Sulla magnetizzazione di un cilindro di lunghezza finita in presenza di un campo magnetico qualsiasi.

Memoria di CATALDO AGOSTINELLI (a Torino).

Sunto. - *Si studia il problema del magnetismo indotto in un cilindro circolare di lunghezza finita, per influenza di un campo magnetico qualsiasi, riducendo la questione alla risoluzione di equazioni integrali e si deduce la risoluzione esplicita nel caso del cilindro di lunghezza infinita, già considerato da* KIRCHHOFF.

Si risolve anche esplicitamente il caso in cui il cilindro di lunghezza finita diventi di sezione tanto piccola da poterlo considerare un filo.

1. Lo studio della magnetizzazione di un corpo in un campo magnetico qualsiasi presenta certamente un alto interesse, e per quanto i metodi generali per la risoluzione del problema siano ben noti in seguito alle ricerche teoriche iniziate da POISSON [1], pur tuttavia la effettiva risoluzione del problema è stata effettuata soltanto in pochi casi.

Il primo caso considerato, e risolto dallo stesso POISSON, coll'impiego delle funzioni sferiche, fu quello della magnetizzazione di una sfera piena o cava in un campo qualunque [2].

La risoluzione fu resa poi più perfetta da NEUMANN [3], che ne fece diverse applicazioni, ed estese quindi il metodo al caso di un ellissoide di rivoluzione qualunque [4].

---

(1) POISSON, *Mémoire sur la théorie du magnétisme*, (« Mémoires de l'Académie des Sciences », Paris, 1821-1822, T. V).

(2) POISSON, loco citato. Vedi anche: E. BETTI, *Teorica delle forze newtoniane*, (Pisa, Tip. Nistri e C., 1879); P. DUHEM, *Leçons sur l'électricité et le magnetisme*, t. II (Paris, Gauthier-Villars & Fils, 1892).

(3) F. E. NEUMANN, *Vorlesungen über die Theorie des Magnetismus, namentlich über die Theorie der magnetischen Induction* (Leipzig, 1881).

(4) F. E. NEUMANN, *Entwickelung der in elliptischen Coordinaten aussgedrückten reciprochen Entfernung zweier Punkte in Reihen, welche nach Laplace'schen $Y^{(n)}$ fortschreiten; und Anwendung dieser Reihen zur Bestimmung des magnetischen Zustandes eines Rotations-Ellipsoïdes welches durch vertheilende Kräfte erregt ist* (« Journal für die reine und angewandte Mathematic », herausgegeben von Crelle, Bd. 37, Berlin, 1848).

Il problema dell'induzione magnetica per una sfera isotropa fu anche risolto, per mezzo di integrali definiti, da C. SOMIGLIANA (« Rendiconti del R. Istituto Lombardo », serie 2ª, vol. 36; adunanza del 17 dicembre 1903), e quasi contemporaneamente da T. BOGGIO (« Ren

Il problema dell'induzione magnetica di un ellissoide a tre assi in un campo qualunque fu invece risolto da LIPSCHITZ (5).

Nel caso dell'ellissoide di rotazione, se si fa crescere l'asse maggiore dell'ellisse meridiana, lasciando fisso il centro e l'asse minore, esso si trasforma in un cilindro indefinito; ma in generale le formule stabilite da NEUMANN perdono ogni significato quando l'asse maggiore dell'ellisse meridiana cresce indefinitamente. Perciò il problema della magnetizzazione di un cilindro circolare indefinito va trattato direttamente, ciò che fu fatto da KIRCHHOFF in una importante Memoria (6).

Molto più difficile invece si presenta il problema dell'induzione di un cilindro circolare di lunghezza finita in un campo magnetico qualsiasi, per la risoluzione del quale non è neanche possibile utilizzare il metodo adoperato da KIRCHHOFF.

La maggiore difficoltà si intuisce subito se si pensa che mentre nel caso del cilindro indefinito, agli effetti della discontinuità della derivata normale del potenziale del magnetismo indotto, va considerata soltanto la superficie laterale, nel caso invece del cilindro di lunghezza finita vanno considerate ancora le due basi circolari.

Va notato inoltre che, mentre nel caso del cilindro indefinito, per l'espressione del potenziale indotto si possono adoperare, come fa KIRCHHOFF, nello spazio interno al cilindro funzioni (di BESSEL), che sono regolari nei punti dell'asse, e nello spazio esterno funzioni che sono singolari nei punti dell'asse e si annullano all'infinito, ciò non è più possibile nel caso del cilindro di lunghezza finita.

Questo caso va perciò trattato a sè e con un metodo completamente diverso ed è ciò che ho fatto in questo lavoro.

Per la risoluzione della questione ho considerato soltanto le funzioni di BESSEL di prima specie e mi sono stati di valido aiuto il noto *teorema di reciprocità di Hankel* (7), e l'analogo *teorema di reciprocità di Fourier*, che

diconti del R. Istituto Lombardo », vol. 37; adunanza del 28 gennaio 1904). Un'altra soluzione assai semplice fu data da quest'ultimo Autore in una Nota del « Nuovo Cimento » (serie V, vol. XI, marzo 1906).

(5) LIPSCHITZ, *Determinatio status magnetici viritus inducentibus commoti in ellipsoide* (« Dissertation », Berlin, 1853).

(6) G. KIRCHHOFF, *Ueber den inducirten Magnetismus eines unbegrenzten Cylinders von weichem Eisen* (« Journal von Crelle », Bd. 48, 1854).

(7) H. HANKEL, *Die Fourier'schen Reihen und Integrale für Cylinderfunctionen* (« Mathematische Annalen », Bd. VIII, 1875, p. 471). Vedi anche: N. SONINE, *Recherches sur les fonctions cylindriques et le développement des fonctions continues en séries* (« Mathematische Annalen », Bd. XVI, 1880, p. 1).

sono entrambi due veri e propri gioielli dell'*Analisi*, il primo dei quali non è stato forse ancora sufficientemente valorizzato nelle applicazioni alla Fisica-matematica.

Della trasformazione di HANKEL ebbi già ad usufruirne in altro mio lavoro, dandone una notevole estensione (8), e in essa ebbe anche ad incontrarsi il BELTRAMI nelle sue ricerche sulle funzioni potenziali simmetriche (9).

In tal modo la questione, nel caso del cilindro di lunghezza finita, è stata ridotta alla risoluzione di equazioni integrali del tipo

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty [\lambda_n(\sigma)\,\mathrm{sen}\,(\sigma z) - \mu_n(\sigma, z)] H_n(\sigma) d\sigma = f_n(z), \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

ove $H_n(\sigma)$ è la funzione incognita, $f_n(z)$ è funzione nota, e $\lambda_n(\sigma)\cdot\mathrm{sen}\,(\sigma z) - \mu_n(\sigma, z)$ è il *nucleo* dell'equazione integrale, e ad altre ove invece di sen(σz), vi è cos(σz).

Quando il cilindro diventa di lunghezza infinita si presenta la fortunata circostanza che le funzioni $\mu_n(\sigma, z)$ si annullano tutte e le suddette equazioni diventano del tipo di FOURIER, per cui, in virtù del corrispondente teorema di reciprocità, restano immediatamente determinate le funzioni incognite e il problema, in questo caso, è così risolto in modo esplicito.

È opportuno rilevare la profonda differenza fra il metodo qui seguito e quello adoperato da KIRCHHOFF, il quale si serve, non propriamente delle funzioni di BESSEL, ma delle funzioni cilindriche che ad esse sono legate moltiplicandone il parametro (raggio vettore ρ), per l'unità immaginaria, e considera, internamente al cilindro, quelle che per $\rho \to \infty$ diventano infinite, e per $\rho = 0$ si annullano, ed esternamente al cilindro quelle che sono singolari per $\rho = 0$ e si annullano all'infinito. Nel mio lavoro non è stata necessaria la considerazione di questi due tipi di funzioni; non solo, ma mentre il metodo di KIRCHHOFF richiede lo sviluppo del potenziale U delle forze magnetiche inducenti in funzioni dello stesso tipo di quelle a cui dianzi ho accennato, la qualcosa, come si comprende facilmente, è, nei casi concreti, tutt'altro che agevole, qui invece l'unico sviluppo che richiede la funzione $U(\rho, \theta, z)$, è quello in serie di FOURIER dell'argomento θ.

Come caso particolare ho considerato anche quello in cui la sezione del cilindro, di lunghezza finita, sia sufficientemente piccola da poterlo considerare un filo col magnetismo indotto distribuito lungo il suo asse. In questo

(8) C. AGOSTINELLI, *Sulla propagazione elettromagnetica simmetrica rispetto a un asse* (« Annali di Matematica pura ed applicata », Serie IV, T. XVII, 1938, p. 255).

(9) E. BELTRAMI, *Sulla teoria delle funzioni potenziali simmetriche* (« Opere Matematiche », vol. III).

caso il problema è stato anche risolto esplicitamente e ne ho fatto l'applicazione al caso particolare in cui il campo magnetico inducente sia quello di un dipolo disposto parallelamente e simmetricamente rispetto all'asse del filo.

2. Il problema della magnetizzazione di un cilindro circolare S di lunghezza finita per effetto di forze magnetiche aventi il potenziale U e che supponiamo emananti da punti esterni ad S, si può notoriamente ricondurre, come del resto per un corpo qualsiasi, a determinare la funzione potenziale V del magnetismo indotto in modo che essa soddisfi alle seguenti proprietà caratteristiche [10]:

1°) che sia finita e continua in tutto lo spazio e moltiplicata per il raggio vettore r del punto a cui il suo valore si riferisce, si annulli all'infinito;

2°) le sue derivate prime siano finite in tutto lo spazio e si annullino all'infinito, siano inoltre continue in tutto lo spazio, fuori che attraverso la superficie σ che limita il corpo S, ove devono soddisfare all'equazione di discontinuità

$$\frac{\partial V_e}{\partial n} - \frac{\partial V_i}{\partial n} = 4\pi k \frac{\partial (U + V_i)}{\partial n}, \tag{1}$$

essendo V_e il valore di V nello spazio esterno alla superficie σ, V_i il valore nello spazio interno a σ, n è la normale esterna a σ e k è il *coefficiente di suscettività magnetica* del corpo considerato;

3°) la funzione V deve soddisfare in tutto lo spazio all'equazione di Laplace

$$\Delta_2 V = 0. \tag{2}$$

Determinata la funzione V, l'*intensità della magnetizzazione* $\boldsymbol{I}$ (o momento magnetico per unità di volume degli elementi di S), sarà espressa da

$$\boldsymbol{I} = k \operatorname{grad} (U + V),$$

e in ogni punto interno di S, se non vi sono masse magnetiche localizzate, come qui supponiamo, dovrà risultare

$$\operatorname{div} \boldsymbol{I} = 0, \tag{3}$$

cioè la distribuzione del magnetismo indotto sarà *solenoidale*.

Per risolvere la questione nel modo più semplice osserviamo ancora che, com'è noto dalla teoria del magnetismo, la funzione V sarà data da

$$V = -\int_S \boldsymbol{I} \times \operatorname{grad} \frac{1}{r} \cdot dS, \tag{4}$$

---

[10] Vedi E. Betti, loco citato.

Ora si ha

$$\operatorname{div}\left(\frac{1}{r}\,\boldsymbol{I}\right) = \frac{1}{r}\operatorname{div}\boldsymbol{I} + \boldsymbol{I}\times\operatorname{grad}\frac{1}{r},$$

e quindi per la (3)

$$\boldsymbol{I}\times\operatorname{grad}\frac{1}{r} = \operatorname{div}\left(\frac{1}{r}\,\boldsymbol{I}\right).$$

Sostituendo nella (4), per il teorema della divergenza essa diventa

$$V = -\int_\sigma \boldsymbol{I}\times\boldsymbol{n}\cdot\frac{d\sigma}{r}, \tag{5}$$

ove $\boldsymbol{n}$ è il *versore* della normale esterna a σ. La funzione che si cerca si può perciò considerare come il potenziale di una distribuzione superficiale di magnetismo indotto.

3. Ciò premesso assumiamo come asse z l'asse del cilindro, il cui raggio indichiamo con a e la lunghezza con $2c$; poniamo l'origine degli assi nel centro del cilindro e riferiamoci a coordinate polari ρ, θ, z. Indichiamo ancora con $\boldsymbol{k}$ il versore dell'asse z, con σ_1 la base del cilindro dalla parte della direzione positiva dell'asse z, con σ_2 la base dalla parte della direzione negativa di z, e con σ la superficie laterale. I versori $\boldsymbol{n}_1$ ed $\boldsymbol{n}_2$ delle normali esterne alle basi σ_1 e σ_2 del cilindro, saranno allora

$$\boldsymbol{n}_1 = \boldsymbol{k}, \quad \boldsymbol{n}_2 = -\boldsymbol{k},$$

ed il versore $\boldsymbol{n}$ della normale esterna alla superficie laterale σ, sarà dato da

$$\boldsymbol{n} = \operatorname{grad}\rho.$$

Pertanto nel nostro caso la (5) porge

$$V = \int_{\sigma_2}\boldsymbol{I}\times\boldsymbol{k}\cdot\frac{d\sigma_2}{r_2} - \int_{\sigma_1}\boldsymbol{I}\times\boldsymbol{k}\cdot\frac{d\sigma_1}{r_1} - \int_\sigma \boldsymbol{I}\times\operatorname{grad}\rho\cdot\frac{d\sigma}{r}. \tag{6}$$

Sia ora $Q_1(u, \varphi, c)$ un punto di σ_1, di coordinate cilindriche (u, φ, c), con $0 \leq u \leq a$, e $0 \leq \varphi \leq 2\pi$; sia $Q_2(u, \varphi, -c)$ un punto di σ_2; $Q(a, \varphi, \zeta)$ un punto della superficie laterale σ, con $-c \leq \zeta \leq c$, e $P(\rho, \theta, z)$ il punto potenziante. Risulta evidentemente

$$\left\{\begin{aligned} r_1 &= \overline{PQ_1} = \sqrt{(z-c)^2 + \rho^2 + u^2 - 2u\rho\cos(\varphi-\theta)}, \\ r_2 &= \sqrt{(z+c)^2 + \rho^2 + u^2 - 2u\rho\cos(\varphi-\theta)}, \\ r &= \sqrt{(z-\zeta)^2 + a^2 + \rho^2 - 2a\rho\cos(\varphi-\theta)}, \end{aligned}\right. \tag{7}$$

ed inoltre si ha

$$d\sigma_1 = d\sigma_2 = u du d\varphi, \quad d\sigma = a d\varphi d\zeta.$$

Posto allora

$$(\boldsymbol{I} \times \operatorname{grad} \rho)_\sigma = I(\varphi, \zeta), \quad (\boldsymbol{I} \times \boldsymbol{k})_{\sigma_1} = I_1(u, \varphi), \quad (\boldsymbol{I} \times \boldsymbol{k})_{\sigma_2} = I_2(u, \varphi),$$

la (6) diventa

$$(8) \qquad V(\rho, \theta, z) = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a \frac{I_2(u, \varphi) u du}{\sqrt{(z+c)^2 + \rho^2 + u^2 - 2u\rho\cos(\varphi-\theta)}} -$$

$$- \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a \frac{I_1(u, \varphi) u du}{\sqrt{(z-c)^2 + \rho^2 + u^2 - 2u\rho\cos(\varphi-\theta)}} -$$

$$- a \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-c}^{c} \frac{I(\varphi, \zeta) d\zeta}{\sqrt{(z-\zeta)^2 + a^2 + \rho^2 - 2a\rho\cos(\varphi-\theta)}}.$$

La questione è così ridotta a determinare le componenti superficiali della magnetizzazione $I_1(u, \varphi)$, $I_2(u, \varphi)$, $I(\varphi, \zeta)$, in modo che le derivate della funzione V soddisfino alla condizione di discontinuità (1).

4. Per conseguire lo scopo prefisso sviluppiamo $\frac{1}{r_1}, \frac{1}{r_2}, \frac{1}{r}$ in serie di FOURIER, secondo l'argomento $(\varphi - \theta)$, nell'intervallo $(0, 2\pi)$; si avrà così:

$$\frac{1}{r_1} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\Phi}{\sqrt{(z-c)^2 + u^2 + \rho^2 - 2u\rho\cos\Phi}} +$$

$$+ 2 \sum_1^\infty{}_n \cos n(\varphi - \theta) \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos n\Phi d\Phi}{\sqrt{(z-c)^2 + u^2 + \rho^2 - 2u\rho\cos\Phi}} \right),$$

cioè per la formula di LIPSCHITZ

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos n\Phi d\Phi}{\sqrt{h^2 + x^2 + y^2 - 2xy\cos\Phi}} = \int_0^\infty e^{\mp hs} J_n(sx) J_n(sy) ds,$$

ove J_n è la *funzione di Bessel di 1ª specie* e di ordine n, risulta

$$\frac{1}{r_1} = \int_0^\infty e^{\mp s(z-c)} J_0(s\rho) J_0(su) ds + 2 \sum_1^\infty{}_n \cos n(\varphi - \theta) \int_0^\infty e^{\mp s(z-c)} J_n(s\rho) J_n(su) ds,$$

e analogamente

$$\frac{1}{r_2}=\int_0^\infty e^{\mp s(z+c)}J_0(s\rho)J_0(su)ds+2\sum_1^\infty{}_n\cos n(\varphi-\theta)\int_0^\infty e^{\mp s(z+c)}J_n(s\rho)J_n(su)ds,$$

$$\frac{1}{r}=\int_0^\infty e^{\mp s(z-\zeta)}J_0(s\rho)J_0(sa)ds+2\sum_1^\infty{}_n\cos n(\varphi-\theta)\int_0^\infty e^{\mp s(z-\zeta)}J_n(s\rho)J_n(sa)ds,$$

ove negli esponenziali $e^{\mp s(z-c)}$, $e^{\mp s(z+c)}$, $e^{\mp s(z-\zeta)}$, va scelto il segno — rispettivamente per $z>c$, $z>-c$, $z>\zeta$; e va scelto il segno + rispettivamente per $z<c$, $z<-c$, $z<\zeta$.

Dimodoche, sostituendo nella (8), e indicando con $V_{z>c}$, $V_{z^2<c^2}$, $V_{z<-c}$, il valore della funzione V, rispettivamente per $z>c$; $-c<z<c$, $(z^2<c^2)$; $z<-c$, si ottiene

$$V_{z>c}=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^a I_2(u,\varphi)udu\left\{\int_0^\infty e^{-s(z+c)}J_0(s\rho)J_0(su)ds+\right.$$
$$\left.+2\sum_1^\infty{}_n\cos n(\varphi-\theta)\int_0^\infty e^{-s(z+c)}J_n(s\rho)J_n(su)ds\right\}-$$
$$-\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^a I_1(u,\varphi)udu\left\{\int_0^\infty e^{-s(z-c)}J_0(s\rho)J_0(su)ds+\right.$$
$$\left.+2\sum_1^\infty{}_n\cos n(\varphi-\theta)\int_0^\infty e^{-s(z-c)}J_n(s\rho)J_n(su)ds\right\}-$$
$$-a\int_0^{2\pi}d\varphi\int_{-c}^c I(\varphi,\zeta)d\zeta\left\{\int_0^\infty e^{-s(z-\zeta)}J_0(s\rho)J_0(sa)ds+\right.$$
$$\left.+2\sum_1^\infty{}_n\cos n(\varphi-\theta)\int_0^\infty e^{-s(z-\zeta)}J_n(s\rho)J_n(sa)ds\right\}, \tag{9}$$

$$V_{z^2<c^2}=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^a I_2(u,\varphi)udu\left\{\int_0^\infty e^{-s(z+c)}J_0(s\rho)J_0(su)ds+\right.$$
$$\left.+2\sum_1^\infty{}_n\cos n(\varphi-\theta)\int_0^\infty e^{-s(z+c)}J_n(s\rho)J_n(su)ds\right\}- \tag{10}$$

$$
\begin{aligned}
&-\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a I_1(u,\varphi)u\,du \Big\{ \int_0^\infty e^{-s(c-z)} J_0(s\rho)J_0(su)ds \,+ \\
&\qquad + 2\sum_1^\infty{}_n \cos n(\varphi-\theta) \int_0^\infty e^{-s(c-z)} J_n(s\rho)J_n(su)ds \Big\} \,- \\
&- a\int_0^{2\pi} d\varphi \Big[\int_{-c}^{z} I(\varphi,\zeta)d\zeta \Big\{ \int_0^\infty e^{-s(z-\zeta)} J_0(s\rho)J_0(sa)ds \,+ \\
&\qquad + 2\sum_1^\infty{}_n \cos n(\varphi-\theta) \int_0^\infty e^{-s(z-\zeta)} J_n(s\rho)J_n(sa)ds \Big\} \,+ \\
&+ \int_z^c I(\varphi,\zeta)d\zeta \Big\{ \int_0^\infty e^{-s(\zeta-z)} J_0(s\rho)J_0(sa)ds \,+ \\
&\qquad + 2\sum_1^\infty{}_n \cos n(\varphi-\theta) \int_0^\infty e^{-s(\zeta-z)} J_n(s\rho)J_n(sa)ds \Big\} \Big],
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(11)\qquad V_{z<-c} = &\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a I_2(u,\varphi)u\,du \Big\{ \int_0^\infty e^{s(z+c)} J_0(s\rho)J_0(su)ds \,+ \\
&\qquad + 2\sum_1^\infty{}_n \cos n(\varphi-\theta) \int_0^\infty e^{s(z+c)} J_n(s\rho)J_n(su)ds \Big\} \,- \\
&-\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a I_1(u,\varphi)u\,du \Big\{ \int_0^\infty e^{-s(c-z)} J_0(s\rho)J_0(su)ds \,+ \\
&\qquad + 2\sum_1^\infty{}_n \cos n(\varphi \quad \theta) \int_0^\infty e^{-s(c-z)} J_n(s\rho)J_n(su)ds \Big\} \,- \\
&- a\int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-c}^{c} I(\varphi,\zeta)d\zeta \Big\{ \int_0^\infty e^{-s(\zeta-z)} J_0(s\rho)J_0(sa)ds \,+ \\
&\qquad + 2\sum_1^\infty{}_n \cos n(\varphi-\theta) \int_0^\infty e^{-s(\zeta-z)} J_n(s\rho)J_n(sa)ds \Big\}.
\end{aligned}
$$

Si vede facilmente che questi valori della funzione V sono finiti e continui in tutto lo spazio, compreso anche attraverso la superficie σ_1, σ_2 e σ, e si annullano all'infinito; mentre, come vedremo, si ha discontinuità, attraverso σ_1, delle derivate prime rispetto a z di $V_{z>c}$ e $V_{z^2<c^2}$; discontinuità attraverso σ_2 delle derivate prime rispetto a z di $V_{z^2<c^2}$ e $V_{z<-c}$; e infine discontinuità della derivata prima rispetto a ρ di $V_{z^2<c^2}$, per $\rho = a$.

5. Trasformiamo le espressioni (9), (10), (11) della funzione potenziale V sviluppando in serie di FOURIER, secondo l'argomento φ, da zero a 2π, le componenti superficiali della magnetizzazione $I_1(u, \varphi)$, $I_2(u, \varphi)$, $I(\varphi, \zeta)$, e poniamo

$$(12)\qquad \begin{aligned} I_1(u, \varphi) &= \sum_0^\infty {}_m \, [A_m(u) \cos m\varphi + B_m(u) \,\mathrm{sen}\, m\varphi],\\ I_2(u, \varphi) &= \sum_0^\infty {}_m \, [C_m(u) \cos m\varphi + D_m(u) \,\mathrm{sen}\, m\varphi],\\ I(\varphi, \zeta) &= \sum_0^\infty {}_m \, [E_m(\zeta) \cos m\varphi + F_m(\zeta) \,\mathrm{sen}\, m\varphi], \end{aligned}$$

con $B_0(u) = D_0(u) = 0$, ed $F_0(\zeta) = 0$.

Sostituendo nelle relazioni precedenti, osservando che

$$\int_0^{2\pi} \cos m\varphi \cos n(\varphi - \theta) d\varphi = \begin{cases} \pi \cos n\theta, & \text{per} \quad m = n, \\ 0 \quad , & \quad \text{»} \quad\; m \neq n, \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{sen}\, m\varphi \cos n(\varphi - \theta) d\varphi = \begin{cases} \pi \,\mathrm{sen}\, n\theta, & \text{per} \quad m = n, \\ 0 \quad , & \quad \text{»} \quad\; m \neq n, \end{cases} \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

e ponendo per semplicità

$$(13)\qquad \begin{aligned} \alpha_n(s) &= \int_0^a A_n(u) J_n(su) u\,du,\\ \beta_n(s) &= \int_0^a B_n(u) J_n(su) u\,du,\\ \gamma_n(s) &= \int_0^a C_n(u) J_n(su) u\,du,\\ \delta_n(s) &= \int_0^a D_n(u) J_n(su) u\,du, \end{aligned}$$

con $\beta_0(s) = \delta_0(s) = 0$, si ottiene facilmente

$$(14)\qquad V_{z>c} = 2\pi \sum_0^\infty {}_n \int_0^\infty e^{-s(z+c)} J_n(s\rho) ds [\gamma_n(s) \cos n\theta + \delta_n(s) \,\mathrm{sen}\, n\theta] -$$

$$-2\pi \sum_0^\infty{}_n \int_0^\infty e^{-s(z-c)} J_n(s\rho) ds [\alpha_n(s) \cos n\theta + \beta_n(s) \operatorname{sen} n\theta] -$$

$$-2\pi a \sum_0^\infty{}_n \int_0^\infty e^{-sz} J_n(s\rho) J_n(sa) ds \left[\cos n\theta \int_{-c}^{c} e^{s\zeta} E_n(\zeta) d\zeta + \operatorname{sen} n\theta \int_{c}^{c} e^{s\zeta} F_n(\zeta) d\zeta\right],$$

$$V_{z^2<c^2} = 2\pi \sum_0^\infty{}_n \int_0^\infty e^{-s(z+c)} J_n(s\rho) ds [\gamma_n(s) \cos n\theta + \delta_n(s) \operatorname{sen} n\theta] - \tag{15}$$

$$-2\pi \sum_0^\infty{}_n \int_0^\infty e^{-s(c-z)} J_n(s\rho) ds [\alpha_n(s) \cos n\theta + \beta_n(s) \operatorname{sen} n\theta] -$$

$$-2\pi a \sum_0^\infty{}_n \int_0^\infty J_n(s\rho) J_n(sa) ds \left\{ \left[\int_{-c}^{z} e^{-s(z-\zeta)} E_n(\zeta) d\zeta + \int_{z}^{c} e^{-s(\zeta-z)} E_n(\zeta) d\zeta \right] \cos n\theta + \right.$$

$$\left. + \left[\int_{-c}^{z} e^{-s(z-\zeta)} F_n(\zeta) d\zeta + \int_{z}^{c} e^{-s(\zeta-z)} F_n(\zeta) d\zeta \right] \operatorname{sen} n\theta \right\},$$

$$V_{z<-c} = 2\pi \sum_0^\infty{}_n \int_0^\infty e^{s(z+c)} J_n(s\rho) ds [\gamma_n(s) \cos n\theta + \delta_n(s) \operatorname{sen} n\theta] - \tag{16}$$

$$-2\pi \sum_0^\infty{}_n \int_0^\infty e^{-s(c-z)} J_n(s\rho) ds [\alpha_n(s) \cos n\theta + \beta_n(s) \operatorname{sen} n\theta] -$$

$$-2\pi a \sum_0^\infty{}_n \int_0^\infty e^{sz} J_n(s\rho) J_n(sa) ds \left[\cos n\theta \int_{-c}^{c} e^{-s\zeta} E_n(\zeta) d\zeta + \operatorname{sen} n\theta \int_{-c}^{c} e^{-s\zeta} F_n(\zeta) d\zeta\right].$$

6. Incominciamo ora a sviluppare le condizioni di discontinuità della derivata normale della funzione V attraverso le basi σ_1 e σ_2 del cilindro e per intanto osserviamo che al potenziale $U(\rho, \theta, z)$ del campo magnetico inducente, le cui derivate saranno continue attraverso la superficie che limita il cilindro, si può assegnare lo sviluppo

$$U = U_0(\rho, z) + \sum_1^\infty{}_n [U_n(\rho, z) \cos n\theta + W_n(\rho, z) \operatorname{sen} n\theta]. \tag{17}$$

Sulla base σ_1 si avrà poi

$$\frac{\partial V_e}{\partial n} = \left(\frac{\partial V_{z>c}}{\partial z}\right)_{z\to c}, \quad \frac{\partial V_i}{\partial n} = \left(\frac{\partial V_{z^2<c^2}}{\partial z}\right)_{z\to c}, \qquad \rho < a,$$

e pertanto la condizione (1) diventa

$$(18)\qquad \left(\frac{\partial V_{z>c}}{\partial z}\right)_{z\to c} - \left(\frac{\partial V_{z^2<c^2}}{\partial z}\right)_{z\to c} = (\mu-1)\left[\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)_{z=c} + \left(\frac{\partial V_{z^2<c^2}}{\partial z}\right)_{z\to c}\right], \qquad \rho < a,$$

ove si è indicata con

$$\mu = 1 + 4\pi k$$

la *permeabilità magnetica* del cilindro.

Ora dalla dalle (14) e (15) si ricava

$$(19)\qquad \left(\frac{\partial V_{z>c}}{\partial z}\right)_{z\to c} = -2\pi \sum_0^\infty{}_n \int_0^\infty e^{-2sc} J_n(s\rho) s ds [\gamma_n(s)\cos n\theta + \delta_n(s) \operatorname{sen} n\theta] +$$

$$+ 2\pi \sum_0^\infty{}_n \int_0^\infty J_n(s\rho) s ds [\alpha_n(s) \cos n\theta + \beta_n(s) \operatorname{sen} n\theta] +$$

$$+ 2\pi a \sum_0^\infty{}_n \int_0^\infty J_n(s\rho) J_n(sa) s ds \left[\cos n\theta \int_{-c}^{c} e^{-s(c-\zeta)} E_n(\zeta) d\zeta + \operatorname{sen} n\theta \int_{-c}^{c} e^{-s(c-\zeta)} F_n(\zeta) d\zeta\right],$$

$$(19')\qquad \left(\frac{\partial V_{z_2<c^2}}{\partial z}\right)_{z\to c} = -2\pi \sum_0^\infty{}_n \int_0^\infty e^{-2sc} J_n(s\rho) s ds [\gamma_n(s)\cos n\theta + \delta_n(s) \operatorname{sen} n\theta] -$$

$$- 2\pi \sum_0^\infty{}_n \int_0^\infty J_n(s\rho) s ds [\alpha_n(s) \cos n\theta + \beta_n(s) \operatorname{sen} n\theta] +$$

$$+ 2\pi a \sum_0^\infty{}_n \int_0^\infty J_n(s\rho) J_n(sa) s ds \left[\cos n\theta \int_{-c}^{c} e^{-s(c-\zeta)} E_n(\zeta) d\zeta + \operatorname{sen} n\theta \int_{-c}^{c} e^{-s(c-\zeta)} F_n(\zeta) d\zeta\right],$$

e quindi

$$(20)\qquad \left(\frac{\partial V_{z>c}}{\partial z}\right)_{z\to c} - \left(\frac{\partial V_{z^2>c^2}}{\partial z}\right)_{z\to c} = 4\pi \sum_0^\infty{}_n \int_0^\infty J_n(s\rho) s ds [\alpha_n(s)\cos n\theta + \beta_n(s) \operatorname{sen} n\theta].$$

Prima di sostituire nella (18) osserviamo che se si tien conto dei valori (13) dei coefficienti $\alpha_n(s)$, $\beta_n(s)$, $\gamma_n(s)$, $\delta_n(s)$, per *il teorema di reciprocità di Hankel* [11],

---

[11] Questo teorema dice in sostanza che la soluzione dell'equazione integrale

$$\int_0^\infty f_n(s) J_n(s\rho) s ds = \begin{cases} g_n(\rho), & \text{per } \rho < a, \\ 0 & \text{»} \quad \rho > a, \quad n > -\frac{1}{2}, \end{cases}$$

risulta, per $\rho < a$,

$$
(21)\qquad
\begin{aligned}
&\int_0^\infty \alpha_n(s)J_n(s\rho)sds = A_n(\rho),\\
&\int_0^\infty \beta_n(s)J_n(s\rho)sds = B_n(\rho),\\
&\int_0^\infty \gamma_n(s)J_n(s\rho)sds = C_n(\rho),\\
&\int_0^\infty \delta_n(s)J_n(s\rho)sds = D_n(\rho).
\end{aligned}
$$

mentre per $\rho > a$ questi integrali sono tutti nulli. Allora la (20), in virtù delle posizioni (12), porge

$$
(20')\qquad \left(\frac{\partial V_{z>c}}{\partial z}\right)_{z\to c} - \left(\frac{\partial V_{z^2<c^2}}{\partial z}\right)_{z\to c} = 4\pi\sum_0^\infty{}_n\,[A_n(\rho)\cos n\theta + B_n(\rho)\,\mathrm{sen}\, n\theta] =
$$
$$
= 4\pi I_1(\rho,\theta), \qquad\qquad \text{per } \rho < a,
$$

risultato che dovevamo aspettarci, in quanto che si sa che la discontinuità della derivata normale è uguale a 4π volte l'intensità superficiale della magnetizzazione.

Avendo ora riguardo alla (20'), alla (19') ed all'espressione (17) del potenziale inducente U, nonchè alle relazioni (21), quando si facciano le sostituzioni nella (18) e si uguagliano in ambedue i membri i coefficienti di $\cos n\theta$ e di $\mathrm{sen}\, n\theta$ si ottiene

$$
4\pi A(\rho) = (\mu-1)\Bigg\{\left(\frac{\partial U_n}{\partial z}\right)_{z=c} - 2\pi\int_0^\infty e^{-2sc}J_n(s\rho)sds\cdot\gamma_n(s) - 2\pi A_n(\rho) +
$$
$$
+ 2\pi a\int_0^\infty J_n(s\rho)J_n(sa)sds\int_{-c}^{c} e^{-s(c-\zeta)}E_n(\zeta)d\zeta\Bigg\},
$$

è data, sotto certe condizioni, da

$$
f_n(s) = \int_0^a g_n(u)J_n(su)udu.
$$

Dimodochè risulta

$$
\int_0^\infty J_n(s\rho)sds\int_0^a g_n(u)J_n(su)udu = \begin{cases} g_n(\rho), & \text{per } \rho < a,\\ 0 & \text{»}\quad \rho > a, \quad n > -\frac{1}{2}. \end{cases}
$$

cioè

$$A_n(\rho) = \frac{\mu - 1}{\mu + 1} \left\{ \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\partial U_n}{\partial z} \right)_{z=c} + \right. \tag{22}$$

$$\left. + \int_0^\infty J_n(s\rho) s ds \left[a J_n(sa) \int_{-c}^{c} e^{-s(c-\zeta)} E_n(\zeta) d\zeta - e^{-2sc} \gamma_n(s) \right] \right\}, \quad (n = 0, 1, 2, ...), \quad \rho < a,$$

e analogamente

$$B_n(\rho) = \frac{\mu - 1}{\mu + 1} \left\{ \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\partial W_n}{\partial z} \right)_{z=c} + \right. \tag{23}$$

$$\left. + \int_0^\infty J_n(s\rho) s ds \left[a J_n(sa) \int_{-c}^{c} e^{-s(c-\zeta)} E_n(\zeta) d\zeta - e^{-2sc} \delta_n(s) \right] \right\}, \quad (n = 1, 2, 3, ...), \quad \rho < a.$$

Da queste, applicando il teorema di reciprocità di Hankel, ricaviamo ancora

$$\alpha_n(s) = \int_0^a A_n(u) J_n(su) u du = \frac{\mu - 1}{\mu + 1} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^a \left(\frac{\partial U_n}{\partial z} \right)_{\substack{z=c \\ \rho=u}} J_n(su) u du + \right.$$

$$\left. + a J_n(sa) \int_{-c}^{c} e^{-s(c-\zeta)} E_n(\zeta) d\zeta - e^{-2sc} \gamma(s) \right\}, \quad (n = 0, 1, 2, ...),$$

(24)

$$\beta_n(s) = \int_0^a B_n(u) J_n(su) u du = \frac{\mu - 1}{\mu + 1} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^a \left(\frac{\partial W_n}{\partial z} \right)_{\substack{z=c \\ \rho=u}} J_n(su) u du + \right.$$

$$\left. + a J_n(sa) \int_{-c}^{c} e^{-s(c-\zeta)} F_n(\zeta) d\zeta - e^{-2sc} \delta_n(s) \right\}, \quad (n = 1, 2, 3, ...).$$

e in tal modo ci siamo ridotti a delle relazioni nelle quali si hanno come elementi incogniti le funzioni $\alpha_n(s)$, $\beta_n(s)$, $\gamma_n(s)$, $\delta_n(s)$, $E_n(\zeta)$, $F_n(\zeta)$.

Un altro gruppo di relazioni analoghe alle (24) lo ricaveremo considerando la discontinuità della derivata normale della funzione potenziale V, attraverso la base σ_2 del cilindro.

7. In corrispondenza della base σ_2 del cilindro si avrà ora

$$\frac{\partial V_e}{\partial n} = -\left(\frac{\partial V_{z<-c}}{\partial z} \right)_{z \to -c}, \quad \frac{\partial V_i}{\partial n} = -\left(\frac{\partial V_{z^2<c^2}}{\partial z} \right)_{z \to -c}, \quad \frac{\partial U}{\partial n} = -\left(\frac{\partial U}{\partial z} \right)_{z=-c}, \quad \rho < a,$$

e per la (1) dovrà risultare

$$\left(\frac{\partial V_{z<-c}}{\partial z} \right)_{z \to -c} - \left(\frac{\partial V_{z^2<c^2}}{\partial z} \right)_{z \to -c} = (\mu - 1) \left[\left(\frac{\partial U}{\partial z} \right)_{z=-c} + \left(\frac{\partial V_{z^2<c^2}}{\partial z} \right)_{z=-c} \right], \quad \text{per } \rho < a.$$

In virtù di questa, con calcoli analoghi a quelli eseguiti nel numero precedente si deducono le relazioni

$$C_n(\rho)=\frac{\mu-1}{\mu+1}\left\{\frac{1}{2\pi}\left(\frac{\partial U_n}{\partial z}\right)_{z=-c}-\int_0^\infty J_n(s\rho)sds\left[aJ_n(sa)\int_{-c}^{c}e^{-s(c+\zeta)}E_n(\zeta)d\zeta+e^{-2sc}\alpha_n(s)\right]\right\},$$

(25) $$(n=0,\ 1,\ 2,\ldots),\quad \rho<a,$$

$$D_n(\rho)=\frac{\mu-1}{\mu+1}\left\{\frac{1}{2\pi}\left(\frac{\partial W_n}{\partial z}\right)_{z=-c}-\int_0^\infty J_n(s\rho)sds\left[aJ_n(sa)\int_{-c}^{c}e^{-s(c+\zeta)}E_n(\zeta)d\zeta+e^{-2sc}\beta_n(s)\right]\right\},$$

$$(n=1,\ 2,\ 3,\ldots),\quad \rho<a,$$

che sono le corrispondenti delle (22) e (23), e che per il teorema di reciprocità di HANKEL porgono

$$\gamma_n(s)=\int_0^a C_n(u)J_n(su)udu=\frac{\mu-1}{\mu+1}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^a\left(\frac{\partial U_n}{\partial z}\right)_{\substack{z=-c\\ \rho=u}}J_n(su)udu-\right.$$

$$\left.-\,aJ_n(sa)\int_{-c}^{c}e^{-s(c+\zeta)}E_n(\zeta)d\zeta-e^{-2sc}\alpha_n(s)\right\},\qquad (n=0,\ 1,\ 2,\ldots),$$

(25′)

$$\delta_n(s)=\int_0^a D_n(u)J_n(su)udu=\frac{\mu-1}{\mu+1}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^a\left(\frac{\partial W_n}{\partial z}\right)_{\substack{z=-c\\ \rho=u}}J_n(su)udu-\right.$$

$$\left.-\,aJ_n(sa)\int_{-c}^{c}e^{-s(c+\zeta)}F_n(\zeta)d\zeta-e^{-2sc}\beta_n(s)\right\},\qquad (n=1,\ 2,\ 3,\ldots).$$

Dalle (24) e (25′) si ricava facilmente la somma di $\alpha_n(s)$ e $\gamma_n(s)$, e di $\beta_n(s)$ e $\delta_n(s)$. A tal fine poniamo per brevità

(26) $$\left.\begin{matrix}2\Phi_n(s)\\ 2\Phi_n'(s)\end{matrix}\right\}=\frac{1}{2\pi}\int_0^a\left[\left(\frac{\partial U_n}{\partial z}\right)_{z=c}\pm\left(\frac{\partial U_n}{\partial z}\right)_{z=-c}\right]J_n(s\rho)\rho d\rho,$$

(27) $$\left.\begin{matrix}2\Psi_n(s)\\ 2\Psi_n'(s)\end{matrix}\right\}=\frac{1}{2\pi}\int_0^a\left[\left(\frac{\partial W_n}{\partial z}\right)_{z=c}\pm\left(\frac{\partial W_n}{\partial z}\right)_{z=-c}\right]J_n(s\rho)\rho d\rho,$$

le quali, essendo note le componenti $U_n(\rho,\,z)$, $W_n(\rho,\,z)$ del potenziale $U(\rho,\,\theta,\,z)$, risultano funzioni note dell'argomento s.

Con ciò dalle (24) e (25') si ricava

$$(28)\qquad \begin{aligned} \alpha_n(s)+\gamma_n(s) &= \frac{(\mu-1)e^{sc}}{\mu\cosh sc+\operatorname{senh} sc}\left[\Phi_n(s)+aJ_n(sa)e^{-sc}\int_{-c}^{c}\operatorname{senh} s\zeta\cdot E_n(\zeta)d\zeta\right],\\ \alpha_n(s)-\gamma_n(s) &= \frac{(\mu-1)e^{sc}}{\mu\operatorname{senh} sc+\cosh sc}\left[\Phi_n'(s)+aJ_n(sa)e^{-sc}\int_{-c}^{c}\cosh s\zeta\cdot E_n(\zeta)d\zeta\right],\end{aligned}$$

$$(n=0,\ 1,\ 2,\ldots),$$

$$(28')\qquad \begin{aligned} \beta_n(s)+\delta_n(s) &= \frac{(\mu-1)e^{sc}}{\mu\cosh sc+\operatorname{senh} sc}\left[\Psi_n(s)+aJ_n(sa)e^{-sc}\int_{-c}^{c}\operatorname{senh} s\zeta\cdot F_n(\zeta)d\zeta\right],\\ \beta_n(s)-\delta_n(s) &= \frac{(\mu-1)e^{sc}}{\mu\operatorname{senh} sc+\cosh sc}\left[\Psi_n'(s)+aJ_n(sa)e^{-sc}\int_{-c}^{c}\cosh s\zeta\cdot F_n(\zeta)d\zeta\right],\end{aligned}$$

$$(n=1,\ 2,\ 3,\ldots),$$

nelle quali si è indicato con senh, cosh, rispettivamente il seno iperbolico e il coseno iperbolico. Da esse, volendo, si ottengono subito, per somma e sottrazione le $\alpha_n(s)$, $\gamma_n(s)$, $(n=0, 1, 2,\ldots)$, e le $\beta_n(s)$, $\delta_n(s)$, $(n=1, 2, 3,\ldots)$, in funzione di elementi noti e per mezzo delle funzioni incognite E_n, F_n.

8. Passiamo ora a scrivere le condizioni di discontinuità della derivata normale della funzione V attraverso la superficie laterale σ del cilindro. Si ha ora

$$\frac{\partial V_e}{\partial n}=\lim_{\rho\to a+}\frac{\partial V_{z^2<c^2}}{\partial\rho},\qquad \frac{\partial V_i}{\partial n}=\lim_{\rho\to a-}\frac{\partial V_{z^2<c^2}}{\partial\rho},$$

e perciò la (1) diventa

$$(29)\qquad \lim_{\rho\to a+}\frac{\partial V_{z^2<c^2}}{\partial\rho}-\lim_{\rho\to a-}\frac{\partial V_{z^2<c^2}}{\partial\rho}=(\mu-1)\left[\left(\frac{\partial U}{\partial\rho}\right)_{\rho=a}+\lim_{\rho\to a-}\frac{\partial V_{z^2<c^2}}{\partial\rho}\right].$$

Ma dalla (15) si ricava

$$(30)\qquad \begin{aligned}\frac{\partial V_{z^2<c^2}}{\partial\rho} &= 2\pi\sum_0^\infty{}_n\int_0^\infty e^{-s(z+c)}J_n'(s\rho)sds[\gamma_n(s)\cos n\theta+\delta_n(s)\operatorname{sen} n\theta]-\\ &\quad-2\pi\sum_0^\infty{}_n\int_0^\infty e^{-s(c-z)}J_n'(s\rho)sds[\alpha_n(s)\cos n\theta+\beta_n(s)\operatorname{sen} n\theta]-\end{aligned}$$

$$- 2\pi a \sum_0^\infty{}_n \int_0^\infty J_n'(s\rho)J_n(sa)sds \Big\{ \cos n\theta \Big[\int_{-c}^{z} e^{-s(z-\zeta)} E_n(\zeta)d\zeta + $$

$$+ \int_z^c e^{-s(\zeta-z)} E_n(\zeta)d\zeta \Big] + \operatorname{sen} n\theta \Big[\int_{-c}^{z} e^{-s(z-\zeta)} F_n(\zeta)d\zeta + \int_z^c e^{-s(\zeta-z)} F_n(\zeta)d\zeta \Big] \Big\},$$

ove si è indicato con $J_n'(x)$ la derivata della funzione $J_n(x)$ rispetto al parametro x, ed ove le prime due sommatorie sono continue per $\rho = a$, mentre la terza sommatoria contiene dei termini discontinui per $\rho = a$.

Per vederlo osserviamo che eseguendo per parti gli integrali indicati rispetto al parametro ζ, si ha

$$\int_{-c}^{z} e^{-s(z-\zeta)} E_n(\zeta)d\zeta + \int_z^c e^{-s(\zeta-z)} E_n(\zeta)d\zeta = \frac{2}{s} E_n(z) - \frac{1}{s} [e^{-s(c-z)} E_n(c) +$$

$$+ e^{-s(c+z)} E_n(-c)] - \frac{1}{s} \Big[\int_{-c}^{z} e^{-s(z-\zeta)} E_n'(\zeta)d\zeta - \int_z^c e^{-s(\zeta-z)} E_n'(\zeta)d\zeta \Big],$$

con $E_n'(\zeta) = \dfrac{dE_n}{d\zeta}$, e analogamente per gli integrali che contengono le funzioni $F_n(\zeta)$. Dimodochè risulta

$$(31) \qquad \int_0^\infty J_n'(s\rho)J_n(sa)sds \Big\{ \int_{-c}^{z} e^{-s(z-\zeta)} E_n(\zeta)d\zeta + \int_z^c e^{-s(\zeta-z)} E_n(\zeta)d\zeta \Big\} =$$

$$= 2E_n(z) \int_0^\infty J_n'(s\rho)J_n(sa)ds - \int_0^\infty J_n'(s\rho)J_n(sa)ds \Big\{ e^{-s(c-z)} E_n(c) + e^{-s(c+z)} E_n(-c) +$$

$$+ \int_{-c}^{z} e^{-s(z-\zeta)} E_n'(\zeta)d\zeta - \int_z^c e^{-s(\zeta-z)} E_n'(\zeta)d\zeta \Big\}.$$

Ricordando ora che

$$\frac{dJ_n(x)}{dx} = J_{n-1}(x) - \frac{n}{x} J_n(x), \quad \text{e che} \quad \frac{dJ_0(x)}{dx} = - J_1(x),$$

si deduce

$$\int_0^\infty J_n'(s\rho)J_n(sa)ds = \int_0^\infty J_{n-1}(s\rho)J_n(sa)ds - \frac{n}{\rho} \int_0^\infty J_n(s\rho)J_n(sa) \frac{ds}{s}, \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

$$\int_0^\infty J_0'(s\rho)J_0(sa)ds = - \int_0^\infty J_1(s\rho)J_0(sa)ds.$$

Ma per le formule di discontinuità di WEBER-SCHAFHEITLIN ([12]), si ha

$$\int_0^\infty J_1(s\rho)J_0(sa)ds = \begin{cases} \dfrac{1}{\rho}, & \text{per } \rho > a, \\ 0, & \text{»} \quad \rho < a, \end{cases}$$

$$\int_0^\infty J_{n-1}(s\rho)J_n(sa)ds = \begin{cases} \dfrac{\rho^{n-1}}{a^n}, & \text{per } \rho < a, \\ 0, & \text{»} \quad \rho > a, \end{cases}$$

$$\int_0^\infty J_n(s\rho)J_n(sa)\frac{ds}{s} = \begin{cases} \dfrac{1}{2n}\left(\dfrac{\rho}{a}\right)^n, & \text{per } \rho \leq a, \\ \dfrac{1}{2n}\left(\dfrac{a}{\rho}\right)^n, & \text{»} \quad \rho \geq a, \end{cases}$$

perciò risulta

$$\text{(32)} \qquad \begin{aligned} &\int_0^\infty J_0'(s\rho)J_0(sa)ds = \begin{cases} 0, & \text{per } \rho < a, \\ -\dfrac{1}{\rho} & \text{»} \quad \rho > a, \end{cases} \\ &\int_0^\infty J_n'(s\rho)J_n(sa)ds = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\dfrac{\rho^{n-1}}{a^n}, & \text{per } \rho < a, \\ -\dfrac{1}{2}\dfrac{a^n}{\rho^{n+1}}, & \text{»} \quad \rho > a, \end{cases} \end{aligned}$$

e pertanto la (30), avuto riguardo alla (31) e alle (32), porge

$$\begin{aligned} \lim_{\rho \to a+} \frac{\partial V_{z^2<c^2}}{\partial \rho} = {} & 2\pi \sum_0^\infty {}_n \int_0^\infty e^{-s(z+c)} J_n'(sa) s ds [\gamma_n(s) \cos n\theta + \delta_n(s) \operatorname{sen} n\theta] - \\ & - 2\pi \sum_0^\infty {}_n \int_0^\infty e^{-s(c-z)} J_n'(sa) s ds [\alpha_n(s) \cos n\theta + \beta_n(s) \operatorname{sen} n\theta] + \\ & + 4\pi E_0(z) + 2\pi \sum_1^\infty {}_n [E_n(z) \cos n\theta + F_n(z) \operatorname{sen} n\theta] + \\ & + 2\pi a \sum_0^\infty {}_n \int_0^\infty J_n'(sa) J_n(sa) ds \Big[\cos n\theta \Big\{ e^{-s(c-z)} E_n(c) + e^{-s(c+z)} E_n(-c) + \\ & + \int_{-c}^z e^{-s(z-\zeta)} E_n'(\zeta) d\zeta - \int_z^c e^{-s(\zeta-z)} E_n'(\zeta) d\zeta \Big\} + \operatorname{sen} n\theta \Big\{ e^{-s(c-z)} F_n(c) + \\ & + e^{-s(c+z)} F_n(-c) + \int_{-c}^z e^{-s(z-\zeta)} F_n'(\zeta) d\zeta - \int_z^c e^{-s(\zeta-z)} F_n'(\zeta) d\zeta \Big\} \Big], \end{aligned}$$

([12]) Cfr. G. N. WATSON, *Treatise of Bessel functions*, (Cambridge, University Press, 1922, pp. 405-406).

$$\lim_{\rho \to a-} \frac{\partial V_{z^2<c^2}}{\partial \rho} = 2\pi \sum_0^\infty{}_n \int_0^\infty e^{-s(z+c)} J_n'(sa) s ds [\gamma_n(s) \cos n\theta + \delta_n(s) \operatorname{sen} n\theta] -$$

$$- 2\pi \sum_0^\infty{}_n \int_0^\infty e^{-s(c-z)} J_n'(sa) s ds [\alpha_n(s) \cos n\theta + \beta_n(s) \operatorname{sen} n\theta] -$$

$$- 2\pi \sum_1^\infty{}_n [E_n(z) \cos n\theta + F_n(z) \operatorname{sen} n\theta] + 2\pi a \sum_0^\infty{}_n \int_0^\infty J_n'(sa) J_n(sa) ds \Big[\cos n\theta \Big\{ e^{-s(c-z)} E_n(c) +$$

$$+ e^{-s(c+z)} E_n(-c) + \int_{-c}^{z} e^{-s(z-\zeta)} E_n'(\zeta) d\zeta - \int_{z}^{c} e^{-s(\zeta-z)} E_n'(\zeta) d\zeta \Big\} + \operatorname{sen} n\theta \Big\{ e^{-s(c-z)} F_n(c) +$$

$$+ e^{-s(c+z)} F_n(-c) + \int_{-c}^{z} e^{-s(z-\zeta)} F_n'(\zeta) d\zeta - \int_{z}^{c} e^{-s(\zeta-z)} F_n'(\zeta) d\zeta \Big\} \Big].$$

Da queste, ricordando la terza delle (12), si deduce

$$\lim_{\rho \to a+} \frac{\partial V_{z^2<c^2}}{\partial \rho} - \lim_{\rho \to a-} \frac{\partial V_{z^2<c^2}}{\partial \rho} =$$

$$= 4\pi \Big\{ E_0(z) + \sum_1^\infty{}_n [E_n(z) \cos n\theta + F_n(z) \operatorname{sen} n\theta] \Big\} = 4\pi I(\theta, z),$$

il cui risultato al solito era da prevedersi, essendo $I(\theta, z)$ l'intensità della magnetizzazione nel punto $Q(a, \theta, z)$ della superficie σ, in cui si è calcolata la discontinuità della derivata normale di V.

Sostituendo ora nella (29), tenendo presente il valore (17) della funzione U, e uguagliando in ambo i membri i coefficienti di $\cos n\theta$ e $\operatorname{sen} n\theta$, si ottiene

$$(33) \qquad E_0(z) = \frac{1}{2}(\mu - 1) \Big\{ \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\partial U_0}{\partial \rho} \right)_{\rho=a} - \int_0^\infty e^{-sc} J_0'(sa) s ds [(\alpha_0(s) + \gamma_0(s)) \operatorname{senh} sz +$$

$$+ (\alpha_0(s) - \gamma_0(s)) \cosh sz] + a \int_0^\infty J_0'(sa) J_0(sa) ds \Big[e^{-s(c-z)} E_0(c) + e^{-s(c+z)} E_0(-c) +$$

$$+ \int_{-c}^{z} e^{-s(z-\zeta)} E_0'(\zeta) d\zeta - \int_{z}^{c} e^{-s(\zeta-z)} E_0'(\zeta) d\zeta \Big] \Big\},$$

$$(34) \qquad E_n(z) = \frac{\mu - 1}{\mu + 1} \Big\{ \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\partial U_n}{\partial \rho} \right)_{\rho=a} - \int_0^\infty e^{-sc} J_n'(sa) s ds [(\alpha_n(s) + \gamma_n(s)) \operatorname{senh} sz +$$

$$+ (\alpha_n(s) - \gamma_n(s)) \cosh sz] + a\int_0^\infty J_n'(sa)J_n(sa)ds\Big[e^{-s(c-z)}E_n(c) + e^{-s(c+z)}E_n(-c) +$$

$$+ \int_{-c}^{z} e^{-s(z-\zeta)}E_n'(\zeta)d\zeta - \int_{z}^{c} e^{-s(\zeta-z)}E_n'(\zeta)d\zeta\Big]\Big\}, \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

$$(35) \qquad F_n(z) = \frac{\mu-1}{\mu+1}\Big\{\frac{1}{2\pi}\Big(\frac{\partial W_n}{\partial \rho}\Big)_{\rho=a} - \int_0^\infty e^{-sc}J_n'(sa)sds[(\beta_n(s) + \delta_n(s)) \operatorname{senh} sz +$$

$$+ (\beta_n(s) - \delta_n(s) \cosh sz] + a\int_0^\infty J_n'(sa)J_n(sa)ds\Big[e^{-s(c-z)}F_n(c) + e^{-s(c+z)}F_n(-c) +$$

$$+ \int_{-c}^{z} e^{-s(z-\zeta)}F_n'(\zeta)d\zeta - \int_{z}^{c} e^{-s(\zeta-z)}F_n'(\zeta)d\zeta\Big]\Big\}, \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

9. Se nelle relazioni (33), (34) e (35), ora stabilite, si eliminano le somme e differenze di α_n e γ_n e di β_n e δ_n, servendoci delle (28) e (28'), ci si riduce a delle equazioni integrali nelle funzioni incognite $E_n(\zeta)$, $(n = 0, 1, 2, \ldots)$; $F_n(\zeta)$, $(n = 1, 2, 3, \ldots)$. Se mediante queste ultime equazioni si riesce a determinare le dette funzioni incognite il problema risulta allora risolto esplicitamente.

Per dare a quelle equazioni integrali la forma più semplice osserviamo che, essendo le funzioni $E_n(\zeta)$, $F_n(\zeta)$ definite nell'intervallo $(-c, c)$, per i noti integrali di Fourier si ha

$$(36) \qquad \begin{gathered} E_n(\zeta) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \operatorname{sen} \sigma\zeta \cdot d\sigma \int_{-c}^{c} E_n(\alpha) \operatorname{sen} \sigma\alpha \cdot d\alpha + \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \cos \sigma\zeta \cdot d\sigma \int_{-c}^{c} E_n(\alpha) \cos \sigma\alpha \cdot d\alpha, \\ (n = 0, 1, 2, \ldots), \\ F_n(\zeta) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \operatorname{sen} \sigma\zeta \cdot d\sigma \int_{-c}^{c} F_n(\alpha) \operatorname{sen} \sigma\alpha \cdot d\alpha + \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \cos \sigma\zeta \cdot d\sigma \int_{-c}^{c} F_n(\alpha) \cos \sigma\alpha \cdot d\alpha, \\ (n = 1, 2, 3, \ldots). \end{gathered}$$

Posto allora

$$(37) \qquad \begin{gathered} H_n(\sigma) = \int_{-c}^{c} E_n(\alpha) \operatorname{sen} \sigma\alpha \cdot d\alpha, \qquad H_n'(\sigma) = \int_{-c}^{c} E_n(\alpha) \cos \sigma\alpha \cdot d\alpha, \\ K_n(\sigma) = \int_{-c}^{c} F_n(\alpha) \operatorname{sen} \sigma\alpha \cdot d\alpha, \qquad K_n'(\sigma) = \int_{-c}^{c} F_n(\alpha) \cos \sigma\alpha \cdot d\alpha, \end{gathered}$$

si può scrivere

$$(36')\qquad \begin{aligned} E_n(\zeta) &= \frac{1}{\pi}\int_0^\infty H_n(\sigma)\,\mathrm{sen}\,\sigma\zeta\cdot d\sigma + \frac{1}{\pi}\int_0^\infty H_n'(\sigma)\cos\sigma\zeta\cdot d\sigma,\\ F_n(\zeta) &= \frac{1}{\pi}\int_0^\infty K_n(\sigma)\,\mathrm{sen}\,\sigma\zeta\cdot d\sigma + \frac{1}{\pi}\int_0^\infty K_n'(\sigma)\cos\sigma\zeta\cdot d\sigma, \end{aligned}$$

Come è noto, se le $E_n(\zeta)$, $F_n(\zeta)$ sono funzioni dispari di ζ allora si annullano le $H_n'(\sigma)$ e $K_n'(\sigma)$; mentre se esse sono funzioni pari si annullano invece le $H_n(\sigma)$, $K_n(\sigma)$.

In virtù delle (36′) risulta

$$\int_{-c}^{c}\mathrm{senh}\,s\zeta\cdot E_n(\zeta)d\zeta = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty H_n(\sigma)[s\,\mathrm{sen}\,\sigma c\cdot\cosh sc - \sigma\cos\sigma c\cdot\mathrm{senh}\,sc]\frac{d\sigma}{s^2+\sigma^2},$$

$$\int_{-c}^{c}\cosh s\zeta\cdot E_n(\zeta)d\zeta = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty H_n'(\sigma)[s\cos\sigma c\cdot\mathrm{senh}\,sc + \sigma\,\mathrm{sen}\,\sigma c\cdot\cosh sc]\frac{d\sigma}{s^2+\sigma^2},$$

$$e^{-s(c-z)}E_n(c) + e^{-s(c+z)}E_n(-c) + \int_{-c}^{z}e^{-s(z-\zeta)}E_n'(\zeta)d\zeta - \int_z^c e^{-s(\zeta-z)}E_n'(\zeta)d\zeta =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^\infty H_n(\sigma)[\sigma^2\,\mathrm{sen}\,\sigma z + se^{-sc}\,\mathrm{senh}\,sz(\sigma\cos\sigma c + s\,\mathrm{sen}\,\sigma c)]\frac{d\sigma}{s^2+\sigma^2} +$$

$$+ \frac{2}{\pi}\int_0^\infty H_n'(\sigma)[\sigma^2\cos\sigma z - se^{-sc}\cosh sz(\sigma\,\mathrm{sen}\,\sigma c - s\cos\sigma c)]\frac{d\sigma}{s^2+\sigma^2},$$

$$(n = 0,\ 1,\ 2,\ldots),$$

e analogamente per gli integrali in cui figurano le funzioni $F_n(\zeta)$.

Pertanto le (28) e (28′) diventano

$$(38)\qquad \begin{aligned} \alpha_n(s) + \gamma_n(s) &= \frac{(\mu-1)e^{sc}}{\mu\cosh sc + \mathrm{senh}\,sc}\Big\{\Phi_n(s) +\\ &+ \frac{2a}{\pi}J_n(sa)e^{-sc}\int_0^\infty H_n(\sigma)[s\,\mathrm{sen}\,\sigma c\cdot\cosh sc - \sigma\cos\sigma c\cdot\mathrm{senh}\,sc]\frac{d\sigma}{s^2+\sigma^2}\Big\},\\ \alpha_n(s) - \gamma_n(s) &= \frac{(\mu-1)e^{sc}}{\mu\,\mathrm{senh}\,sc + \cosh sc}\Big\{\Phi_n'(s) +\\ &+ \frac{2a}{\pi}J_n(sa)e^{-sc}\int_0^\infty H_n'(\sigma)[s\cos\sigma c\cdot\mathrm{senh}\,sc + \sigma\,\mathrm{sen}\,\sigma c\cdot\cosh sc]\frac{d\sigma}{s^2+\sigma^2}\Big\}, \end{aligned}$$

$$(n = 0,\ 1,\ 2,\ldots);$$

$$(38')\quad \begin{aligned} \beta_n(s)+\delta_n(s) &= \frac{(\mu-1)e^{sc}}{\mu\cosh sc+\operatorname{senh} sc}\Big\{\Psi_n(s)+ \\ &+\frac{2a}{\pi}J_n(sa)e^{-sc}\int_0^\infty K_n(\sigma)[s\operatorname{sen}\sigma c\cdot\cosh sc-\sigma\cos\sigma c\cdot\operatorname{senh} sc]\frac{d\sigma}{s^2+\sigma^2}\Big\}, \\ \beta_n(s)-\delta_n(s) &= \frac{(\mu-1)e^{sc}}{\mu\operatorname{senh} sc+\cosh sc}\Big\{\Psi_n'(s)+ \\ &+\frac{2a}{\pi}J_n(sa)e^{-sc}\int_0^\infty K_n'(\sigma)[s\cos\sigma c\cdot\operatorname{senh} sc+\sigma\operatorname{sen}\sigma c\cosh sc]\frac{d\sigma}{s^2+\sigma^2}\Big\}, \end{aligned}$$

$$(n=1,\ 2,\ 3,\ldots).$$

Sostituendo nelle (33), (34) e (35) si ottiene

$$(39)\quad \begin{aligned} E_n(z) &= \frac{c_n}{2\pi}\left(\frac{\partial U_n}{\partial\rho}\right)_{\rho=a}- \\ &-c_n(\mu-1)\int_0^\infty J_n'(sa)s\,ds\left[\frac{\Phi_n(s)\operatorname{senh} sz}{\mu\cosh sc+\operatorname{senh} sc}+\frac{\Phi_n'(s)\cosh sz}{\mu\operatorname{senh} sc+\cosh sc}\right]+ \\ &+c_n\frac{2a}{\pi}\int_0^\infty J_n'(sa)J_n(sa)ds\left[\int_0^\infty H_n(\sigma)\left(\sigma^2\operatorname{sen}\sigma z+s\operatorname{senh} sz\frac{\mu\sigma\cos\sigma c+s\operatorname{sen}\sigma c}{\mu\cosh sc+\operatorname{senh} sc}\right)\frac{d\sigma}{s^2+\sigma^2}+\right. \\ &\left.+\int_0^\infty H_n'(\sigma)\left(\sigma^2\cos\sigma z-s\cosh sz\frac{\mu\sigma\operatorname{sen}\sigma c-s\cos\sigma c}{\mu\operatorname{senh} sc+\cosh sc}\right)\frac{d\sigma}{s^2+\sigma^2}\right],\qquad (n=0,\ 1,\ 2,\ldots); \end{aligned}$$

$$(40)\quad \begin{aligned} F_n(z) &= \frac{c_n}{2\pi}\left(\frac{\partial W_n}{\partial\rho}\right)_{\rho=a}- \\ &-c_n(\mu-1)\int_0^\infty J_n'(sa)s\,ds\left[\frac{\Psi_n(s)\operatorname{senh} sz}{\mu\cosh sc+\operatorname{senh} sc}+\frac{\Psi_n'(s)\cosh sz}{\mu\operatorname{senh} sc+\cosh sc}\right]+ \\ &+c_n\frac{2a}{\pi}\int_0^\infty J_n'(sa)J_n(sa)ds\left[\int_0^\infty K_n(\sigma)\left(\sigma^2\operatorname{sen}\sigma z+s\operatorname{senh} sz\frac{\mu\sigma\cos\sigma c+s\operatorname{sen}\sigma c}{\mu\cosh sc+\operatorname{senh} sc}\right)\frac{d\sigma}{s^2+\sigma^2}+\right. \\ &\left.+\int_0^\infty K_n'(\sigma)\left(\sigma^2\cos\sigma z-s\cosh sz\frac{\mu\sigma\operatorname{sen}\sigma c-s\cos\sigma c}{\mu\operatorname{senh} sc+\cosh sc}\right)\frac{d\sigma}{s^2+\sigma^2}\right],\qquad (n=1,\ 2,\ 3,\ldots), \end{aligned}$$

ove per semplicità si è posto

$$c_0=\frac{1}{2}(\mu-1);\quad c_n=\frac{\mu-1}{\mu+1},\quad \text{per}\quad n=1,\ 2,\ 3,\ldots.$$

Se ora osserviamo che per le (36') risulta

$$\frac{1}{2}[E_n(z) - E_n(-z)] = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty H_n(\sigma) \operatorname{sen} \sigma z \cdot d\sigma,$$

$$\frac{1}{2}[E_n(z) + E_n(-z)] = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty H_n'(\sigma) \cos \sigma z \cdot d\sigma,$$

cambiando nella (39) z in $-z$, e quindi sommando e sottraendo e ponendo

$$\left.\begin{matrix} P_n(z) \\ P_n'(z) \end{matrix}\right\} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial U_n(\rho, z)}{\partial \rho} \mp \frac{\partial U_n(\rho, -z)}{\partial \rho}\right]_{\rho=a}, \tag{41}$$

si deduce

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty H_n(\sigma) \operatorname{sen} \sigma z \cdot d\sigma = \frac{c_n}{2\pi} P_n(z) - c_n(\mu - 1)\int_0^\infty J_n'(sa) s ds \frac{\Phi_n(s) \operatorname{senh} sz}{\mu \cosh sc + \operatorname{senh} sc} +$$

$$+ c_n \frac{2a}{\pi}\int_0^\infty J_n'(sa) J_n(sa) ds \int_0^\infty H_n(\sigma)\left(\sigma^2 \operatorname{sen} \sigma z + s \operatorname{senh} sz \frac{\mu\sigma \cos \sigma c + s \operatorname{sen} \sigma c}{\mu \cosh sc + \operatorname{senh} sc}\right)\frac{d\sigma}{s^2 + \sigma^2},$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty H_n'(\sigma) \cos \sigma z \cdot d\sigma = \frac{c_n}{2\pi} P_n(z) - c_n(\mu - 1)\int_0^\infty J_n'(sa) s ds \frac{\Phi_n'(s) \cosh sz}{\mu \operatorname{senh} sc + \cosh sc} +$$

$$+ c_n \frac{2a}{\pi}\int_0^\infty J_n'(sa) J_n(sa) ds \int_0^\infty H_n'(\sigma)\left(\sigma^2 \cos \sigma z - s \cosh sz \frac{\mu\sigma \operatorname{sen} \sigma c - s \cos \sigma c}{\mu \operatorname{senh} sc + \cosh sc}\right)\frac{d\sigma}{s^2 + \sigma^2},$$

le quali si possono scrivere anche

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi}\int_0^\infty H_n(\sigma) d\sigma \Bigg\{ & \left[1 - 2ac_n\sigma^2 \int_0^\infty J_n'(sa) J_n(sa) \frac{ds}{s^2 + \sigma^2}\right] \operatorname{sen} \sigma z - \\ & - 2ac_n \int_0^\infty J_n'(sa) J_n(sa) \frac{s ds}{s^2 + \sigma^2} \frac{\mu\sigma \cos \sigma c + s \operatorname{sen} \sigma c}{\mu \cosh sc + \operatorname{senh} sc} \operatorname{senh} sz \Bigg\} = \\ & = \frac{c_n}{2\pi} P_n(z) - (\mu - 1) c_n \int_0^\infty J_n'(sa) s ds \frac{\Phi_n(s) \operatorname{senh} sz}{\mu \cosh sc + \operatorname{senh} sc}, \end{aligned} \tag{42}$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty H_n'(\sigma) d\sigma \Bigg\{\left[1 - 2ac_n\sigma^2 \int_0^\infty J_n'(sa) J_n(sa) \frac{ds}{s^2 + \sigma^2}\right] \cos \sigma z + \tag{42'}$$

$$+ 2ac_n\int_0^\infty J_n'(sa)J_n(sa)\frac{sds}{s^2+\sigma^2}\frac{\mu\sigma \operatorname{sen}\sigma c - s\cos\sigma c}{\mu \operatorname{senh} sc + \cosh sc}\cosh sz\Big\} =$$

$$= \frac{c_n}{2\pi}P_n'(z) - (\mu-1)c_n\int_0^\infty J_n'(sa)sds\frac{\Phi_n'(s)\cosh sz}{\mu\operatorname{senh} sc + \cosh sc}, \qquad (n=0,\,1,\,2,\dots).$$

Analogamente posto

$$\text{(43)}\qquad \begin{matrix} Q_n(z) \\ Q_n'(z) \end{matrix}\Big\} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial W_n(\rho,\, z)}{\partial\rho} \mp \frac{\partial W_n(\rho,\, -z)}{\partial\rho}\right]_{\rho=a},$$

si ottengono per le funzioni $K_n(\sigma)$, $K_n'(\sigma)$, le equazioni

$$\text{(44)}\qquad \frac{1}{\pi}\int_0^\infty K_n(\sigma)d\sigma\Big\{\left[1 - 2ac_n\sigma^2\int_0^\infty J_n'(sa)J_n(sa)\frac{ds}{s^2+\sigma^2}\right]\operatorname{sen}\sigma z -$$

$$- 2ac_n\int_0^\infty J_n'(sa)J_n(sa)\frac{ds}{s^2+\sigma^2}\frac{\mu\sigma\cos\sigma c + s\operatorname{sen}\sigma c}{\mu\cosh sc + \operatorname{senh} sc}\operatorname{senh} sz\Big\} =$$

$$= \frac{c_n}{2\pi}Q_n(z) - (\mu-1)c_n\int_0^\infty J_n'(sa)sds\frac{\Psi_n(s)\operatorname{senh} sz}{\mu\cosh sc + \operatorname{senh} sc},$$

$$\text{(44')}\qquad \frac{1}{\pi}\int_0^\infty K_n'(\sigma)d\sigma\Big\{\left[1 - 2ac_n\sigma^2\int_0^\infty J_n'(sa)J_n(sa)\frac{ds}{s^2+\sigma^2}\right]\cos\sigma z +$$

$$+ 2ac_n\int_0^\infty J_n'(sa)J_n(sa)\frac{sds}{s^2+\sigma^2}\frac{\mu\sigma\operatorname{sen}\sigma c - s\cos\sigma c}{\mu\operatorname{senh} sc + \cosh sc}\cosh sz\Big\} =$$

$$= \frac{c_n}{2\pi}Q_n'(z) - (\mu-1)c_n\int_0^\infty J_n'(sa)sds\frac{\Psi_n'(s)\cosh sz}{\mu\operatorname{senh} sc + \cosh sc}, \qquad (n=1,\,2,\,3,\dots).$$

Le (42), (42'), (44), (44') sono le relazioni integrali che volevamo stabilire e che servono per calcolare le funzioni incognite $H_n(\sigma)$, $H_n'(\sigma)$, $(n=0,\,1,\,2,\dots)$, e le $K_n(\sigma)$, $K_n'(\sigma)$, $(n=1,\,2,\,3,\dots)$. Dopo ciò le (36') forniscono senz'altro le funzioni $E_n(\zeta)$, $F_n(\zeta)$, mentre dalle (38) e (38') si ricavano subito le $\alpha_n(s)$, $\gamma_n(s)$, $(n=0,\,1,\,2,\dots)$, e le $\beta_n(s)$, $\delta_n(s)$, $(n=1,\,2,\,3,\dots)$, e quindi, per mezzo delle (21) si hanne le funzioni $A_n(\rho)$, $C_n(\rho)$, e $B_n(\rho)$, $D_n(\rho)$, con $\rho < a$, le quali definiscono la distribuzione del magnetismo indotto sulle due basi del cilindro.

10. Per mettere le equazioni precedenti sotto una forma più semplice poniamo ancora

$$\lambda_n(\sigma) = 1 - 2ac_n \cdot \sigma^2 \int_0^\infty J_n'(sa) J_n(sa) \frac{ds}{s^2+\sigma^2},$$

$$\mu_n(\sigma, z) = 2ac_n \int_0^\infty J_n'(sa) J_n(sa) \frac{sds}{s^2+\sigma^2} \frac{\mu\sigma \cos \sigma c + s \operatorname{sen} \sigma c}{\mu \cosh sc + \operatorname{senh} sc} \operatorname{senh} sz,$$

$$f_n(z) = \frac{c_n}{2\pi} P_n(z) - (\mu - 1) c_n \int_0^\infty J_n'(sa) sds \frac{\Phi_n(s) \operatorname{senh} sz}{\mu \cosh sc + \operatorname{senh} sc},$$

$$g_n(z) = \frac{c_n}{2\pi} Q_n(z) - (\mu - 1) c_n \int_0^\infty J_n'(sa) sds \frac{\Psi_n(s) \operatorname{senh} sz}{\mu \cosh sc + \operatorname{senh} sc}, \tag{45}$$

$$\mu_n'(s, z) = 2ac_n \int_0^\infty J_n'(sa) J_n(sa) \frac{sds}{s^2+\sigma^2} \frac{\mu\sigma \operatorname{sen} \sigma c - s \cos \sigma c}{\mu \operatorname{senh} sc + \cosh sc} \cosh sz,$$

$$f_n'(z) = \frac{c_n}{2\pi} P_n'(z) - (\mu - 1) c_n \int_0^\infty J_n'(sa) sds \frac{\Phi_n'(s) \cosh sz}{\mu \operatorname{senh} sc + \cosh sc},$$

$$g_n'(z) = \frac{c_n}{2\pi} Q_n'(z) - (\mu - 1) c_n \int_0^\infty J_n'(sa) sds \frac{\Psi_n'(s) \cosh sz}{\mu \operatorname{senh} sc + \cosh sc},$$

e allora esse diventano

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^\infty [\lambda_n(\sigma) \operatorname{sen} \sigma z - \mu_n(\sigma, z)] H_n(\sigma) d\sigma = f_n(z), \\ \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^\infty [\lambda_n(\sigma) \cos \sigma z + \mu_n'(\sigma, z)] H_n'(\sigma) d\sigma = f_n'(z), \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots); \end{cases} \tag{46}$$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^\infty [\lambda_n(\sigma) \operatorname{sen} \sigma z - \mu_n(\sigma, z)] K_n(\sigma) d\sigma = g_n(z), \\ \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^\infty [\lambda_n(\sigma) \cos \sigma z + \mu_n'(\sigma, z)] K_n'(\sigma) d\sigma = g_n'(z), \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots), \end{cases} \tag{46'}$$

che sono equazioni integrali nelle quali le $f_n(z)$, $f_n'(z)$, $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, e le $g_n(z)$, $g_n'(z)$, $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, sono funzioni note di z, ed i *nuclei* risultano

$$\mathcal{H}_n(\sigma, z) = \lambda_n(\sigma) \operatorname{sen} \sigma z - \mu_n(\sigma, z),$$
$$\mathcal{H}_n'(\sigma, z) = \lambda_n(\sigma) \cos \sigma z + \mu_n'(\sigma, z).$$

11. Prima di procedere innanzi è opportuno calcolare l'integrale definito che figura nella funzione $\lambda_n(\sigma)$, [la prima delle (45)], ove è da ricordare che $J_n'(sa) = \lim_{\rho \to a-} J_n'(s\rho)$. Risulta

$$\sigma^2 \int_0^\infty J_n'(s\rho) J_n(sa) \frac{ds}{s^2 + \sigma^2} = \int_0^\infty J_n'(s\rho) J_n(sa) ds - \int_0^\infty J_n'(s\rho) J_n(sa) \frac{s^2 ds}{s^2 + \sigma^2}; \tag{47}$$

ma, ricordando le (32), per $\rho < a$, è

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty J_0'(s\rho) J_0(sa) ds = 0, \\ &\int_0^\infty J_n'(s\rho) J_n(sa) ds = \frac{\rho^{n-1}}{2a^n}, \qquad (n = 1,\ 2,\ 3, \ldots). \end{aligned} \tag{48}$$

D'altra parte dalla nota formula [13]

$$\int_0^\infty J_n(s\rho) J_n(sa) \frac{s ds}{s^2 + \sigma^2} = \frac{1}{2} J_n(i\rho\sigma) \left\{ \pi i J_n(ia\sigma) - Y_n(ia\sigma) \right\}, \quad \text{per} \quad \rho < a,$$

ove Y_n è la funzione di BESSEL di 2^a *specie* e di ordine n, derivando rispetto a ρ si ottiene

$$\int_0^\infty J_n'(s\rho) J_n(sa) \frac{s^2 ds}{s^2 + \sigma^2} = \frac{1}{2} i\sigma J_n'(i\rho\sigma) \left\{ \pi i J_n(ia\sigma) - Y_n(ia\sigma) \right\},$$

e per $\rho \to a$ risulta

$$\int_0^\infty J_n'(sa) J_n(sa) \frac{s^2 ds}{s^2 + \sigma^2} = \frac{1}{2} i\sigma J_n'(ia\sigma) \left\{ \pi i J_n(ia\sigma) - Y_n(ia\sigma) \right\}.$$

In virtù di questa e delle (48), e ricordando che

$$J_n'(x) = J_{n-1}(x) - \frac{n}{x} J_n(x), \quad J_0'(x) = - J_1(x),$$

la (47) porge

$$\sigma^2 \int_0^\infty J_0'(sa) J_0(sa) \frac{ds}{s^2 + \sigma^2} = \frac{1}{2} i\sigma J_1(ia\sigma) \left\{ \pi i J_0(ia\sigma) - Y_0(ia\sigma) \right\},$$

---

[13] Cfr. H. HANKEL, *Bestimmte Integrale mit Cylinderfunctionen* (« Mathematische Annalen », Bd. VIII, 1875); vedi anche SONINE, loco citato.

$$\sigma^2 \int_0^\infty J_n'(sa) J_n(sa) \frac{ds}{s^2+\sigma^2} = \frac{1}{2a} \left\{ 1 - [ia\sigma J_{n-1}(ia\sigma) - nJ_n(ia\sigma)][\pi i J_n(ia\sigma) - Y_n(ia\sigma)] \right\},$$

$$(n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Pertanto, ricordando ancora che $c_0 = \frac{1}{2}(\mu - 1)$, e $c_n = \frac{\mu - 1}{\mu + 1}$, $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, si ottiene

$$\lambda_0(\sigma) = 1 - \frac{1}{2}(\mu - 1) \cdot ia\sigma J_1(ia\sigma)[\pi i J_0(ia\sigma) - Y_0(ia\sigma)],$$

(49)
$$\lambda_n(\sigma) = \frac{2}{\mu+1} \left\{ 1 + \frac{1}{2}(\mu - 1)[ia\sigma \cdot J_{n-1}(ia\sigma) - nJ_n(ia\sigma)][\pi i J_n(ia\sigma) - Y_n(ia\sigma)] \right\},$$

$$(n = 1, 2, 3, \ldots),$$

e si vede facilmente che

(49')
$$\lim_{a \to 0} \lambda_0(\sigma) = 1 \; ; \quad \text{e} \quad \lim_{a \to 0} \lambda_n(\sigma) = \frac{2}{\mu + 1}, \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

12. Nel caso in cui il cilindro circolare diventa di lunghezza infinita le equazioni integrali (46), (46') si riducono a integrali di FOURIER e allora le funzioni incognite restano immediatamente determinate.

Infatti, in questo caso, cioè per $c \to \infty$, le funzioni $\mu_n(\sigma, z)$, $\mu_n'(\sigma, z)$, definite dalla 2ª e dalla 5ª delle relazioni (45), si annullano, mentre le funzioni $f_n(z)$, $f_n'(z)$, $g_n(z)$, $g_n'(z)$ diventano più semplicemente:

$$f_n(z) = \frac{c_n}{2\pi} P_n(z), \quad f_n'(z) = \frac{c_n}{2\pi} P_n'(z),$$

$$g_n(z) = \frac{c_n}{2\pi} Q_n(z), \quad g_n'(z) = \frac{c_n}{2\pi} Q_n'(z),$$

e pertanto le equazioni (46) e (46') si riducono alle seguenti

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \lambda_n(\sigma) H_n(\sigma) \operatorname{sen} \sigma z \cdot d\sigma = \frac{c_n}{2\pi} P_n(z),$$

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \lambda_n(\sigma) H_n'(\sigma) \cos \sigma z \cdot d\sigma = \frac{c_n}{2\pi} P_n'(z), \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots);$$

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \lambda_n(\sigma) K_n(\sigma) \operatorname{sen} \sigma z \cdot d\sigma = \frac{c_n}{2\pi} Q_n(z),$$

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \lambda_n(\sigma) K_n'(\sigma) \cos \sigma z \cdot d\sigma = \frac{c_n}{2\pi} Q_n'(z), \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

dalle quali per il teorema di reciprocità di FOURIER, si ricava

$$\lambda_n(\sigma)H_n(\sigma)=\frac{c_n}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}P_n(z)\,\mathrm{sen}\,\sigma z\cdot dz,$$

$$\lambda_n(\sigma)H_n'(\sigma)=\frac{c_n}{2\pi}\int_{-+}^{+\infty}P_n'(z)\cos\sigma z\cdot dz,\qquad (n=0,\ 1,\ 2,\ldots);$$

$$\lambda_n(\sigma)K_n(\sigma)=\frac{c_n}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}Q_n(z)\,\mathrm{sen}\,\sigma z\cdot dz,$$

$$\lambda_n(\sigma)K_n'(\sigma)=\frac{c_n}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}Q_n'(z)\cos\sigma z\cdot dz,\qquad (n=1,\ 2,\ 3,\ldots).$$

Cioè, ricordando le posizioni (41) e (43), si deduce facilmente

(50)
$$\lambda_n(\sigma)H_n(\sigma)=\frac{c_n}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\partial U_n(\rho,\ z)}{\partial\rho}\right)_{\rho=a}\mathrm{sen}\,\sigma z\cdot dz,$$

$$\lambda_n(\sigma)H_n'(\sigma)=\frac{c_n}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\partial U_n(\rho,\ z)}{\partial\rho}\right)_{\rho=a}\cos\sigma z\cdot dz,\qquad (n=0,\ 1,\ 2,\ldots);$$

$$\lambda_n(\sigma)K_n(\sigma)=\frac{c_n}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\partial W_n(\rho,\ z)}{\partial\rho}\right)_{\rho=a}\mathrm{sen}\,\sigma z\cdot dz,$$

$$\lambda_n(\sigma)K_n'(\sigma)=\frac{c_n}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\partial W_n(\rho,\ z)}{\partial\rho}\right)_{\rho=a.}\cos\sigma z\cdot dz,\qquad (n=1,\ 2,\ 3,\ldots).$$

Poichè le $\lambda_n(\sigma)$ sono funzioni note le (50) dànno immediatamente i valori delle fnnzioni H_n, H_n', K_n, K_n', e in virtù delle (36') risultano determinate anche le funzioni $E_n(\zeta)$, $F_n(\zeta)$.

Se osserviamo inoltre che il potenziale U delle forze magnetiche inducenti e le sue derivate prime devono annullarsi all'infinito, si deduce che

$$\lim_{c\to\infty}\Phi_n=\lim_{c\to\infty}\Phi_n'=0,\quad \mathrm{e}\quad \lim_{c\to\infty}\Psi_n=\lim_{c\to\infty}\Psi_n'=0.$$

Allora dalle (38) e (38'), si ha che per $c\to\infty$ le funzioni $\alpha_n(s)$, $\gamma_n(s)$, $\beta_n(s)$, $\delta_n(s)$ si annullano, e per conseguenza, ricordando le (21), si annullano anche le $A_n(\rho)$, $C_n(\rho)$, $B_n(\rho)$, $D_n(\rho)$. Tutte le incognite del problema risultano allora determinate e la (15) fornisce, per il potenziale V del magnetismo indotto, l'espressione

$$(51)\qquad V = -2\pi a \sum_0^\infty {}_n \int_0^\infty J_n(s\rho) J_n(sa)\, ds \left\{ \left[\int_{-\infty}^{z} e^{-s(z-\zeta)} E_n(\zeta)\, d\zeta + \int_z^{+\infty} e^{-s(\zeta-z)} E_n(\zeta)\, d\zeta \right] \cos n\theta + \right.$$

$$\left. + \left[\int_{-\infty}^{z} e^{-s(z-\zeta)} F_n(\zeta)\, d\zeta + \int_z^{+\infty} e^{-s(\zeta-z)} F_n(\zeta)\, d\zeta \right] \operatorname{sen} n\theta \right\}.$$

Ma avuto riguardo alle (36') e alle (50) si ha ora

$$\int_{-\infty}^{z} e^{-s(z-\zeta)} E_n(\zeta)\, d\zeta + \int_z^{+\infty} e^{-s(\zeta-z)} E_n(\zeta)\, d\zeta = \frac{2s}{\pi} \int_0^\infty [H_n(\sigma) \operatorname{sen} \sigma z + H_n'(\sigma) \cos \sigma z] \frac{d\sigma}{s^2 + \sigma^2} =$$

$$= s \frac{c_n}{\pi^2} \int_0^\infty \left[\operatorname{sen} \sigma z \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\partial U_n}{\partial \rho} \right)_{\rho=a} \operatorname{sen} \sigma z \cdot dz + \cos \sigma z \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\partial U_n}{\partial \rho} \right)_{\rho=a} \cos \sigma z \cdot dz \right] \frac{d\sigma}{\lambda_n(\sigma)(s^2 + \sigma^2)},$$

e analogamente

$$\int_{-\infty}^{z} e^{-s(z-\zeta)} F_n(\zeta)\, d\zeta + \int_z^{+\infty} e^{-s(\zeta-z)} F_n(\zeta)\, d\zeta =$$

$$= s \frac{c_n}{\pi^2} \int_0^\infty \left[\operatorname{sen} \sigma z \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\partial W_n}{\partial \rho} \right)_{\rho=a} \operatorname{sen} \sigma z \cdot dz + \cos \sigma z \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\partial W_n}{\partial \rho} \right)_{\rho=a} \cos \sigma z \cdot dz \right] \frac{d\sigma}{\lambda_n(\sigma)(s^2 + \sigma^2)};$$

pertanto la (51) diventa

$$(52)\qquad V(\rho, \theta, z) = -\frac{2a}{\pi} \sum_0^\infty {}_n c_n \int_0^\infty J_n(s\rho) J_n(sa)\, s\, ds \left\{ \cos n\theta \int_0^\infty \left[\operatorname{sen} \sigma z \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\partial U_n}{\partial \rho} \right)_{\rho=a} \operatorname{sen} \sigma z \cdot dz + \right. \right.$$

$$+ \cos \sigma z \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\partial U_n}{\partial \rho} \right)_{\rho=a} \cos \sigma z \cdot dz \Bigg] \frac{d\sigma}{\lambda_n(\sigma)(s^2 + \sigma^2)} + \operatorname{sen} n\theta \int_0^\infty \Bigg[\operatorname{sen} \sigma z \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\partial W_n}{\partial \rho} \right)_{\rho=a} \operatorname{sen} \sigma z \cdot dz +$$

$$\left. + \cos \sigma z \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\partial W_n}{\partial \rho} \right)_{\rho=a} \cos \sigma z \cdot dz \Bigg] \frac{d\sigma}{\lambda_n(\sigma)(s^2 + \sigma^2)} \right\},$$

ove al posto delle $\lambda_n(\sigma)$ vanno messi i valori espressi dalle (49).

L'equazione (52) risolve completamente il problema dell'induzione magnetica in un cilindro circolare indefinito per effetto di forze magnetiche qualsiasi.

13. Vogliamo ancora osservare come nel caso in cui il campo magnetico inducente è *emisimmetrico* rispetto al piano $z=0$, cioè tale che il potenziale U sia una funzione dispari di z, $[U(-z)=-U(z)]$ e quindi si annulla per $z=0$, le formule innanzi stabilite si semplificano di molto.

Considerando perciò il cilindro di lunghezza finita $2c$, si avrà

$$\left(\frac{\partial U_n}{\partial z}\right)_{z=c}=\left(\frac{\partial U_n}{\partial z}\right)_{z=-c},\quad \left(\frac{\partial W_n}{\partial z}\right)_{z=c}=\left(\frac{\partial W_n}{\partial z}\right)_{z=-c},$$

e quindi, ricordando le (26) e (27) si deduce

$$\Phi_n(s)=\frac{1}{2\pi}\int_0^a\left(\frac{\partial U_n}{\partial z}\right)_{z=c}J_n(s\rho)\rho d\rho,\qquad \Phi_n'(s)=0,\qquad (n=0,\ 1,\ 2,\ldots),$$

$$\Psi_n(s)=\frac{1}{2\pi}\int_0^a\left(\frac{\partial W_n}{\partial z}\right)_{z=c}J_n(s\rho)\rho d\rho,\qquad \Psi_n'(s)=0,\qquad (n=1,\ 2,\ 3,\ldots).$$

Il potenziale V del campo magnetico indotto risulterà anch'esso emisimmetrico rispetto al piano $z=0$, e pertanto la componente $I(\varphi,\zeta)$ del magnetismo indotto sarà anche una funzione dispari di ζ, e per conseguenza, ricordando l'ultima delle (12), saranno funzioni dispari di ζ le $E_n(\zeta)$ e le $F_n(\zeta)$. Ne segue allora

$$\int_{-c}^{c}\cosh s\zeta E_n(\zeta)d\zeta=0,\ (n=0,1,2,\ldots);\qquad \int_{-c}^{c}\cosh s\zeta F_n(\zeta)d\zeta=0,\ (n=1,2,3,\ldots),$$

e in virtù delle (28) e (28') e delle (21) si avrà

$$\alpha_n(s)=\gamma_n(s),\ (n=0,1,2,\ldots);\qquad \beta_n(s)=\delta_n(s),\ (n=1,2,3,\ldots),$$

$$A_n(\rho)=C_n(\rho)=\int_0^\infty J_n(s\rho)\alpha_n(s)s\,ds,\qquad (n=0,\ 1,\ 2,\ldots),$$

$$B_n(\rho)=D_n(\rho)=\int_0^\infty J_n(s\rho)\beta_n(s)s\,ds,\qquad (n=1,\ 2,\ 3,\ldots).$$

Si avrà inoltre

$$\int_{-c}^{c}E_n(\alpha)\cos\sigma\alpha\cdot d\alpha=0,\quad \int_{-c}^{c}F_n(\alpha)\cos\sigma\alpha\cdot d\alpha=0,$$

e per le (37)

$$H_n'(\sigma)=0,\qquad K_n'(\sigma)=0.$$

Le (38) e (38') porgono in tal caso

$$\alpha_n(s) = \gamma_n(s) = \frac{1}{2}\,\frac{(\mu-1)e^{sc}}{\mu\cosh sc + \operatorname{senh} sc}\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^a\left(\frac{\partial U_n}{\partial z}\right)_{z=c} J_n(s\rho)\rho d\rho + \right.$$

$$\left. + \frac{2a}{\pi} J_n(sa)e^{-sc}\int_0^\infty H_n(\sigma)(s \operatorname{sen}\sigma c\cdot\cosh sc - \sigma\cos\sigma c\cdot\operatorname{senh} sc)\frac{d\sigma}{s^2+\sigma^2}\right],$$

$$\beta_n(s) = \delta_n(s) = \frac{1}{2}\,\frac{(\mu-1)e^{sc}}{\mu\cosh sc + \operatorname{senh} sc}\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^a\left(\frac{\partial W_n}{\partial z}\right)_{z=c} J_n(s\rho)\rho d\rho + \right.$$

$$\left. + \frac{2a}{\pi} J_n(sa)e^{-sc}\int_0^\infty K_n(\sigma)(s \operatorname{sen}\sigma c\cdot\cosh sc - \sigma\cos\sigma c\cdot\operatorname{senh} sc)\frac{d\sigma}{s^2+\sigma^2}\right],$$

e le (36') si riducono alle seguenti

$$E_n(\zeta) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty H_n(\sigma)\operatorname{sen}\sigma\zeta\cdot d\sigma, \qquad F_n(\zeta) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty K_n(\sigma)\operatorname{sen}\sigma\zeta\cdot d\sigma.$$

La questione è ridotta così a determinare le funzioni $H_n(\sigma)$, $K_n(\sigma)$, mediante le prime delle equazioni integrali (46) e (46'), colle semplificazioni che ora competono.

Nelle stesse condizioni di emisimmetria, se il cilindro diventa di lunghezza infinita, essendo ora

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\partial U_n}{\partial\rho}\right)_{\rho=a}\cos\sigma z\cdot dz = 0, \qquad \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\partial W_n}{\partial\rho}\right)_{\rho=a}\cos\sigma z\cdot d\sigma = 0,$$

la (52) porge, per il potenziale V del magnetismo indotto, il valore

$$V(\rho,\theta,z) = -\frac{2a}{\pi}\sum_0^\infty{}_n\, c_n\int_0^\infty J_n(s\rho)J_n(sa)sds\left\{\cos n\theta\int_0^\infty\frac{\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\partial U_n}{\partial\rho}\right)_{\rho=a}\operatorname{sen}\sigma z\cdot dz}{\lambda_n(\sigma)(s^2+\sigma^2)}\cdot\operatorname{sen}\sigma z\cdot d\sigma + \right.$$

$$\left. + \operatorname{sen} n\theta\int_0^\infty\frac{\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\partial W_n}{\partial\rho}\right)_{\rho=a}\operatorname{sen}\sigma z\cdot dz}{\lambda_n(\sigma)(s^2+\sigma^2)}\cdot\operatorname{sen}\sigma z\cdot d\sigma\right\}.$$

È bene infine rilevare che, se più particolarmente il campo inducente ammette un piano di simmetria passante per l'asse z e si conta l'anomalia θ

in un verso determinato, a partire da questo piano (assunto come piano xz), allora si annullano tutti i termini in sen $n\theta$, $(n=1, 2, 3, \ldots)$.

Pertanto si avrà ancora

$$W_n(\rho, z)=0, \quad \Psi_n(s)=0, \quad F_n(\zeta)=0, \quad K_n(\sigma)=0\,;$$
$$\beta_n(s)=\delta_n(s)=0, \quad B_n(\rho)=D_n(\rho)=0,$$

e la questione si riduce a determinare le sole funzioni $H_n(\sigma)$ mediante la prima delle equazioni integrali (46).

14. Un caso particolare notevole si ha quando la sezione del cilindro è sufficientemente piccola da poterlo ritenere un filo e considerare il magnetismo indotto come se fosse distribuito lungo il suo asse.

Allora, ricordando le relazioni (26), (27), (28), (28′) e (21), per a tendente a zero, si avrà

$$\Phi_n(s)=\Phi_n'(s)=0, \quad \Psi_n(s)=\Psi_n'(s)=0,$$
$$\alpha_n(s)=\gamma_n(s)=0, \quad \beta_n(s)=\delta_n(s)=0,$$

e quindi

$$A_n(\rho)=C_n(\rho)=0, \quad B_n(\rho)=D_n(\rho)=0,$$

cioè saranno nulle le componenti I_1, I_2 del magnetismo indotto sulle due basi infinitesime del filo.

Se si osserva poi che alle componenti $U_n(\rho, z)$, $W_n(\rho, z)$, del potenziale U si può assegnare uno sviluppo della forma

$$U_n(\rho, z)=\int_0^\infty [a_n(s)e^{sz}+b_n(s)e^{-sz}]J_n(s\rho)ds,$$
$$W_n(\rho, z)=\int_0^\infty [a_n'(s)e^{sz}+b_n'(s)e^{-sz}]J_n(s\rho)ds,$$

si ricava

$$\frac{\partial U_n}{\partial\rho}=\int_0^\infty [a_n(s)e^{sz}+b_n(s)e^{-sz}]J_n'(s\rho)s\,ds,$$
$$\frac{\partial W_n}{\partial\rho}=\int_0^\infty [a_n'(s)e^{sz}+b_n'(s)e^{-sz}]J_n'(s\rho)s\,ds.$$

Ma

$$J_n'(s\rho)=J_{n-1}(s\rho)-\frac{n}{s\rho}J_n(s\rho), \quad J_0(s\rho)=-J_1(s\rho),$$

e quindi

$$\lim_{\rho \to 0} J_n'(s\rho) = 0, \quad \text{per} \quad n = 0,\ 2,\ 3, \ldots$$

e

$$\lim_{\rho \to 0} J_1'(s\rho) = \lim_{\rho \to 0} J_0(s\rho) - \lim_{\rho \to 0} \frac{J_1(s\rho)}{s\rho} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2};$$

perciò risulta

$$\lim_{\rho \to 0} \frac{\partial U_n}{\partial \rho} = \begin{cases} 0, & \text{per } n = 0,\ 2,\ 3, \ldots \\ \neq 0, & \text{»} \quad n = 1, \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \lim_{\rho \to 0} \frac{\partial W_n}{\partial \rho} = \begin{cases} 0, & \text{per } n = 0,\ 2,\ 3, \ldots \\ \neq 0, & \text{»} \quad n = 1. \end{cases}$$

In questo caso (per $a \to 0$), le funzioni $\mu_n(\sigma, z)$, $\mu_n'(\sigma, z)$, definite dalle (45) si annullano, e se si sicordano ancora le (49') si ottiene ora

$$H_n(\sigma) = H_n'(\sigma) = 0, \ \text{per} \ n = 0,\ 2,\ 3, \ldots \qquad K_n(\sigma) = K_n'(\sigma) = 0, \ \text{per} \ n = 2,\ 3,\ 4, \ldots$$

e

$$H_1(\sigma) = \frac{1}{2}(\mu - 1) \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-c}^{c} \left(\frac{\partial U_1}{\partial \rho}\right)_{\rho = 0} \operatorname{sen} \sigma z \cdot dz,$$

$$H_1'(\sigma) = \frac{1}{2}(\mu - 1) \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-c}^{c} \left(\frac{\partial U_1}{\partial \rho}\right)_{\rho = 0} \cos \sigma z \cdot dz,$$

$$K_1(\sigma) = \frac{1}{2}(\mu - 1) \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-c}^{c} \left(\frac{\partial W_1}{\partial \rho}\right)_{\rho = 0} \operatorname{sen} \sigma z \cdot dz,$$

$$K_1'(\sigma) = \frac{1}{2}(\mu - 1) \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-c}^{c} \left(\frac{\partial W_1}{\partial \rho}\right)_{\rho = 0} \cos \sigma z \cdot dz.$$

Pertanto, in virtù delle (36'), e per il teorema di reciprocità di FOURIER, si ha

$$E_n(z) = 0, \ \text{per} \ n = 0,\ 2,\ 3, \ldots; \qquad F_n(z) = 0, \ \text{per} \ n = 2,\ 3,\ 4, \ldots,$$

ed

$$(53) \qquad E_1(z) = \frac{1}{2}(\mu - 1) \cdot \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\partial U_1}{\partial \rho}\right)_{\rho = 0}, \quad F_1(z) = \frac{1}{2}(\mu - 1) \cdot \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\partial W_1}{\partial \rho}\right)_{\rho = 0},$$

e l'intensità della magnetizzazione lungo il filo risulta

$$I(\varphi, \zeta) = E_1(\zeta) \cos \varphi + F_1(\zeta) \operatorname{sen} \varphi.$$

In quanto al potenziale V del magnetismo indotto esso non si può ottenere senz'altro dalle formule (14), (15) e (16), inquantochè per $a \to 0$ i secondi membri di esse svaniscono.

Se però poniamo

$$\mathcal{V}_{z>c} = \lim_{a \to 0} \frac{V_{z>c}}{\pi a^2}, \quad \mathcal{V}_{z^2<c^2} = \lim_{a \to 0} \frac{V_{z^2<c^2}}{\pi a^2}, \quad \mathcal{V}_{z<-c} = \lim_{a \to 0} \frac{V_{z<-c}}{\pi a^2},$$

si ottiene facilmente

$$\mathcal{V}_{z>c} = -\frac{1}{4\pi}(\mu - 1)\int_0^\infty e^{-sz} J_1(s\rho) s ds \left[\cos\theta \int_{-c}^{c} e^{s\zeta}\left(\frac{\partial U_1}{\partial \rho}\right)_{\substack{\rho=0\\ z=\zeta}} d\zeta + \operatorname{sen}\theta \int_{-c}^{c} e^{s\zeta}\left(\frac{\partial W_1}{\partial \rho}\right)_{\substack{\rho=0\\ z=\zeta}} d\zeta\right],$$

$$(54) \quad \mathcal{V}_{z^2<c^2} = -\frac{1}{4\pi}(\mu - 1)\int_0^\infty J_1(s\rho) s ds \left\{\cos\theta\left[e^{-sz}\int_{-c}^{z} e^{s\zeta}\left(\frac{\partial U_1}{\partial \rho}\right)_{\substack{\rho=0\\ z=\zeta}} d\zeta + e^{sz}\int_{z}^{c} e^{-s\zeta}\left(\frac{\partial U_1}{\partial \rho}\right)_{\substack{\rho=0\\ z=\zeta}} d\zeta\right] + \right.$$

$$\left. + \operatorname{sen}\theta\left[e^{-sz}\int_{-c}^{z} e^{s\zeta}\left(\frac{\partial W_1}{\partial \rho}\right)_{\substack{\rho=0\\ z=\zeta}} d\zeta + e^{sz}\int_{z}^{c} e^{-s\zeta}\left(\frac{\partial W_1}{\partial \rho}\right)_{\substack{\rho=0\\ z=\zeta}} d\zeta\right]\right\},$$

$$\mathcal{V}_{z<-c} = -\frac{1}{4\pi}(\mu - 1)\int_0^\infty e^{sz} J_1(s\rho) s ds \left[\cos\theta \int_{-c}^{c} e^{-s\zeta}\left(\frac{\partial U_1}{\partial \rho}\right)_{\substack{\rho=0\\ z=\zeta}} d\zeta + \operatorname{sen}\theta \int_{-c}^{c} e^{-s\zeta}\left(\frac{\partial W_1}{\partial \rho}\right)_{\substack{\rho=0\\ z=\zeta}} d\zeta\right].$$

Resta così completamente risolto il problema della magnetizzazione di un filo rettilineo di lunghezza finita in presenza di un campo magnetico qualsiasi.

15. Come applicazione del caso considerato precedentemente supponiamo che il campo magnetico inducente sia generato da un dipolo di lunghezza $2l$ e di momento magnetico M, posto parallelamente all'asse del filo e simmetricamente rispetto al piano $z = 0$.

Se d è la distanza dell'asse del dipolo dall'asse del filo, e si incomincia a misurare l'anomalia θ a partire dal piano dei due assi, si ha

$$U(\rho, \theta, z) = \frac{M}{2l}\left[\frac{1}{\sqrt{(z-l)^2 + \rho^2 + d^2 - 2d\rho\cos\theta}} - \frac{1}{\sqrt{(z+l)^2 + \rho^2 + d^2 - 2d\rho\cos\theta}}\right],$$

e sviluppando in serie di Fourier rispetto a θ, nell'intervallo $(0, 2\pi)$, risulta

$$U = \frac{M}{2l}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{\sqrt{(z-l)^2+\rho^2+d^2-2d\rho\cos\theta}} + \frac{1}{\pi}\sum_1^\infty{}_n \cos n\theta \int_0^{2\pi}\frac{\cos n\theta \cdot d\theta}{\sqrt{(z-l)^2+\rho^2+d^2-2d\rho\cos\theta}} - \right.$$

$$\left. -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{\sqrt{(z+l)^2+\rho^2+d^2-2d\rho\cos\theta}} - \frac{1}{\pi}\sum_1^\infty{}_n \cos n\theta \int_0^{2\pi}\frac{\cos n\theta \cdot d\theta}{\sqrt{(z+l)^2+\rho^2+d^2-2d\rho\cos\theta}}\right\}.$$

In questo caso si ha perciò

$$(55)\qquad U_n(\rho, z) =$$
$$= \frac{k_n}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos n\theta\cdot d\theta\left[\frac{1}{\sqrt{(z-l)^2+\rho^2+d^2-2d\rho\cos\theta}}-\frac{1}{\sqrt{(z+l)^2+\rho^2+d^2-2d\rho\cos\theta}}\right],$$
$$(n = 0,\ 1,\ 2,\ldots),$$
$$W_n(\rho, z) = 0, \qquad (n = 1,\ 2,\ 3,\ldots),$$

ove si è posto

$$k_n = \begin{cases} \dfrac{M}{2l}, & \text{per}\quad n = 0,\\[2mm] \dfrac{M}{l}, & \text{»}\quad n = 1,\ 2,\ 3,\ldots. \end{cases}$$

Per calcolare ora facilmente $E_1(\zeta)$, osserviamo che per la formula di Lipschitz, già ricordata nel n.° 4, risulta

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\cos n\theta\cdot d\theta}{\sqrt{(z\mp l)^2+\rho^2+d^2-2d\rho\cos\theta}} = \int_0^{\infty} e^{\mp s(z\mp l)}J_n(s\rho)J_n(sd)ds,$$

ove negli esponenziali $e^{\mp s(z-l)}$, $e^{\mp s(z+l)}$, va preso il segno superiore rispettivamente per $z > l$ e per $z > -l$, mentre va preso il segno inferiore rispettivamente per $z < l$ e per $z < -l$. Ne segue

$$U_n(\rho, z) = k_n\int_0^{\infty}[e^{\mp s(z-l)} - e^{\mp s(z+l)}]J_n(s\rho)J_n(sd)ds,$$
$$\frac{\partial U_n}{\partial\rho} = k_n\int_0^{\infty}[e^{\mp s(z-l)} - e^{\mp s(z+l)}]J_n'(s\rho)J_n(sd)sds,$$

e per quanto si è già osservato nel n.° precedente si deduce che

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{\partial U_n}{\partial\rho} = 0, \quad \text{per}\quad n = 0,\ 2,\ 3,\ldots$$
$$\lim_{\rho\to 0}\frac{\partial U_1}{\partial\rho} = \frac{1}{2}\int_0^{\infty}[e^{\mp s(z-l)} - e^{\mp s(z+l)}]J_n(sd)sds.$$

Ricordando ancora la formula ([14])

$$(56)\qquad \int_0^{\infty}J_n(qx)e^{-hx}x^n dx = \frac{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}}\,\frac{(2q)^n}{(q^2+h^2)^{n+\frac{1}{2}}}, \qquad n > -\frac{1}{2},$$

([14]) Vedi Sonine, loco citato, p. 45.

poichè $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, si ottiene

$$\lim_{\rho \to 0} \frac{\partial U_1}{\partial \rho} = \frac{Md}{2l} \left\{ \frac{1}{[(z-l)^2 + d^2]^{3/2}} - \frac{1}{[(z+l)^2 + d^2]^{3/2}} \right\}, \tag{57}$$

che si poteva anche ricavare direttamente dalla (55) per $n = 1$.

In virtù della prima delle (53) si ha perciò

$$E_1(\zeta) = (\mu - 1) \frac{Md}{8\pi l} \left\{ \frac{1}{[(\zeta - l)^2 + d^2]^{3/2}} - \frac{1}{[(\zeta + l)^2 + d^2]^{3/2}} \right\},$$

e quindi

$$I(\varphi, \zeta) = E_1(\zeta) \cdot \cos \varphi.$$

Infine per le (50) il potenziale sarà espresso dalle relazioni

$$\mathfrak{V}_{z>c} = -\frac{1}{4\pi}(\mu - 1) \int_{-c}^{c} \left(\frac{\partial U_1}{\partial \rho}\right)_{\substack{\rho=0 \\ z=\zeta}} d\zeta \int_0^\infty e^{-s(z-\zeta)} J_1(s\rho) s ds \cdot \cos \theta,$$

$$\mathfrak{V}_{z^2<c^2} = -\frac{1}{4\pi}(\mu - 1) \left\{ \int_{-c}^{z} \left(\frac{\partial U_1}{\partial \rho}\right)_{\substack{\rho=0 \\ z=\zeta}} d\zeta \int_0^\infty e^{-s(z-\zeta)} J_1(s\rho) s ds + \right.$$

$$\left. + \int_{z}^{c} \left(\frac{\partial U_1}{\partial \rho}\right)_{\substack{\rho=0 \\ z=\zeta}} d\zeta \int_0^\infty e^{-s(\zeta-z)} J_1(s\rho) s ds \right\} \cos \theta,$$

$$\mathfrak{V}_{z<-c} = -\frac{1}{4\pi}(\mu - 1) \int_{-c}^{c} \left(\frac{\partial U_1}{\partial \rho}\right)_{\substack{\rho=0 \\ z=\zeta}} d\zeta \int_0^\infty e^{-s(\zeta-z)} J_1(s\rho) s ds \cdot \cos \theta,$$

cioè, applicando ancora la formula (56), si ottiene per ogni valore di z

$$\mathfrak{V} = -\frac{1}{4\pi}(\mu - 1) \int_{-c}^{c} \left(\frac{\partial U_1}{\partial \rho}\right)_{\substack{\rho=0 \\ z=\zeta}} \frac{d\zeta}{[(z-\zeta)^2 + \rho^2]^{3/2}} \cdot \rho \cos \theta,$$

ove in luogo di $\left(\frac{\partial U_1}{\partial \rho}\right)_{\rho=0}$ va messo il valore dato dalla (57).