Sulla teoria del moto stazionario di un fluido pesante con superficie libera.

Memoria di CAMILLO POSSIO (a Torino).

Sunto - *Per rendere determinato il campo di moto stazionario di un fluido pesante con superficie libera, il* RAYLEIGH, *com'è noto, introduce una fittizia forza d'attrito che fa poi tendere a zero: l'A. dimostra come si possa giungere allo stesso risultato, in modo più convincente, immaginando il moto stazionario come caso limite di un moto vario iniziatosi dalla quiete.*

1. Il campo di moto stazionario creato da una distribuzione di singolarità in un fluido pesante con superficie libera risulta indeterminato, com'è noto [1], nelle consuete ipotesi di fluido perfetto e di perturbazione infinitesima, in quanto esistono infinite soluzioni che dal punto di vista puramente analitico sono tutte ugualmente plausibili. Per rendere determinato il problema si ricorre ad un artificio ideato dal RAYLEIGH, che consiste nel supporre che sul fluido agisca una forza il cui valore per unità di massa si pone uguale a $-\mu(\boldsymbol{V}-\boldsymbol{V}_0)$, dove $\boldsymbol{V}$ e $\boldsymbol{V}_0$ rappresentano rispettivamente la velocità locale e quella assintotica, e μ è una quantità positiva: si assume poi come espressione del campo di moto effettivo quella che si ottiene passando al limite per $\mu=0$. Ora, la giustificazione di un procedimento per rendere determinato il problema che consideriamo deve evidentemente ricercarsi in base a considerazioni di carattere fisico, in quanto si potrebbero ideare altri procedimenti analoghi con risultato diverso da caso a caso. Questa forza fittizia introdotta dal RAYLEIGH vorrebbe appunto rappresentare l'azione della viscosità che è sempre presente nel fluido reale: essa però ha in comune colle azioni tangenziali che nascono per effetto della viscosità il solo carattere dissipativo, ed appare evidente che la particolare forma sotto cui si è voluto esprimere l'azione di attrito è stata scelta in modo da semplificare al massimo il problema analitico. Si può invece rendere determinato il problema in base ad una considerazione fisica rigorosa, anche senza uscire dal campo dei fluidi perfetti, considerando il moto stazionario come caso limite di un moto vario

[1] Cfr. LAMB: *Hydrodinamics*, cap. IX, par. 242.

che si è iniziato dalla quiete. Immagineremo cioè che la perturbazione prodotta dalle singolarità distribuite nel fluido si crei bruscamente all'istante $t=0$, assumendo come espressione del campo di moto effettivo quella che risulta passando al limite per $t=\infty$: vedremo che il risultato che così si ottiene è identico a quello a cui si giunge col procedimento del RAYLEIGH, che riceve così una piena giustificazione.

2. Prima di sviluppare il procedimento che abbiamo indicato nel paragrafo precedente, vogliamo impostare brevemente il problema, indicando la ragione per cui esso si presenta indeterminato, éd esponendo la soluzioné che ne dà, in base al principio del RAYLEIGH, l'HAVELOCK (1), nel caso in cui la perturbazione nel fluido sia creata da una distribuzione di sorgenti o di doppiette.

Assumiamo un sistema di assi xyz solidali colla superficie su cui sono distribuite le singolarità, facendo coincidere il piano xy colla superficie libera del fluido indisturbato, e disponendo l'asse x parallelo e concorde colla velocità assintotica V_0 e l'asse z rivolto verso il basso. Se Φ è il potenziale della velocità di perturbazione $V - V_0$, la condizione di pressione costante sulla superficie libera, riferita agli assi

$$x' = x - V_0 t \qquad y' = y \qquad z' = z$$

cioè ad assi solidali col fluido indisturbato, assume, nelle consuete ipotesi della teoria dei moti ondosi, la forma (2):

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t}(x', y', 0, t) - g \cdot \zeta(x', y', t) = 0 \tag{1}$$

dove ζ rappresenta l'abbassamento della superficie libera sotto il piano xy. Indichiamo con u, v, w le componenti della velocità di perturbazione; derivando la (1) rispetto al tempo si ha:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}(x', y', 0, t) - g \cdot w(x', y', 0, t) = 0 \tag{2}$$

che, riferita agli assi xyz, e nell'ipotesi che il moto sia stazionario, si trasforma nella:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y, 0) - \frac{g}{V_0^2} \cdot w(x, y, 0) = 0. \tag{3}$$

---

(1) Cfr. HAVELOCK: *The theory of wave resistance*, « Proceedings of the R. S. of London », 1932, pp. 339-348.

(2) Cfr. LAMB: *Hydrodinamics*, cap. IX,

Il problema che consideriamo si traduce analiticamente nella determinazione, dato il potenziale Φ_1 delle singolarità disposte nel fluido, di una funzione Φ_a, potenziale del campo *aggiuntivo*, definita nel semispazio $z \geq 0$ dalle seguenti condizioni:

a) Φ_a deve soddisfare all'equazione di LAPLACE $\Delta_2 \Phi = 0$, ciò che implica la continuità delle derivate prime in ogni punto del semispazio $z \geq 0$, di modo che il campo aggiuntivo non ha alcun punto singolare.

b) le derivate prime di Φ_a si devono annullare all'infinito, ad eccezione eventualmente del caso in cui si tenda all'infinito nella direzione positiva dell'asse x [1].

c) la funzione $\Phi_1 + \Phi_a$ deve soddisfare, sul piano xy, alla (3).

L'indeterminazione del problema consiste nel fatto che esistono infinite funzioni che soddisfano alle condizioni *a)*, *b)*, *c)*, nell'ipotesi $\Phi_1 = 0$. Tali sono, come vedremo, tutte le funzioni della forma [2]:

$$\overline{\Phi} = \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \cdot e^{-\frac{z}{\cos^2\theta} + i\frac{x\cos\theta + y \operatorname{sen}\theta}{\cos^2\theta}} \cdot d\theta \tag{4}$$

in cui per la funzione complessa $f(\theta)$ è sufficiente la sola limitazione che $\dfrac{f(\theta)}{\cos^4\theta}$ sia continua in tutto l'intervallo $-\pi \leq \theta \leq \pi$. In queste ipotesi, si possono eseguire le derivazioni prima e seconda sotto il segno, e quindi si verifica immediatamente che $\overline{\Phi}$ è una funzione armonica nel semispazio $z \geq 0$, e che soddisfa identicamente alla (3): è facile pure accertarsi che $\operatorname{grad} \overline{\Phi}$ si annulla all'infinito, proprietà che non risulta sia stata dimostrata. Difatti, le derivate prime di $\overline{\Phi}$ sono, in valore assoluto, inferiori alla quantità

$$e^{-z} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \frac{|f(\theta)|}{\cos^2\theta} d\theta$$

che evidentemente si annulla per $z = \infty$: se poi z è finito, poniamo

$$x = r\cos\alpha \qquad y = r \operatorname{sen}\alpha$$

$$\frac{\cos(\theta - \alpha)}{\cos^2\theta} = \xi$$

---

(1) Com'è noto, esistono campi di moto stazionari che ammettono una *scia*, nella quale la perturbazione rimane finita all'infinito nella direzione di V_0: non sarebbe quindi lecito imporre in generale che $\operatorname{grad} \Phi_a$ si annulli ovunque all'infinito.

(2) Per comodità, in luogo di introdurre le funzioni seno e coseno, introduciamo la funzione esponenziale con esponente immaginario, colla convenzione, che varrà per tutto il seguito, che di ogni espressione complessa si debba prendere la sola parte reale.

di modo che le derivate prime dl $\overline{\Phi}$ si possono esprimere come somma di termini della forma:

$$\int_{\xi'}^{\xi''} a(\xi) \cdot e^{ir\xi} \cdot d\xi$$

nei quali la funzione $a(\xi)$ rimane sempre finita nell'intervallo d'integrazione, eccetto eventualmente agli estremi. Ora. se a è infinita per $\xi = \xi'$, si verifica ovviamente che essa tende all'infinito come $(\xi - \xi')^{-n}$, dove n è un numero minore di 1: d'altra parte, a risulta una funzione ad integrale assolutamente convergente da 0 a ∞, di modo che si conclude senz'altro che grad $\overline{\Phi}$ si annulla per $r = \infty$. Resta così dimostrato che se Φ_a è una soluzione del problema, lo è pure la funzione $\Phi_a + \overline{\Phi}$, e quindi il problema risulta indeterminato.

Supponiamo che sul fluido agisca una forza di massa d'intensità $-\mu(\boldsymbol{V} - \boldsymbol{V}_0)$, che ammette il potenziale $-\mu \cdot \Phi$; la condizione di pressione costante sulla superficie libera assume la forma:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t}(x', y', 0, t) - g \cdot \zeta(x', y', t) + \mu \Phi(x', y', 0, t) = 0 \tag{1'}$$

da cui, derivando rispetto al tempo e riferendo le derivate agli assi xyz, si ottiene l'equazione che lega i valori di u e w sui punti del piano xy:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y, 0) - \frac{g}{V_0^2} \cdot w(x, y, 0) + \frac{\mu}{V_0} \cdot u(x, y, 0) = 0. \tag{3'}$$

Le condizioni a cui deve soddisfare il potenziale del campo aggiuntivo Φ_a restano ancora le a), b), c) date in precedenza, con l'unica variante che la funzione $\Phi_1 + \Phi_a$, anzichè alla (3), deve soddisfare alla (3'). Il potenziale Φ_1 del campo creato da una distribuzione di sorgenti o di doppiette, eseguita su di una superficie σ interna al fluido, si può scrivere, per $z < l$, se l è la profondità minima di σ sotto il piano xy, nella forma:

$$\Phi_1(x, y, z) = \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_0^{\infty} F(m, \theta) \cdot e^{mkz + imk\omega} \cdot dm \tag{5}$$

dove è:

$$k = \frac{g}{V_0^2} \qquad \omega = x \cos\theta + y \operatorname{sen}\theta$$

e $F(m, \theta)$ è una funzione finita e continua, insieme colle sue derivate prime, in tutto il campo $m \geq 0$ e $-\pi \leq \theta \leq \pi$, e che per $m = \infty$ tende a zero come e^{-mkl} (1). Diamo al potenziale aggiuntivo Φ_a l'espressione:

$$(6) \qquad \Phi_a(x, y, z) = \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_0^{\infty} f(m, \theta) \cdot e^{-mkz + imk\omega} \cdot dm$$

dove f è una funzione arbitraria sulla quale facciamo soltanto l'ipotesi che essa sia tale che la (6) risulti definita per $z \geq 0$ e che siano lecite le derivazioni prima e seconda sotto il segno, di modo che la (6) rappresenta evidentemente una funzione armonica nel semispazio $z \geq 0$; introducendo nella (3') la funzione $\Phi_t + \Phi_a$ espressa dalle (5) e (6) si ricava:

$$f(m, \theta) = - F(m, \theta) + \frac{2F(m, \theta)}{1 - m\cos^2\theta + i\dfrac{\mu V_0}{g}\cos\theta}$$

da cui risulta immediatamente che sono verificate le condizioni a cui deve soddisfare f. Si ottiene così:

$$(7) \qquad \Phi_a = - \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_0^{\infty} F(m, \theta) \cdot e^{-mkz + imk\omega} \cdot dm + 2\int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_0^{\infty} \frac{F(m, \theta) \cdot e^{-mkz + imk\omega}}{1 - m\cos^2\theta + i\dfrac{\mu V_0}{g}\cos\theta} dm$$

Per il modo con cui è stata dedotta, la (7) soddisfa senz'altro alle condizioni *a*) e *b*): si deve quindi soltanto più verificare che grad Φ_a si annulla all'infinito. Ora, le derivate prime di Φ_a si possono scrivere nella forma:

$$\int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_0^{\infty} A(m, \theta) \cdot e^{-mkz + imkr\cos(\theta - \alpha)} \cdot dm$$

---

(1) Per giustificare la (5), nonchè le proprietà ammesse per la funzione F, basta tener presente che il potenziale di una sorgente di portata Q, disposta nel punto di coordinate ξ, η, ζ, ha il valore:

$$- \frac{Q}{4\pi\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}}$$

a cui si può dare, per $z < \zeta$, l'espressione:

$$- \frac{Q}{8\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_0^{\infty} e^{-m(\zeta - z)} \cdot \cos m([x-\xi]\cos\theta + [y - \eta]\operatorname{sen}\theta) \cdot dm$$

che, usando la notazione complessa e ponendo:

$$F(m, \theta) = - \frac{Qk}{8\pi^2} \cdot e^{-mk\zeta - imk(\xi\cos\theta + \eta\operatorname{sen}\theta)}$$

assume la forma (5).

dove A è una funzione finita e continua in tutto il campo $m \geq 0$ e $-\pi \leq \theta \leq \pi$, e che per $m = \infty$ tende a zero più rapidamente di qualunque potenza negativa di m, sicchè ne risulta senz'altro che la quantità considerata tende a zero quando z oppure r tendono all'infinito. Per determinare l'espressione del potenziale aggiuntivo $\Phi_a{}^*$ in un fluido in cui l'unica forza agente sia la gravità, basta passare al limite per $\mu = 0$ nella (7); si ottiene così:

$$\Phi_a{}^* = \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_0^{\infty} \frac{1 + m\cos^2\theta}{1 - m\cos^2\theta} \cdot F(m, \theta) \cdot e^{-mkz + imk\omega} \cdot dm - \tag{8}$$
$$- 2\pi i \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \frac{F\left(\frac{1}{\cos^2\theta}, \theta\right)}{\cos\theta \cdot |\cos\theta|} e^{-\frac{kz}{\cos^2\theta} + i\frac{k\omega}{\cos^2\theta}} \cdot d\theta$$

dove si deve prendere il valore principale dell'integrale in cui la funzione sotto il segno diventa infinita per $m\cos^2\theta = 1$.

Nella Nota dell'Havelock non è esaminato il comportamento del campo aggiuntivo all'infinito: verificheremo che tanto $\Phi_a{}^*$ quanto $\operatorname{grad}\Phi_a{}^*$ si annullano. Osserviamo che il secondo termine di $\Phi_a{}^*$ rientra nella forma della funzione $\bar{\Phi}$ definita dalla (4), per cui risulta senz'altro che esso si annulla, insieme colle sue derivate prime, all'infinito: basterà perciò considerare il primo termine I. Ora, è evidente che esso si annulla, insieme colle sue derivate, per $z = \infty$; supponendo z finito, scriviamo I nella forma:

$$I = -2\int_{-\pi}^{\pi} \frac{F\left(\frac{1}{\cos^2\theta}, \theta\right)}{\cos^2\theta} \cdot e^{-\frac{kz}{\cos^2\theta} + i\frac{kr\cos(\theta-\alpha)}{\cos^2\theta}} \cdot f(\theta) \cdot d\theta +$$
$$+ \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_0^{\infty} B(m, \theta) \cdot e^{imkr\cos(\theta-\alpha)} \cdot dm$$

dove è:

$$f(\theta) = \int_{-1}^{\infty} \frac{e^{i\frac{kr\cos(\theta-\alpha)}{\cos^2\theta}u}}{u} du$$

$$B(m, \theta) = \frac{1 + m\cos^2\theta}{1 - m\cos^2\theta} \cdot F(m, \theta) \cdot e^{-mkz} - 2F\left(\frac{1}{\cos^2\theta} \cdot \theta\right) \cdot \frac{e^{-\frac{kz}{\cos^2\theta}}}{1 - m\cos^2\theta}.$$

La funzione $f(\theta)$ rimane finita per qualsiasi valore di θ, eccetto che per

$\theta = \alpha \pm \frac{\pi}{2}$ (supposto $\alpha \neq 0$), nel qual caso diventa un infinito logaritmico: si deduce quindi senz'altro che il primo termine di I si annulla per $r = \infty$. Osserviamo poi che la funzione B è finita per $m \cos^2 \theta = 1$ e che nell'intervallo $m \geq a$, dove a è una quantità maggiore di $\frac{1}{\cos^2 \theta}$, essa risulta la differenza fra una funzione ad integrale assolutamente convergente ed una funzione sempre decrescente e nulla all'infinito, sicchè si conclude che anche il secondo termine di I si annulla all'infinito. Le derivate prime di I hanno la medesima forma, per cui risulta dimostrato che anche grad $\Phi_a{}^*$ è nullo all'infinito.

3. Studiamo ora il problema del moto vario: nell'ipotesi che Φ sia funzione, oltre che delle coordinate xyz, anche del tempo, riferendo la (2) agli assi xyz si ottiene l'equazione che lega i valori di Φ, u, w nei punti del piano xy nella forma:

$$\frac{1}{V_0^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + \frac{2}{V_0} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{g}{V_0^2} w = 0. \tag{3''}$$

A questa equazione si debbono aggiungere le condizioni iniziali, corrispondenti al fatto che per $t < 0$ la perturbazione è nulla. Deve essere infatti:

$$\Phi(x, y, 0, 0) = 0 \tag{9}$$

in quanto una discontinuità del potenziale darebbe luogo sulla superficie libera ad una pressione infinita; d'altra parte, anche ζ è nullo per $t = 0$, e quindi dalla (1), riferita agli assi xyz, si ha:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t}(x, y, 0, 0) + V_0 \cdot u(x, y, 0, 0) = 0$$

da cui per la (9) si ricava:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t}(x, y, 0, 0) = 0. \tag{10}$$

Le condizioni che definiscono il potenziale aggiuntivo sono ancora quelle enunciate nel paragrafo precedente, colla variante però che la funzione $\Phi_1 + \Phi_a$ deve soddisfare, sul piano xy, all'equazione (3'') ed alle condizioni iniziali (9) e (10), e che tanto Φ_a quanto grad Φ_a si devono annullare senza restrizioni all'infinito [1]. Potrebbe sorgere il dubbio che, al pari del pro-

[1] Si noti difatti che in campo di moto vario che si inizia dalla quiete, è evidente che la velocità di perturbazione deve annullarsi ovunque all'infinito, e con essa, per il teorema di BERNOULLI, anche il potenziale.

blema del moto stazionario, anche quello del moto vario sia indeterminato, nel senso che esistano più soluzioni soddisfacenti alle condizioni che abbiamo introdotto per la funzione Φ_a: tale dubbio non può però sussistere, in quanto l'HADAMARD ha dimostrato [1] l'unicità della soluzione del problema del moto vario corrispondente a determinate condizioni iniziali, come è per l'appunto nel nostro caso.

Supponiamo per ora che la perturbazione sia creata dalla distribuzione di sorgenti o di doppiette considerata nel paragrafo precedente: dobbiamo quindi supporre che il potenziale Φ_1, nullo per $t < 0$, assuma bruscamente all'istante $t = 0$ il valore espresso dalla (5). Poniamo ancora il potenziale aggiuntivo Φ_a nella forma (6), in cui però si deve considerare f funzione anche del tempo. Imponiamo che la funzione $\Phi_1 + \Phi_a$ soddisfi alla (3″); assumendo in luogo del tempo il parametro adimensionale $\tau = \frac{gt}{V_0}$, si ottiene per f l'equazione:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \tau^2} + 2im \cos\theta \cdot \frac{\partial f}{\partial \tau} + m(1 - m\cos^2\theta)\cdot f = m(1 + m\cos^2\theta)\cdot F(m, \theta).$$

Le condizioni iniziali (9) e (10) diventano:

$$f(m, \theta, 0) + F(m, \theta) = 0$$
$$\frac{\partial f}{\partial \tau}(m, \theta, 0) = 0$$

di modo che si ricava facilmente l'espressione di f:

$$f = \frac{1 + m\cos^2\theta}{1 - m\cos^2\theta} F(m, \theta) - \frac{F(m, \theta)\cdot e^{-i(m\cos\theta - \sqrt{m})\tau}}{1 - \sqrt{m}\cos\theta} - \frac{F(m, \theta)\cdot e^{-i(m\cos\theta + \sqrt{m})\tau}}{1 + \sqrt{m}\cos\theta}.$$

Il potenziale aggiuntivo assume così la forma:

$$\Phi_a = \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_0^{\infty} \frac{1 + m\cos^2\theta}{1 - m\cos^2\theta}\cdot F(m, \theta)\cdot e^{-mkz + imk\omega}\cdot dm \tag{11}$$
$$- \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_0^{\infty} \frac{F(m, \theta)\cdot e^{-mkz + imk\omega - i(m\cos\theta - \sqrt{m})\tau}}{1 - \sqrt{m}\cos\theta} dm$$
$$- \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_0^{\infty} \frac{F(m, \theta)\cdot e^{-mkz + imk\omega - i(m\cos\theta + \sqrt{m})\tau}}{1 + \sqrt{m}\cos\theta} dm.$$

[1] Cfr. il capitolo « La mise en équation des problèmes de l'Hydrodinamique » delle Leçons sur la propagation des ondes.

Verifichiamo che Φ_a soddisfa alla condizione di annullarsi, insieme colle sue derivate prime, all'infinito. Dalla (11) risulta che Φ_a si può mettere sotta la forma:

$$\int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_0^{\infty} H(m, \theta, \tau) \cdot e^{-mkz + imkr\cos(\theta-\alpha)} \cdot dm$$

dove H rappresenta una funzione che rimane finita in tutto l'intervallo di integrazione, e che per $m = \infty$ tende a zero più rapidamente di qualsiasi potenza negativa di m: d'altra parte, anche le derivate prime di Φ_a si possono mettere sotto la stessa forma, sicchè risulta dimostrato che all'infinito è $\Phi_a = \operatorname{grad} \Phi_a = 0$.

Determiniamo l'espressione del potenziale Φ_a^* del campo aggiuntivo stazionario, calcolando il limite a cui tende l'espressione (11) di Φ_a per $\tau = \infty$. Osserviamo che la quantità

$$\int_0^{\infty} H(m, \theta, \tau) \cdot e^{-mkz + imk\omega} \cdot dm$$

è una funzione continua delle variabili θ e τ in tutto il campo $\tau \geq 0$ e $-\pi \leq \theta \leq \pi$, e che, come vedremo, tende ad un limite finito per $\tau = \infty$, di modo che risulta lecito, nell'eseguire il calcolo di Φ_a^*, invertire l'ordine delle operazioni di integrazione rispetto a θ e di passaggio al limite per $\tau = \infty$. Possiamo quindi scrivere l'espressione di Φ_a^* nella forma:

$$\begin{aligned}
(12) \qquad \Phi_a^* = & \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_0^{\infty} \frac{1 + m\cos^2\theta}{1 - m\cos^2\theta} \cdot F(m, \theta) \cdot e^{-mkz + imk\omega} \cdot dm \\
& - \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \cdot \lim_{\tau=\infty} \int_0^{\infty} \frac{F(m, \theta) \cdot e^{-mkz + imk\omega - i(m\cos\theta - \sqrt{m})\tau}}{1 - \sqrt{m}\cos\theta} dm \\
& - \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \cdot \lim_{\tau=\infty} \int_0^{\infty} \frac{F(m, \theta) \cdot e^{-mkz + imk\omega - i(m\cos\theta + \sqrt{m})\tau}}{1 + \sqrt{m}\cos\theta} dm
\end{aligned}$$

Consideriamo, ad esempio, la quantità:

$$A = \int_0^{\infty} \frac{F(m, \theta) \cdot e^{-mkz + imk\omega - i(m\cos\theta - \sqrt{m})\tau}}{1 - \sqrt{m}\cos\theta} dm$$

nell' ipotesi $\cos\theta > 0$. Ponendo:

$$m\cos\theta - \sqrt{m} = \xi$$

$$\frac{dm}{d\xi}\cdot\frac{F(m,\theta)\cdot e^{-mkz+imk\omega}}{1-\sqrt{m}\cos\theta} = K_1(\xi) \qquad \text{per} \qquad 0 \leq m \leq \frac{1}{4\cos^2\theta}$$

$$\xi\frac{dm}{d\xi}\cdot\frac{F(m,\theta)\cdot e^{-mkz+imk\omega}}{1-\sqrt{m}\cos\theta} = K_2(\xi) \qquad \text{per} \qquad m \geq \frac{1}{4\cos^2\theta}$$

si ottiene:

$$A = K_2(0)\cdot\int_{-\frac{1}{4\cos\theta}}^{\infty}\frac{e^{-i\tau\xi}}{\xi}\,d\xi + \int_{-\frac{1}{4\cos\theta}}^{\infty}\frac{K_2(\xi)-K_2(0)}{\xi}\cdot e^{-i\xi\tau}\cdot d\xi - \int_{-\frac{1}{4\cos\theta}}^{0}K_1(\xi)\cdot e^{-i\xi\tau}\cdot d\xi.$$

Ora, dato che $\frac{\partial F}{\partial m}$ è sempre finita, la grandezza

$$\frac{K_2(\xi)-K_2(0)}{\xi}$$

risulta finita in tutto l' intervallo d' integrazione, ad eccezione del limite inferiore in cui diventa infinita come $\frac{1}{\sqrt{1+4\xi\cos\theta}}$: d' altra parte, $K_2(\xi)$ è una funzione ad integrale assolutamente convergente nell' intervallo $0, \infty$, di modo che si può concludere che il secondo termine di A si annulla per $\tau = \infty$. Analogamente si verifica che lo stesso avviene per il terzo termine, per cui, essendo:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-iu}}{u}\,du = -\pi i$$

ed avendosi ovviamente:

$$K_2(0) = -\frac{2}{\cos^2\theta}\cdot F\left(\frac{1}{\cos^2\theta},\theta\right)\cdot e^{-\frac{kz}{\cos^2\theta}+i\frac{k\omega}{\cos^2\theta}}$$

si ricava infine:

$$\lim_{\tau=\infty} A = \frac{2\pi i}{\cos^2\theta}\cdot F\left(\frac{1}{\cos^2\theta},\theta\right)\cdot e^{-\frac{kz}{\cos^2\theta}+i\frac{k\omega}{\cos^2\theta}} \qquad (\text{per } \cos\theta > 0).$$

Mediante considerazioni analoghe si può studiare l' altro termine che compare nell' espressione di Φ_a, nonchè il caso $\cos\theta < 0$, ottenendo:

$$\lim_{\tau=\infty}\int_0^{\infty}F(m,\theta)\cdot\left[\frac{e^{-i(m\cos\theta-\sqrt{m})\tau}}{1-\sqrt{m}\cos\theta} + \frac{e^{-i(m\cos\theta+\sqrt{m})\tau}}{1+\sqrt{m}\cos\theta}\right]\cdot e^{-mkz+imk\omega}\cdot dm =$$

$$= \pm\frac{2\pi i}{\cos^2\theta}\cdot F\left(\frac{1}{\cos^2\theta},\theta\right)\cdot e^{-\frac{kz}{\cos^2\theta}+i\frac{k\omega}{\cos^2\theta}} \qquad (\text{per } \cos\theta \gtrless 0)$$

di modo che si verifica senz' altro che l' espressione di Φ_a^* a cui si giunge coincide colla (8).

4. Nel paragrafo precedente si è suppposto che la perturbazione prodotta nel fluido sia creata da una distribuzione di sorgenti o di doppiette. Questo, però, non è il caso più generale di moto prodotto da un ostacolo in una corrente uniforme: difatti, perchè una perturbazione si possa rappresentare con singolarità del tipo della sorgente o della doppietta, occorre che la velocità ammetta potenziale in tutto lo spazio esterno all' ostacolo, ciò che non accade, ad esempio, quando l' ostacolo è una superficie portante oppure un propulsore, nel qual caso il potenziale esiste solo al di fuori di una porzione di spazio, la *scia*, che si estende sino all' infinito a valle dell' ostacolo. Com' è noto, e come mostreremo facilmente, nell' ipotesi di perturbazione infinitesima, il tipo più generale di campo di moto può ancora essere generato da una distribuzione di singolarità, intese però come *singolarità di pressione*. In assenza di forze di massa, e nell' ipotesi che la perturbazione della corrente sia piccola, l' equazione di EULERO assume la forma:

$$-\frac{1}{\rho}\,\mathrm{grad}\, p = \frac{\partial V}{\partial t} + V_0 \frac{\partial V}{\partial x}$$

da cui segue, essendo per l' incompressibilità del fluido div $V = 0$, che la pressione p è funzione armonica. Ora, tenendo presente che la pressione deve annullarsi all' infinito [1], e che nel fluido non può ammettere discontinuità, risulta senz' altro che all' esterno dell' ostacolo la pressione si può esprimere come il potenziale di una distribuzione di sorgenti o di doppiette, eseguita sulla superficie dell' ostacolo. Il campo creato da una perturbazione di questo genere ammette potenziale nello spazio esterno alla scia, definendo come tale il luogo dei punti dai quali si può giungere, lungo una retta parallela a V_0, sino all' infinito a monte senza incontrare punti di discontinuità della pressione. Indicando con Φ il potenziale di velocità e con φ quello dell' accelerazione, cioè ponendo $\varphi = -\frac{p}{\rho}$, l' equazione di EULERO si trasforma nella:

$$\varphi = \frac{\partial \Phi}{\partial t} + V_0 \frac{\partial \Phi}{\partial x}$$

da cui, per l' ipotesi che la perturbazione sia nulla per $t < 0$, si ottiene ovviamente:

$$\Phi(x, y, z, t) = \frac{1}{V_0} \cdot \int_{x - V_0 t}^{x} \varphi\left(\xi, y, z, t - \frac{x-\xi}{V_0}\right) \cdot d\xi \tag{13}$$

[1] Si pone uguale a zero la pressione che regna nello spazio sovrastante il fluido.

espressione che vale in ogni punto esterno alla scia, e in particolare nello spazio $z < l$, essendo l la profondità minima dell'ostacolo sotto il piano xy. Indicando con $\varphi_1(x, y, z)$ il potenziale dell'accelerazione del campo creato dalle singolarità di pressione distribuite nel fluido, possiamo scrivere, per $z < l$,

$$\varphi_1 = k V_0 \cdot \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_0^{\infty} G(m, \theta) \cdot e^{mkz + imk\omega} \cdot dm$$

dove G è una funzione che ha le stesse proprietà ammesse nel paragrafo 2 per F. Consideriamo il campo delle singolarità *riflesse*, che si ottiene collocando, per ogni singolarità disposta nel punto P del fluido, una singolarità uguale (¹) nel punto P' simmetrico di P rispetto al piano xy; questo campo ammette il potenziale Φ_2 che si ricava dalla (13) assumendo per φ l'espressione:

$$\varphi_2 = k V_0 \cdot \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_0^{\infty} G(m, \theta) \cdot e^{-mkz + imk\omega} \cdot dm.$$

Ricorrendo alla (13), si trova facilmente la relazione:

$$\frac{1}{V_0^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\Phi_1 + \Phi_2) + \frac{2}{V_0} \cdot \frac{\partial}{\partial t} (u_1 + u_2) + \frac{\partial}{\partial x} (u_1 + u_2) - \frac{g}{V_0^2} (w_1 + w_2) = \frac{2}{V_0} \cdot \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}$$

$$(\text{per } z = 0)$$

da cui, ponendo il potenziale Φ_a del campo aggiuntivo nella forma:

$$\Phi_a(x, y, z, t) = \Phi_2(x, y, z) + \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_0^{\infty} g(m, \theta, \tau) \cdot e^{-mkz + imk\omega} \cdot dm$$

risulta che la funzione $g(m, \theta, \tau)$ deve soddisfare all'equazione:

$$\frac{\partial^2 g}{\partial \tau^2} + 2im \cos\theta \cdot \frac{\partial g}{\partial \tau} + m(1 - m\cos^2\theta) \cdot g = -2im \cos\theta \cdot G(m, \theta).$$

Le condizioni iniziali (9) e (10) diventano nel nostro caso, attraverso la (13),

$$g(m, \theta, 0) = 0$$

$$\frac{\partial g}{\partial \tau}(m, \theta, 0) + 2G(m, \theta) = 0$$

(¹) Si intende che se la singolarità è una doppietta m, l'asse della doppietta riflessa si ottiene riflettendo sul piano xy l'asse di m.

per cui si ricava:

$$g(m,\,\theta,\,\tau) = -2i\,\frac{G(m,\,\theta)\cdot\cos\theta}{1-m\cos^2\theta} + i\cdot G(m,\,\theta)\cdot\cos\theta\left[\frac{e^{-i(m\cos\theta-\sqrt{m})\tau}}{1-\sqrt{m}\cos\theta}+\frac{e^{-i(m\cos\theta+\sqrt{m})\tau}}{1+\sqrt{m}\cos\theta}\right]+$$

$$+\,i\,\frac{G(m,\,\theta)}{\sqrt{m}}\cdot e^{-i(m\cos\theta-\sqrt{m})\tau} \qquad i\,\frac{G(m,\,\theta)}{\sqrt{m}}\cdot e^{-i(m\cos\theta+\sqrt{m})\tau}.$$

Osserviamo che la quantità

$$\int_0^\infty \frac{G(m,\,\theta)}{\sqrt{m}}\cdot e^{-mkz+imk\omega-i(m\cos\theta\pm\sqrt{m})\tau}\cdot dm$$

tende a zero per $\tau=\infty$, come si verifica immediatamente mediante considerazioni analoghe a quelle fatte nel paragrafo precedente, di modo che si ottiene senz' altro:

$$\Phi_a^* = \Phi_2 - 2i\cdot\int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_0^\infty \frac{G(m,\,\theta)\cos\theta}{1-m\cos^2\theta}\cdot e^{-mkz+imk\omega}\cdot dm - \tag{14}$$

$$-\,2\pi\cdot\int_{-\pi}^{\pi}\frac{G\left(\dfrac{1}{\cos^2\theta},\,\theta\right)}{|\cos\theta|}\cdot e^{-\frac{kz}{\cos^2\theta}+i\frac{k\omega}{\cos^2\theta}}\cdot d\theta.$$

Circa il comportamento all' infinito del campo aggiuntivo, si osservi che il campo corrispondente al potenziale Φ_2 può ammettere scia, mentre il campo corrispondente agli altri termini di Φ_a^* è evidentemente nullo, in quanto essi hanno una forma del tutto analoga a quella dei termini della (8),

5. Particolarmente interessante è il caso del moto piano che conviene studiare direttamente, anzichè come un moto a tre dimensioni creato da una distribuzione di singolarità uniforme nel senso dell' asse z.

Supponiamo dapprima che la perturbazione sia creata da una distribuzione di sorgenti o di doppiette di potenziale Φ_1; se Φ_2 è il potenziale delle singolarità riflesse, poniamo:

$$\Phi_a = -\Phi_2 + \Phi_3$$

di modo che, essendo sull' asse x:

$$\Phi_2 = \Phi_1 \qquad \frac{\partial\Phi_2}{\partial z} = -\frac{\partial\Phi_1}{\partial z}$$

dalla (3'') si deduce che la funzione Φ_3 deve soddisfare l'equazione:

(15) $$\frac{1}{V_0^2}\frac{\partial^2\Phi_3}{\partial t^2}+\frac{2}{V_0}\frac{\partial u_3}{\partial t}+\frac{\partial u_3}{\partial x}-\frac{g}{V_0^2}w_3=2\frac{g}{V_0^2}\cdot\frac{\partial\Phi_1}{\partial z} \qquad (\text{per } z=0).$$

Ora, il valore che $\frac{\partial\Phi_1}{\partial z}$ assume sull'asse x si può sempre mettere nella forma:

$$k\int_0^\infty F(m)\cdot e^{imkx}\cdot dm$$

dove $F(m)$ ha le stesse proprietà della funzione F considerata nel paragrafo 2, così che, dando a Φ_3 l'espressione:

$$\int_0^\infty f(m,\tau)\cdot e^{-mkz+imkx}\cdot dm$$

che, nelle consuete ipotesi per la funzione f, rappresenta ovviamente una funzione armonica nel semipiano $z \geq 0$, si ha dalla (15):

$$\frac{\partial^2 f}{\partial\tau^2}+2im\frac{\partial f}{\partial\tau}+m(1-m)\cdot f=2\cdot F(m).$$

Colle condizioni iniziali:

$$f(m,0)=0 \qquad \frac{\partial f}{\partial\tau}(m,0)=0$$

si ricava:

$$f(m,\tau)=\frac{2F(m)}{m(1-m)}\cdot\left[1-\frac{1+\sqrt{m}}{2}e^{-i(m-\sqrt{m})\tau}-\frac{1-\sqrt{m}}{2}e^{-i(m+\sqrt{m})\tau}\right]$$

da cui:

(16) $$\Phi_a=-\Phi_2+2\cdot\int_0^\infty\frac{F(m)}{1-m}e^{-mkz+imkx}\cdot dm -$$

$$-\int_0^\infty F(m)\cdot\left[\frac{e^{-i(m-\sqrt{m})\tau}}{1-\sqrt{m}}+\frac{e^{-i(m+\sqrt{m})\tau}}{1+\sqrt{m}}\right]\cdot e^{-mkz+imkx}\cdot dm +$$

$$+2\int_0^\infty\frac{F(m)}{m}\left[1-\frac{1+\sqrt{m}}{2}e^{-i(m-\sqrt{m})\tau}-\frac{1-\sqrt{m}}{2}e^{-i(m+\sqrt{m})\tau}\right]\cdot e^{-mkz+imkx}\cdot dm.$$

La verifica che la velocità aggiuntiva si annulla all'infinito è immediata, in quanto grad Φ_2 è nullo per definizione, e la somma degli altri termini di Φ_a si può scrivere nella forma:

$$\int_0^\infty A(m) \cdot e^{-mkz+imkx} \cdot dm$$

dove $A(m)$ è una funzione che nell'intervallo $0, \infty$ risulta finita e continua, e ad integrale assolutamente convergente. Eseguiamo ora il passaggio al limite per $\tau = \infty$. La velocità w del campo C corrispondente all'ultimo termine della (16) ha sull'asse x l'espressione:

$$-2k\int_0^\infty F(m) \cdot \left[1 - \frac{1+\sqrt{m}}{2} \cdot e^{-i(m-\sqrt{m})\tau} - \frac{1-\sqrt{m}}{2} \cdot e^{-i(m+\sqrt{m})\tau}\right] \cdot e^{imkx} \cdot dm$$

che per $\tau = \infty$ tende al valore:

$$-2k\int_0^\infty F(m) \cdot e^{imkx} \cdot dm = 2 \cdot \frac{\partial \Phi_2}{\partial z}(x, 0)$$

per cui, essendo il campo C regolare nel semipiano $z \geq 0$, con velocità nulla all'infinito, si può senz'altro concludere che esso tende per $\tau = \infty$ al campo di potenziale $2\Phi_2$. Dalle considerazioni del paragrafo 3 risulta poi:

$$\lim_{\tau=\infty} \int_0^\infty \frac{F(m)}{1 \mp \sqrt{m}} \cdot e^{-mkz+imkx-i)m \mp \sqrt{m})\tau} \cdot dm = \left| \begin{array}{l} 2\pi i \cdot F(1) \cdot e^{-kz+ikx} \\ 0 \end{array} \right.$$

e quindi si ottiene:

$$\Phi_a^* = \Phi_2 + 2\int_0^\infty \frac{F(m)}{1-m} \cdot e^{-mkz+imkx} \cdot dm - 2\pi i \cdot F(1) \cdot e^{-kz+ikx}. \tag{17}$$

È interessante esaminare il comportamento di grad Φ_a^* all'infinito, in quanto si trova una scia. Per $z = \infty$ è evidente che grad Φ_a^* è nullo; supponendo z finito, possiamo scrivere Φ_a^* nella forma:

$$\Phi_2 - 2F(1) \cdot e^{-kz+ikx} \cdot \int_{-1}^\infty \frac{e^{ikx \cdot u}}{u} du - 2\pi i \cdot F(1) \cdot e^{-kz+ikx} + \int_0^\infty B(m) \cdot e^{imkz} \cdot dm$$

in cui l'ultimo termine si annulla ovviamente, insieme colle sue derivate, per $x = \pm \infty$. Ora, è:

$$\lim_{x=\pm\infty} \int_{-1}^\infty \frac{e^{ikx \cdot u}}{u} du = \pm \pi i$$

sicchè risulta evidente che grad $\Phi_a{}^*$ è nullo per $x = -\infty$, cioè *a monte* dell'ostacolo, mentre per $x = +\infty$, cioè a *valle*, ha l'espressione finita:

$$-4\pi i \cdot F(1) \cdot \text{grad}\, e^{-kz+ikx}.$$

Supponiamo ora che la perturbazione sia creata da una distribuzione di singolarità di pressione. Il potenziale dell'accelerazione φ_1 deve annullarsi all'infinito, e quindi possiamo scrivere il valore che esso assume sull'asse x nella forma:

$$\varphi_1(x, 0) = kV_0 \cdot \int_0^\infty G(m) \cdot e^{imkx} \cdot dm$$

in cui $G(m)$ ha le stesse proprietà della funzione $F(m)$. Indicando ancora con Φ_2 il potenziale di velocità delle singolarità riflesse, poniamo:

$$\Phi_a = \Phi_2 + \int_0^\infty g(m, \tau) \cdot e^{-mkz+imkx} \cdot dm$$

di modo che $g(m, \tau)$ si ottiene ovviamente dall'espressione di $g(m, \theta, \tau)$ data nel paragrafo 4, semplicemente ponendo 1 in luogo di $\cos\theta$. Risulta così, passando al limite per $\tau = \infty$,

$$\Phi_a{}^* = \Phi_2 - 2i \cdot \int_0^\infty \frac{G(m)}{1-m} \cdot e^{-mkz+imkx} \cdot dm - 2\pi \cdot G(1) \cdot e^{-kz+ikx} \tag{18}$$

Il comportamento all'infinito del campo aggiuntivo è analogo a quello trovato nel caso precedente, colla sola differenza che, ora, anche il campo di potenziale Φ_2 può ammettere scia. Si ha pertanto:

$$[\text{grad}\, \Phi_a{}^*]_{x=+\infty} = [\text{grad}\, \Phi_2]_{x=+\infty} - 4\pi \cdot G(1) \cdot \text{grad}\, e^{-kz+ikx}$$

Il problema a due dimensioni può anche essere risolto in modo molto semplice [1], senza introdurre una forza d'attrito o ricorrere alla considerazione del moto vario, dato che nel piano, a differenza di quanto avviene nello spazio, le condizioni *a*), *b*), *c*) sono sufficienti a rendere il problema determinato. Difatti, la funzione che nel campo a due dimensioni corrisponde alla $\overline{\Phi}$ definita nel paragrafo 2, è:

$$\overline{\Phi}(x, z) = C \cdot e^{-kz+ikx}$$

---

[1] Cfr. Lamb: *Hydrodinamics*, cap. IX, in cui si tratta il caso della doppietta.

la quale però dà luogo ad una velocità che per $x = -\infty$ non si annulla: risulta così che il problema piano è indeterminato soltanto in quanto non si tenga conto della condizione *b)* (1). Limitandoci, per semplicità, a considerare il caso di una distribuzione di sorgenti o di doppiette, poniamo il potenziale aggiuntivo nella forma:

$$\Phi_a = \Phi_2 + \int_0^\infty f(m) \cdot e^{-mkz+imkx} \cdot dm + C \cdot e^{-kz+ikx}$$

che, sotto le solite condizioni per f, rappresenta una funzione armonica nel semipiano $z \geq 0$. Introducendo nella (3) la funzione $\Phi_1 + \Phi_a$, si ottiene:

$$f(m) = \frac{2F(m)}{1-m}$$

e quindi:

$$\Phi_a = \Phi_2 + 2\int_0^\infty \frac{F(m)}{1-m} \cdot e^{-mkz+imkx} \cdot dm + C \cdot e^{-kz+ikx}$$

in cui compare la costante indeterminata C. Ora è:

$$[\operatorname{grad} \Phi_a]_{x=-\infty} = (C + 2\pi i \cdot F(1)) \cdot \operatorname{grad} e^{-kz+ikx}$$

da cui, per annullare il campo addizionale all'infinito a monte dell'ostacolo, si ricava:

$$C = -2\pi i \cdot F(1)$$

e pertanto l'espressione di Φ_a viene a coincidere colla (17).

---

(1) Si osservi che per rendere del tutto rigorose queste considerazioni, sarebbe necessario dimostrare che l'espressione data per $\Phi(x, z)$ è l'*unica* funzione armonica per $z \geq 0$ che soddisfi alla (3), ciò che non risulta sia stato fatto.