Sopra gli sviluppi asintotici e la trasformazione di Laplace.

Nota di Nikola Obreschkoff (a Sofia).

Sunto. - *Sia* F(x) *una funzione definita per* $x > 0$, *integrabile e indichiamo con* f(s) *la sua trasformata di* LAPLACE. *In questa Nota l'A. dà alcuni risultati per lo sviluppo asintotico della funzione* F(x), *se la funzione* f(s) *possiede uno sviluppo asintotico.*

Sia $F(x)$ una funzione definita per $x > 0$, integrabile in ogni intervallo $(0, X)$, $X > 0$, e indichiamo con $f(s)$ la sua trasformata di LAPLACE

$$f(s) = \int_0^{+\infty} e^{-sx} F(x) dx = L(F). \tag{1}$$

È noto che esiste un numero reale σ_0 tale che l'integrale è convergente per $R(s) > \sigma_0$ e divergente per $R(s) < \sigma_0$. Supposto σ_0 finito, effettuando la trasformazione $s - \sigma_0 = s'$, potremo supporre $\sigma_0 = 0$. Se la funzione $F(x)$ possiede per $x \to \infty$ uno sviluppo asintotico nel senso di STIELTJES e di POINCARÉ, si ottiene quasi immediatamente [1] lo sviluppo asintotico di $f(x)$ per $|s| \to 0$, $R(s) > 0$.

Il problema inverso è però più delicato e noi daremo qui un teorema generale per questa inversione. Supponiamo che C indichi un cammino composto di quattro segmenti C_1, C_2, C_3, C_4 del piano $s = \sigma + it = \rho e^{i\varphi}$ definiti nel seguente modo:

$$C_1: \quad \sigma = -\alpha, \quad -\infty < t \leq -\beta, \quad (\alpha > 0, \ \beta > 0);$$

$$C_2: \quad 0 \leq \rho \leq d, \quad \varphi = -\vartheta; \quad \frac{\pi}{2} < \vartheta < \pi, \quad \alpha = -d \cos \vartheta, \quad \beta = d \operatorname{sen} \vartheta;$$

$$C_3: \quad 0 \leq \rho \leq d, \quad \varphi = \vartheta:$$

$$C_4: \quad \sigma = -\alpha, \quad \beta \leq t < \infty.$$

Si ha allora il seguente teorema. *Sia* f(s) *regolare nella regione* G *a destra*

[1] G. DOETSCH. *Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation*, (Berlin, 1937); pp. 230-236.

di C *e sopra* C *non abbia altro punto singolare che il punto* $s=0$, *ed* $f(s)$ *tenda uniformemente a zero, quando* $|s| \to 0$, *rimanendo in* G. *Sotto ipotesi abbastanza generali, per esempio, se per* $|s| \to +\infty$, $f(s)$ *ha la forma*

$$f(s)=\frac{A}{s^{\mu}}+\frac{\varphi(s)}{s^{n}}, \quad \mu>0; \quad n>1, \; |\varphi(s)|<M,$$

la (1) *si può invertire con la formula*

$$F(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{xs}f(s)ds, \quad c>0. \tag{2}$$

Vogliamo dimostrare che se per $|s| \to 0$ *in* G, *la funzione* $f(s)$ *ammette lo svituppo asintotico* ([2])

$$f(s)=\frac{a_0}{s^{\lambda_0}}+\frac{a_1}{s^{\lambda_1}}+\frac{a_2}{s^{\lambda_2}}+\dots, \quad 0<\lambda_0<\lambda_1<\lambda_2<\dots \tag{3}$$

allora la funzione $F(x)$ *per* $x \to \infty$ *ammette lo sviluppo asintotico*

$$F(x)=\frac{a_0}{\Gamma(\lambda_0)}x^{\lambda_0-1}+\frac{a_1}{\Gamma(\lambda_1)}x^{\lambda_1-1}+\frac{a_2}{\Gamma(\lambda_2)}x^{\lambda_2-1}+\dots. \tag{4}$$

Per dimostrare il teorema supponiamo $x>\frac{1}{d}$, e indichiamo con D l'arco $s=\frac{e^{i\varphi}}{x}$, $-\vartheta \leq \varphi \leq \vartheta$. Indichiamo poi con C' il cammino che si ottiene da C, sostituendo ai due segmenti contenuti nel circolo $|s| \leq \frac{1}{x}$ l'arco D, è proviamo che

$$F(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C'} e^{xs}f(s)ds. \tag{5}$$

Infatti i due integrali

$$\int_{-\alpha+i\omega}^{c+i\omega} e^{xs}f(s)ds, \quad \int_{-\alpha-i\omega}^{c-i\omega} e^{xs}f(s)ds$$

tendono verso zero quando il numero reale ω cresce indefinitamente, e dalla (2), per il teorema di CAUCHY, segue la (5).

([2]) Dire che la funzione $f(s)$ possiede lo sviluppo asintotico (3) nell'angolo $\alpha \leq \arg. s \leq \beta$ e per $|s| \to 0$, significa che per $n=0, 1, 2, \dots$ si ha $f(s)=\frac{a_0}{s^{\lambda_0}}+\frac{a_1}{s^{\lambda_1}}+\dots+\frac{a_n}{s^{\lambda_n}}+\frac{g_n(s)}{s^{\lambda_n}}$, dove $g_n(s)$ tende uniformemente verso zero quando $|s| \to 0$ in questo angolo.

Supponiamo adesso

$$f(s)=\frac{a_0}{s^{\lambda_0}}+\frac{a_1}{s^{\lambda_1}}+\ldots+\frac{a_n}{s^{\lambda_n}}+\frac{g_n(s)}{s^{\lambda_n}} \tag{6}$$

dove $\lambda_i>0$ sono numeri arbitrari, e $|g_n(s)|\to 0$ in G, per $|s|\to 0$. Siccome per $\alpha>0$ si ha $L(x^{\alpha-1})=\frac{\Gamma(\alpha)}{s^{\alpha}}$, avremo

$$f(s)=L(F)=\frac{a_0}{s^{\lambda_0}}+\frac{a_1}{s^{\lambda_1}}+\ldots+\frac{a_n}{s^{\lambda_n}}+L(F_n x^{\lambda_n-1}) \tag{7}$$

dove

$$\frac{g_n(s)}{s^{\lambda_n}}=\int_0^\infty e^{-sx}F_n(x)x^{\lambda_n-1}dx. \tag{8}$$

La formula (5) essendo valida per $s^{-\alpha}$, $\alpha>0$, si avrà

$$F_n(x)\cdot x^{\lambda_n-1}=\frac{1}{2\pi i}\int_{C'} e^{xs}\frac{g_n(s)}{s^{\lambda_n}}\,ds. \tag{9}$$

Se $M\left(\frac{1}{x}\right)$ indica il massimo di $|g_n(s)|$ sopra D, si avrà

$$\left|\int_D e^{xs}\frac{g_n(s)}{s^{\lambda_n}}\,ds\right|<\frac{2\pi}{x}M\left(\frac{1}{x}\right)\frac{e}{\left(\frac{1}{x}\right)^{\lambda_n}}=0\,(x^{\lambda_n-1}). \tag{10}$$

Per l'integrale j_4 preso sopra C_4 si ha

$$\int_{C_4} e^{xs}\frac{g_n(s)}{s^{\lambda_n}}\,ds=\int_{C_4} e^{xs}f(s)ds-\sum_{\mu=0}^{n}a_\mu\int_{C_4}\frac{e^{xs}}{s^{\lambda_\mu}}\,ds, \tag{11}$$

ma sopra C_4 si ha $s=-\alpha+it$, $t\geq\beta$, perciò

$$\int_{C_4}\frac{e^{xs}}{s^{\lambda_\mu}}\,ds=e^{-\alpha x}\int_\beta^\infty\frac{e^{xti}dt}{(-\alpha+it)^{\lambda_\mu}}=-\frac{e^{(-\alpha+\beta i)x}}{xi(-\alpha+\beta i)^{\lambda_\mu}}+ \tag{12}$$

$$+\frac{\lambda_\mu}{x}\int_\beta^\infty\frac{e^{(-\alpha+\beta i)x}}{(-\alpha+ti)^{\lambda_\mu+1}}\,dt=O\left(\frac{e^{-\alpha x}}{x}\right)=0\,(e^{-\alpha x}).$$

Nella stessa maniera si ottiene

$$\int_{C_4} e^{xs}f(s)ds=0\,(e^{-\alpha x}), \tag{13}$$

e dalle (10), (11), (12), (13) si conclude che

$$\int_{C_4} e^{xs}\frac{g_n(s)}{s^{\lambda_n}}\,ds=0\,(e^{-\alpha x}), \tag{14}$$

e analogamente

$$\int_{C_1} e^{xs}\frac{g_n(s)}{s^{\lambda_n}}\,ds = 0\,(e^{-ax}). \tag{15}$$

Per l'integrale j_3 preso sopra C_3' noi abbiamo

$$j_3 = \int_{C_3'} e^{xs}\frac{g_n(s)}{s^{\lambda_n}}\,ds = \int_{\frac{1}{x}}^{d} e^{x(\rho\cos\vartheta + i\rho\sin\vartheta)}\frac{g_n(\rho e^{i\vartheta})}{\rho^{\lambda_n}}\,ie^{-i(\lambda_n-1)\vartheta}d\rho.$$

Sceglieremo d_1 talmente piccolo che per $|s| \leq d_1$ sia $|g_n(s)| < \varepsilon$; avremo

$$j_3 = \int_{\frac{1}{x}}^{d_1} + \int_{d_1}^{d} = j_3' + j_3'', \quad |j_3'| < \varepsilon\int_{\frac{1}{x}}^{d_1}\frac{e^{x\rho\cos\vartheta}}{\rho^{\lambda_n}}\,d\rho < \tag{16}$$

$$< \varepsilon x^{\lambda_n-1}\int_1^{\infty}\frac{e^{u\cos\vartheta}}{u^{\lambda_n}}\,du < \varepsilon x^{\lambda_n-1}\int_1^{\infty} e^{u\cos\vartheta}du = \varepsilon x^{\lambda_n-1}\frac{e^{\cos\vartheta}}{|\cos\vartheta|},$$

$$j_3'' < M\int_{d_1}^{d}\frac{e^{\rho x\cos\vartheta}}{\rho^{\lambda_n}}\,d\rho < Me^{xd_1\cos\vartheta}\int_{d_1}^{d}\frac{1}{\rho^{\lambda_n}}\,d\rho = 0\,(x^{\lambda_n-1}).$$

Dalle disuguaglianze (10), (14), (15) e dalla (16) si conclude che

$$F_n(x) = 0(1), \quad x\to\infty,$$

e per la funzione $F(x)$ si ha

$$F(x) = \frac{a_0}{\Gamma(\lambda_0)}\,x^{\lambda_0-1} + \frac{a_1}{\Gamma(\lambda_1)}\,x^{\lambda_1-1} + \ldots + \frac{a_n}{\Gamma(\lambda_n)}\,x^{\lambda_n-1} + F_n(x)x^{\lambda_n-1} \tag{17}$$

con $F_n(x) = 0(1)$ per $x\to\infty$. Il teorema enunciato segue immediatamente dalla (17).

Nella stessa maniera si può ricavare il seguente risultato: *se la funzione* $f(s)$ *è regolare nell'angolo* A: $-\delta \leq arg\, s \leq \delta_1$, $\frac{\pi}{2} < \delta < \pi$, $\frac{\pi}{2} < \delta_1 < \pi$ *ad eccezione dei punti* $s = 0$, $s = \infty$ *e se possiede lo sviluppo asintotico* (3) *in* A *per* $|s|\to 0$, *allora* $F(x)$ *è regolare nell'angolo* $\frac{\pi}{2} - \delta_1 < arg\, x < \delta - \frac{\pi}{2}$ *eccetto i punti* $x = 0$, $x = \infty$, *e possiede lo sviluppo* (4) *nello stesso angolo.*