Alcuni teoremi tauberiani per la trasformazione di Laplace (*).

Memoria di Luigi Amerio (a Roma).

Sunto. - *Si indicano alcuni teoremi tauberiani relativi al comportamento per* $t \to \infty$ *di una funzione trasformabile* $F(t)$, *facendo unicamente delle ipotesi sulla trasformata di* LAPLACE $f(p)$ *di tale funzione.*

I teoremi dimostrati hanno soprattutto lo scopo di dare condizioni sufficienti perchè la $F(t)$ *tenda a un limite finito per* $t \to \infty$, *oppure resti limitata nel tratto* $0 \leq t < \infty$.

Nella teoria della trasformazione di Laplace numerosi sono i teoremi tauberiani [1] nei quali dalle proprietà della trasformata

$$f(p) = \int_0^\infty e^{-pt} F(t) dt$$

si desumono alcune proprietà relative al comportamento per $t \to \infty$ della funzione trasformanda $F(t)$.

Negli enunciati di tali teoremi molto spesso però si suppone che la $F(t)$ soddisfi a particolari condizioni (ad es. sia non negativa, o sia non negativa e non decrescente, oppure sia derivabile per $t > 0$, continua nel punto $t = 0$ e la derivata abbia un certo comportamento per $t > 0$ ecc.) e, a volte, può essere poco agevole verificare se tali condizioni sono soddisfatte.

Ora in una vasta classe di problemi, detti, dal Picone [2], di *stabilità*, si vuol conoscere se per la soluzione $F(t)$ risulti

(1) $$\lim_{t \to \infty} F(t) = A$$

finito, oppure, per $0 \leq t < \infty$,

(2) $$|F(t)| \leq M,$$

con M costante positiva, e, in molti casi, si cerca di desumere se la $F(t)$ sia *stabile* tenendo conto *soltanto* delle proprietà della trasformata $f(p)$, proprietà che sono sufficienti, almeno in via teorica, per ricavare quelle della $F(t)$, perchè la corrispondenza tra i due campi funzionali costituiti dalle funzioni

(*) Lavoro eseguito nel Reale Istituto Nazionale di Alta Matematica.

trasformabili e dalle loro trasformate è biunivoca (se si considerano identiche due funzioni $F_1(t)$ e $F_2(t)$ che differiscano solo nei punti di un insieme di misura nulla).

In questa Memoria sono dimostrati alcuni teoremi tauberiani relativi al comportamento per $t \to \infty$ della funzione $F(t)$, con lo scopo principale di dare condizioni sufficienti perchè essa sia stabile, facendo sulla $F(t)$ le ipotesi, strettamente necessarie, di integrabilità secondo LEBESGUE in ogni intervallo finito e di trasformabilità in un semipiano $R(p) > \alpha$, finito. Si è inoltre supposto che la trasformata $f(p)$ risulti analitica nel semipiano $R(p) > 0$, ciò che manifestamente non lede la generalità.

Quanto alla $f(p)$, posto $p = u + iv$, si è dapprima considerato il caso in cui il

$$\lim_{u \to 0+} f(u + iv)$$

esiste finito per quasi tutti i valori di v e risulta una funzione $f(iv)$ integrabile secondo LEBESGUE in ogni intervallo finito $-h \leq v \leq h$, e soddisfacente alla condizione

$$\lim_{u \to 0+} \int_{-h}^{h} | f(u + iv) - f(iv) | \, dv = 0.$$

Si è posta questa circostanza, unita a varie ipotesi sul comportamento della $f(iv)$ per $v \to \pm\infty$, in relazione col tendere di $F(t)$ a 0, escludendo al più, per la variabilità di t, una successione di intervalli aventi tutti lunghezza eguale ed arbitrariamente piccola.

Questi teoremi estendono alla teoria della trasformazione di LAPLACE il noto teorema di RIEMANN-LEBESGUE nel quale si afferma che i coefficienti di FOURIER di una funzione integrabile $\to 0$ per $n \to \infty$.

In essi ho fatto uso di una generalizzazione da me precedentemente ottenuta della formula di inversione di RIEMANN.

Si sono poi ricavate condizioni sufficienti perchè sia verificata la (1), con le stesse limitazioni per la variabilità di t introdotte per $A = 0$.

Successivamente si è supposto che la $f(p)$ sia funzione meromorfa e presenti solo poli del primo ordine situati sull'asse immaginario del piano p (*).

In questo caso la teoria delle funzioni periodiche e quasi periodiche suggerisce dei teoremi relativi al comportamento di $F(t)$ per $t \to \infty$. Si sono

(*) La considerazione della semplicissima funzione $F(t) = t^\alpha$, con $R(\alpha) > -1$, la cui trasformata è $\frac{\Gamma(\alpha+1)}{p^{\alpha+1}}$, mostra come la presenza di un punto di infinito di ordine > 1 sulla retta di convergenza possa escludere la stabilità della $F(t)$.

potute così ottenere, tra l'altro, un'estensione, che non mi consta sia stata ancora dimostrata, di un noto teorema di YOUNG-HAUSDORFF sulle serie di FOURIER e delle condizioni sufficienti perchè sia verificata la (2).

Si è poi accennato al caso in cui i poli della $f(p)$ appartengano al semipiano $R(p) \leq 0$ e abbiano ordine non superiore a un intero positivo N e si sono combinati i risultati così dedotti con quelli ottenuti nell'ipotesi che la $f(iv)$ sia integrabile secondo LEBESGUE in ogni intervallo finito.

Infine si è indicata una proprietà relativa a una classe di funzioni $F(t)$ alla quale appartengono sicuramente le funzioni per cui vale la generalizzazione, ora ricordata, del teorema di YOUNG-HAUSDORFF e quelle soddisfacenti alle condizioni (1) o (2).

***

1. Per quel che seguirà è opportuno premettere la dimostrazione di alcuni lemmi.

LEMMA I. — *Se* $\varphi(v)$ *è una funzione, reale o complessa, definita per* $-\infty < v < \infty$ *e integrabile* (*) *in ogni intervallo finito e se, per un valore intero positivo o nullo* n, *si ha*

$$\left|\int_{-\lambda}^{\lambda}\varphi(v)\left(1-\frac{v^2}{\lambda^2}\right)^n dv\right| < \varepsilon$$

(dove ε *è un numero positivo) qualunque sia* $\lambda > 0$, *si ha anche*

$$\left|\int_{-\lambda}^{\lambda}\varphi(v)\left(1-\frac{v^2}{\lambda^2}\right)^{n+1} dv\right| < \varepsilon$$

qualunque sia $\lambda > 0$.

DIMOSTRAZIONE. — Si ha

$$\frac{1}{\lambda^{2(n+1)}}\int_{-\lambda}^{\lambda}\varphi(v)(\lambda^2-v^2)^{n+1}dv = \frac{1}{\lambda^{2(n+1)}}\int_0^{\lambda}(\varphi(v)+\varphi(-v))(\lambda^2-v^2)^{n+1}dv$$

$$= \frac{2(n+1)}{\lambda^{2(n+1)}}\int_0^{\lambda}(\varphi(v)+\varphi(-v))\left(\int_v^{\lambda}z(z^2-v^2)^n dz\right)dv$$

$$= \frac{2(n+1)}{\lambda^{2(n+1)}}\int_0^{\lambda}z\left(\int_0^{z}(\varphi(v)+\varphi(-v))(z^2-v^2)^n dv\right)dz$$

$$= \frac{2(n+1)}{\lambda^{2(n+1)}}\int_0^{\lambda}z^{2n+1}\left(\int_{-z}^{z}\varphi(v)\left(1-\frac{v^2}{z^2}\right)^n dv\right)dz$$

(*) Intenderemo sempre nel senso di LEBESGUE.

Siccome è, per $z > 0$,

$$\left| \int_{-z}^{z} \varphi(v)\left(1 - \frac{v^2}{z^2}\right)^n dv \right| < \varepsilon$$

la tesi risulta provata.

Lemma II. — *Se la successione di numeri reali* $\{\lambda_n\}$ *soddisfa, per un valore* $\delta > 0$ *e un valore* $A > 0$, *alla condizione*

$$|\lambda_n - n\delta| < A$$

e se $\{a_n\}$ *è una successione di numeri complessi tali che, per un valore* $m \geq 1$, *risulti convergente la serie*

$$\sum_{-\infty}^{\infty}{}_n |a_n|^{1+\frac{1}{m}},$$

allora, supposto v *reale, la serie*

$$\sum_{-\infty}^{\infty}{}_n a_n e^{i\lambda_n v}$$

converge in media in ogni intervallo finito $a \leq v \leq b$ *a una funzione* $\varphi(v)$ *integrabile, insieme con* $|\varphi(v)|^{1+m}$, *nell'intervallo stesso* (*).

Dimostrazione. — *a)* Posto

(3) $$\varepsilon_n = \lambda_n - n\delta,$$

risulta

(4) $$|\varepsilon_n| < A.$$

Indicando poi con $\varphi_{N,R}(v)$, per $N \leq R$, la somma

$$\sum_{N}^{R}{}_n a_n e^{i\lambda_n v}$$

si ricava per la (3)

(5) $$\varphi_{N,R}(v) = \sum_{N}^{R}{}_n a_n e^{in\delta v} e^{i\varepsilon_n v}$$

$$= \sum_{N}^{R}{}_n a_n e^{in\delta v} \sum_{0}^{\infty}{}_r \frac{(i\varepsilon_n v)^r}{r!}$$

$$= \sum_{0}^{\infty}{}_r \frac{i^r}{r!} v^r \sum_{N}^{R}{}_n a_n \varepsilon_n^r e^{in\delta v}.$$

(*) Per $m = 1$ il lemma è contenuto in: N. Wiener and C. Paley, *Fourier transforms in the complex domain*, « Am. Math. Soc. Coll. Publ. », Vol. XIX (1934), Cap. VI.

Ricordiamo ora che, se $\psi(v)$ e $\vartheta(v)$ sono due funzioni integrabili nell'intervallo $0 \vdash\!\dashv \frac{2\pi}{\delta}$ insieme con $|\psi(v)|^{1+m}$ e $|\vartheta(v)|^{1+m}$, con $m > 0$, posto

$$\| \psi \|_m = \left(\int_0^{\frac{2\pi}{\delta}} | \psi(v) |^{1+m} dv \right)^{\frac{1}{1+m}},$$

e analogamente per $\vartheta(v)$, si ha la diseguaglianza di F. RIESZ

(6) $$\| \psi + \vartheta \|_m \leq \| \psi \|_m + \| \vartheta \|_m .$$

Si ricava perciò dalle (5) e (6)

(7) $$\| \varphi_{N,R} \|_m \leq \sum_0^\infty {}_r \frac{1}{r!} \| v^r \sum_N^R {}_n a_n \varepsilon_n^r e^{in\delta v} \|_m \leq$$
$$\leq \sum_0^\infty {}_r \frac{1}{r!} \left(\frac{2\pi}{\delta}\right)^r \| \sum_N^R {}_n a_n \varepsilon_n^r e^{in\delta v} \|_m .$$

Supposto $m \geq 1$ si ha poi, per un teorema di YOUNG-HAUSDORFF (³),

$$\frac{\delta}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\delta}} | \sum_N^R {}_n a_n \varepsilon_n^r e^{in\delta v} |^{1+m} dv =$$
$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} | \sum_N^R {}_n a_n \varepsilon_n^r e^{inx} |^{1+m} dx \leq \left(\sum_N^R {}_n | a_n \varepsilon_n^r |^{1+\frac{1}{m}} \right)^m$$

e quindi, per le (4) e (7),

(8) $$\| \varphi_{N,R} \|_m \leq \sum_0^\infty {}_r \frac{1}{r!} \left(\frac{2\pi}{\delta}\right)^r \left\{ \frac{2\pi}{\delta} \left(\sum_N^R {}_n | a_n \varepsilon_n^r |^{1+\frac{1}{m}} \right)^m \right\}^{\frac{1}{1+m}} \leq$$
$$\leq \left(\frac{2\pi}{\delta}\right)^{\frac{1}{1+m}} e^{2\pi \frac{A}{\delta}} \left(\sum_N^R {}_n | a_n |^{1+\frac{1}{m}} \right)^{\frac{m}{1+m}} .$$

Fissato $\varepsilon > 0$, e supposto $m = 1$, siccome la serie $\sum_{-\infty}^{\infty} {}_n | a_n |^2$ è convergente, si può allora determinare un intero positivo P in modo che per $P \leq N \leq R$ e per $N \leq R \leq -P$ risulti

$$\| \varphi_{N,R} \|_1 < \varepsilon.$$

Ne segue, per il teorema di FISCHER-RIESZ, che le due serie

$$\sum_0^\infty {}_n a_n e^{i\lambda_n v}, \quad \sum_{-\infty}^{-1} {}_n a_n e^{i\lambda_n v}$$

convergono in media, nell'intervallo $0 \vdash\!\dashv \frac{2\pi}{\delta}$, a due funzioni $g(v)$ e $h(v)$ a quadrato integrabile.

Anche la serie

$$\sum_{-\infty}^{\infty}{}_n\, a_n e^{i\lambda_n v} \tag{9}$$

convergerà allora in media, nello stesso intervallo a una funzione

$$\varphi(v) = g(v) + h(v).$$

b) Considerando ora l'intervallo $a \vdash\!\dashv a + \frac{2\pi}{\delta}$, si ricava

$$\varphi_{N,R}(v) = \sum_{N}^{R}{}_n\, a_n e^{i\lambda_n a} e^{i\lambda_n(v-a)}$$

e quindi, essendo

$$|\, a_n e^{i\lambda_n a}\,| = |\, a_n\,|$$

si ottiene, per la (8),

$$\left(\int_a^{a+\frac{2\pi}{\delta}} |\,\varphi_{N,R}(v)\,|^{1+m}\, dv\right) \leq \left(\frac{2\pi}{\delta}\right) e^{2\pi(1+m)\frac{A}{\delta}} \left(\sum_{N}^{R}{}_n\, |\, a_n\,|^{1+\frac{1}{m}}\right)^m. \tag{10}$$

Ne segue che la $\varphi(v)$ è a quadrato integrabile in ogni tratto finito $a \vdash\!\dashv b$, e risulta definita in media, nello stesso intervallo, dalla serie (9).

c) Dimostriamo ora che la funzione $|\,\varphi(v)\,|^{1+m}$ è integrabile in $a \vdash\!\dashv a + \frac{2\pi}{\delta}$.

Per questo osserviamo che, a causa della convergenza in media, esiste una successione di interi positivi

$$N_1 < N_2 < \dots < N_s < \dots$$

tali che la corrispondente successione

$$\varphi_{-N_1,N_1}(v), \quad \varphi_{-N_2,N_2}(v), \dots, \quad \varphi_{-N_s,N_s}(v), \dots$$

converga alla $\varphi(v)$ quasi ovunque in $a \vdash\!\dashv a + \frac{2\pi}{\delta}$.

Se p è un intero positivo, posto ${}_p|\,\varphi(v)\,|^{1+m} = |\,\varphi(v)\,|^{1+m}$ in tutti i punti di $a \vdash\!\dashv a + \frac{2\pi}{\delta}$ nei quali è $|\,\varphi(v)\,|^{1+m} \leq p$, ${}_p|\,\varphi(v)\,|^{1+m} = p$ nei punti in cui è

$|\varphi(v)|^{1+m} > p$, e analogamente per le funzioni φ_{-N_s,N_s}, sarà quasi ovunque

$$\lim_{s\to\infty} {}_p|\varphi_{-N_s,N_s}(v)|^{1+m} = {}_p|\varphi(v)|^{1+m}$$

e quindi, per il teorema di ARZELÀ-LEBESGUE,

$$\lim_{s\to\infty}\int_a^{a+\frac{2\pi}{\delta}} {}_p|\varphi_{-N_s,N_s}(v)|^{1+m}dv = \int_a^{a+\frac{2\pi}{\delta}} {}_p|\varphi(v)|^{1+m}dv.$$

Essendo poi, per la (10),

$$\int_a^{a+\frac{2\pi}{\delta}} {}_p|\varphi_{-N_s,N_s}(v)|^{1+m}dv \le \int_a^{a+\frac{2\pi}{\delta}} |\varphi_{-N_s,N_s}(v)|^{1+m}dv \le$$

$$\le \left(\frac{2\pi}{\delta}\right) e^{2\pi(1+m)\frac{A}{\delta}} \left(\sum_{-\infty}^{\infty}{}_n |a_n|^{1+\frac{1}{m}}\right)^m,$$

si ricava

$$\int_a^{a+\frac{2\pi}{\delta}} {}_p|\varphi(v)|^{1+m}dv \le \left(\frac{2\pi}{\delta}\right) e^{2\pi(1+m)\frac{A}{\delta}} \left(\sum_{-\infty}^{\infty}{}_n |a_n|^{1+\frac{1}{m}}\right)^m$$

e quindi, per un noto teorema [4], la funzione $|\varphi(v)|^{1+m}$ risulta integrabile nell'intervallo $a \mapsto a + \frac{2\pi}{\delta}$ e si ha

(11) $$\int_a^{a+\frac{2\pi}{\delta}} |\varphi(v)|^{1+m}dv \le \left(\frac{2\pi}{\delta}\right) e^{2\pi(1+m)\frac{A}{\delta}} \left(\sum_{-\infty}^{\infty}{}_n |a_n|^{1+\frac{1}{m}}\right)^m.$$

Ne segue allora l'integrabilità di $|\varphi(v)|^{1+m}$ in ogni intervallo finito $a \mapsto b$.

LEMMA III. — *Se* N *è un intero positivo, se* a_n *sono dei numeri complessi e* λ_n *dei numeri reali con* $\lambda_{-N} < \lambda_{-N+1} < \ldots < \lambda_N$ *si ha, per* $m \ge 1$,

$$\max\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T \Big|\sum_{-N}^{N}{}_n a_n e^{i\lambda_n t}\Big|^{1+m} dt \le \left(\sum_{-N}^{N}{}_n |a_n|^{1+\frac{1}{m}}\right)^m.$$

Se poi è $m = 1$, *risulta*

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int^T \Big|\sum_{-N}^{N}{}_n a_n e^{i\lambda_n t}\Big|^2 dt = \sum_{-N}^{N}{}_n |a_n|^2.$$

DIMOSTRAZIONE. — La funzione

$$\varphi(t) = \sum_{-N}^{N}{}_n\, a_n e^{i\lambda_n t}$$

è una funzione quasi periodica di BOHR.

Preso $\sigma > 0$, esiste [5] allora un corrispondente insieme E di numeri reali τ (detti numeri di traslazione) e un numero $l > 0$ tale che ogni intervallo di lunghezza l contenga almeno un numero di E, per i quali risulta

$$|\varphi(t) - \varphi(t + \tau)| \leq \sigma$$

per $-\infty < t < \infty$.

Fissato $\varepsilon > 0$, si dimostra [6] poi che è possibile prendere σ in modo che per tutti i corrispondenti numeri τ si abbia, per $-N \leq n \leq N$,

$$|\lambda_n \tau - 2\pi k| < \varepsilon,$$

dove k è un intero dipendente da τ e da n.

Supposto $t \geq 0$, sia $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_r, \ldots$ una successione di numeri di traslazione soddisfacente alla condizione

$$rl \leq \tau_r < (r + 1)l$$

se è $l \geq 1$, e, se è $l < 1$, alla condizione

$$r\delta l \leq \tau_r < (r + 1)\delta l$$

dove δ è un numero positivo tale che sia $\delta l \geq 1$.

Ne segue che se supponiamo $\varepsilon < \frac{h}{2}$, dove $h > 0$ è la minore delle differenze $\lambda_{n+1} - \lambda_n$, nelle diseguaglianze

$$(12) \qquad |\lambda_n \tau_r - 2\pi k_{r,n}| < \varepsilon$$

sarà $k_{r,n} \neq k_{r,m}$ per $n \neq m$.

È evidente poi che si può supporre

$$(13) \qquad \sum_{-N}^{N}{}_n\, |a_n| \leq 1.$$

Si ha inoltre, per la diseguaglianza di RIESZ,

$$(14) \qquad \left(\frac{1}{\tau_r}\int_0^{\tau_r} |\varphi(t)|^{1+m} dt\right)^{\frac{1}{1+m}} \leq \left(\frac{1}{\tau_r}\int_0^{\tau_r} \left|\sum_{-N}^{N}{}_n\, a_n e^{i2\pi k_{r,n}\frac{t}{\tau_r}}\right|^{1+m} dt\right)^{\frac{1}{1+m}} +$$

$$+ \left(\frac{1}{\tau_r}\int_0^{\tau_r} \left|\sum_{-N}^{N}{}_n\, a_n \left(e^{i\lambda_n t} - e^{i2\pi k_{r,n}\frac{t}{\tau_r}}\right)\right|^{1+m} dt\right)^{\frac{1}{1+m}}.$$

Ora, per il teorema di YOUNG-HAUSDORFF, essendo $m \geq 1$, ricaviamo

$$\left(\frac{1}{\tau_r}\int_0^{\tau_r} \Big|\sum_{-N}^{N}{}_n\, a_n e^{i2\pi k_{r,n}\frac{t}{\tau_r}}\Big|^{1+m} dt\right)^{\frac{1}{1+m}} = \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Big|\sum_{-N}^{N}{}_n\, a_n e^{ik_{r,n}x}\Big|^{1+m} dx\right)^{\frac{1}{1+m}} \leq \tag{15}$$

$$\leq \left(\sum_{-N}^{N}{}_n\, |a_n|^{1+\frac{1}{m}}\right)^{\frac{1}{1+m}}.$$

È poi, per le (12) e (13),

$$\left(\frac{1}{\tau_r}\int_0^{\tau_r} \Big|\sum_{-N}^{N}{}_n\, a_n (e^{i\lambda_n t} - e^{i2\pi k_{r,n}\frac{t}{\tau_r}})\Big|^{1+m} dt\right)^{\frac{1}{1+m}} < \varepsilon.$$

Ne segue, per le (14) e (15),

$$\left(\frac{1}{\tau_r}\int_0^{\tau_r} |\varphi(t)|^{1+m} dt\right)^{\frac{1}{1+m}} \leq \left(\sum_{-N}^{N}{}_n\, |a_n|^{1+\frac{1}{m}}\right)^{\frac{1}{1+m}} + \varepsilon. \tag{16}$$

Preso $T \geq \tau_1$ siano τ_r e τ_{r-1} i due numeri di traslazione per cui risulta $\tau_{r-1} \leq T < \tau_r$.

Ricaviamo allora

$$\frac{1}{T}\int_0^T |\varphi(t)|^{1+m} dt \leq \frac{\tau_r}{\tau_{r-1}} \frac{1}{\tau_r}\int_0^{\tau_r} |\varphi(t)|^{1+m} dt \tag{17}$$

ed essendo

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\tau_r}{\tau_{r-1}} = 1,$$

dalle (16) e (17) segue la tesi per $m \geq 1$.

Se è $m = 1$, basta osservare che, per l'eguaglianza di PARSEVAL, nella (15) vale il segno $=$. In tal caso del resto il lemma scende da un noto teorema sulle funzioni quasi periodiche di BOHR.

* * *

2. Dimostreremo ora un primo gruppo di teoremi tauberiani relativi al comportamento per $t \to \infty$ di una funzione $F(t)$ nell'ipotesi che questa ammetta nel semipiano $R(p) > \alpha$, finito, la trasformata di LAPLACE

$$f(p) = \int_0^\infty e^{-pt} F(t) dt$$

(dove è $p = u + iv$), che la $f(p)$ risulti analitica nel semipiano $R(p) > 0$ e soddisfi in questo ad opportune condizioni.

Teorema I. — *Se* F(t) *è una funzione, reale o complessa, della variabile reale* t, *trasformabile nel semipiano* $R(p) > \alpha$, *finito, e se la trasformata* f(p), *analitica per* $R(p) > 0$, *soddisfa alle seguenti condizioni*

a) *per quasi tutti i valori finiti di* v *esiste finito il*

$$\lim_{u \to 0+} f(u + iv)$$

e risulta una funzione f(iv) *integrabile secondo Lebesgue in ogni intervallo finito,*

b) *preso comunque* $h > 0$ *risulta*

$$\lim_{u \to 0+} \int_{-h}^{h} | f(u + iv) - f(iv) | \, dv = 0,$$

c) *esiste un intero positivo* m, *un numero positivo* $k > \alpha$, *e una successione di valori*

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \dots,$$

con

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n < \dots, \quad \lim_{n \to \infty} \lambda_n = \infty,$$

tali che il

$$\lim_{u \to 0+} f(u \pm i\lambda_n)$$

esista finito e sia inoltre

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f(u \pm i\lambda_n)}{\lambda_n^m} = 0$$

uniformemente rispetto a u, *per* $0 \leq u \leq k$; *allora si ha per quasi tutti i valori di* t

$$F(t) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\lambda_n}^{\lambda_n} e^{ivt} f(iv) \left(1 - \frac{v^2}{\lambda_n^2}\right)^m dv.$$

Dimostrazione. — Essendo m intero positivo e $k > \alpha$ si ha (7) quasi ovunque, per $0 \leq t < \infty$,

$$F(t) = \lim_{\lambda \to \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{k-i\lambda}^{k+i\lambda} e^{pt} f(p) \left(1 + \frac{p^2}{\lambda^2}\right)^m dp$$

dove l'integrale può essere calcolato lungo il segmento $k - i\lambda \vdash\!\dashv k + i\lambda$.

Sarà perciò anche

$$F(t) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{k-i\lambda_n}^{k+i\lambda_n} e^{pt} f(p) \left(1 + \frac{p^2}{\lambda_n^2}\right)^m dp. \tag{18}$$

Preso poi σ, con $0 < \sigma < k$, e considerando il rettangolo $(\sigma \leq u \leq k, -\lambda_n \leq v \leq \lambda_n)$ si ha

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{k-i\lambda_n}^{k+i\lambda_n} e^{pt} f(p)\left(1+\frac{p^2}{\lambda_n^2}\right)^m dp = \tag{19}$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\lambda_n}^{\sigma+i\lambda_n} e^{pt} f(p)\left(1+\frac{p^2}{\lambda_n^2}\right)^m dp + \frac{1}{2\pi i}\int_{k-i\lambda_n}^{\sigma-i\lambda_n} e^{pt} f(p)\left(1+\frac{p^2}{\lambda_n^2}\right)^m dp +$$

$$+ \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma+i\lambda_n}^{k+i\lambda_n} e^{pt} f(p)\left(1+\frac{p^2}{\lambda_n^2}\right)^m dp = I_1 + I_2 + I_3 .$$

Siccome la $f(u+iv)$ è continua in tutti i punti dei segmenti $\pm i\lambda_n \mapsto k \pm i\lambda_n$, risulta

$$\lim_{\sigma\to 0}(I_2 + I_3) = \frac{1}{2\pi i}\int_{k-i\lambda_n}^{-i\lambda_n} e^{pt} f(p)\left(1+\frac{p^2}{\lambda_n^2}\right)^m dp +$$

$$+ \frac{1}{2\pi i}\int_{i\lambda_n}^{k+i\lambda_n} e^{pt} f(p)\left(1+\frac{p^2}{\lambda_n^2}\right)^m dp.$$

Si ha poi, per le condizioni a) e b),

$$\lim_{\sigma\to 0} I_1 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\lambda_n}^{\lambda_n} e^{ivt} f(iv)\left(1-\frac{v^2}{\lambda_n^2}\right)^m dv.$$

Si ricava allora, per le (18) e (19),

$$F(t) = \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\lambda_n}^{\lambda_n} e^{ivt} f(iv)\left(1-\frac{v^2}{\lambda_n^2}\right)^m dv +\right.$$

$$\left. + \frac{1}{2\pi i}\int_{k-i\lambda_n}^{-i\lambda_n} e^{pt} f(p)\left(1+\frac{p^2}{\lambda_n^2}\right)^m dp + \frac{1}{2\pi i}\int_{i\lambda_n}^{k+i\lambda_n} e^{pt} f(p)\left(1+\frac{p^2}{\lambda_n^2}\right)^m dp\right\}$$

da cui segue la tesi, essendo

$$\lim_{n\to\infty} f(u \pm i\lambda_n)\left(1+\frac{(u\pm i\lambda_n)^2}{\lambda_n^2}\right)^m =$$

$$= \lim_{n\to\infty} f(u \pm i\lambda_n)\left(\frac{u^2 \pm 2iu\lambda_n}{\lambda_n^2}\right)^m = 0$$

uniformemente per $0 \leq u \leq k$.

3. Tenendo conto del teorema I, se la funzione $f(p)$ soddisfa alle condizioni in esso richieste, noi porremo sempre

$$F(t) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\lambda_n}^{\lambda_n} e^{ivt} f(iv) \left(1 - \frac{v^2}{\lambda_n^2}\right)^m dv$$

nei punti t in cui tale limite esiste finito, $F(t) = 0$ negli altri punti.

Dal teorema I si ricavano allora i due seguenti teoremi tauberiani, il primo dei quali è di immediata dimostrazione.

TEOREMA II. — *Se la funzione* f(p) *soddisfa alle condizioni del teorema I e se per un dato valore di* t *si ha*

$$\left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\lambda}^{\lambda} e^{ivt} f(iv) \left(1 - \frac{v^2}{\lambda^2}\right)^m dv \right| < \varepsilon$$

(dove ε *è un numero positivo) qualunque sia* $\lambda > 0$, *è anche per lo stesso* t

$$| F(t) | \leq \varepsilon.$$

In particolare se è

$$\lim_{t \to \infty} \int_{-\lambda}^{\lambda} e^{ivt} f(iv) \left(1 - \frac{v^2}{\lambda^2}\right)^m dv = 0$$

uniformemente rispetto a $\lambda > 0$, *risulta*

$$\lim_{t \to \infty} F(t) = 0.$$

TEOREMA III. — *Se la funzione* f(p) *soddisfa alle condizioni del teorema I, e se per un dato valore di* t *si ha*

$$\left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\lambda}^{\lambda} e^{ivt} f(iv) dv \right| < \varepsilon$$

(dove ε *è un numero positivo) qualunque sia* $\lambda > 0$, *è anche per lo stesso* t

$$| F(t) | \leq \varepsilon.$$

In particolare se è

$$\lim_{t \to \infty} \int_{-\lambda}^{\lambda} e^{ivt} f(iv) dv = 0$$

uniformemente rispetto a $\lambda > 0$, *risulta*

$$\lim_{t \to \infty} F(t) = 0.$$

DIMOSTRAZIONE. — Basta osservare che se è

$$\left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\lambda}^{\lambda} e^{ivt}f(iv)dv\right| < \varepsilon,$$

qualunque sia $\lambda > 0$, è anche, per il lemma I,

$$\left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\lambda}^{\lambda} e^{ivt}f(iv)\left(1-\frac{v^2}{\lambda^2}\right)^m dv\right| < \varepsilon$$

qualunque sia $\lambda > 0$.

4. Dimostriamo alcuni teoremi, conseguenze notevoli del teorema III.

TEOREMA. IV. — *Se la funzione* f(p) *soddisfa alle condizioni del teorema I e se l'integrale*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(iv)|\, dv$$

esiste finito, si ha

$$\lim_{t\to\infty} F(t) = 0.$$

DIMOSTRAZIONE. — Fissato $\varepsilon > 0$ si determini $\mu > 0$ in modo che per $v \geq \mu$ e per $v \leq -\mu$ sia rispettivamente

$$\int_{\mu}^{v} |f(iv)|\, dv < \varepsilon \tag{20}$$

$$\int_{v}^{-\mu} |f(iv)|\, dv < \varepsilon.$$

Supposto $\lambda \leq \mu$ si ha poi, per un noto teorema [8],

$$\left|\int_{-\lambda}^{\lambda} e^{ivt}f(iv)dv\right| < \varepsilon \tag{21}$$

quando sia $t \geq T$ sufficientemente grande.

Per $\lambda > \mu$, $t \geq T$, ricaviamo allora dalle (20) e (21)

$$\left|\int_{-\lambda}^{\lambda} e^{ivt}f(iv)dv\right| \leq \left|\int_{-\mu}^{\mu} e^{ivt}f(iv)dv\right| + \int_{\mu}^{\lambda} |f(iv)|\, dv + \int_{-\lambda}^{-\mu} |f(iv)|\, dv < 3\varepsilon$$

e quindi il teorema è dimostrato.

TEOREMA V. — *Se la funzione* f(p) *soddisfa alle condizioni del teorema I e se esiste un numero* a > 0 *tale che la* f(iv) *sia a variazione limitata negli intervalli* a $\vdash\!\!\dashv \infty$, $-\infty \vdash\!\!\dashv -$ a, *si ha*

$$\lim_{t\to\infty} F(t) = 0.$$

DIMOSTRAZIONE. — Se è $\lambda \leq a$, risulta

$$\lim_{t\to\infty}\int_{-\lambda}^{\lambda} e^{ivt} f(iv)dv = 0 \tag{22}$$

uniformemente rispetto a λ.

Per $\lambda > a$ si ha

$$\int_{-\lambda}^{\lambda} e^{ivt} f(iv)dv = \int_{-a}^{a} e^{ivt} f(iv)dv + \int_{a}^{\lambda} e^{ivt} f(iv)dv + \int_{a}^{\lambda} e^{-ivt} f(-iv)dv = \tag{23}$$
$$= I_1(t) + I_{2,\lambda}(t) + I_{3,\lambda}(t)$$

e, per la (22), basterà provare che è

$$\lim_{t\to\infty} I_{2,\lambda}(t) = 0 \tag{24}$$

$$\lim_{t\to\infty} I_{3,\lambda}(t) = 0 \tag{25}$$

uniformemente rispetto a λ.

Considerando dapprima l'integrale $I_{2,\lambda}(t)$ osserviamo che per $v \geq a$ possiamo porre

$$f(iv) = f_1(v) + ig_1(v),$$

con

$$f_1(v) = \varphi_1(v) - \varphi_2(v)$$
$$g_1(v) = \varphi_3(v) - \varphi_4(v)$$

dove le funzioni $\varphi_1(v)$, $\varphi_2(v)$, $\varphi_3(v)$, $\varphi_4(v)$ sono non negative e non crescenti.

Basterà perciò dimostrare che, se $\varphi(v)$ è una funzione non negativa, non crescente, definita per $a \leq v$, risulta

$$\lim_{t\to\infty}\int_{a}^{\lambda} e^{ivt}\varphi(v)dv = 0 \tag{26}$$

uniformemente rispetto a $\lambda > a$.

Ora, se è $t > 0$, si ha, per il secondo teorema della media,

$$\int_a^\lambda e^{ivt}\varphi(v)dv = \int_a^\lambda \cos vt\, \varphi(v)dv + i\int_a^\lambda \operatorname{sen} vt\, \varphi(v)dv$$

$$= \varphi(a+)\left\{\int_a^{\xi_1}\cos vt\, dv + i\int_a^{\xi_2}\operatorname{sen} vt\, dv\right\}$$

$$= \frac{\varphi(a+)}{t}\{\operatorname{sen}\xi_1 t - \operatorname{sen} at + i(\cos at - \cos \xi_2 t)\}$$

con $a \leq \xi_1 \leq \lambda$, $a \leq \xi_2 \leq \lambda$.

Ne segue, per $t > 0$,

$$\left|\int_a^\lambda e^{ivt}\varphi(v)dv\right| \leq \frac{4\varphi(a+)}{t} \tag{27}$$

e quindi la (26) è provata.

È dimostrata perciò anche la (24).

Considerando poi l'integrale

$$I_{3,\lambda}(t) = \int_a^\lambda e^{-ivt}f(-iv)dv$$

si dimostra, procedendo in modo analogo, la (25).

Il teorema è perciò provato.

Se imponiamo ora alle $f(iv)$ delle condizioni particolari, relative all'intervallo $-a \vdash\!\dashv a$, otteniamo un risultato più preciso col seguente

TEOREMA VI. — *Se la funzione* f(p) *soddisfa alle condizioni del teorema V e se nell'intervallo* $-a \vdash\!\dashv a$ *risulta*

$$f(iv) = \frac{\varphi(v)}{|v - b_1|^{\mu_1} \dots |v - b_r|^{\mu_r}},$$

dove è

$$-a < b_1 < b_2 < \dots < b_r < a, \qquad 0 \leq \mu_i < 1,$$

e la funzione $\varphi(v)$ *è a variazione limitata in* $-a \vdash\!\dashv a$; *allora, indicato con* $\rho < 1$ *il maggiore degli esponenti* $\mu_1, \dots, \mu_r$, *e preso* $\delta > 0$, *si ha, per* $t \geq \delta$,

$$|F(t)| < \frac{K_\delta}{t^{1-\rho}}$$

con K_δ *costante positiva dipendente da* δ *ma non da* t.

DIMOSTRAZIONE. — Per un noto teorema [8] sull'ordine di grandezza dei coefficienti negli sviluppi in serie di Fourier abbiamo, per $t \geq \delta$,

$$\left| \int_{-a}^{a} e^{ivt} f(iv) dv \right| < \frac{H_\delta}{t^{1-\rho}}$$

dove H_δ è una costante positiva dipendente da δ ma non da t.

Dalla (27) si deduce allora la tesi.

Il teorema ora dimostrato può essere utile in molti casi che si presentano in pratica, come può verificarsi applicandolo a numerose trasformate contenute nel già citato libro di G. Doetsch (p. 401, 403). Ad es., se consideriamo, per $\nu > -\frac{1}{2}$, la funzione di Bessel $J_\nu(t)$, si ha, per $R(p) > 0$,

$$\int_0^\infty e^{-pt} t^\nu J_\nu(t) dt = \frac{2^\nu \Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}(1 + p^2)^{\nu + \frac{1}{2}}}$$

e quindi, supposto $\nu < \frac{1}{2}$, $t \geq \delta > 0$, si ricava la nota diseguaglianza

$$| J_\nu(t) | < \frac{K_{\delta,\nu}}{t^{\frac{1}{2} - \nu}}$$

con $K_{\delta,\nu}$ costante positiva opportuna.

Mentre nei precedenti teoremi si danno condizioni per cui sia verificata la (1) per $A = 0$, nei due seguenti teoremi sono contenute condizioni sufficienti perchè avvenga lo stesso fatto, escludendo però, per la variabilità di t, una successione di intervalli tutti di lunghezza eguale ed arbitrariamente piccola.

Teorema VII. — *Se la funzione* f(p) *soddisfa alle condizioni del teorema I ed è*

$$f(iv) = g(v)\psi(v),$$

dove la g(v) *è limitata nell'intervallo* $-a \leq v \leq a$, *a variazione limitata in* $a \vdash\!\dashv \infty$, $-\infty \vdash\!\dashv -a$, *e* $\psi(v)$ *è funzione periodica, di periodo* ρ, *integrabile in ogni intervallo finito, preso* σ, *con* $0 < \sigma < \frac{\pi}{\rho}$, *risulta*

$$\lim_{t \to \infty} F(t) = 0$$

purchè la variabile t, *nel crescere indefinitamente, si mantenga esterna agli intervalli* $\frac{2n\pi}{\rho} - \sigma \vdash\!\dashv \frac{2n\pi}{\rho} + \sigma$, *con* n *intero positivo.*

Dimostrazione. — Posto

$$I_\lambda(t) = \int_{-\lambda}^{\lambda} e^{ivt} f(iv) dv$$

si ha per $\lambda \leq a$

$$\lim_{t \to \infty} I_\lambda(t) = 0 \tag{28}$$

uniformemente.

Supposto $\lambda > a$ ricaviamo

$$\begin{aligned} I_\lambda(t) &= \int_{-a}^{a} e^{ivt} f(iv)dv + \int_a^\lambda e^{ivt}\psi(v)g(v)dv + \int_a^\lambda e^{-ivt}\psi(-v)g(-v)dv \\ &= I_1(t) + I_{2,\lambda}(t) + I_{3,\lambda}(t) \end{aligned}$$

ed è, per la (28),

$$\lim_{t \to \infty} I_1(t) = 0$$

Per dimostrare poi che si ha

$$\lim_{t \to \infty} I_{2,\lambda}(t) = 0 \tag{29}$$

$$\lim_{t \to \infty} I_{3,\lambda}(t) = 0 \tag{30}$$

uniformemente rispetto a λ, basterà supporre che le funzioni $\psi(v)$, $\psi(-v)$, $g(v)$, $g(-v)$, siano reali e che le $g(v)$, $g(-v)$ siano non negative e non crescenti nell'intervallo $a \vdash\!\dashv \infty$.

Si ha allora, per il secondo teorema della media,

$$\begin{aligned} I_{2,\lambda}(t) &= \int_a^\lambda \cos vt\, \psi(v)g(v)dv + i\int_a^\lambda \operatorname{sen} vt\, \psi(v)g(v)dv \\ &= g(a+) \left\{ \int_a^{\xi_1} \cos vt\, \psi(v)dv + i\int_a^{\xi_2} \operatorname{sen} vt\, \psi(v)dv \right\} \\ &= g(a+) \{ G(t) + iH(t) \}, \end{aligned} \tag{31}$$

con $a \leq \xi_1 \leq \lambda$, $a \leq \xi_2 \leq \lambda$.

Ora, se k è il più grande intero non negativo per cui risulti $k\rho + a \leq \xi_1$, abbiamo per $t \neq \dfrac{2n\pi}{\rho}$, con $n = 0, 1, 2, \ldots$,

$$\begin{aligned} G(t) &= R\left\{ \int_a^{a+\rho} e^{ivt}\psi(v)dv + \ldots + \int_{a+(k-1)\rho}^{a+k\rho} e^{ivt}\psi(v)dv + \int_{a+k\rho}^{\xi_1} e^{ivt}\psi(v)dv \right\} \\ &= R\left\{ (1 + e^{i\rho t} + \ldots + e^{i(k-1)\rho t}) \int_a^{a+\rho} e^{ivt}\psi(v)dv \right\} + R\left\{ e^{ik\rho t}\int_a^{\xi_1 - k\rho} e^{ivt}\psi(v)dv \right\} \\ &= R\left\{ \frac{1 - e^{ik\rho t}}{1 - e^{i\rho t}} \int_a^{a+\rho} e^{ivt}\psi(v)dv \right\} + R\left\{ e^{ik\rho t}\int_a^{\xi_1 - k\rho} e^{ivt}\psi(v)dv \right\}. \end{aligned} \tag{32}$$

Essendo $\xi_1 - k\rho < a + \rho$, l'ultimo termine della (32) $\to 0$ uniformemente rispetto a λ; quanto al primo, preso σ, con $0 < \sigma < \frac{\pi}{\rho}$, e supposto che la variabile $t \to \infty$ restando esterna agli intervalli $\frac{2n\pi}{\rho} - \sigma \vdash\!\dashv \frac{2n\pi}{\rho} + \sigma$, si ricava

$$\left| \frac{1 - e^{ik\rho t}}{1 - e^{i\rho t}} \right| < \frac{1}{\operatorname{sen} \frac{\rho\sigma}{2}}$$

e quindi, siccome è

$$\lim_{t \to \infty} \int_a^{a+\rho} e^{ivt} \psi(v) dv = 0,$$

e siccome per la $H(t)$ può ripetersi quanto è stato fatto per la $G(t)$, dalla (31) segue la (29).

In modo analogo si dimostra la (30).

Teorema VIII. — *Se la funzione* f(p) *soddisfa alle condizioni del teorema I ed è*

$$f(iv) = g(v)\psi(v),$$

con

$$\psi(v) \sim \sum_{-\infty}^{\infty}{}_n\, a_n e^{-i\lambda_n v},$$

dove la serie $\sum_{-\infty}^{\infty}{}_n |a_n|^{1+\frac{1}{m}}$ *converge per un valore* $m \geq 1$ *e la successione di numeri reali* $\{\lambda_n\}$ *soddisfa, per un valore* $\delta > 0$, *alla condizione*

$$\lambda_{n+1} - \lambda_n \geq \delta > 0,$$

e se inoltre, per un valore $a > 0$, *la* $g(v)$ *risulta a variazione limitata negli intervalli* $a \vdash\!\dashv \infty$, $-\infty \vdash\!\dashv -a$, *e la* $|g(v)|^{1+\frac{1}{m}}$ *è integrabile in* $-a \vdash\!\dashv a$; *allora, preso* σ, *con* $0 < \sigma < \frac{\delta}{2}$, *si ha*

$$\lim_{t \to \infty} F(t) = 0,$$

purchè la variabile $t \to \infty$ *mantenendosi esterna agli intervalli* $\lambda_n - \sigma \vdash\!\dashv \lambda_n + \sigma$.

Dimostrazione. — Per il lemma II (*) la serie

$$\sum_{-\infty}^{\infty}{}_n\, a_n e^{-i\lambda_n v} \tag{33}$$

(*) Aggiungendo eventualmente alla serie (33) dei termini $a'_n e^{i\lambda'_n v}$, con $a'_n = 0$, si può ricavare dalla successione $\{\lambda_n\}$ una successione $\{\mu_n\}$ soddisfacente alla condizione richiesta nel lemma II.

converge in media in ogni intervallo finito alla funzione $\psi(v)$ e inoltre la $|\psi(v)|^{1+m}$ è integrabile in tale intervallo.

Siccome la $|g(v)|^{1+\frac{1}{m}}$ è integrabile in $-a \vdash\!\dashv a$, si ricava, per la disegua glianza di SCHWARZ-HÖLDER,

$$\int_{-a}^{a} |f(iv)|\, dv \leq \left(\int_{-a}^{a} |g(v)|^{1+\frac{1}{m}} dv\right)^{\frac{m}{1+m}} \left(\int_{-a}^{a} |\psi(v)|^{1+m} dv\right)^{\frac{1}{1+m}}$$

e quindi $f(iv)$ è funzione integrabile nell'intervallo $-a \vdash\!\dashv a$.

Posto allora

$$I_\lambda(t) = \int_{-\lambda}^{\lambda} e^{ivt} f(iv) dv$$

sarà, per $\lambda \leq a$,

(34) $$\lim_{t \to \infty} I_\lambda(t) = 0$$

uniformemente rispetto a λ.

Per $\lambda > a$ abbiamo poi

(35) $$\begin{aligned} I_\lambda(t) &= \int_{-a}^{a} e^{ivt} f(iv) dv + \int_{a}^{\lambda} e^{ivt} f(iv) dv + \int_{a}^{\lambda} e^{-ivt} f(-iv) dv \\ &= I_1(t) + I_{2,\lambda}(t) + I_{3,\lambda}(t) \end{aligned}$$

ed è, per la (34),

$$\lim_{t \to \infty} I_1(t) = 0.$$

Resta da provare che, preso σ, con $0 < \sigma < \frac{\delta}{2}$, risulta

(36) $$\lim_{t \to \infty} I_{2,\lambda}(t) = 0$$

(37) $$\lim_{t \to \infty} I_{3,\lambda}(t) = 0$$

uniformemente rispetto a λ, purchè la variabile $t \to \infty$ esternamente agli intervalli $\lambda_n - \sigma \vdash\!\dashv \lambda_n + \sigma$.

Considerando $I_{2,\lambda}(t)$, e supposta la $g(v)$ non crescente e non negativa, ricaviamo

(38) $$\begin{aligned} I_{2,\lambda}(t) &= \int_{a}^{\lambda} g(v) R(e^{ivt}\psi(v)) dv + \int_{a}^{\lambda} g(v) I(e^{ivt}\psi(v)) dv \\ &= G_\lambda(t) + H_\lambda(t) \end{aligned}$$

ed è, per il secondo teorema della media,

$$G_\lambda(t) = g(a+)\int_a^\xi R(e^{ivt}\psi(v))dv = g(a+)R\left(\int_a^\xi e^{ivt}\psi(v)dv\right)$$

con $a \leq \xi \leq \lambda$.

Siccome poi, per la convergenza in media, la serie (33) è integrabile termine a termine, otteniamo, per $t \neq \lambda_n$,

$$\int_a^\xi e^{ivt}\psi(v)dv = \sum_{-\infty}^{\infty}{}_n a_n \frac{e^{i\xi(t-\lambda_n)} - e^{ia(t-\lambda_n)}}{i(t-\lambda_n)}. \tag{39}$$

Ora la serie $\sum_{-\infty}^{\infty}{}_n |a_n|^2$ è convergente e quindi, fissato $\varepsilon > 0$ si può determinare $N > 0$ in modo che per $R \geq N$ risulti

$$\sum_N^R{}_n |a_n|^2 < \varepsilon^2$$

$$\sum_{-R}^{-N}{}_n |a_n|^2 < \varepsilon^2.$$

Supposta poi la variabile t esterna agli intervalli $\lambda_n - \sigma \vdash\!\dashv \lambda_n + \sigma$, si ottiene, per la diseguaglianza di SCHWARZ-HÖLDER,

$$\sum_N^R{}_n \left|\frac{a_n}{t-\lambda_n}\right| \leq \left(\sum_N^R{}_n |a_n|^2 \sum_N^R{}_n \frac{1}{(t-\lambda_n)^2}\right)^{\frac{1}{2}} < \tag{40}$$

$$< \varepsilon\left(2\sum_1^\infty{}_r \frac{1}{(r\delta)^2} + \frac{2}{\sigma^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

perchè se, per un dato valore di t, $\bar{n}$ e $\bar{n}+1$ sono due interi per cui risulti

$$\lambda_{\bar{n}} + \sigma \leq t \leq \lambda_{\bar{n}+1} - \sigma$$

si ha, per $n = \bar{n} + 1 + r$, con r intero positivo

$$|t - \lambda_n| > r\delta$$

e, per $n = \bar{n} - r$, con r intero positivo,

$$|t - \lambda_n| > r\delta.$$

Si ha analogamente

$$\sum_{-R}^{-N}{}_n \left|\frac{a_n}{t-\lambda_n}\right| \leq \varepsilon\left(2\sum_1^\infty{}_r \frac{1}{(r\delta)^2} + \frac{2}{\sigma^2}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{41}$$

e quindi, siccome è

$$\lim_{t\to\infty} \sum_{-N}^{N} {}_n\, a_n \frac{e^{i\xi(t-\lambda_n)} - e^{ia(t-\lambda_n)}}{i(t-\lambda_n)} = 0,$$

per le (38), (39), (40), (41) si deduce la (36).

Allo stesso modo si dimostra la (37).

TEOREMA IX. — *Se la funzione* F(t) *è trasformabile nel semipiano* R(p) > α, *finito, e se esiste un numero* c > 0 *tale che la* f(p — c) *risulti analitica nel semipiano* R(p) > 0 *e soddisfi, in* R(p) > 0, *alle condizioni del teorema* I, *con un valore positivo* k > α + c, *e alle condizioni di uno dei teoremi* II, III, IV, V, VI, VII, VIII, *allora risulta*

$$\lim_{t\to\infty} e^{ct}F(t) = 0$$

escludendo al più, per la variabilità di t, *gli intervalli considerati nei teoremi* VII *e* VIII.

DIMOSTRAZIONE. — Basta osservare che è

$$f(p-c) = \int_0^\infty e^{-pt}e^{ct}F(t)dt.$$

OSSERVAZIONE. — Nei teoremi precedenti si è posta in relazione l'integrabilità della $f(iv)$ sull'asse immaginario del piano p, oltre ad alcune ipotesi sul comportamento della $f(iv)$ per $v \to \pm\infty$, col tendere a zero della $F(t)$ per $t \to \infty$, escludendo al più, per la variabilità di t, una opportuna successione di intervalli.

Indichiamo ora un esempio di funzione $F(t)$, per la quale risulta

$$\lim_{t\to\infty} F(t) = 0$$

mentre la corrispondente $f(p)$ non è integrabile in ogni tratto finito dell'asse immaginario.

Sia infatti $F(t) = 0$ per $0 \leq t < 2$, $F(t) = \dfrac{1}{\log t}$ per $t \geq 2$.

L'integrale

$$f(p) = \int_0^\infty e^{-pt}F(t)dt = \int_2^\infty \frac{e^{-pt}}{\log t}\, dt$$

converge manifestamente nel semipiano $u > 0$ e la retta $u = 0$ ne è la retta di convergenza.

Presi due numeri σ e h, con $0 < \sigma < h$, consideriamo la striscia $S(\sigma \leq v \leq h,\ 0 \leq u)$ e dimostriamo che la $f(p)$ è continua in tutti i punti di S.

Fissato infatti $\varepsilon > 0$ e supposto p in S e $2 < t_1 < t_2$, si ha per il secondo teorema della media

$$\left|\int_{t_1}^{t_2} \frac{e^{-ut}}{\log t} \cos vt\,dt\right| = \frac{e^{-ut_1}}{\log t_1}\left|\int_{t_1}^{t_3} \cos vt\,dt\right| \leq \frac{2}{\sigma \log t_1} < \varepsilon \qquad (t_1 \leq t_3 \leq t_2)$$

se t_1 è sufficientemente grande.

Allo stesso modo si dimostra l'uniforme convergenza, per p in S, dell'integrale

$$\int_2^\infty \frac{e^{-ut}}{\log t} \operatorname{sen} vt\,dt$$

e quindi la tesi.

Posto allora

$$f(iv) = \int_0^\infty \frac{e^{-ivt}}{\log t}\,dt = \varphi_1(v) - i\varphi_2(v)$$

dimostriamo che l'integrale

$$\int_\sigma^h \varphi_2(v)dv$$

(il quale esiste finito per la continuità di $\varphi_2(v)$ in $\sigma \mid\!- h)$ $\to +\infty$ per $\sigma \to 0$.

Si ha infatti

$$\int_\sigma^h \varphi_2(v)dv = \int_\sigma^h\left(\int_2^\infty \frac{\operatorname{sen} vt}{\log t}\,dt\right)dv$$
$$= \int_2^\infty \frac{1}{\log t}\left(\int_\sigma^h \operatorname{sen} vt\,dv\right)dt$$

potendosi invertire, per l'uniforme convergenza, l'ordine delle integrazioni.

Ne segue

$$\int_\sigma^h \varphi_2(v)dv = \int_2^\infty \frac{\cos \sigma t - \cos ht}{t \log t}\,dt$$

e, tenendo conto del secondo teorema della media, si ricava che i due integrali

$$\int_2^\infty \frac{\cos \sigma t}{t \log t}\,dt, \quad \int_2^\infty \frac{\cos ht}{t \log t}\,dt$$

esistono finiti.

Per dimostrare la tesi basterà allora provare che risulta

$$\lim_{\sigma \to 0} \int_2^\infty \frac{\cos \sigma t}{t \log t} dt = + \infty. \tag{42}$$

Ora, per $\sigma < \frac{\pi}{8}$, si ha

$$\int_2^\infty \frac{\cos \sigma t}{t \log t} dt = \int_2^{\frac{\pi}{4\sigma}} \frac{\cos \sigma t}{t \log t} dt + \int_{\frac{\pi}{4\sigma}}^{\frac{\pi}{2\sigma}} \frac{\cos \sigma t}{t \log t} dt + \int_{\frac{\pi}{2\sigma}}^\infty \frac{\cos \sigma t}{t \log t} dt \tag{43}$$

ed è

$$\int_2^{\frac{\pi}{4\sigma}} \frac{\cos \sigma t}{t \log t} > \frac{1}{\sqrt{2}} \int_2^{\frac{\pi}{4\sigma}} \frac{dt}{t \log t} \tag{44}$$

$$\int_{\frac{\pi}{4\sigma}}^{\frac{\pi}{2\sigma}} \frac{\cos \sigma t}{t \log t} > 0 \tag{45}$$

$$\left| \int_{\frac{\pi}{2\sigma}}^\infty \frac{\cos \sigma t}{t \log t} dt \right| = \left| \int_{\frac{\pi}{2\sigma}}^{\frac{3\pi}{2\sigma}} \frac{\cos \sigma t}{t \log t} dt + \int_{\frac{3\pi}{2\sigma}}^{\frac{5\pi}{2\sigma}} \frac{\cos \sigma t}{t \log t} + \cdots \right| < \tag{46}$$

$$< \left| \int_{\frac{\pi}{2\sigma}}^{\frac{3\pi}{2\sigma}} \frac{\cos \sigma t}{t \log t} dt \right| < \int_{\frac{\pi}{\sigma}}^{\frac{3\pi}{2\sigma}} \frac{dt}{t} = \log 3.$$

Siccome l'integrale

$$\int_2^\infty \frac{dt}{t \log t}$$

è divergente, per le (43), (44), (45), (46), la (42) risulta provata.

4. TEOREMA X. — *Se risulta, per* $\mathrm{R}(p) > \alpha$,

$$f(p) = \int_0^\infty e^{-pt} F(t) dt$$

e inoltre

$$f(p) = \frac{A}{p} + h(p),$$

dove A *è una costante complessa e la funzione* h(p) *soddisfa alle condizioni del teorema* I, *e alle condizioni di uno dei teoremi* II, III, IV, V, VI, VII, VIII. *si ha*

$$\lim_{t \to \infty} F(t) = A$$

escludendo, al più, per la variabilità di t, *gli intervalli considerati nei teoremi* VII *e* VIII.

Dimostrazione. — Basta osservare che, posto

$$F_1(t) = F(t) - A,$$

si ha

$$h(p) = \int_0^\infty e^{-pt} F_1(t) dt$$

e inoltre

$$\lim_{t \to \infty} F_1(t) = 0$$

con le limitazioni già indicate per la variabilità di t.

5. Applicheremo ora i risultati ottenuti per determinare il comportamento per $t \to \infty$ di una funzione $F(t, x)$ che risolve un problema di propagazione studiato nell'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo [11].

Si ha in tal caso, per $\rho > 0$, $0 \leq x \leq 1$, $R(p) > 0$,

$$f(p, x) = \frac{\operatorname{Sh} \sqrt{p}(1 - x)}{p[p \operatorname{Sh} \sqrt{p} + \rho \sqrt{p} \operatorname{Ch} \sqrt{p}]}$$

$$= \int_0^\infty e^{-pt} F(t, x) dt$$

e dimostreremo che risulta, per un opportuno valore $c > 0$,

$$\lim_{t \to \infty} e^{ct}\left(F(t, x) - \frac{1 - x}{\rho}\right) = 0.$$

Per questo cominciamo con l'osservare che la funzione

$$\sqrt{p} \operatorname{Sh} \sqrt{p} + \rho \operatorname{Ch} \sqrt{p}$$

è una trascendente intera. Siccome poi si dimostra [12] che l'equazione

$$z \operatorname{Sh} z + \rho \operatorname{Ch} z = 0$$

ha solo radici immaginarie, ne segue che l'equazione

$$\sqrt{p}\,\mathrm{Sh}\,\sqrt{p} + \rho\,\mathrm{Ch}\,\sqrt{p} = 0$$

ha solo radici negative.

Sia c_1 la radice di minimo modulo e prendiamo c, con $0 < c < -c_1$.

Osserviamo poi che la funzione

$$h(p, x) = \frac{\mathrm{Sh}\,\sqrt{p}(1-x)}{p[p\,\mathrm{Sh}\,\sqrt{p} + \rho\sqrt{p}\,\mathrm{Ch}\,\sqrt{p}]} - \frac{1-x}{\rho p}$$

è analitica in tutti i punti del semipiano $R(p) \geq -c$ e, preso $a > 0$, si ha per $|v| \geq a$

$$\left|\frac{\partial h(iv - c, x)}{\partial v}\right| = \left|\frac{\partial h(iv - c, x)}{\partial(iv - c)}\right| < \frac{M}{v^2}$$

dove M è una costante positiva dipendente da a.

Ne segue che la $h(iv - c, x)$ è a variazione limitata negli intervalli $a \vdash\!\dashv \infty$, $-\infty \vdash\!\dashv -a$. Lo è poi anche in $-a \vdash\!\dashv a$ per l'analiticità.

Posto allora

$$h(p, x) = \int_0^\infty e^{-pt} F_1(t, x)\,dt$$

si ricava, per i teoremi VI e IX,

$$\lim_{t \to \infty} e^{ct} F_1(t, x) = 0$$

da cui la tesi.

* * *

6. Studieremo ora il caso in cui la funzione $f(p)$ sia meromorfa e precisamente cominceremo facendo l'ipotesi che la $f(p)$ abbia solo poli del primo ordine disposti sull'asse immaginario del piano $p = u + iv$.

Ora se la $f(p)$ può porsi nella forma

$$f(p) = \sum_{-\infty}^{\infty}{}_n \frac{a_n}{p - i\lambda_n},$$

dove le a_n sono costanti complesse tali che la serie $\sum_{-\infty}^{\infty}{}_n |a_n|$ risulti convergente e i λ_n sono numeri reali, si ha, per $R(p) > 0$,

$$f(p) = \int_0^\infty e^{-pt} F(t)\,dt$$

con

$$F(t) = \sum_{-\infty}^{\infty}{}_n a_n e^{i\lambda_n t}.$$

La $F(t)$ è allora una funzione quasi periodica di BOHR e vale per essa l'eguaglianza di PARSEVAL [13]

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T |F(t)|^2 dt = \sum_{-\infty}^{\infty}{}_n |a_n|^2. \tag{47}$$

Si ha inoltre

$$|F(t)| \leq \sum_{-\infty}^{\infty}{}_n |a_n|.$$

Questa e la (47) possono considerarsi come dei teoremi tauberiani e cercheremo di generalizzarli considerando il caso in cui la serie $\sum_{-\infty}^{\infty}{}_n |a_n|$ sia divergente.

Per questo cominciamo col premettere il seguente

TEOREMA XI. — *Se la serie* $\sum_{-\infty}^{\infty}{}_n |a_n|^2$ *è convergente e se la successione di numeri reali* $\{\lambda_n\}$ *soddisfa, per un valore* $\delta > 0$ *e per un valore* $A > 0$, *alla condizione*

$$|\lambda_n - n\delta| < A,$$

la serie

$$\sum_{-\infty}^{\infty}{}_n \frac{a_n}{p - i\lambda_n}$$

è assolutamente e uniformemente convergente in ogni campo finito C *del piano* p, *dal quale siano esclusi con degli intorni gli eventuali punti* $i\lambda_n$, *e la sua somma* f(p) *è la trasformata di Laplace di una funzione* F(t) *definita in media, in ogni intervallo* $0 \leq t \leq T$, *dalla serie*

$$\sum_{-\infty}^{\infty}{}_n a_n e^{i\lambda_n t}.$$

DIMOSTRAZIONE. — Sia $\Lambda > 0$ e $\neq \lambda_n$ un numero tale che il campo C, supposto chiuso, risulti interno alla circonferenza γ col centro in $p = 0$ e raggio Λ. Se N è un intero positivo tale che per $|n| \geq N$ i punti $i\lambda_n$ risultino esterni a γ, ricaviamo, supposto p in C e $|n| \geq N$,

$$\left|\frac{a_n}{p - i\lambda_n}\right| \leq \frac{1}{2}\left(|a_n|^2 + \frac{1}{|p - i\lambda_n|^2}\right) \leq \frac{1}{2}\left(|a_n|^2 + \frac{1}{(|\lambda_n| - \Lambda)^2}\right)$$

da cui, per la convergenza di $\sum_{-\infty}^{\infty}{}_n |a_n|^2$ e di $\sum_{-\infty}^{\infty}{}_n \frac{1}{(|\lambda_n| - \Lambda)^2}$, si ricava che la serie

$$\sum_{-\infty}^{\infty}{}_n \frac{a_n}{p - i\lambda_n} \tag{48}$$

converge assolutamente e uniformemente nel campo C, dal quale siano esclusi con degli intorni gli eventuali punti $i\lambda_n$.

Indicando con $f(p)$ la somma della (48) e osservando che, per il lemma II, la serie

$$\sum_{-\infty}^{\infty}{}_n\, a_n e^{i\lambda_n t}$$

converge in media in ogni intervallo $O \vdash\!\dashv T$ a una funzione $F(t)$, ricaviamo

$$\int_0^T e^{-pt}F(t)dt = \sum_{-\infty}^{\infty}{}_n\, a_n \frac{1-e^{-(p-i\lambda_n)T}}{p-i\lambda_n} \tag{49}$$

$$= f(p) - e^{-pT}\sum_{-\infty}^{\infty}{}_n \frac{a_n e^{i\lambda_n T}}{p-i\lambda_n}.$$

Supposto $R(p) > 0$, per la convergenza assoluta della serie (48), l'ultimo termine della (49) $\rightarrow 0$, quando $T \rightarrow \infty$, e perciò il teorema è dimostrato.

7. Teorema XII. — *Se per un valore* $\mathrm{m} \geq 1$ *la serie* $\sum_{-\infty}^{\infty}{}_n |a_n|^{1+\frac{1}{m}}$ *converge e se la successione di numeri reali* $\{\lambda_n\}$ *soddisfa alla condizione*

$$|\lambda_n - n\delta| < A$$

si ha

$$F(t) \backsim \sum_{-\infty}^{\infty}{}_n\, a_n e^{i\lambda_n t}$$

e inoltre, per $T_1 \leq T_2$,

$$\int_{T_1}^{T_2} |F(t)|^{1+m} dt \leq K(T_2 - T_1) + H$$

dove è

$$K = e^{2\pi(1+m)\frac{A}{\delta}}\left(\sum_{-\infty}^{\infty}{}_n |a_n|^{1+\frac{1}{m}}\right)^m,$$

$$H = \frac{2\pi}{\delta}K.$$

Dimostrazione. — È immediata conseguenza del lemma II e della (11).

Dal teorema ora dimostrato si ricava

$$\max\lim_{T\rightarrow\infty} \frac{1}{T}\int_0^T |F(t)|^{1+m}dt \leq e^{2\pi(1+m)\frac{A}{\delta}}\left(\sum_{-\infty}^{\infty}{}_n |a_n|^{1+\frac{1}{m}}\right)^m,$$

ma un risultato più preciso può ottenersi mediante una generalizzazione di un noto teorema di Young-Hausdorff [14] sulle serie di Fourier.

Si ha infatti il

Teorema XIII. — *Se le successioni* $\{a_n\}$ *e* $\{\lambda_n\}$ *soddisfano alle condizioni del teorema* XII, *si ha, per* $m \geq 1$,

$$\max \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T |F(t)|^{1+m} dt \leq \left(\sum_{-\infty}^{\infty}{}_n |a_n|^{1+\frac{1}{m}} \right)^m .$$

Se poi è $m = 1$ *vale l'uguaglianza di Parseval*

$$\lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T |F(t)|^2 dt = \sum_{-\infty}^{\infty}{}_n |a_n|^2 .$$

Dimostrazione. — Per $m = 1$ il teorema è noto. Supposto allora $m > 1$ e preso $\varepsilon > 0$ si determini N in modo che risulti

$$e^{2\pi\frac{A}{\delta}} \left\{ \left(\sum_{N}^{\infty}{}_n |a_n|^{1+\frac{1}{m}} + |a_{-n}|^{1+\frac{1}{m}} \right)^m \left(1 + \frac{2\pi}{\delta}\right) \right\}^{\frac{1}{1+m}} < \varepsilon \tag{50}$$

Si ponga inoltre

$$F_N(t) = \sum_{-N}^{N}{}_n a_n e^{i\lambda_n t},$$

$$\varphi_N(t) \sim \sum_{N}^{\infty}{}_n (a_n e^{i\lambda_n t} + a_{-n} e^{i\lambda_{-n} t}).$$

Si ricava allora, per la diseguaglianza di Riesz, supposto $T \geq 1$,

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{T} \int_0^T |F(t)|^{1+m} dt \right)^{\frac{1}{1+m}} &\leq \\ \leq \left(\frac{1}{T} \int_0^T |F_N(t)|^{1+m} dt \right)^{\frac{1}{1+m}} &+ \left(\frac{1}{T} \int_0^T |\varphi_N(t)|^{1+m} dt \right)^{\frac{1}{1+m}} \leq \\ \leq \left(\frac{1}{T} \int_0^T |F_N(t)|^{1+m} dt \right)^{\frac{1}{1+m}} &+ \varepsilon \end{aligned} \tag{51}$$

per il teorema XII e per la (50).

La tesi risulta perciò provata per il lemma III.

Osserviamo ora che, a causa della convergenza in media di

$$\sum_{-\infty}^{\infty}{}_n a_n e^{i\lambda_n t}$$

verso la funzione $F(t)$, questa risulta definita a meno dei punti di un insieme di misura nulla.

Se conveniamo di porre in tali punti $F(t) = 0$ possiamo dimostrare i due seguenti teoremi di stabilità.

TEOREMA XIV. — *Se le successioni* $\{a_n\}$ *e* $\{\lambda_n\}$ *soddisfano alle condizioni del teorema* XIII, *la funzione*

$$F(t) \sim \sum_{-\infty}^{\infty}{}_n\, a_n e^{i\lambda_n t}$$

è limitata nell'intervallo $0 \leq t < \infty$, *se sono egualmente limitate le funzioni periodiche, di periodo* $\dfrac{2\pi}{\delta}$,

$$\psi_{N,k,r}(t) = \sum_{-N}^{N}{}_n\, a_{n,k}\, \varepsilon_n{}^r e^{in\delta t},$$

dove è $k = 0, 1, \dots;\ r = 0, 1, \dots;\ N = 0, 1, \dots,$ *e inoltre*

$$a_{n,k} = a_n e^{i\lambda_n \frac{2k\pi}{\delta}},$$

$$\varepsilon_n = \lambda_n - n\delta.$$

DIMOSTRAZIONE. — Per $0 \leq t < \infty$ si ha per ipotesi

$$|\psi_{N,k,r}(t)| \leq M$$

dove M è una opportuna costante positiva indipendente da N, k, r.

Posto poi

$$F_N(t) = \sum_{-N}^{N}{}_n\, a_n e^{i\lambda_n t}$$

ricaviamo, per $\dfrac{2k\pi}{\delta} \leq t \leq \dfrac{2(k+1)\pi}{\delta}$,

$$\begin{aligned} F_N(t) &= \sum_{-N}^{N}{}_n\, a_n e^{i\frac{2k\pi}{\delta}\lambda_n} e^{i(\lambda_n - n\delta)\left(t - \frac{2k\pi}{\delta}\right)} e^{in\delta\left(t - \frac{2k\pi}{\delta}\right)} \\ &= \sum_{-N}^{N}{}_n\, a_{n,k} e^{in\delta t} e^{i\varepsilon_n\left(t - \frac{2k\pi}{\delta}\right)} \\ &= \sum_{-N}^{N}{}_n\, a_{n,k} e^{in\delta t} \sum_{0}^{\infty}{}_r \frac{(i\varepsilon_n)^r}{r!}\left(t - \frac{2k\pi}{\delta}\right)^r \\ &= \sum_{0}^{\infty}{}_r \frac{i^r}{r!}\left(t - \frac{2k\pi}{\delta}\right)^r \psi_{N,k,r}(t). \end{aligned}$$

Ne segue

$$|F_N(t)| \leq M e^{\frac{2\pi}{\delta}}.$$

Siccome poi esiste una successione di interi positivi $N_1, N_2, \ldots, N_q, \ldots$, tali che sia quasi ovunque, per $\frac{2k\pi}{\delta} \leq t \leq \frac{2(k+1)\pi}{\delta}$,

$$\lim_{q \to \infty} F_{N_q}(t) = F(t)$$

il teorema è dimostrato.

Teorema XV. — *Se, per un valore* $\sigma > 0$, *risulta*

$$\lim_{n \to \pm\infty} \lambda_n - n\sigma = 0,$$

e se, posto

$$\rho_n = \lambda_n - n\sigma,$$

le serie

$$\sum_{-\infty}^{\infty} {}_n \, | \rho_n |^{1+m}, \quad \sum_{-\infty}^{\infty} {}_n \, | a_n |^{1+\frac{1}{m}}$$

convergono per un valore m ≥ 1; *allora condizione necessaria e sufficiente perchè la* F(t) *sia limitata è che siano ugualmente limitate le funzioni periodiche, di periodo* $\frac{2\pi}{\sigma}$,

$$\psi_k(t) \sim \sum_{-\infty}^{\infty} {}_n \, a_{n,k} e^{in\sigma t},$$

con

$$a_{n,k} = a_n e^{i\lambda_n \frac{2k\pi}{\sigma}}.$$

Dimostrazione — La condizione è necessaria. Sia infatti, per $0 \leq t < \infty$,

$$| F(t) | \leq M,$$

con M costante positiva.

Siccome risulta, per $\frac{2k\pi}{\sigma} \leq t \leq \frac{2(k+1)\pi}{\delta}$,

$$\left| \sum_{-N}^{N} {}_n \, a_{n,k} \left(e^{in\sigma\left(t - \frac{2k\pi}{\sigma}\right)} - e^{i\lambda_n\left(t - \frac{2k\pi}{\sigma}\right)} \right) \right| \leq \frac{2\pi}{\sigma} \sum_{-N}^{N} {}_n \, | a_n \rho_n |$$

ed è, per la diseguaglianza di Schwarz-Hölder,

$$\frac{2\pi}{\sigma} \sum_{-N}^{N} {}_n \, | a_n \rho_n | \leq \frac{2\pi}{\sigma} \left(\sum_{-\infty}^{\infty} {}_n \, | a_n |^{1+\frac{1}{m}} \right)^{\frac{m}{m+1}} \left(\sum_{-\infty}^{\infty} {}_n \, | \rho_n |^{1+m} \right)^{\frac{1}{1+m}} = B,$$

si ricava

$$| \psi_k(t) | = \left| F(t) - \sum_{-\infty}^{\infty} {}_n \, a_{n,k} \left(e^{in\sigma\left(t - \frac{2k\pi}{\sigma}\right)} - e^{i\lambda_n\left(t - \frac{2k\pi}{\sigma}\right)} \right) \right| \leq M + B.$$

La condizione è sufficiente. Se infatti si ha

$$| \psi_k(t) | \leq D,$$

dove D è una costante positiva indipendente da k, si ottiene anche

$$|F(t)| \leq D + B.$$

8. Se le successioni $\{a_n\}$ e $\{\lambda_n\}$ soddisfano alle condizioni del teorema XII, posto

$$f_0(p) = \sum_{-\infty}^{\infty}{}_n \frac{a_n}{p - i\lambda_n} = \int_0^\infty e^{-pt} F_0(t)\,dt$$

si ricava

$$\frac{(-1)^r}{r!} f_0^{(r)}(p) = \sum_{-\infty}^{\infty}{}_n \frac{a_n}{(p - i\lambda_n)^{r+1}} = \int_0^\infty e^{-pt} t^r F_0(t)\,dt.$$

Si ottiene di qui un criterio per lo studio del comportamento di $F(t)$ per $t \to \infty$ nell'ipotesi che sia

$$f(p) = \sum_{-\infty}^{\infty}{}_n \sum_{1}^{N}{}_\nu \frac{a_{n,\nu}}{(p - i\lambda_n)^\nu},$$

dove N è un intero positivo, la serie $\sum_{-\infty}^{\infty}{}_n \sum_{1}^{N}{}_\nu |a_{n,\nu}|^{1+\frac{1}{m}}$ converge per un valore $m \geq 1$ e per la successione $\{\lambda_n\}$ valgono le condizioni del teorema XII.

Quanto precede può poi generalizzarsi al caso in cui i poli della $f(p)$ siano situati nel semipiano $R(p) \leq 0$. Questo avviene ad es. in problemi sulla propagazione del calore, nei quali i poli sono sul semiasse $p \leq 0$ ([15]), mentre trasformate di LAPLACE meromorfe e aventi soltanto poli situati sull'asse immaginario del piano p si presentano in problemi relativi alla teoria dei circuiti elettrici, quando non si abbiano dissipazioni di energia ([16]).

Sono infine evidenti gli enunciati dei teoremi che si possono ottenere combinando i risultati dei n.i 6, 7 con quelli dei n.i 3, 4.

9. Indichiamo ora una proprietà relativa alle funzioni $F(t)$, definite nell'intervallo $0 \leq t < \infty$ e soddisfacenti, per $0 \leq T_1 \leq T_2$ e per un valore $\sigma > 0$, alla condizione

$$\int_{T_1}^{T_2} |F(t)|^{1+\sigma} dt < K(T_2 - T_1) + H$$

con K e H costanti positive.

In particolare tale proprietà vale per le funzioni considerate nel teorema XII, e per quelle che verificano la (1), oppure la (2).

Teorema XVI. — *Se la funzione* F(t), *definita per* $0 \leq t < \infty$ *è integrabile in ogni intervallo finito insieme con* $|F(t)|^{1+\sigma}$, *per un valore* $\sigma > 0$, *e se esistono due costanti positive* K *e* H *tali che risulti, per* $0 \leq T_1 < T_2$,

$$\int_{T_1}^{T_2} |F(t)|^{1+\sigma} dt < K(T_2 - T_1) + H$$

allora la F(t) *è trasformabile nel semipiano* $R(p) > 0$ *e, se* $p = iv_0$ *è un punto di analiticità della* f(p), *si ha*

$$\lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T e^{-iv_0 t} F(t) dt = 0.$$

Dimostrazione. — Posto, per $t \geq 0$,

$$\psi(t) = \int_0^t F(t) dt$$

si ha, per ipotesi,

(52) $$|\psi(t)| < (K+1)t + H$$

e inoltre, per $T > 0$,

$$\int_0^T e^{-pt} F(t) dt = e^{-pT} \psi(T) + p \int_0^T e^{-pt} \psi(t) dt.$$

Supposto allora $R(p) > 0$, dalla (52) segue che l'integrale

$$f(p) = \int_0^\infty e^{-pt} F(t) dt$$

esiste finito.

Per dimostrare la seconda parte del teorema estenderemo un procedimento sostanzialmente dovuto a M. Riesz ([17]).

Supponiamo dapprima che $p = 0$ sia un punto di analiticità per la $f(p)$. Esiste allora un numero $\alpha > 0$ tale che la $f(p)$ risulti analitica in tutti i punti del quadrato $\gamma(-\alpha \leq u \leq \alpha, \ -\alpha \leq v \leq \alpha)$.

Posto poi

(53) $$S_T(p) = e^{pT}(e^{-p} - e^{-i\alpha})(e^{-p} - e^{i\alpha}) \frac{f(p) - \int_0^T e^{-pt} F(t) dt}{T},$$

per una nota proprietà delle funzioni analitiche, la tesi sarà provata se dimostreremo che è

$$\lim_{T\to\infty} S_T(p)=0 \tag{54}$$

uniformemente rispetto a p, supposto che p appartenga al contorno di γ.

Per $u>0$ si ha

$$f(p)-\int_0^T e^{-pt}F(t)dt=\int_T^\infty e^{-pt}F(t)dt$$

e posto, per $t\geq T$,

$$\varphi(t)=\int_T^t |F(t)|\,dt$$

otteniamo

$$\varphi(t)<K(t-T)+B$$

con $B=K+H$.

Integrando per parti si ricava poi, per $u>0$,

$$\int_T^\infty e^{-pt}\,|F(t)|\,dt=p\int_T^\infty e^{-pt}\varphi(t)dt$$

e quindi

$$\left|e^{pt}\int_T^\infty e^{-pt}F(t)dt\right|\leq e^{uT}\int_T^\infty e^{-ut}\,|F(t)|\,dt=e^{uT}u\int_T^\infty e^{-ut}\varphi(t)dt< \tag{55}$$

$$<ue^{uT}\left\{K\int_T^\infty e^{-ut}(t-T)dt+B\int_T^\infty e^{-ut}dt\right\}=\frac{K}{u}+B.$$

Se è $p=u+i\alpha$, con $u>0$, si ricava allora dalle (52) e (55)

$$|S_T(p)|\leq\frac{2}{T}(1-e^{-u})\left(\frac{K}{u}+B\right)<\frac{2(K+\alpha B)}{T}. \tag{56}$$

Analogamente per $p=u-i\alpha$ risulta

$$|S_T(p)|\leq\frac{2(K+\alpha B)}{T}. \tag{57}$$

Per $p=\alpha+iv$, con $-\alpha\leq v\leq\alpha$, abbiamo

$$|S_T(p)|\leq\frac{4}{T}\left(\frac{K}{\alpha}+B\right). \tag{58}$$

Siccome è $S_T(\pm i\alpha) = 0$, dalle (56), (57), (58) segue che per $u \geq 0$ la (54) è provata.

Sia ora $-\alpha \leq u < 0$.

Posto $x = -u$, sarà $x > 0$ e inoltre, per la diseguaglianza di SCHWARZ-HÖLDER,

$$(59) \qquad \left| e^{pT}\int_0^T e^{-pt}F(t)dt \right| \leq e^{-xT}\int_0^T e^{xt}\,|F(t)|\,dt = \int_0^T e^{-x(T-t)}\,|F(t)|\,dt \leq$$

$$\leq \left(\int_0^T |F(t)|^{1+\sigma}d\sigma\right)^{\frac{1}{1+\sigma}}\left(\int_0^T e^{-x(T-t)\frac{1+\sigma}{\sigma}}\,dt\right)^{\frac{\sigma}{1+\sigma}} \leq (KT+H)^{\frac{1}{1+\sigma}}\left(\frac{\sigma}{x(1+\sigma)}\right)^{\frac{\sigma}{1+\sigma}}.$$

Indicando con M il massimo modulo di $f(p)$ nel quadrato γ, si ricava, per $p = u + i\alpha = -x + i\alpha$,

$$(60) \qquad |S_T(p)| \leq 2e^{\alpha}(e^{x}-1)\left\{\frac{M}{T} + \left(\frac{\sigma}{1+\sigma}\right)^{\frac{\sigma}{1+\sigma}}\frac{(KT+H)^{\frac{1}{1+\sigma}}}{x^{\frac{\sigma}{1+\sigma}}T}\right\} \leq$$

$$\leq \frac{2e^{2\alpha}M}{T} + 2\alpha^{\frac{1}{1+\sigma}}\left(\frac{\sigma}{1+\sigma}\right)^{\frac{\sigma}{1+\sigma}} e^{2\alpha}\,\frac{(KT+H)^{\frac{1}{1+\sigma}}}{T},$$

perchè si ha

$$\frac{e^{x}-1}{x} = e^{\vartheta x} < e^{\alpha} \qquad (0 < \vartheta < 1).$$

Per $p = u - i\alpha$ vale ancora la (60).

Se è $p = -\alpha + iv$, con $-\alpha \leq v \leq \alpha$, abbiamo

$$(61) \qquad |S_T(p)| \leq 4e^{2\alpha}\left\{\frac{M}{T} + \left(\frac{\sigma}{\alpha(1+\sigma)}\right)^{\frac{\sigma}{1+\sigma}}\frac{(KT+H)^{\frac{1}{1+\sigma}}}{T}\right\}$$

e quindi, per le (60) e (61) la (54) risulta provata anche per $u < 0$.

Il teorema è perciò dimostrato se è $v_0 = 0$.

Supposto $v_0 \neq 0$, si consideri la funzione

$$\bar{F}(t) = e^{-iv_0 t}F(t)$$

la cui trasformata di LAPLACE è

$$\bar{f}(p) = f(p + iv_0)$$

ed è perciò analitica per $p = 0$.

Sarà allora

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T e^{-iv_0 t}F(t)dt = 0$$

e quindi il teorema è completamente dimostrato.

Una immediata conseguenza di questo teorema è che se nel punto $p = iv_0$ la $f(p)$ presenta un polo del primo ordine, e se A_0 è il residuo, si ha

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T e^{-iv_0 t}F(t)dt = A_0$$

ciò che costituisce una generalizzazione di un noto teorema sulle funzioni quasi periodiche di BOHR ([18]).

BIBLIOGRAFIA

([1]) v. ad es. G. DOETSCH, *Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation.* [Berlin, Springer, 1937], pp. 203, 222.

([2]) M. PICONE, *Sulla trasformata di Laplace,* « Rend. Acc. dei Lincei », 1935, vol. XXI, pp. 306, 313.

([3]) A. ZYGMUND, *Trigonometrical series.* [« Mon. Mat. », Warszawa 1935], pp. 189, 190.

([4]) L. TONELLI, *Sulla nozione di integrale,* « Ann. di Mat. », serie IV, vol. I, 1924, pp. 120, 121.

([5]) A. S. BESICOVITCH, *Almost periodic functions.* [Cambridge, 1932], pp. 1, 3.

([6]) v. (5), p. 53, 2° Theorem.

([7]) L. AMERIO, *Sull'inversione della trasformata di Laplace,* « R. Acc. Sc. Fis. e Mat. della Soc. Reale di Napoli », vol. X, 1939-40.

([8]) L. TONELLI, *Serie trigonometriche.* (Bologna, Zanichelli), 1928, pp. 226, 228.

([9]) v. (7), pp. 226, 228.

([10]) v. (1), p. 47, Satz. 1.

([11]) M. PICONE, *Recenti contributi dell'Istituto per le Applicazioni del Calcolo all'Analisi quantitativa dei problemi di propagazione.* « R. Acc. d'Italia », vol. VI, 1935, pp. 663, 664.

([12]) L. AMERIO, *Tensioni e correnti in una catena di trasduttori quadripolari,* « Pont. Acad. Sc. », Commentationes, vol. IV, n. 3, 1940, pp. 108, 109.

([13]) v. (5), p. 28.

([14]) v. (3).

([15]) v. ad es. (1), pp. 353, 362; (11) pp. 663, 664.

([16]) v. ad es. (1), pp. 369, 372; (12) pp. 106, 121.

([17]) M. RIESZ, *Neuer Beweis der Fatou' schen Satzes,* « Nach. von der Gesell. der Wiss. zu Gottingen », 1916, pp. 62-65.

([18]) H. BOHR, *Fastperiodische Funktionen,* Berlin, Springer, 1932, p. 45.