Sopra una caratterizzazione della sfera.

Nota di A. SIGNORINI (a Roma).

[Estratto da una lettera al prof. H. GEPPERT].

. . . .

In una Nota [1] comparsa nell'ultimo fascicolo degli « Annali » Voi avete dato due nuove dimostrazioni di un recente teorema [2] del prof. W. SCHERRER. Esse sono certo meno complesse della dimostrazione originale di SCHERRER, ma mi sembra che la prima possa anche esser notevolmente semplificata.

Sia l una linea chiusa della superficie σ e τ la torsione di l nel suo punto generico, di ascissa curvilinea s. Il teorema di SCHERRER può allora precisarsi nel duplice enunciato:

I) se σ è una sfera, l'integrale

$$I = \int_l \tau ds$$

si annulla per ogni l;

II) se I si annulla per ogni l, σ è una sfera o un piano.

Nella Vostra prima dimostrazione in sostanza prendete le mosse dalla ben nota relazione [3] fra τ e la torsione geodetica τ_g spettante a l su σ, relazione in cui è implicito che:

α) I può differire da

$$I_g = \int_l \tau_g ds$$

solo per un multiplo di 2π.

Naturalmente lo scopo di questa osservazione è quello di profittare di altri due teoremi [4] ben noti:

---

(1) *Sopra una caratterizzazione della sfera*, « Annali di Matematica », s. 4ª, t. XX (1941), pp. 59-66.

(2) *Eine Kennzeichnung der Kugel* (« Vierteljahrsschrift der naturforsch. Ges. Zürich », 1940, Beiblatt. n. 32, pag. 40-46).

(3) V. BIANCHI, *Lezioni di Geometria differenziale*, 3.ª ediz. (Bologna, Zanichelli, 1927), Vol. I, Parte 1.ª, pag. 298.

(4) V. Op. cit. (3), Vol. I, Parte 1.ª, pagg. 297 e 189.

β) sopra ogni superficie le linee di curvatura sono quelle che hanno nulla in ogni punto la torsione geodetica;

γ) piano e sfera sono caratterizzati dal fatto che ogni loro linea è linea di curvatura.

In conseguenza di questi due teoremi:

δ) piano e sfera sono caratterizzati anche dal fatto che la torsione geodetica si annulla *identicamente*.

Quindi per la sfera I, qualunque sia l, deve esser multiplo di 2π e I) appare evidente non appena si pensi a una deformazione continua che riduca la generica linea della sfera a una sua circonferenza.

Ebbene, con le stesse premesse, altrettanto semplice può riuscire la dimostrazione di II). Basta procedere per assurdo, ammettendo che si annulli I per ogni l, ma non si annulli identicamente τ_g [cfr. δ)].

Si potrebbe allora pensare, in σ, a un triangolo infinitesimo rettangolo pel quale i due cateti, c e c', fossero elementi delle linee di curvatura e in più fosse $\tau_g \neq 0$ lungo tutta l'ipotenusa i. Riferendo I_g a un tale triangolo infinitesimo, per β) risulterebbe nullo il contributo di c e di c': mentre il contributo di i riuscirebbe piccolo a piacere, ma $\neq 0$. Quindi I_g verrebbe a essere $\neq 0$, ma non multiplo di 2π: ciò che escluderebbe [cfr. α)] l'annullarsi di I.

. . . .

NOTA. – Rispondendo alla mia lettera il prof. GEPPERT mi ha scritto quanto segue.

« ... Vi ringrazio dell'osservazione riguardante la mia Nota e che infatti « notevolmente semplifica la mia prima dimostrazione... Vi devo fare però « una piccola obbiezione. A quanto vedo la Vostra dimostrazione vale in « primo luogo sulle superficie reali: l'estensione a quelle immaginarie e « specialmente a quelle dette di SERRET (con un unico sistema di linee di « curvatura) necessiterebbe almeno qualche approfondimento di natura ana- « litica. È stata proprio questa maggiore generalità che volevo ottenere con « le mie dimostrazioni che infatti comprendono *tutte* le classi di superficie « reali e immaginarie... ».