q} \cup [\infty]_0 \cup [\infty]_q \cup [\infty]_\infty \cup [1]_{n,n}\,; \quad 15 \text{ rette};$$

$$R_3^0 = [1]_{q,q} \cup [4]_{q,q} \cup [2]_{n,n} \cup [4]_{n,n} \cup [3]_{q,n} \cup [3]_{n,q} \cup [6]_{q,n} \cup [6]_{n,q}\,; \quad 24 \text{ rette}.$$

Le classi P_j^1 (vedi n. 2) si otterranno analogamente come unione di classi di punti di D'_K, ponendo in una medesima classe P_j^1 quelle classi (k) di D'_K per le quali le somme:

$$s_i = \sum_{[t]\in R_i^0} \{(k),\ [t]\}, \qquad i = 1,\ 2,\ 3$$

hanno il medesimo valore (e basterà anzi limitarsi a verificare che abbia lo stesso valore la somma s_1, oppure s_2, per ovvie ragioni geometriche). Si ottengono così quattro classi, con le incidenze $\{P_j^1,\ R_i^0\}$ indicate nella seguente tabella:

	R_1^0	R_2^0	R_3^0
$P_1^1 = (2)_{q,q} \cup (4)_{q,q}$; 6 punti	0	3	5
$P_1^2 = (0)_{0,q} \cup (0)_{q,0} \cup (0)_{0,n} \cup (0)_{n,0} \cup (\infty)_q \cup (\infty)_n \cup (2)_{n,n} \cup (5)_{n,q} \cup (5)_{q,n}$; 27 punti	2	2	4
$P_3^1 = (1)_{q,q} \cup (0)_{0,0} \cup (\infty)_0 \cup (\infty)_\infty$; 6 punti	3	5	0
$P_1^4 = (1)_{n,n} \cup (4)_{n,n} \cup (3)_{n,q} \cup (6)_{q,n} \cup (6)_{n,q}$; 18 punti	4	1	3

(10) Qui, a dir vero, viene indicata con il simbolo P_1^1 la classe dei punti O tangenti, che nel n. 2 veniva chiamato P_0^1.

Le classi R_i^1 si otterranno, a loro volta, come unioni di classi di rette di D'_K, ponendo in una medesima classe R^1 quelle classi $[t]$ di D'_K per le quali hanno uno stesso valore le somme:

$$\sum_{(k) \in P_j^1} \{ [t],\ (k) \}, \qquad j = 1, 2, 3, 4.$$

Si ottengono così 5 classi R^1 (la classe R_1^0 è anche una classe R_1^1, mentre le classi R_2^0 e R_3^0 si spezzano, ciascuna in due sottoclassi) con le incidenze indicate nella seguente tabella:

		P_1^1	P_2^1	P_3^1	P_4^1
$R_1 = R_1^0$;	18 rette	0	3	1	4
$R_2^1 = [0]_{0,0} \cup [\infty]_0 \cup [\infty]_\infty \cup [1]_{n,n}$;	6 rette	0	6	2	0
$R_3^1 = [0]_{0,q} \cup [0]_{q,0} \cup [\infty]_q$;	9 rette	2	2	2	2
$R_4^1 = [1]_{q,q} \cup [4]_{q,q} \cup [3]_{q,n} \cup [3]_{n,q} \cup [6]_{q,n} \cup [6]_{n,q}$;	18 rette	1	5	0	2
$R_5^1 = [2]_{n,n} \cup [4]_{n,n}$;	6 rette	2	3	0	3

Le classi P_j^2 si ottengono ora come unione di classi di punti di D'_K (in modo analogo a quello chiarito nel caso delle costruzioni precedenti), e costituiscono una suddivisione delle classi P^1. Si ottengono così 5 classi, in quanto la sola classe P_2^1 si spezza in 2 sottoclassi, come è indicato nella tabella che segue, che dà anche le incidenze $\{P^2, R^1\}$:

		R_1^1	R_2^1	R_3^1	R_4^1	R_4^1
$P_1^2 = P_1^1$;	6 punti	0	0	3	3	2
$P_2^2 = (0)_{q,0} \cup (0)_{0,q} \cup (\infty)_q \cup (2)_{n,n} \cup \cup (5)_{q,n} \cup (5)_{n,q}$;	18 punti	2	1	1	4	0
$P_3^2 = (0)_{n,0} \cup (0)_{0,n} \cup (\infty)_n$;	9 punti	2	2	0	2	2
$P_4^2 = P_3^1$		3	2	3	0	0
$P_5^2 = P_4^1$		4	0	1	2	1

Quanto alle classi R_i^2, esse coincidono con le classi R_i^1.

Le incidenze:

$$\{R^1, P^2\}$$

sono date dalla tabella:

	P_1^2	P_2^2	P_3^2	P_4^2	P_5^2
R_1^1	0	3	3	2	0
R_2^1	0	3	3	2	0
R_3^1	2	2	0	2	2
R_4^1	1	4	1	0	2
R_5^1	2	0	3	0	3

La decomposizione tattica D_K associato al 6–arco completo K di $S_{2,7}$ è con ciò completamente determinata: *D_K è composta da 5 classi di punti e da altrettante classi di rette, con le incidenze $\{P, R\}$ e $\{R, P\}$ date dalle ultime due tabelle; inoltre:*

La profondità (vedi n. 2) *dell'arco K è* 2.

BIBLIOGRAFIA

[1] CARMICHAEL R.D., *Introduction to the theory of groups of finite order.* Bo ton 1937.
[2] DEMBOWSKI P., *Verallgemeinerungen von Transitivitätsklassen endlicher projektiver Ebenen.* « Math Zeitschr. » Vol. 69, pp. 59-89 (1958).
[3] LOMBARDO-RADICE L., *Sul problema dei k-archi completi in* $S_{2,q}$ « Boll. U.M.I. » (3), 11
[4] SCE M., *Sui k-archi di indice h.* « Convegno Reticoli e Geometrie Proiettive », Palermo 1957; Cremonese, Roma, 1958, pp. 133-135.
[5] SCE M., *Preliminari ad una teoria aritmetico-gruppale dei k-archi.* « Rend. Mat. », Roma vol. 29 (1960), pp. 241-291.
[6] SEGRE B., *Le geometrie di Galois,* « Ann. di Mat. », (6), 48 (1959), pp. 1-96
[7] SEGRE B., *Le geometrie di Galois-archi ed ovali-calotte ed ovaloidi.* « Conferenze del Seminario Matematico di Bari », nn. 43-44, Zanichelli.
[8] SEGRE B., *Lectures on modern geometry* (with an Appendix on *Finite non-desarguesian planes* by L. LOMBARDO-RADICE) - « Monografie Matematiche » del C. N. R., Cremonese, Roma, 1960.