Teoremi di confronto per i sistemi di equazioni differenziali ordinarie e loro conseguenze (*).

Memoria di MAURO PICONE (a Roma).

Sunto. - *Si danno alcuni teoremi di confronto per sistemi di equazioni differenziali ordinarie e se ne fa applicazione ad una vasta classe di problemi di integrazione di sistemi di equazioni lineari differenziali ordinarie con condizioni non iniziali (integrali o assegnanti alle soluzioni valori in determinati punti), nonchè allo studio della dipendenza delle soluzioni dei sistemi non lineari, da un parametro che compare nelle equazioni e nelle condizioni iniziali.*

Nella Memoria di CARLO MIRANDA dedicata alle ricerche compiute, fra il 1932-XI e il 1933-XII, nell'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo, concernenti i problemi che si riallaciano all'integrazione dell'equazione differenziale THOMAS-FERMI della Fisica atomica (1), trovasi enunciato (2) senza dimostrazione, e utilizzato un generale teorema di confronto, fra equazioni differenziali ordinarie del secondo ordine, che io ebbi occasione di suggerire in quelle ricerche ai miei collaboratori dell'Istituto, e al quale oggi, autorevolmente sollecitato a farne conoscere la dimostrazione, ritengo utile destinare la presente trattazione che lo fa discendere, immediatamente ed in ipotesi molto più larghe di quelle allora considerate, da taluni generali teoremi di confronto relativi a sistemi di quante si vogliano equazioni differenziali ordinarie, in altrettante fuuzioni incognite, i quali teoremi, inoltre, come pure mostrerò nel presente scritto, conducono ad uno nuovo esistenziale per gl'integrali dei sistemi di equazioni differenziali ordinarie, dipendenti da un parametro, valevole, a differenza dei classici teoremi, *in grande* nel parametro, valevole cioè al variare di questo in un prefissato intervallo, e, per ora limitatamente ai sistemi lineari, forniscono larga messe di notevoli criteri snfficienti d'esistenza per le soluzioni assoggettate a ulteriori equazioni lineari non differenziali di varii tipi.

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo.

(1) C. MIRANDA, *Teoremi e metodi per l'integrazione numerica della equazione differenziale di Fermi*, [« Memorie della Reale Accademia d'Italia », Vol. V (1934-XII)], pp. 285-322.

(2) A pag. 291.

È opportunissimo, anche per le concrete applicazioni (3), considerare i detti sistemi di equazioni differenziali, nelle ipotesi sulle quali il CARATHEODORY (4) ne ha costruito una ben nota fruttuosa teoria e pertanto, per ben intendere ed evitare noiose ripetizioni, mi permetto di introdurre qui talune locuzioni che vado, come prima cosa, a definire.

Indichino $x, y_1, \dots, y_p$ quantità variabili reali indipendenti e R il dominio rettangolare definito dalle limitazioni

$$a \leqq x \leqq b, \quad a_h \leqq y_h \leqq b_h \qquad (h = 1, \dots, p),$$

cioè, come diremo, di punto estremo inferiore $(a, a_1, \dots, a_p)$ e superiore $(b, b_1, \dots, b_p)$. Diremo che una funzione reale

$$f(x, y_1, \dots, y_p),$$

delle variabili reali $x, y_1, \dots, y_p$, è, nel dominio R, del *tipo di Caratheodory, rispetto alla variabile* x, o, brevemente, del *tipo* C, *rispetto alla* x, se:

1°) per un certo insieme N di punti dell' intervallo (a, b), eventualmente anche vuoto, *di misura* (lebesguiana) *nulla*, è ben definita per ogni punto $(x, y_1, \dots, y_p)$ di R, per il quale x non appartenga ad N;

2°) comunque si fissi x in (a, b), fuori di N, la f è funzione continua del punto $(y_1, \dots, y_p)$ nel dominio rettangolare, dello spazio a p dimensioni, di punto estremo inferiore $(a_1, \dots, a_p)$ e superiore $(b_1, \dots, b_p)$ e comunque si fissi $(y_1, \dots, y_p)$ in tale dominio è in (a, b) funzione misurabile di x;

3°) esiste una funzione $F(x)$, dell' unica variabile x, sommabile in (a, b), per la quale, in R, risulta

$$|f(x, y_1, \dots, y_p)| \leqq F(x).$$

Diremo che la funzione f è, nel dominio rettangolare R, *generalmente continua, rispetto alla* x, se:

per un certo insieme N di punti dell' intervallo (a, b), eventualmente anche vuoto, *privo di derivato*, la f è ben definita in ogni punto $(x, y_1, \dots, y_p)$ di R per il quale x non appartenga ad R, e vi è continua come funzione del punto $(x, y_1, \dots, y_p)$.

---

(3) Anche, per esempio, per la ricordata equazione THOMAS-FERMI:

$$y'' = \frac{y^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{x}},$$

che deve considerarsi nell' intervallo $(0, \infty)$.

(4) C. CARATHEODORY, *Vorlesungen über reelle Funktionen*, [B. G. Teubner (1918 e 1927)], pp. 665-688.

Ovviamento, se la f è lineare rispetto alle $y_1, \dots, y_p$, ed è

$$f = \varphi(x) + \sum_{h=1}^{p} \varphi_h(x) y_h ,$$

la f riesce, nel dominio R, del tipo C rispetto alla x, non appena le funzioni $\varphi, \varphi_1, \dots, \varphi_p$, della x, sono sommabili in (a, b) e gl'intervalli (a_h, b_h) $(h = 1, \dots, p)$ sono finiti. Nelle stesse ipotesi, se le funzioni $\varphi, \varphi_1, \dots, \varphi_p$ sono continue in ogni punte di (a, b), fuori di un certo insieme N privo di derivato, la f è anche generalmente continua, rispetto alla x, nel dominio R.

Diremo che il sistema di funzioni reali $y_1(x), y_2(x), \dots, y_p(x)$, che indicheremo con $[y_h(x)]$ è, in R, soluzione del sistema di equazioni differenziali

$$y_h' = f_h(x, y_1, \dots, y_p), \qquad (h = 1, \dots, p), \tag{1}$$

se le dette funzioni, in ogni intervallo finito di (a, b), sono assolutamente continue, verificano, in (a, b), le limitazioni aperte

$$a_h < y_h(x) < b_h , \qquad (h = 1, \dots, p),$$

ed infine, con eccezione, al più, dei punti di (a, b) di un insieme di misura nullo, soddisfano le equazioni.

Così, data in R una funzione $f(x, y_1, \dots, y_p)$ del tipo C rispetto alla x, diremo che la funzione reale $y(x)$, è, in R, soluzione dell'equazione differenziale d'ordine p:

$$y^{(p)} = f(x, y, y', \dots, y^{(p-1)}), \tag{2}$$

se la funzione e tutte le sue derivate, fino a quella inclusa d'ordine $p - 1$, sono assolutamente continue in ogni intervallo finito di (a, b), verificano, in (a, b), le limitazioni aperte

$$a_{1+k} < y^{(k)}(x) < b_{1+k} , \qquad (k = 0. 1, \dots, p-1),$$

ed infine, con eccezione, al più, dei punti di (a, b) di un insieme di misurà nulla, soddisfano l'equazione.

Il sistema di equazioni differenziali (1), avente, in R, la soluzione $[y_h(x)]$, si dirà *unitario in tale soluzione*, se, per ogni altra soluzione $[Y_h(x)]$, in R, si ha, in (a, b),

$$Y_h(x) \equiv y_h(x), \qquad (h = 1, \dots, p),$$

non appena, per un punto x_0 di (a, b), si abbia

$$Y_h(x_0) = y_h(x_0), \qquad (h = 1, \dots, p);$$

il sistema si dirà *unitario, in* R, se è tale in ogni sua soluzione, in R.

Così l'equazione differenziale (2), avente, in R, la soluzione $y(x)$, si dirà *unitaria in tale soluzione*, se, per ogni altra soluzione $Y(x)$, in R, si ha, in (a, b),

$$Y(x) \equiv y(x),$$

non appena, per un punto x_0 di (a, b), si abbia

$$Y^{(k)}(x_0) = y^{(k)}(x_0), \qquad (k = 0, 1, \dots, p-1).$$

Ciò posto, possiamo in modo breve enunciare un teorema, del quale faremo uso sovente, contenuto in uno dato dal CARATHEODORY nel luogo citato [5], concernente l'integrazione del sistema di equazioni differenziali e di condizioni iniziali:

$$(3) \qquad \begin{cases} y_h' = f_h(x, y_1, \dots, y_p, \lambda), \\ y_h(x_0) = \alpha(\lambda), \end{cases} \qquad (h = 1, \dots, p)$$

dipendente dal parametro λ.

I. *Se nel dominio rettangolare, dello spazio* $(x, y_1, \dots, y_p, \lambda)$. *di punto estremo inferiore* $(a, a_1, \dots, a_p, \lambda')$ *e superiore* $(b, b_1, \dots, b_p, \lambda'')$, *le funzioni* f_h *e* α_h *sono del tipo* C, *rispetto alla* x, *verificano le timitazioni*

$$a_h < \alpha_h(\lambda) < b_h, \qquad (h = 1, \dots, p),$$

e, per un valore λ_0 *interno all'intervallo* (λ', λ'') *il sistema di equazioni differenziale è unitario in una sua soluzione* $[y_h^0(x)]$, *nel dominio rettangolare* $R[(a, a_1, \dots, a_p); (b, b_1, \dots, b_p)]$, *allora, supposto l'intervallo* (a, b) *finito, si può costruire un intorno* $(\lambda_0 - \sigma, \lambda_0 + \sigma)$ *del punto* λ_0, *e, per* λ *in tale intorno, definire una soluzione* $[y_h(x, \lambda)]$, *in* R, *del sistema di equazioni* (3), *riuscendo le* $y_h(x, \lambda)$ *funzioni continue del punto* $(x. \lambda)$ *in ogni punto* (x, λ_0).

Tale teorema, come tutti quelli fino ad oggi — a quanto io so — stabiliti al riguardo, è dunque da reputarsi *in piccolo* nel parametro [6].

1. **Teoremi di confronto con relazioni iniziali.** — È subito dimostrato il seguente teorema:

II. *Supposto* a *al finito* [7], *le funzioni*

$$f_h(x, y_1, \dots, y_p), \quad g_h(x, y_1, \dots, y_p), \qquad (h = 1, \dots, p),$$

siano di tipo C, *rispetto alla* x, *nel dominio rettangolare* $R[(a, a_1, \dots, a_p);$

---

(5) A pag. 678 del luogo citato [loc. cit. (4)].

(6) Cfr. anche E. KAMKE, *Differentialgleichungen reelier Funktionen*, [« Akademische Verlongsgesellschaft M. B. H. », Leipzig (1930)], §§ 10 e 17.

(7) E ciò sarà sempre sottinteso nel seguito.

(b, $b_1, \dots, b_p$)] *e si pongano a confronto i due sistemi*

$$(4) \qquad y_h' = f_h(x, y_1, \dots, y_p), \qquad (h = 1, \dots, p),$$

$$(5) \qquad y_h' = g_h(x, y_1, \dots, y_p). \qquad (h = 1, \dots, p),$$

dei quali [$u_h(x)$] *e* [$v_h(x)$] *sono, rispettivamente, soluzioni in* R.

Detto N *un insieme, di punti di* (a, b), *di misura nulla, si verifichi una delle seguenti ipotesi:*

a′) *essendo il sistema* (5) *unitario nella soluzione*]$v_h(x)$], *comunque si fissi* x *in* (a, b), *fuori di* N, *le* g_h *sono funzioni non decrescenti di ciascuna delle rimanenti variabili, ed è*

$$(6') \qquad f_h(x, u_1(x), \dots, u_p(x)) \leqq g_h(x, u_1(x), \dots, u_p(x)), \qquad (h = 1, \dots, p);$$

a″) *essendo il sistema* (4) *unitario nella soluzione* [$u_h(x)$], *comunque si fissi* x *in* (a, b), *fuori di* N, *le* f_h *sono funzioni non decrescenti di ciascuna delle rimanenti variabili, ed è*

$$(6'') \qquad f_h(x, v_1(x), \dots, v_p(x)) \leqq g_h(x, v_1(x), \dots, v_p(x)), \qquad (h = 1. \dots, p),$$

allora, dalle relazioni iniziali

$$(7) \qquad u_h(a) \leqq v_h(a), \qquad (h = 1, \dots, p),$$

si deducono, in tutto (a, b), *le seguenti*

$$(8) \qquad u_h(x) \leqq v_h(x), \qquad (h = 1, \dots, p).$$

Mettiamoci, per esempio, nell'ipotesi a′) e supponiamo, dapprima, che si abbia

$$u_h(a) < v_h(a), \qquad (h = 1, \dots, p).$$

Dico ehe allora sarà in tutto (a, b)

$$(9) \qquad u_h(x) < v_h(x), \qquad (h = 1, \dots, p).$$

Ed invero se le (9) non avessero luogo in tutto (a, b), esisterebbero un indice i e un punto $\xi > a$, di (a, b), per i quali risulterebbe

$$(10) \qquad \begin{cases} v_h(x) - u_h(x) > 0, \quad \text{per} \quad a \leqq x < \xi, & (h = 1, \dots, p), \\ v_h(\xi) - u_h(\xi) \geqq 0, & (h = 1, \dots, p), \\ v_i(\xi) - u_i(\xi) = 0, \end{cases}$$

Ma si ha

$$\begin{aligned} v_i(\xi) - u_i(\xi) &= v_i(a) - u_i(a) + \int_a^\xi [g_i(x, v_1(x), \dots, v_p(x)) - f_i(x, u_1(x), \dots, u_p(x))]dx \\ &\geqq v_i(a) - u_i(a) + \int_a^\xi [g_i(x, u_1(x), \dots, u_p(x)) - f_i(x, u_1(x), \dots, u_p(x))]dx \\ &\geqq v_i(a) - u_i(a) > 0, \end{aligned}$$

onde l'assurdo. Sussistano ora le (7). Introdotto un parametro reale λ, consideriamo il sistema (5) con le condizioni iniziali

(11) $$y_h(a) = v_h(a) + \lambda, \qquad (h = 1, \dots, p).$$

Comunque si fissi una quantità finita $\xi \leq b$, per il teor. I. di Caratheodory si può determinare un numero positivo σ tale che, per $|\lambda| < \sigma$, esiste, nel dominio rettangolare $R_\xi[(a, a_1, \dots, a_p); (\xi, b_1, \dots, b_p)]$. una soluzione $[V_h(x, \lambda)]$ del sistema (5) con le condizioni iniziali (11), essendo le $V_h(x, \lambda)$ funzioni continue del punto (x, λ), in ogni punto $(x, 0)$, per x nell'intervallo (a, ξ). Ma, per quanto abbiamo già dimosrrato, si ha, in (a, ξ),

$$V_h(x, \lambda) > u_h(x), \quad \text{per} \quad \lambda > 0, \qquad (h = 1, \dots, p),$$

donde

$$v_h(x) = \lim_{\lambda \to 0} V_h(x, \lambda)(\text{per } \lambda > 0) \geqq u_h(x), \qquad (h = 1, \dots, p) \text{ (8)}.$$

Dimostrazione di pari semplicità ha il seguente ulteriore teorema di confronto:

III. *Le funzioni*

$$\begin{aligned} f_h &\equiv \omega_h(x)\varphi_h(x, y_1, \dots, y_p), \\ g_h &\equiv \omega_h(x)\psi_h(x, y_1, \dots, y_p), \end{aligned} \qquad (h = 1, \dots, p),$$

siano, rispetto alla x, *del tipo* C *nel dominio* R, *le* φ_h *e* ψ_h *generalmente continue, le* $\omega_h(x)$, *dipendenti soltanto dalla* x, *sommabili in* (a, b), *e ivi quasi ovunque non negative,* $[u_h(x)]$ *e* $[v_h(x)]$ *soluzioni, in* R, *rispettivamente, dei due sistemi*

(12) $$y_h' = \omega_h(x)\varphi_h(x, y_1, \dots, y_p), \qquad (h = 1, \dots, p),$$

(13) $$y_h' = \omega_h(x)\psi_h(x, y_1, \dots, y_p), \qquad (h = 1, \dots, p).$$

Detto N *un insieme di punti di* (a, b), *privo di derivato, la* φ_h *e* ψ_h *siano,*

---

(8) Dunque, in particolare, dal confronto dei due sistemi:

(4_0) $$y_h' = 0$$

(5) $$y_h' = g_h(x, y_1, \dots, y_p),$$

essendo le g_h del tipo C, rispetto alla x, e il sistema (5) unitario in una sua soluzione $[v_h(x)]$, se, comunque si fissi x in (a, b), fuori di un certo insieme di misura nulla, le g_h sono funzioni non decrescenti di ciascuna delle rimanenti variabili, ed esistono p costanti $c_1, \dots, c_p$ interne, rispettivamente, agli intervalli $(a_1, b_1), \dots, (a_p, b_p)$, per le quali riesce, quasi ovunque in (a, h),

$$g_h(x, c_1, \dots, c_p) \geqq 0, \qquad (h = 1, \dots, p),$$

dalle relazioni iniziali

$$v_h(a) \geqq c_h, \qquad (h = 1, \dots, p),$$

si deducono le seguenti, in tutto (a, b),

$$v_h(x) \geqq c_h, \qquad (h = 1, \dots, p).$$

in R, *funzioni continue del punto* $(x, y_1, ..., y_p)$, *per* x *fuori di* N *e si verifichi una delle seguenti ipotesi:*

b') *essendo il sistema* (13) *unitario nella soluzione* $[v_h(x)]$, *comunque si fissino* x *in* (a, b), *fuori di* N, *e* y_h, *interno all'intervallo* (a_h, b_h), *la* $\psi_h (h = 1, ..., p)$ *è fuuzione non decrescente di ciascuna delle rimanenti variabili* $y_1, ..., y_{h-1}, y_{h+1}, ..., y_p$ *ed è*

$$\varphi_h(x, u_1(x), ..., u_p(x)) \leqq \psi_h(x, u_1(x), ..., u_p(x)), \qquad (h = 1, ..., p);$$

b'') *essendo il sistema* (12) *unitario nella soluzione* $[u_h(x)]$, *comunque si fissino* x *in* (a, b), *fuori di* N, *e* y_h *interno all'intervallo* (a_h, b_h), *la* $\varphi_h (h = 1, ..., p)$ *è funzione non decresente di ciascuna delle rimanenti variabili* $y_1, ..., y_{h-1}, y_{h+1}, y_p$, *ed è*

$$\varphi_h(x, v_1(x), ..., v_p(x)) \leqq \psi_h(x, v(x), ..., v_p(x)), \qquad (h = 1, ..., p);$$

allora dalle relazioni iniziali (7) *si deducono, in tutto* (a, b), *le* (8).

Ordinati i punti di N, distinti da a, secondo la successione crescente

$$x_1, x_2, ..., x_n, ...,$$

e dimostrate, con un certo ragionamento, le (8) per ogni punto interno all'intervallo (a, x_1), ne seguirà $u_h(x) \leqq v_h(x)$. Sostituito a con x_1, mediante lo stesso ragionamento si dimostreranno le (8) per ogni punto interno all'intervallo $(x_1 . x_2)$ e ne seguirà $u_h(x_2) \leqq v_h(x_2)$, ecc.. Tutto dunque si riduce a esporre il ragionamento che assicuri la validità delle (8) per ogni punto interno all'intervallo (a, x_1). Mettiamoci, per esempio, nell'ipotesi b') e supponiamo, dapprima, che si abbia

$$u_h(a) < v_h(a), \qquad (h = 1, ..., p),$$

e, per $a < x < x_1$,

$$\varphi_h(x, u_1(x), ..., u_p(x)) < \psi_h(x, u_1(x), ..., u_p(x)).$$

Dico che, allora, varranno le (9), per $a < x < x_1$. Ed invero, se ciò non avesse luogo, esisterebbero un punto ξ interno all'intervallo (a, x_1) ed un indice i per i quali si verificherebbero le (10), e quindi, detto c il valore comune di $u_i(\xi)$ e $v_i(\xi)$,

$$\begin{gathered}\psi_i(\xi, v_1(\xi), ..., v_p(\xi)) - \varphi_i(\xi, u_1(\xi), ..., u_p(\xi)) = \\ = \psi_i(\xi, ..., v_{i-1}(\xi), c, v_{i+1}(\xi), ...) - \varphi_i(\xi, ..., u_{i-1}(\xi), c, u_{i+1}(\xi), ...) \geqq \\ \geqq \psi_i(\xi, ..., u_{i-1}(\xi), c, u_{i+1}(\xi), ...) - \varphi_i(\xi, ..., u_{i-1}(\xi), c, u_{i+1}(\xi), ...) > 0.\end{gathered}$$

Ne segue, per la supposta continuità delle funzioni φ e ψ, l'esistenza di un punto α, interno all'intervallo (a, ξ) tale che, nell'intervallo (α, ξ), si ha sempre

$$\psi_i(x,\ v_1(x), \ldots,\ v_p(x)) - \varphi_i(x,\ u_1(x), \ldots,\ u_p(x)) > 0,$$

e pertanto

$$v_i(\xi) - u_i(\xi) =$$
$$= v_i(\alpha) - u_i(\alpha) + \int_\alpha^\xi [\psi_i(x,\ v_1(x), \ldots,\ v_p(x)) - \varphi_i(x,\ u_1(x), \ldots,\ u_p(x))]\omega_i(x)dx \geqq$$
$$\geqq v_i(\alpha) - u_i(\alpha) > 0,$$

onde l'assurdo. Sussistano ora le relazioni delle ipotesi del teorema. In trodotto un parametro λ, consideriamo il seguente sistema di equazioni differenziali e di condizioni iniziali

$$\text{(14)} \qquad \begin{cases} y_h' = [\psi_h(x,\ y_1, \ldots,\ y_p) + \lambda]\omega_h(x), \\ y_h(a) = v_h(a) + \lambda, \end{cases} \qquad (h = 1, \ldots,\ p).$$

Comunque si fissi un punto ξ, interno all'intervallo $(a,\ x_1)$, si può determinare un numero positivo σ tale che, per $|\lambda| < \sigma$, esiste una soluzione $[V_h(x,\ \lambda)]$, nel dominio rettangolare R_ξ, del sistema (14), essendo le $V_h(x,\ \lambda)$ funzioni continue del punto $(x,\ \lambda)$, in ogni punto $(x,\ 0)$, per x in $(a,\ \xi)$. Ma, per quanto abbiamo già dimostrato, si ha, in $(a,\ \xi)$,

$$V_h(x,\ \lambda) > v_h(x), \quad \text{per} \quad \lambda > 0, \qquad (h = 1, \ldots,\ p),$$

donde

$$v_h(x) = \lim_{\lambda \to 0} V_h(x,\ \lambda)(\text{per } \lambda > 0) \geqq u_h(x), \qquad (h = 1, \ldots,\ p)\ (^9).$$

Conviene esplicitamente enunciare il caso particolare per $p = 1$ del teorema ora dimostrato.

---

(9) In particolare, dal confronto dei due sistemi:

$$\text{(12}_0\text{)} \qquad y_h' = 0$$
$$\text{(13)} \qquad y_h' = \omega_h(x)\psi_h(x,\ y_1, \ldots,\ y_p)$$

essendo, rispetto alla x, le $\omega_h\psi_h$ del tipo C, le ψ_h generalmente continue, le $\omega_h(x)$ sommabili in $(a,\ b)$, ivi quasi ovunque non negative, il sistema (13) unitario in una sua soluzione $[v_h(x)]$, si deduce che: se, comunque si fissino x in $(a,\ b)$, fuori di un certo insieme N privo di derivato, e y_h nell'interno dell'intervallo $(a_h,\ b_h)$, la ψ_h $(h = 1, \ldots,\ p)$ è funzione non decrescente di ciascuna delle rimanenti variabili, ed esistono p costanti $c_1, \ldots,\ c_p$, rispettivamente interne agli intervalli $(a_1,\ b_1), \ldots,\ (a_p,\ b_p)$, per le quali riesce, fuori di N,

$$\psi_h(x,\ c_1, \ldots,\ c_p) \geqq 0, \qquad (h = 1, \ldots,\ p),$$

dalle relazioni iniziali

$$v_h(a) \geqq c_h,$$

si deducono le seguenti, in tutto $(a,\ b)$,

$$v_h(x) \geqq c_h.$$

IV. *Le funzioni*

$$f \equiv \omega(x)\varphi(x, y), \quad g \equiv \omega(x)\psi(x, y),$$

siano, rispetto alla x, *del tipo* C *nel dominio rettangolare* R[(a, a_1); (b, b_1)], *le* φ *e* ψ *generalmente continue, la* ω(x) *sommabile in* (a, b), *e ivi quasi ovunque non negativa,* u(x) *e* v(x) *soluzioni, in* R, *rispettivamente, delle due equazioni*

$$(15) \qquad y' = \omega(x)\varphi(x, y),$$
$$(16) \qquad y' = \omega(x)\psi(x, y).$$

Detto N *un insieme di punti di* (a, b), *privo di derivata, le* φ *e* ψ *siano in* R *funzioni continue del pnnto* (x, y), *per* x *fuori di* N, *e si verifichi una delle seguenti ipotesi:*

c') *essendo la* (16) *unitaria nella soluzione* v(x), *comunque si fissi* x *fuori di* N, *riesce*

$$\varphi(x, u(x)) \leqq \psi(x, u(x))\,;$$

c'') *essendo la* (15) *unitaria nella soluzione* u(x), *comunque si fissi* x *fuori di* N, *riesce*

$$\varphi(x, v(x)) \leqq \psi(x, v(x)),$$

allora, dalla relazione iniziale

$$u(a) \leqq v(a),$$

si deduce, in tutto (a, b), *la seguente*

$$u(x) \leqq v(x) \text{ (}^{10}\text{)}.$$

Il teor. II. fornisce, per le equazioni differenziali d'ordine p, $p \geqq 2$, il seguente che conviene enunciare.

V. *Le funzioni*

$$f(x, y_1, \dots, y_p), \quad g(x, y_1, \dots, y_p),$$

siano, rispetto alla x, *del tipo* C *nel dominio rettangolare* R, *le* u(x) *e* v(x), *soluzioni, in* R, *rispettivamente delle due equazioni*

$$(17) \qquad y^{(p)} = f(x, y, y', \dots, y^{(p-1)}),$$
$$(18) \qquad y^{(p)} = g(x, y, y', \dots, y^{(p-1)}).$$

Detto N *un insieme di punti di* (a, b), *di misura nulla, si verifichi una delle seguenti ipotesi:*

a') *essendo l'equazione* (18) *unitaria nella soluzione* v(x), *comunque si fissi* x *in* (a, b), *fuori di* N, *la* g *è funzione uon decrescente di ciascuna delle*

---

(10) Teoremi analoghi al nostro teor. IV, in questo non contenuti e questo non contenenti, trovansi anche in KAMKE [loc. cit. (6)], alle pp. 82 e 91.

rimanenti variabili, ed è

$$f(x, u(x), u'(x), \dots, u^{(p-1)}(x)) \leq g(x, u(x), u'(x), \dots, u^{(p-1)}(x));$$

a″) *essendo l'equazione* (17) *unitaria nella soluzione* u(x), *comunque si fissi* x *in* (a, b), *fuori di* N, *la* f *è funzione non decrescente di ciascuna delle rimanenti variabili, ed è*

$$f(x, v(x), v'(x), \dots, v^{(p-1)}(x)) \leq g(x, v(x), v'(x), \dots, v^{(p-1)}(x)),$$

allora dalle relazioni iniziali

$$u^{(k)}(a) \leq v^{(k)}(a), \qquad (k = 0, 1, \dots, p-1), \tag{19}$$

si deducono, in tutto (a, b), *le seguenti*

$$u^{(k)}(x) \leq v^{(k)}(x), \qquad (k = 0, 1, \dots, p-1). \tag{20}$$

Interessa pure enunciare il seguente teorema fornito dal teor. III.

VI. *Le funzioni*

$$f \equiv \omega(x)\varphi(x, y_1, \dots, y_p), \quad g \equiv \omega(x)\psi(x, y_1, \dots, y_p),$$

siano, rispetto alla x, *del tipo* C *nel dominio rettangolare* R, *le* φ *e* ψ *generalmente continue,* ω(x) *sommabile in* (a, b), *e ivi quasi ovunque non negativa, le* u(x) *e* v(x) *soluzioni, in* R, *rispettivamente delle due equazioni*

$$y^{(p)} = \omega(x)\varphi(x, y, y', \dots, y^{(p-1)}), \tag{21}$$
$$y^{(p)} = \omega(x)\psi(x, y, y', \dots, y^{(p-1)}). \tag{22}$$

Detto N *un insieme di punti di* (a, b), *privo di derivato, le* φ *e* ψ *siano, in* R, *funzioni continue del punto* ($\mathrm{x}, \mathrm{y}_1, \dots, \mathrm{y}_p$), *per* x *fuori di* N, *e si verifichi una delle seguenti ipotesi:*

b′) *essendo l'equazione* (22) *unitaria nella soluzione* v(x), *comunque si fissino* x *in* (a, b), *fuori di* N, *e* y_p *interno all'intervallo* ($\mathrm{a}_p, \mathrm{b}_p$), *le* ψ *è funzione non decrescente di ciascuna delle rimanenti variabili* $\mathrm{y}_1, \mathrm{y}_2, \dots, \mathrm{y}_{p-1}$, *ed è*

$$\varphi(x, u(x), u'(x), \dots, u^{(p-1)}(x)) \leq \psi(x, u(x), u'(x), \dots, u^{(p-1)}(x));$$

b″) *essendo l'equazione* (21) *unitaria nella soluzione* u(x), *comunque si fissino* x *in* (a, b), *fuori di* N, *e* y_p *interno all'intervallo* ($\mathrm{a}_p, \mathrm{b}_p$), *le* φ *è funzione non decrescente di ciascuna delle rimanenti variabili, ed è*

$$\varphi(x, v(x), v'(x), \dots, v^{(p-1)}(x)) \leq \psi(x, v(x), v'(x), \dots, v^{(p-1)}(x)),$$

allora dalle relazioni iniziali (19) *si deducono in tutto* (a, b), *le* (20) [11].

---

[11] Dnnque, in particolare, nelle ipotesi del teor. VI, dal confronto delle due equazioni:

$$y^{(p)} = 0$$
$$y^{(p)} = \omega(x)\psi(x, y, y', \dots, y^{(p-1)}),$$

2. Criteri sufficienti d'esistenza delle soluzioni per problemi d'integrazione di sistemi di equazioni differenziali lineari, con prescritte condizioni lineari. — Dal teorema osservato nella nota [9], per il sistema lineare

$$y_h' = \varphi_h(x) + \sum_{k=1}^{p} \varphi_{hk}(x) y_k, \qquad (h = 1, \ldots, p), \tag{23}$$

con le $\varphi_h(x)$ e $\varphi_{hk}(x)$ generalmente continue in (a, b) ed ivi sommabili, ponendovi $c_1 = \ldots = c_p = 0$, si trae che, se generalmente,

$$\varphi_h(x) \geqq 0, \quad \varphi_{hk}(x) \geqq 0, \qquad (h \neq k,\ h, k = 1, \ldots, p), \tag{24}$$

una soluzione $[y_h(x)]$ per la quale ogni $y_h(x)$ è non negativa in a tale si conserva in tutto (a, b), e si avrà per tanto

$$y_h'(x) \geqq \varphi_h(x) + \varphi_{hh}(x) y_h,$$

cioè, posto

$$y_h(a) = \alpha_h, \quad \psi_h = y_h' - \varphi_h - \varphi_{hh} y_h,$$

si avrà, in (a, b),

$$\psi_h(x) \geqq 0, \tag{25}$$

$$y_h = \left(\alpha_h + \int_a^x [\varphi_h(\xi) + \psi_h(\xi)] e^{-\int_a^\xi \varphi_{hh}(t) dt} d\xi \right) e^{\int_a^x \varphi_{hh}(\xi) d\xi},$$

---

si deduce che, esiste un polinomio $u(x)$ di grado $p-1$, per il quale si ha, in (a, b),

$$a_{1+k} < u^{(k)}(x) < b_{1+k}, \qquad (k = 0, 1, \ldots, p-1),$$

e fuori di N,

$$\psi(x, u(x), u'(x), \ldots, u^{(p-1)}(x)) \geqq 0,$$

dalle relazioni iniziali (19) seguono le (20). Si abbia, per esempio, l'equazione lineare

$$y^{(p)} = \psi(x) + \psi_0(x) y + \psi_1(x) y' + \ldots + \psi_{p-1}(x) y^{(p-1)},$$

con $\psi, \psi_0, \ldots, \psi_{p-1}$ generalmente continue in (a, b), ed ivi sommabili, e sia, del pari generalmente,

$$\psi_0(x) \geqq 0,\ \psi_1(x) \geqq 0, \ldots,\ \psi_{p-2}(x) \geqq 0,$$

$\psi_{p-1}(x)$ rimanendo non assoggettata ad alcuna condizione quantitativa, segue allora che, se, in (a, b) è generalmente

$$\psi(x) \geqq 0,$$

una soluzione dell'equazione non negativa in a, con tutte le sue prime $p-1$ derivate, si conserva tale in tutto (a, b): se, per una costante c, si ha generalmente

$$\psi(x) + c\psi_0(x) \geqq 0,$$

una soluzione dell'equazione in a non minore di c, le cui prime $p-1$ derivate sono in a non negative si conserva tale in tutto (a, b), ecc..

e quindi, con la limitazione, *con secondo membro noto,*

$$y_h(x) \geq \left(\alpha_h + \int_a^x \varphi_h(\xi) e^{-\int_a^\xi \varphi_{hh}(t)dt} d\xi\right) e^{\int_a^x \varphi_{hh}(\xi)d\xi},$$

la proposizione fondamentale:

VII. *Nelle ipotesi ammesse per il sistema* (23), *una sua soluzione* $[y_h(x)]$, *per la quale ogni* $y_h(x)$ *è non negativa in* a, *si conserva tale in tutto* (a, b). *Se, supposta* b *al finito, per un certo indice* i *riesce* $y_i(b) = 0$, *si ha* $y_i(x) \equiv 0$ *in tutto* (a, b) *e, in ogni punto di continuità delle* φ_i *e* φ_{ih},

$$(26) \qquad \varphi_i(x) = 0, \quad \varphi_{ih}(x) y_h(x) = 0, \qquad (h = 1, \ldots, p).$$

Supponiamo ora che, nelle dette ipotesi per il sistema (23), si abbia $y_j(a) > 0$ e, per un certo indice i,

$$y_i(a) = \alpha_i = 0, \quad \varphi_i(x) \equiv 0,$$

e ci domandiamo, supposto b al finito, quando si potrà affermare che è $y_i(b) > 0$? Si avrà sempre $y_i(b) \geq 0$, e se fosse $y_i(b) = 0$, si dedurrebbe $\varphi_{ij}(x) y_j(x) \equiv 0$ e quindi $\varphi_{ij}(x) \equiv 0$ donde se non è $\varphi_{ij}(x) \equiv 0$ dovrà risultare $y_i(b) > 0$. Sia $\varphi_{ij}(x) \equiv 0$ ed esista un indice l per cui non risulti $\varphi_{lj}(x) \equiv 0$ ed essendo b un punto di continuità di $\varphi_{il}(x)$, si abbia $\varphi_{il}(b) > 0$. Dico che sarà ancora $y_i(b) > 0$. Ed invero, se fosse $y_i(b) = 0$, dalle (26) si dedurrebbe $\varphi_{il}(b) y_l(b) = 0$, e quindi $y_l(b) \neq 0$, donde

$$\varphi_l(x) \equiv 0, \quad \varphi_{lh}(x) y_h(x) \equiv 0 \qquad (h = 1, \ldots, p),$$

e quindi $\varphi_{lj}(x) y_j(x) \equiv 0$, cioè l'assurdo $\varphi_{lj}(x) \equiv 0$. Si ha dunque il teorema:

VIII. *Nelle ipotesi ammesse per il sistema* (23), *per due certi indici* i *e* j *si abbia*

$$y_j(a) > 0, \quad y_i(a) = 0, \quad \varphi_i(x) \equiv 0,$$

supposto b *al finito, si avrà* $y_i(b) > 0$, *quando o* $\varphi_{ij}(x)$ *non è identicamente nulla in* (a, b), *oppure quando per un certo indice* $l \neq i$, *è* $\varphi_{lj}(x)$ *non identicamente nulla, ed essendo* b *un punto di continuità di* $\varphi_{il}(x)$ *si ha* $\varphi_{il}(b) > 0$.

I teoremi VII e VIII hanno notevoli corollari concernenti problemi di integrazione relativi ai sistemi lineari:

$$(27) \qquad y_h' = \gamma_h(x) + \sum_{k=1}^{p} \varphi_{hk}(x) y_k, \qquad (h = 1, \ldots, p),$$

essendo $\gamma_h(x)$ e $\varphi_{hk}(x)$ assegnate funzioni generalmente continue in (a, b) ed ivi sommabili, con prescritte ulteriori condizioni lineari per le funzioni $y_h(x)$, supposto, per semplificare, anche b al finito, e vogliamo dedicare il presente paragrafo a qualcuno di tali corollari, esaminando varii tipi di dette condizioni.

Si ha subito, anzitutto, il teorema:

IX. *Se si ha, in* (a, b),

$$\varphi_{hk}(x) \geqq 0, \qquad (h \neq k;\ h, k = 1, \dots, p),$$

ad ogni soluzione $[y_h(x)]$ *del sistema* (27) *si possono prescrivere ad arbitrio i valori in* a *di* p — 1 *delle funzioni* y_h *e della rimanente in* b (*in seguito* a *che la soluzione riesce determinata*).

Si prescrivano, invero, le condizioni terminali (lineari)

$$y_1(a) = \alpha_1,\ y_2(a) = \alpha_2, \dots,\ y_{p-1}(a) = \alpha_{p-1},\ y_p(b) = \beta,$$

e siano

$$[u_{1h}],\ [u_{2h}], \dots,\ [u_{ph}], \qquad (h = 1, \dots, p),$$

p soluzioni fondamentali per il sistema (27), ridotto omogeneo, avendosi

$$u_{ih}(a) \begin{cases} = 1, & \text{se } i = h, \\ = 0, & \text{se } i \neq h, \end{cases} \qquad (i, h = 1, \dots, p),$$

e $[Y_h]$ la soluzione del sistema (27) verificante le condizioni iniziali

$$Y_h(a) = 0, \qquad (h = 1, \dots, p).$$

La soluzione del sistema (27), determinata dalle condizioni iniziali

$$y_1(a) = \alpha_1,\ y_2(a) = \alpha_2, \dots,\ y_{p-1} = \alpha_{p-1},\ y_p(a) = \lambda,$$

è data da

$$(28) \qquad \begin{cases} y_1(x) = Y_1(x) + \sum\limits_{h=1}^{p-1} \alpha_h u_{h1}(x) + \lambda u_{p1}(x), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_p(x) = Y_p(x) + \sum\limits_{h=1}^{p-1} \alpha_h u_{hp}(x) + \lambda u_{pp}(x), \end{cases}$$

e occorre e basta dare a λ tale valore che si abbia $y_p(b) = \beta$, ciò che è evidentemente possibile, ed in un sol modo, poichè, in base al teor. VII, essendo $u_{pp}(a) = 1$, $u_{ph}(a) = 0$ $(h \leq p - 1)$, riesce certamente $u_{pp}(b) > 0$. Col cambiamento di variabile $x = a + b - \xi$, il teorema dimostrato fornisce il seguente:

IX'. *Se si ha, in* (a, b),

$$\varphi_{hk}(x) \leqq 0, \qquad (h \neq k;\ h, k = 1, \dots, p),$$

ad ogni soluzione $[y_h(x)]$ *del sistema* (27) *si possono prescrivere ad arbitrio i valori in* b *di* p — 1 *delle funzioni* y_h *e della rimanente in* a.

Per l'integrazione di un'unica equazione differenziale d'ordine p,

$$y^{(p)} = \gamma(x) + \varphi_0(x)y + \varphi_1(x)y' + \dots + \varphi_{p-1}(x)y^{(p-1)}, \tag{29}$$

se ne deduce [12]:

X. *Se termine noto e coefficienti dell'equazione* (29) *sono generalmente continui e sommabili in* (a, b), *e si ha ivi*

$$\varphi_k(x) \geqq 0 \ [(-1)^{p-k}\varphi_k(x) \geqq 0], \qquad (k = 0, 1, \dots, p-2),$$

ad ogni soluzione y(x) *dell'equazione si possono prescrivere ad arbitrio i valori in* a [*in* b] *di* p − 1 *delle funzioni* y, y',…, $y^{(p-1)}$ *e della rimanente in* b [*in* a] [13].

---

[12] Supposto $\varphi, \varphi_0, \dots, \varphi_{p-2}, \varphi_{p-1}$ generalmente continue in (a, b) ed ivi sommabili e $\varphi, \varphi_0, \dots, \varphi_{p-2}$ non negative la soluzione $y(x)$ dell'equazione

$$y^{(p)} = \varphi + \varphi_0 y + \varphi_1 y + \dots + \varphi_{p-2}y^{(p-2)} + \varphi_{p-1}y^{(p-1)},$$

verificante le condizioni iniziali

$$y^{(k)}(a) = \alpha_k \geqq 0 \qquad (h = 0, 1, \dots, p-1),$$

verifica, in (a, b) le limitazioni:

$$y^{(p-1)}(x) \geqq \left(\alpha_{p-1} + \int_a^x \varphi(s) e^{-\int_a^s \varphi_{p-1}(t)dt} ds\right) e^{\int_a^x \varphi_{p-1}(t)dt},$$

$$y^{(k)}(x) \geqq \alpha_k + \alpha_{k+1}(x-a) + \dots + \alpha_{p-2}\frac{(x-a)^{p-2-k}}{(p-2-k)!} +$$

$$+ \int_a^x \frac{(x-\xi)^{p-2-k}}{(p-2-k)!} \left(\alpha_{p-1} + \int_a^\xi \varphi(s) e^{-\int_a^\xi \varphi_{p-1}(t)dt} ds\right) e^{\int_a^\xi \varphi_{p-1}(t)dt} d\xi,$$

$$(h = 0, 1, \dots, p-2).$$

[13] Per l'equazione del second'ordine

$$y'' = \gamma + \varphi_0 y + \varphi_1 y',$$

si ha dunque che se $\varphi_0(x) \geqq 0$, nell'intervallo (a, b), ad una sua soluzione si possono prescrivere ad arbitrio, in uno degli estremi dell'intervallo, il valore di essa e nell'altro quello della derivata prima. Tale circostanza è da reputarsi nota, e, posto

$$\theta(x) = e^{-\int_a^x \varphi_1(\xi)d\xi},$$

si ricava dall'identità

$$\int_a^b \theta u'^2 dx + \int_a^b \theta\varphi_0 u^2 dx = 0,$$

alla quale soddisfa una soluzione dell'equazione, ridotta omogenea, che sia nulla in uno degli estremi dell'intervallo e abbia nell'altro nulla la derivata prima.

Il teorema VIII permette, in modo del pari immediato, di dimostrare anche il seguente:

XI. *Se per* $h \neq k$, *si ha* $\varphi_{hk}(x) \geq 0$ $[\varphi_{hk}(x) \leq 0]$ *e per due certi indici* i *e* j $(i \neq j)$ *il coefficiente* $\varphi_{ij}(x)$ *non è identicamente nullo, oppure, per un certo indice* $l \neq i$ *è* $\varphi_{lj}(x)$ *non identicamente nullo, ed essendo* b [*ed essendo* a] *un punto di continuità di* $\varphi_{il}(x)$, *si ha* $\varphi_{il}(b) > 0$ $[\varphi_{il}(a) < 0]$, *ad ogni soluzione* $[y_h]$ *del sistema* (27) *si possano assegnare ad arbitrio i valori in* a *e in* b *della funzione* y_i *e i valori in* a [*in* b] *delle funzioni* $y_1, y_2, \ldots, y_p$, *privata della* y_j.

Sia, per esempio, $i = 1$, $j = p$, e si assegnino le condizioni terminali

$$y_1(a) = \alpha, \quad y_1(b) = \beta,$$
$$y_2(a) = \alpha_2, \; y_3(a) = \alpha_3, \ldots, \; y_{p-1}(a) = \alpha_{p-1};$$

la soluzione $[y_h(x)]$ del sistema (27), le cui componenti sono date dalle (28), verifica tutte le condizioni in a, ed essa pertanto verificherà le prescritte condizioni terminali se (e sola se) si può determinare il parametro λ in guisa che si abbia

$$Y_1(b) + \sum_{k=1}^{p-1} \alpha_k u_{k1}(b) + \lambda u_{p1}(b) = \beta_1,$$

ciò che è evidentemente possibile, od in un sol modo, poichè in base al teor. VIII, essendo $u_{1p}(a) = 1$, $u_{1h}(a) = 0$ $(h \leq p-1)$, riesce, nelle ipotesi ammesso, $u_{p1}(b) > 0$.

Un'interpretazione immediata del teorema XI per l'equazione differenziale (29) non darebbe completezza di risultati e conviene, a questo scopo, esaminare direttamente su tale equazione il problema della determinazione di una sua soluzione alla quale si prescrivano in a e in b i valori di una delle funzioni $y, y', \ldots, y^{(p-1)}$ e, nell'ipotesi $\varphi_h(x) \geq 0$ in (a, b) $(h = 0, 1, \ldots, p-2)$ i valori in a delle rimanenti funzioni private di una. Dati due indici i e j, scelto fra $0, 1, \ldots, p-1$, diversi fra loro, si voglia costruire una soluzione della (29) soddisfacente le condizioni terminali

$$y^{(i)}(a) = \alpha_i, \quad y^{(i)}(b) = \beta,$$
$$y^{(k)}(a) = \alpha_k, \quad \text{per} \quad k \neq j.$$

Introdotto il sistema fondamentale $u_1, u_2, \ldots, u_p$, di soluzioni della (29) ridotta omogenea, verificanti le condizioni iniziali

$$u_h^{(k)}(a) \begin{cases} = 0, & \text{se} \quad k \neq h-1, \\ = 1, & \text{se} \quad k = h-1, \end{cases} \qquad (h = 1, \ldots, p, \; k = 0, 1, \ldots, p-1),$$

e la soluzione $Y(x)$ della (29), per la quale

$$Y^{(k)}(a) = 0, \qquad\qquad (h = 0, 1, \ldots, p-1),$$

ponendo

$$y = Y(x) + \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^{p-1} \alpha_k u_{1+k}(x) + \lambda u_{1+j}(x),$$

riescono, da tale soluzione della (29), comunque si assuma il parametro λ, soddisfatte le prescritte condizioni in a e volendo soddisfare quella in b occorre e basta di determinare λ in maniera che si abbia

$$Y^{(i)}(b) + \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^{p-1} \alpha_k u^{(i)}_{1+k}(b) + \lambda u^{(i)}_{1+j}(b) = \beta,$$

ciò che si potrà certo fare se risulta $u^{(i)}_{1+j}(b) \neq 0$. Sappiamo che $u^{(i)}_{1+j}(b) \geqq 0$ e che il segno $=$ può sussistere nel solo caso che si abbia $u^{(i)}_{1+j}(x) \equiv 0$ in (a, b). Se $i > j$ da tale identità segue che $u^{(j)}_{1+j}(x) \equiv 0$, in contraddizione con la $u^{(j)}_{1+j}(a) = 1$. Se $i > j$ dalla detta identità segue che $u_{1+j}(x)$ è un polinomio di grado $i - 1$, al più, e si ha quindi, date le condizioni iniziali,

$$u_{1+j}(x) = \frac{(x-a)^j}{j!},$$

e pertanto

$$\varphi_0(x) \frac{(x-a)^j}{j!} + \varphi_1(x) \frac{(x-a)^{j-1}}{(j-1)!} + \ldots + \varphi_j(x) \equiv 0,$$

donde, per essere $j \leqq p - 2$,

$$\varphi_0(x) \equiv \varphi_1(x) \equiv \ldots \equiv \varphi_j(x) \equiv 0.$$

Abbiamo dunque il notevole teorema:

XII. *Se è, in* (a, b), $\varphi_h(x) \geqq 0$ $[(-1)^{p-k}\varphi_k(x) \geqq 0]$, $(k = 0, 1, \ldots, p-1)$, *fissati due indici diversi* i e j, *scelti fra* $0, 1, \ldots, p-1$, *ad una soluzione della* (29) *si possano prescrivere ad arbitrio i valori in* a *e in* b *di* $y^{(i)}$ *e in* a [*in* b] *quelli delle funzioni* $y, y', \ldots, y^{(p-1)}$, *privata della* $y^{(j)}$, *se* $i < j$, *e, nell'altro caso, se non tutti i coefficienti* $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_j$ *sono identicamente nulli in* (a, b) (14).

---

(14) Per $i > j$ e per $\varphi_0 \equiv \varphi_1 \equiv \ldots \equiv \varphi_j \equiv 0$, il problema considerato possiede d'altronde l'autosoluzione $(x-a)^j$ e i dati sono legati dalla relazione

$$Y(b) + \sum_{\substack{h=0 \\ k \neq j}}^{p-1} \alpha_h u^{(i)}_{1+h}(b) = \beta.$$

Per l'equazione differenziale del 2° ordine

$$y'' = \gamma + \varphi_0 y + \varphi_1 y',$$

con $\varphi_0 \geqq 0$, si possono dunque, ad una sua soluzione, prescriverne ad arbitrio in a e in b

I risultati ottenuti forniscono teoremi d'esistenza solo in problemi per il sistema (27), con condizioni (lineari) terminali dalle quali in uno degli estremi dell'intervallo (a, b) viene prescritto il valore di una sola delle funzioni incognite, ma i teoremi VII e VIII possono condurre anche a teoremi d'esistenza nel caso che dalle dette condizioni vengano prescritti in entrambi gli estremi i valori a più di una delle funzioni incognite. Ed ecco come. Sia $p = r + s$, $r \geqq 2$, $s \geqq 2$, e le condizioni prescrivano (ciò che si può sempre supporre senza ledere le generalità) in a i valori delle funzioni

$$y_1, \; y_2, \ldots, \; y_r,$$

e, detto $i_1 i_2 \ldots i_s$ una fissata combinazione di classe s, priva di inversione, degli indici 1, 2,..., p [15], in b i valori delle funzioni

$$y_{i_1}, \; y_{i_2}, \ldots, \; y_{i_s},$$

e si abbia

(30) $$y_1(a) = \alpha_1, \; y_2(a) = \alpha_2, \ldots, \; y_r(a) = \alpha_r,$$

(31) $$y_{i_1}(b) = \beta_1, \; y_{i_2}(b) = \beta_2, \ldots, \; y_{i_s}(b) = \beta_s,$$

Introdotto il solito sistema fondamentale $[u_{1h}]$, $[u_{2h}]$,..., $[u_{ph}]$ di soluzioni del sistema (27), ridotto omogeneo, e la soluzione $[Y_h]$ del sistema (27), posto

$$y_h = Y_h(x) + \sum_{m=1}^{r} \alpha_m u_{mh}(x) + \sum_{n=1}^{s} \lambda_n u_{r+n,\,h}(x), \qquad (h = 1, \ldots, p),$$

da tale soluzione $[y_h]$ del sistema (27) verranno verificate, comunque si assumano i parametri $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$, le (30) e si potranno verificare anche le (31) allora e allora soltanto che riesca possibile la determinazione dei detti parametri in maniera da soddisfare le s equazioni lineari:

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{s} u_{r+n,\,i_1}(b)\lambda_n = \beta_1 - \sum_{m=1}^{r} \alpha_m u_{mi_1}(b) - Y_{i_1}(b),\\
&\sum_{n=1}^{s} u_{r+n,\,i_2}(b)\lambda_n + \beta_2 - \sum_{m=1}^{r} \alpha_m u_{mi_2}(b) - Y_{i_2}(b),\\
&\cdot\;\cdot\;\cdot\;,\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\\
&\sum_{n=1}^{s} u_{r+n,\,i_s}(b)\lambda_n = \beta_s - \sum_{m=1}^{r} \alpha_m u_{mi_s}(b) - Y_{i_s}(b),
\end{aligned}$$

---

i valori e. se $\varphi_0(x)$ non è identicamente nulla, quelli della derivata prima. Ciò è notissimo e lo fornisce anche l'identità ricordata nella nota [13]. Per l'equazione del 3° ordine

$$y''' = \gamma + \varphi_0 y + \varphi_1 y' + \varphi_2 y'',$$

con $\varphi_0 \geqq 0$, $\varphi_1 > 0$ $[\varphi_0 \leqq 0,\ \varphi_1 > 0]$, si possono, ad una sua soluzione, prescrivere ad arbitrio i valori in a e in b e in a [in b] di y' o di y'', oppure i valori in a e in b di y' e in a [in b] di y; se non è $\varphi_0 \equiv \varphi_1 \equiv 0$, i valeri in a e in b di y'' e in a [in b] di y; se non è $\varphi_0 \equiv 0$, i valori in a e in b di y' o di y'' e in a [in b], rispettivamente, di y'' o di y'.

[15] Nel seguito quando parleremo di una combinazione di determinati indici, intenderemo sempre che essa sia priva di inversioni.

ciò che avverrà certo se il determinante

$$V_{i_1 i_2 \ldots i_s}(x) = \begin{vmatrix} u_{r+1,\,i_1}(x) & u_{r+2,\,i_1}(x) & \ldots & u_{p i_1}(x) \\ u_{r+1,\,i_2}(x) & u_{r+2,\,i_2}(x) & \ldots & u_{p i_2}(x) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ u_{r+1,\,i_s}(x) & u_{r+2,\,i_s}(x) & \ldots & u_{p i_s}(x) \end{vmatrix},$$

risulta in b diverso da zero. Tale determinante è il minore della matrice di p righe e di s colonne

$$(32) \qquad \begin{Vmatrix} u_{r+1,\,1}(x) & u_{r+2,\,1}(x) & \ldots & u_{p1}(x) \\ u_{r+1,\,2}(x) & u_{r+2,\,2}(x) & \ldots & u_{p2}(x) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ u_{r+1,\,p}(x) & u_{r+2,\,p}(x) & \ldots & u_{pp}(x) \end{Vmatrix},$$

formato dalle stesse colonne e dalle righe i_1^{ma}, $i_2^{ma}, \ldots, i_s^{ma}$. Detta $\nu_1 \nu_2 \ldots \nu_s$ una variabile combinazione di classe s degli indici $1, 2, \ldots, p$, consideriamo i $\binom{p}{s}$ determinanti minori $V_{\nu_1 \nu_2 \ldots \nu_s}(x)$ della matrice (32) formati dalle s colonne della matrice e dalle righe ν_1^{ma}, $\nu_2^{ma}, \ldots, \nu_s^{ma}$. È subito visto che tali funzioni verificano un sistema di equazioni differenziali lineari omogenee del tipo:

$$\frac{d}{dx} V_{\nu_1 \nu_2 \ldots \nu_s} = (\varphi_{\nu_1 \nu_1} + \varphi_{\nu_2 \nu_2} + \ldots + \varphi_{\nu_s \nu_s}) V_{\nu_1 \nu_2 \ldots \nu_s} + \sum_{\nu_1' \nu_2' \ldots \nu_s'} \varepsilon_{hk} \varphi_{hk} V_{\nu_1' \nu_2' \ldots \nu_s'},$$

ove gli indici h e k sono determinate funzioni (di valore diverso)

$$h = h(\nu_1 \nu_2 \ldots \nu_s,\ \nu_1' \nu_2' \ldots \nu_s'), \quad k = k(\nu_1 \nu_2 \ldots \nu_s,\ \nu_1' \nu_2' \ldots \nu_s'),$$

dalle combinazioni distinte $\nu_1 \nu_2 \ldots \nu_s$, $\nu_1' \nu_2' \ldots \nu_s'$, la sommatoria essendo estesa a tutte le combinazioni $\nu_1' \nu_2' \ldots \nu_s'$ diverse dalla $\nu_1 \nu_2 \ldots \nu_s$, ed essendo ε_{hk} una quantità che prende soltanto i valori -1, 0, 1. Poichè

$$V_{\nu_1 \nu_2 \ldots \nu_s}(a) \begin{cases} = 0, & \text{se } \nu_1 \nu_2 \ldots \nu_s \neq (r+1)(r+2) \ldots p, \\ = 1, & \text{se } \nu_1 \nu_2 \ldots \nu_s = (r+1)(r+2) \ldots p, \end{cases}$$

i teoremi VII e VIII consentono di enunciare il seguente:

XIII. *Se, comunque si assumano le combinazioni* $\nu_1 \nu_2 \ldots \nu_s$, $\nu_1' \nu_2' \ldots \nu_s'$, *degli indici* 1, 2,..., p, *si ha, in* (a, b),

$$\varepsilon_{hk} \varphi_{hk}(x) \geqq 0,$$

ad ogni soluzione del sistema (27) *si possono prescrivere ad arbitrio in* a *i* *valori di* r *fra le funzioni componenti e in* b *delle rimanenti* $s = p - r$ ([16]). *Nella stessa ipotesi, comunque si fissino due combinazioni* $i_1 i_2 \ldots i_r$, $j_1 j_2 \ldots j_s$, *aventi elementi comuni, dètta* $\mu_1 \mu_2 \ldots \mu_s$ *la complementare della prima, se il coefficiente*

$$\varepsilon_{hk}\varphi_{hk}(x), \quad \text{per} \quad \nu_1\nu_2 \ldots \nu_s = j_1 j_2 \ldots j_s \quad \text{e} \quad \nu_1'\nu_2' \ldots \nu_s' = \mu_1\mu_2 \ldots \mu_s,$$

non è identicamente nullo, oppure, indicando con $l_1 l_2 \ldots l_s$ *una certa combinazione diversa dalla* $j_1 j_2 \ldots j_s$, *il coefficiente*

$$\varepsilon_{hk}\varphi_{hk}(x), \quad \text{per} \quad \nu_1\nu_2 \ldots \nu_s = l_1 l_2 \ldots l_s \quad \text{e} \quad \nu_1'\nu_2' \ldots \nu_s' = \mu_1\mu_2 \ldots \mu_s,$$

non è identicamente nullo, essendo

$$\varepsilon_{hk}\varphi_{hk}(b) > 0, \quad \text{per} \quad \nu_1\nu_2 \ldots \nu_s = j_1 j_2 \ldots j_s \quad \text{e} \quad \nu_1'\nu_2' \ldots \nu_s' = l_1 l_2 \ldots l_s,$$

supposto b *un punto di continuità per tale funzione, ad ogni soluzione del sistema* (27) *si possono prescrivere ad arbitrio i valori in* a *delle componenti* $y_{i_1}, y_{i_2}, \ldots, y_{i_r}$ *e in* b *delle* $y_{j_1}, y_{j_2}, \ldots, y_{j_s}$.

Se, per esempio, si fa applicazione del teorema ora dato, nel caso $r = s = 2$, si ha il seguente:

XIII'. *Dato il sistema di quattro equazioni differenziali*

$$(27_4) \qquad y_h' = \gamma_h + \varphi_{h1}y_1 + \varphi_{h2}y_2 + \varphi_{h3}y_3 + \varphi_{h4}y_4, \qquad (h = 1, \ldots, 4),$$

nelle quattro funzioni incognite y_1, y_2, y_3, y_4, *se, per una certa permutazione* $i_1 i_2 i_3 i_4$ *degli indici* 1, 2, 3, 4 *si ha, in* (a, b),

$$\varphi_{i_1 i_2}(x) \equiv \varphi_{i_2 i_1}(x) \equiv \varphi_{i_3 i_4}(x) \equiv \varphi_{i_4 i_3}(x) \equiv 0$$

e dei rimanenti elementi, non appartenti alla diagonale principale, del determinante

$$\begin{vmatrix} \varphi_{11} & \cdots & \varphi_{14} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \varphi_{41} & \cdots & \varphi_{44} \end{vmatrix}$$

due coniugati risultano, in (a, b), *non positivi e i rimanenti non negativi, ad ogni soluzione del sistema si possono prescrivere ad arbitrio i valori in* a *di due qualsivogliano componenti e in* b *quelli delle rimanenti.*

Dette, invero, $[u_h]$ e $[v_h]$ due soluzioni del sistema (27_4), ridotto omogeneo,

---

([16]) È ben ovvio, ma è bene notare, che ciò è anche possibile se, con un'opportuno ordinamento delle equazioni del sistema assegnato, nella matrice $\| \varphi_{hk} \|$ dei coefficienti risultano identicamente nulli tutti gli elementi situati da una medesima parte di una delle diagonali.

e posto, per ogni combinazione $\nu_1\nu_2$ degli indici 1, 2, 3, 4,

$$V_{\nu_1\nu_2} = \begin{vmatrix} u_{\nu_1} & v_{\nu_1} \\ u_{\nu_2} & v_{\nu_2} \end{vmatrix},$$

si trova che le sei funzioni $V_{\nu_1\nu_2}$ verificano il seguente sistema omogeneo di equazioni differenziali:

$$(33)\qquad \begin{cases} V_{12}' = (\varphi_{11} + \varphi_{22})V_{12} - \varphi_{13}V_{23} - \varphi_{14}V_{24} + \varphi_{23}V_{13} + \varphi_{24}V_{14}, \\ V_{13}' = (\varphi_{11} + \varphi_{33})V_{13} + \varphi_{12}V_{23} - \varphi_{14}V_{34} + \varphi_{32}V_{12} + \varphi_{34}V_{14}, \\ V_{14}' = (\varphi_{11} + \varphi_{44})V_{14} + \varphi_{12}V_{24} + \varphi_{13}V_{34} + \varphi_{42}V_{12} + \varphi_{43}V_{13}, \\ V_{23}' = (\varphi_{22} + \varphi_{33})V_{23} + \varphi_{21}V_{13} - \varphi_{24}V_{34} - \varphi_{31}V_{12} + \varphi_{34}V_{24}, \\ V_{24}' = (\varphi_{22} + \varphi_{44})V_{24} + \varphi_{21}V_{14} + \varphi_{23}V_{34} - \varphi_{41}V_{12} + \varphi_{43}V_{23}, \\ V_{34}' = (\varphi_{33} + \varphi_{44})V_{34} + \varphi_{31}V_{14} + \varphi_{32}V_{24} - \varphi_{41}V_{13} - \varphi_{42}V_{23}, \end{cases}$$

Ora, nelle ipotesi del teorema, se, come sempre si può ottenere a mezzo di un eventuale cambiamento di notazioni, si ha

$$(34)\qquad \varphi_{13} \equiv \varphi_{31} \equiv \varphi_{24} \equiv \varphi_{42} \equiv 0,$$

$$(35)\qquad \begin{cases} \varphi_{14} \leqq 0, \quad \varphi_{41} \leqq 0, \\ \varphi_{12} \geqq 0, \quad \varphi_{21} \geqq 0, \quad \varphi_{23} \geqq 0, \quad \varphi_{32} \geqq 0, \quad \varphi_{34} \geqq 0, \quad \varphi_{43} \geqq 0, \end{cases}$$

al sistema (33) si applica il teor. VII e pertanto, se si pone, ad esempio,

$$u_3(a) = 1, \quad u_1(a) = u_2(a) = u_4(a) = 0,$$
$$v_4(a) = 1, \quad v_1(a) = v_2(a) = v_3(a) = 0,$$

risulta $V_{34}(x) > 0$ in tutto (a, b), e si può quindi, ad una soluzione del sistema (27_4), prescrivere ad arbitrio i valori in a di y_1 e y_2 e in b di y_3 e y_4.

Verificandosi le (34) il sistema (27_4) assume la forma particolare:

$$(27_4')\qquad \begin{cases} y_1' = \gamma_1 + \varphi_{11}y_1 + \varphi_{12}y_2 + \varphi_{14}y_4, & \text{(manca } y_3\text{)} \\ y_2' = \gamma_2 + \varphi_{21}y_1 + \varphi_{22}y_2 + \varphi_{23}y_3, & \text{(manca } y_4\text{)} \\ y_3' = \gamma_3 + \varphi_{32}y_2 + \varphi_{33}y_3 + \varphi_{34}y_4, & \text{(manca } y_1\text{)} \\ y_4' = \gamma_4 + \varphi_{41}y_1 + \varphi_{43}y_3 + \varphi_{44}y_4, & \text{(manca } y_2\text{)} \end{cases}$$

e per un tale sistema usufruendo del teor. VIII applicato al sistema (33), vogliamo esaminare inoltre la possibilità di assegnare i valori in a e in b di una medesima delle funzioni y_h, cioè, se, ad esempio, si assegnano in a i valori di y_1 e di y_2, la possibilità di dare in b i valori di y_2 e y_3 o di y_2 e y_4 o di y_1 e y_3 o di y_1 e y_4 o, infine, di y_1 e y_2. Tale possibilità sussiste se, rispettivamente, riesce $V_{23}(b) > 0$ o $V_{24}(b)$ o $V_{13}(b) > 0$ o $V_{14}(b) > 0$ o, infine, $V_{12}(b) > 0$. Pertanto, poichè $V_{34}(a) > 0$, conformemente al teor. VIII applicato al sistema (33), nelle ipotesi che si verifichino le (34) e (35), si ha, per esempio, che:

XIII''. *Se* φ_{23} *non è identicamente nulla in* (a, b), *ad una soluzione del sistema* $(27_4')$ *si possono prescrivere ad arbitrio i valori in* a *e in* b *di* y_2, *in* a *di* y_1 *e in* b *di* y_4. *Se* b *è punto di continuità di* φ_{21} *ed é* $\varphi_{21}(b) > 0$ *e* φ_{14} *non identicamente nulla, oppure* b *è punto di continuità di* φ_{34} *ed è* $\varphi_{34}(b) > 0$ *e* φ_{23} *non identicamente nulla, si possono prescrivere ad arbitrio i valori in* a *e in* b *di* y_2, *in* a *di* y_1 *e in* b *di* y_3. *Se* b *è punto di continuità di* φ_{14} *ed è* $\varphi_{14}(b) < 0$ *e* φ_{23} *non identicamente nulla, oppure* b *è punto di continuità di* φ_{23} *ed è* $\varphi_{23}(b) > 0$ *e* φ_{14} *non identicamente nulla, si possono prescrivere ad arbitrio i valori in* a *e in* b *di* y_1 *e di* y_2 [17].

Con la solita posizione $y_{1+k} = y^{(k)}$ $(k = 0, 1, 2, 3)$, l'equazione differenziale del quart' ordine

$$y^{\mathrm{IV}} = \gamma + \varphi_0 y + \varphi_1 y' + \varphi_2 y'' + \varphi_3 y'''$$

si traduce, quando sia $\varphi_1 \equiv 0$, nel sistema, del tipo $(27_4')$,

$$(27_4'') \qquad \begin{cases} y_1' = y_2, \\ y_2' = y_3, \\ y_3' = y_4, \\ y_4' = \gamma + \varphi_0 y_1 + \varphi_2 y_3 + \varphi_3 y_4, \end{cases}$$

che verificherà le ipotesi del teor. XIII' quando sia, in (a, b), $\varphi_0 \leqq 0$ e $\varphi_2 \geqq 0$, onde segue che ad una soluzione dell'equazione del 4° ordine

$$(29_4) \qquad y^{\mathrm{IV}} = \gamma(x) + \varphi_0(x) y + \varphi_2(x) y'' + \varphi_3(x) y''',$$

nell'ipotesi che sia in (a, b)

$$(36) \qquad \varphi_0(x) \leqq 0, \quad \varphi_2(x) \geqq 0,$$

si possono prescrivere ad arbitrio, in a, i valori di due delle funzioni y, y', y'', y''' e, in b, i valori delle rimanenti.

Al sistema $(27_4'')$, nell'ipotesi che valgano le (36), si applicano anche le due prime proposizioni del teor. XIII'' e si ha dunque che, in tale ipotesi, ad una soluzione della (29_4) si possono prescrivere ad arbitrio in a e in b i valori di y', in a di y e in b di y''' oppure di y''. Non è però applicabile la terza proposizione di detto teorema e non si può dunque decidere per tale

[17] Se le φ_{14} e φ_{23} fossero identicamente nulle, le prime due equazioni del sistema $(27_4')$ verrebbero a legare fra loro esclusivamente y_1 e y_2 e pertanto i soli valori in a (o in b) di y_1 e di y_2 basterebbero a determinare tali funzioni.

via della possibilità di prescrivere ad una soluzione della (29_4) i valori in a e in b di y e di y'. Per esaminare tale circostanza e tutte quelle che possono presentarsi nel tipo di questioni che stiamo trattando per l'equazione (29_4), occorre disimpegnarci dalle notazioni testè adottate ed osservare che per due soluzioni u e v dell'equazione ridotta omogenea, posto

$$u_{1+k} = a^{(k)}, \quad v_{1+k} = v^{(k)}, \qquad (k = 0, 1, 2, 3),$$

e definiti, come sopra, i determinanti $V_{\nu_1\nu_2}$, tali funzioni verificano il sistema

$$(33') \qquad \begin{cases} V_{12}' = V_{13}, \\ V_{13}' = V_{23} + V_{14}, \\ V_{14}' = \varphi_3 V_{14} + V_{24} + \varphi_2 V_{13}, \\ V_{23}' = V_{24}, \\ V_{24}' = \varphi_3 V_{24} + V_{34} - \varphi_0 V_{12} + \varphi_2 V_{23}, \\ V_{34}' = \varphi_3 V_{34} - \varphi_0 V_{12}, \end{cases}$$

che si ricava da (33) ponendovi $\varphi_{12} \equiv \varphi_{23} \equiv \varphi_{34} \equiv 1$, $\varphi_{41} = \varphi_0$, $\varphi_{43} = \varphi_2$, $\varphi_{44} = \varphi_3$, e identicamente nulli tutti gli altri coefficienti. Se sono soddisfatte le (36) a tale sistema si applica il primitivo teorema VII al quale ci basterà fare ricorso. Detto $h_1 h_2$ e $k_1 k_2$ due combinazioni degli indici 0, 1, 2, 3, detta $i_1 i_2$ la combinazione complementare di $h_1 h_2$, volendo decidere se, ad una soluzione della (29_4), si possono prescrivere in a i valori di

$$y^{(h_1)} \quad \text{e} \quad y^{(h_2)}$$

e in b quelli di

$$y^{(k_1)} \quad \text{e} \quad y^{(k_2)},$$

basterà vedere se, assunta per u quella soluzione della (29_4) ridotta omogenea che ha in a la derivata i_1^{ma} di valore *uno* e tutte le altre nulle e per v quella soluzione che ha in a la derivata i_2^{ma} di valore *uno* e tutte le altre nulle, riesce

$$(37) \qquad V_{(1+k_1)(1+k_2)}(b) > 0.$$

Ora, si ha

$$V_{\nu_1\nu_2}(a) \begin{cases} = 0, & \text{se } \nu_1\nu_2 \neq (1+i_1)(1+i_2), \\ = 1, & \text{se } \nu_1\nu_2 = (1+i_1)(1+i_2), \end{cases}$$

e pertanto, in base al teor. VII, si può affermare che, in (a, b), riescirà $V_{\nu_1\nu_2}(x) \geqq 0$, per ogni combinazione $\nu_1\nu_2$ e quindi anche $V_{(1+k_1)(1+k_2)}(b) \geqq 0$, e $V_{(1+k_1)(1+k_2)}(b) = 0$, solo quando sia $V_{(1+k_1)(1+k_2)}(x) \equiv 0$, e $V_{(1+i_1)(1+i_2)}(x) > 0$. Da ciò, data la particolare forma del sistema (33') è possibile, nelle sole ipotesi (36), o dedurre che si verifica la (37), o dare criterii sufficienti perchè tale diseguaglianza sussista.

Si voglia, per esempio, decidere se si possono prescrivere in a e in b i valori di y e di y'. Si ha $h_1 = k_1 = 0$, $h_2 = k_2 = 1$, $i_1 = 2$, $i_2 = 3$, $V_{34}(x) > 0$, e bisogna vedere se $V_{12}(b) > 0$. Dalla 5ª della (33') si deduce che, per $x > a$, $V_{24}(x) > 0$, dalla 4ª che $V_{23}(x) > 0$, dalla 2ª che $V_{13}(x) > 0$, e infine, dalla 1ª che $V_{12}(x) > 0$, onde $V_{12}(b) > 0$.

Si voglia decidere se si possono prescrivere in a e in b i valori di y'', in a il valore di y' e in b quello di y'''. Si ha $h_1 = 1$, $h_2 = 2$, $k_1 = 2$, $k_3 = 3$, $i_1 = 0$, $i_2 = 3$, $V_{14}(x) > 0$ e bisogna vedere se $V_{34}(b) > 0$. Dalla 2ª delle (33') si deduce che, per $x > a$, $V_{13}(x) > 0$, dalla 1ª che $V_{12}(x) > 0$, e dall' ultima che $V_{34}(b) > 0$ se $\varphi_0(x)$ non è identicamente nulla in (a, b).

Si vogliano prescrivere in a e in b i valori di y e di y'''. Si ha $h_1 = k_1 = 0$, $h_2 = k_2 = 3$, $i_1 = 1$, $i_2 = 2$, $V_{23}(x) > 0$ e bisogna vedere se $V_{14}(b) > 0$. Dalla 2ª delle (33') si deduce che, per $x > a$, $V_{13}(x) > 0$ e dalla 3ª che $V_{14}(b) > 0$ se non è $\varphi_2(x) \equiv 0$. Sia $\varphi_2(x) \equiv 0$, dalla 1ª delle (33') si deduce che, per $x > a$, $V_{12}(x) > 0$, dalla 3ª che da $V_{14}(b) = 0$, segue $V_{24}(x) \equiv 0$ e dalla 5ª che $\varphi_0(x) \equiv 0$. Si ha dunque $V_{14}(b) > 0$, se non è $\varphi_0(x) \equiv \varphi_2(x) \equiv 0$, ecc..

L' esame di tutti i possibili casi conduce al seguente comprensivo notevole teorema:

XIV. *Data l' equazione differenziale lineare del 4° ordine* (29_4), *nell' ipotesi che in* (a, b) *siano verificate le* (36), *ad una sua soluzione si possono prescrivere ad arbitrio, in* a, *i valori di una coppia di funzioni scelte fra le* y, y', y'', y''' *e, in* b, *i valori della stessa o di un' altra coppia, nei seguenti casi:*

quando non esiste un polinomio di secondo grado, non identicamente nullo, per il quale le stesse coppie assumano in a *e in* b *valori nulli,*

quando, esistendo un tale polinomio, e non ne esistendo uno di primo, non è in (a, b), $\varphi_0(x) \equiv \varphi_2(x) \equiv 0$ (*se* $\varphi_0(x) \equiv \varphi_2(x) \equiv 0$, *il detto polinomio è autosoluzione del problema*).

quando, esistendo un polinomio di grado non superiore al primo, non identicamente nullo, per il quale le dette coppie assumono in a *e in* b *valori nulli, non è in* (a, b), $\varphi_0(x) \equiv 0$ (*se* $\varphi_0(x) \equiv 0$ *il detto polinomio è autosoluzione del problema*).

Ritornando al sistema (27), i problemi da noi finora esaminati per la sua integrazione rientrano tutti come caso particolare nel seguente: Sono assegnati i sistemi di costanti

$$\begin{aligned} &a_{h1},\ a_{h2}, \dots,\ a_{hp}, && (h = 1, 2, \dots, r), \\ &b_{h1},\ b_{h2}, \dots,\ b_{hp}, && (h = 1, 2, \dots, s), \\ &c_{h1},\ c_{h2}, \dots,\ c_{hp}, && (h = 1, 2, \dots, q), \end{aligned}$$

ed è $r+s+2q=p$, si suol costruire una soluzione $[y_h]$ del sistema che verifichi le p condizioni lineari

$$
(37) \qquad \left\{ \begin{array}{lr}
\sum_{k=1}^{p} a_{hk} y_k(a) = \alpha_k & (h = 1, 2, \dots, r), \\
\sum_{k=1}^{p} b_{hk} y_k(b) = \beta_k & (h = 1, 2, \dots, s), \\
\sum_{k=1}^{p} c_{hk} y_k(a) = \alpha_h', \quad \sum_{k=1}^{p} c_{hk} y_k(b) = \beta_h', & (h = 1, 2, \dots, q).
\end{array} \right.
$$

Posto

$$
\begin{gathered}
t_{hk} = a_{hk}, \quad \text{per} \quad h = 1, 2, \dots, r, \quad k = 1, 2, \dots, p, \\
t_{r+h,\, k} = b_{hk}, \quad \text{per} \quad h = 1, 2, \dots, s, \quad k = 1, 2, \dots, p, \\
t_{r+s+h,\, k} = c_{hk}, \quad \text{per} \quad h = 1, 2, \dots, q, \quad k = 1, 2, \dots, p, \\
t_{r+s+q+h,\, k} \left\{ \begin{array}{l} = 0, \quad \text{per} \quad k = r+s+q+h, \\ = 1, \quad \text{per} \quad k = r+s+q+h, \end{array} \right. \quad h = 1, 2, \dots, q, \ k = 1, 2, \dots, p,
\end{gathered}
$$

si può, senza ledere la generalità, supporre che il determinante

$$
\left| \begin{array}{ccc} t_{11} & \dots & t_{1p} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ t_{p1} & \dots & t_{pp} \end{array} \right|
$$

sia diverso da zero, e allora effettuare nel problema il cambiamento delle funzioni incognite y_h nelle η_h a quelle legate dalle relazioni invertibili

$$
\eta_h = \sum_{k=1}^{p} t_{hk} y_k, \qquad (h = 1, \dots, p);
$$

per il sistema

$$
\eta_h' = \gamma_h^* + \sum_{k=1}^{p} \varphi_{hk}^* \eta_k, \qquad (h = 1, \dots, p),
$$

che ne risulta, si ha il problema, già considerato, di costruirne una soluzione verificante le condizioni

$$
\begin{array}{ll}
\eta_h(a) = \alpha_h, \quad (h = 1, \dots, r), & \eta_{r+h}(b) = \beta_h, \quad (h = 1, \dots, s), \\
\eta_{r+s+h}(a) = \alpha_h', \quad \eta_{r+s+h}(b) = \beta_h', & (h = 1, \dots, q).
\end{array}
$$

Così, per esempio, *per l'integrazione dell'equazione del second'ordine*

$$
(29_2) \qquad y'' = \gamma + \varphi_0 y + \varphi_1 y',
$$

con le condizioni

$$
\begin{aligned}
a_1 y(a) + a_2 y'(a) &= \alpha, \\
b_1 y(b) + b_2 y'(b) &= \beta,
\end{aligned}
$$

si trova che se $a_1 b_2 - a_1 b_2 \neq 0$, *il problema ha sempre una (ed una sola) so-*

luzione quando sia, in (a, b),

$$(a_1 b_2 - a_2 b_1)(a_2^2 \varphi_0(x) - a_1 a_2 \varphi_1(x) - a_1^2) \leqq 0,$$
$$(a_1 b_2 - a_2 b_1)(b_2^2 \varphi_0(x) - b_1 b_2 \varphi_1(x) - b_1^2) \geqq 0;$$

con le condizioni

$$c_1 y(a) + c_2 y'(a) = \alpha,$$
$$c_1 y(b) + c_2 y'(b) = \beta,$$

si trova che, se $c_1 \neq 0$, *il problema ha sempre una (ed una sola) soluzione quando sia*

$$c_1 \varphi_0(x) \geqq 0, \quad c_1(c_2^2 \varphi_0(x) - c_1 c_2 \varphi_1(x) - c_1^2) \leqq 0,$$

e non entrambe tali funzioni identicamente nulle (se queste funzioni fossero entrambe identicamente nulle, il problema avrebbe l'autosoluzione $e^{-(c_1/c_2)x}$).

Non vi è neppure difficoltà a stabilire, in base alla presente teoria, criterii sufficienti d'esistenza per le soluzioni di problemi d'integrazione, riguardanti il sistema (27), nei quali oltre a condizioni del tipo delle (37), comparissero condizioni del seguente tipo integrale

$$\sum_{k=1}^{p} \left(A_{hk} y_k(a) + B_{hk} y_k(b) + \int_a^b \psi_{hk}(x) y_k(x) dx \right) = \rho_k, \qquad (h = 1, \dots, \varkappa),$$

il cui numero $\varkappa$ sommato a quella $r + s + 2q$ delle condizioni (37), dia un risultato eguale a p, supposte A_{hk} e B_{hk} costanti e $\psi_{hk}(x)$ funzioni generalmente continue e sommabili in (a, b).

Aggregate invero alle y_h le $\varkappa$ funzioni incognite

$$\eta_h(x) = \sum_{k=1}^{p} \left(A_{hk} y_k(a) + B_{hk} y_k(x) + \int_a^x \psi_{hk}(\xi) y_k(\xi) d\xi \right),$$

il problema equivale al seguente, di tipo già considerato: l'integrazione del sistema di $p + \varkappa$ equazioni, nelle $p + \varkappa$ incognite $y_1, \dots, y_p, \eta_1, \dots, \eta_\varkappa$,

$$\begin{cases} y_h' = \gamma_h + \sum_{k=1}^{p} \varphi_{hk} y_k, & (h = 1, \dots, p), \\ \eta_h' = \sum_{k=1}^{p} \left(\psi_{hk} + \sum_{i=1}^{p} B_{hi} \varphi_{ik}(x) \right) y_k, & (h = 1, \dots, \varkappa), \end{cases}$$

con le $p + \varkappa$ condizioni che si ottengono aggiungendo alla $r + s + 2q$ del tipo (37) le $2\varkappa$ seguenti

$$\eta_h(a) - \sum_{k=1}^{p} (A_{hk} + B_{hk}) y_k(a) = 0, \quad \eta_h(b) = \rho_h, \qquad (h = 1, \dots, \varkappa).$$

Così, per esempio, *per l'integrazione dell'equazione* (29_3) *con le condizioni integrali*

$$\int_a^b \psi(x)y(x)dx = \rho, \qquad \int_a^b \psi_1(x)y'(x)dx = \rho_1,$$

si trova, utilizzando il teor. XIII$''$, *che il problema ha sempre una (ed una sola soluzione) quando sia, in* (a, b), $\varphi_0(x) \geqq 0$ *e* $\psi(x)$, $\psi_1(x)$ *di comune segno costante, quando non sono nulle, e nessuna di esse identicamente nulla.*

Non possiamo, neppure in questo scritto, rinunziare ad un'osservazione con la quale porremo fine al presente paragrafo. I criterii sufficienti d'esistenza, che, in applicazione immediata della teoria svolta, possono ottenersi coi procedimenti indicati, impongono, come abbiamo visto negli esempi trattati, forti restrizioni ai coefficienti delle equazioni del sistema da integrare, laddove, fissati comunque questi coefficienti, e assegnato a taluni di essi un fattore, da assumersi come parametro, si sa bene che i problemi lineari del tipo considerato hanno sempre soluzioni, all'infuori, eventualmente, per una certa successione di valori del parametro (*autovalori*). Ma gli è che, nelle applicazioni anche le più semplici, non si è affatto in grado di decidere se un dato valore del parametro sia o no autovalore, onde l'utilità dei criterii stabiliti, i quali, per altro, possono, col procedimento che andiamo ad osservare, molto aumentare il loro campo d'azione, fino a comprendere, come io presumo, tutti i casi nei quali sia possibile conseguire, teoremi che valgano in generale.

Ricordiamo che, dato il problema di integrare il sistema (27) con le condizioni del tipo considerato, esso possiede soluzione, comunque si assegnino i termini noti, allora e allora soltanto che il sistema omogeneo

$$(27_0) \qquad y_h' = \sum_{k=1}^{p} \varphi_{hk} y_k, \qquad (h = 1, \dots, p),$$

non possiede che la soluzione nulla verificante le stesse condizioni ridotte omogenee. Assunte, comunque, le p^2 funzioni $\omega_{hk}(x)$ $(h, k = 1, \dots, p)$, assolutamente continue in (a, b) ed ivi dotate di derivate prime generalmente continue, con determinante

$$(38) \qquad \begin{vmatrix} \omega_{11} & \dots & \omega_{1p} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \omega_{p1} & \dots & \omega_{pp} \end{vmatrix}$$

sempre non nulle in (a, b), operiamo il cambiamento delle funzioni incognite y_h nelle η_h, a quelle legate dalle relazioni

$$y_h = \sum_{i=1}^{p} \omega_{hi}\eta_i \qquad (h = 1, \dots, p);$$

detto Ω_{hk} il complemento algebrico di ω_{hk} nel determinante (38). diviso per il determinante stesso, il sistema (27_0) si traduce nel seguente

$$\eta_i' = \sum_{j=1}^{p} \left(\sum_{h,k}^{1,p} \varphi_{hk}\Omega_{hi}\omega_{kj} \quad \sum_{h=1}^{p} \Omega_{hi}\omega'_{hj} \right)\eta_j \equiv \sum_{j=1}^{p} \varphi^*_{ij}\eta_j$$

e le condizioni lineari omogenee imposte alle y_h in altrettante imposte alle η_i, dello stesso tipo. Se è possibile una scelta delle funzioni ω_{hk} in maniera che il sistema trasformato non abbia che la soluzione nulla verificante le condizioni trasformate, si potrà dire che il sistema primitivo non ha, pur esso, che la soluzione nulla verificante le condizioni primitive. E avremo perciò conseguito nuovi criterii sufficienti d'esistenza per le soluzioni di problemi relativi al sistema (27), se daremo criterii atti ad assicurare la possibilità di scegliere le funzioni $\omega_{hk}(x)$ in maniera che il sistema omogeneo e le condizioni omogenee nelle η_i presentino le particolarità imposte dai criterii sufficienti, di nullità della soluzione, derivanti dall'applicazione immediata della teoria svolta [18].

Si abbia, per esempio, λ essendo un parametro, il sistema e le condizioni, in due funzioni incognito y_1 e y_2:

$$(39) \qquad \begin{cases} y_1' = \varphi_{11}y_1 + \lambda\varphi_{12}y_2, \\ y_2' = \lambda\varphi_{21}y_1 + \varphi_{22}y_2, \\ y_1(a) = y_2(b) = 0. \end{cases}$$

Si operi la trasformazione

$$y_1 = p\eta_1 + u\eta_2,$$
$$y_2 = v\eta_1 + q\eta_2,$$

con p e q costanti positivi e u e v funzioni della x, essendo

$$u(a) = v(b) = 0,$$
$$pq - u(x)v(x) > 0, \quad \text{in} \quad (a, b).$$

---

(18) Indipendentemente da tale teoria si ha, cfr. nota (16), che l'unica soluzione del sistema (27_0) della quale le componenti $y_1, \dots, y_r$ sono nulle in a e le rimanenti in b, è la soluzione nulla, tutte le volte che si possono assumere le $\omega_{hk}(x)$ in maniera che nella matrice $\|\varphi^*_{hk}\|$ dei coefficienti del sistema trasformato risultino identicamente nulli in (a, b) tutti gli elementi situati da una medesima parte di una delle diagonali e si abbia

$$\omega_{hk}(a) = 0, \quad \text{per} \quad h \neq k \qquad (h = 1, \dots, r;\ k = 1, \dots, p),$$
$$\omega_{hk}(b) = 0, \quad \text{per} \quad h \neq k \qquad (h = r+1, \dots, p;\ k = 1, \dots, p).$$

Si ha

$$\eta_1' = \varphi_{11}^*\eta_1 + \varphi_{12}^*\eta_2,$$
$$\eta_2' = \varphi_{21}^*\eta_1 + \varphi_{22}^*\eta_2,$$
$$\eta_1(a) = \eta_2(b) = 0,$$
$$(pq - uv)\varphi_{12}^* = (\varphi_{11} - \varphi_{22})qu + \lambda\varphi_{12}q^2 - \lambda\varphi_{21}u^2 - qu',$$
$$(pq - uv)\varphi_{21}^* = (\varphi_{22} - \varphi_{11})pv + \lambda\varphi_{21}p^2 - \lambda\varphi_{12}v^2 - pv',$$

onde, in base ai teoremi IX e IX', che le (39) hanno l'unica soluzione nulla se è possibile determinare le costanti positive p e q e le funzioni $u(x)$ nulla in a e $v(x)$, nulla in b, assolutamente continue in (a, b) e con derivate prime generalmente continue, in modo che in (a, b) si abbia

$$|u(x)| < p, \quad |v(x)| < q,$$

$$u' = \lambda q(P + \varphi_{12}) + (\varphi_{11} - \varphi_{22})u - \lambda \frac{\varphi_{21}}{q} u^2,$$

$$v' = \lambda p(Q + \varphi_{21}) + (\varphi_{22} - \varphi_{11})v - \lambda \frac{\varphi_{12}}{p} v^2,$$

con $P(x)$ e $Q(x)$ arbitrarie funzioni, di comune segno costante in (a, b), quando non sono nulle, ivi generalmente continue e sommabili. Ora, data l'equazione differenziale di RICCATI

$$u' = \lambda\alpha + \beta u + \lambda\gamma u^2,$$

coi coefficienti α, β, γ, sommabili in (a, b), si trova [19] che essa possiede una soluzione u, assolutamente continua nell'intervallo (a, b), nulla in a, se il parametro λ è così limitato

$$|\lambda| < \frac{1}{2}\left(\int_a^b |\alpha| e^{-\int_a^x \beta d\xi} dx \cdot \int_a^b |\gamma| e^{\int_a^x \beta d\xi} dx\right)^{-\frac{1}{2}}$$

valendo allora per la $u(x)$ la maggiorazione

$$|u(x)| \leqq \left(\frac{\int_a^b |\alpha| e^{-\int_a^x \beta d\xi} dx}{\int_a^b |\gamma| e^{\int_a^x \beta d\xi} dx}\right)^{\frac{1}{2}} e^{\int_a^x \beta d\xi},$$

(19) Cfr. PICONE, *Nuova analisi esistenziale e quantitativa delle soluzioni dei sistemi di equazioni differenziali ordinarie* [« Annali della R. Scuola Normale Superiore di Pisa », vol. X (1941)].

e si perviene dunque al notevole risultato: *Comunque si scelgano le funzioni* P *e* Q *di comune segno costante in* (a, b), *quando non sono nulle, le equazioni* (39) *hanno l'unica soluzione nulla se il parametro* λ *è così limitato*:

$$|\lambda| \begin{cases} < \dfrac{1}{2}\left(\displaystyle\int_a^b |P + \varphi_{12}| e^{\int_a^x (\varphi_{22}-\varphi_{11}) d\xi} dx \cdot \int_a^b |\varphi_{21}| e^{\int_a^x (\varphi_{11}-\varphi_{22}) d\xi} dx \right)^{-\frac{1}{2}}, \\[2ex] < \dfrac{1}{2}\left(\displaystyle\int_a^b |Q + \varphi_{21}| e^{\int_a^a (\varphi_{11}-\varphi_{22}) d\xi} dx \cdot \int_x^b |\varphi_{12}| e^{\int_a^x (\varphi_{22}-\varphi_{11}) d\xi} dx \right)^{-\frac{1}{2}}, \end{cases}$$

e quindi in particolare, le equazioni

$$y'' = \lambda^2 \varphi_0 y + \varphi_1 y',$$
$$y(a) = y'(b) = 0,$$

hanno l'unica soluzione nulla se il parametro λ *è così limitato:*

$$\lambda^2 \begin{cases} < \dfrac{1}{4}\left(\displaystyle\int_a^b |1 + P| e^{\int_a^x \varphi_1 d\xi} dx \cdot \int_a^b |\varphi_0| e^{-\int_a^x \varphi_1 d\xi} dx \right)^{-1}, \\[2ex] < \dfrac{1}{4}\left(\displaystyle\int_a^b |\varphi_0 + Q| e^{-\int_a^x \varphi_1 d\xi} dx \cdot \int_a^b e^{\int_a^x \varphi_1 d\xi} dx \right)^{-1}, \end{cases}$$

e pertanto, quando $\varphi_0(x) \leqq 0$ *in* (a, b), *se*

$$\lambda^2 < \frac{1}{4}\left(\int_a^b e^{\int_a^x \varphi_1 d\xi} dx \cdot \int_a^b |\varphi_0| e^{-\int_a^x \varphi_1 d\xi} dx \right)^{-1}.$$

Altro esempio, date le equazioni

$$(40) \qquad \begin{cases} y^{\mathrm{IV}} = \varphi_0 y + \varphi_1 y' + \varphi_2 y'' + \varphi_3 y''', \\ y(a) = y'(a) = y''(a) = 0, \quad y(b) = 0, \end{cases}$$

si ponga, con $\omega(x) > 0$ in (a, b),

$$y = \omega \eta,$$

si avranno per η le equazioni

$$\eta^{\mathrm{IV}} = \varphi_0^* \eta + \varphi_1^* \eta' + \varphi_2^* \eta'' + \varphi_3^* \eta''',$$
$$\eta(a) = \eta'(a) = \eta''(a) = 0, \quad \eta(b) = 0,$$

con

$$\begin{aligned}
\omega\varphi_0^* &= \varphi_0\omega + \varphi_1\omega' + \varphi_2\omega'' + \varphi_3\omega''' - \omega^{IV},\\
\omega\varphi_1^* &= \varphi_1\omega + 2\varphi_2\omega' + 3\varphi_3\omega'' - 4\omega''',\\
\omega\varphi_2^* &= \varphi_2\omega + 3\varphi_3\omega' - 6\omega'',\\
\omega\varphi_3^* &= \varphi_3\omega - 4\omega',
\end{aligned}$$

onde, in base al teor. XII si ha che: *Le equazioni* (40) *possiedono l'unica soluzione nulla se esiste una funzione* ω *positiva in* (a, b), *con derivata terza assolutamente continua e quarta generalmente continua, per la quale, in* (a, b), *riesca*

$$\begin{aligned}
&\varphi_0\omega + \varphi_1\omega' + \varphi_2\omega'' + \varphi_3\omega''' - \omega^{IV} \geqq 0,\\
&\varphi_1\omega + 2\varphi_2\omega' + 3\varphi_3\omega'' - 4\omega''' \geqq 0,\\
&\varphi_2\omega + 3\varphi_3\omega' - 6\omega'' \geqq 0,
\end{aligned}$$

in particolare, posto $\omega = e^{\alpha x}$, *se esiste una costante* α *per la quale riesca*

$$\begin{aligned}
&\varphi_0 + \alpha\varphi_1 + \alpha^2\varphi_2 + \alpha^3\varphi_3 - \alpha^4 \geqq 0,\\
&\varphi_1 + 2\alpha\varphi_2 + 3\alpha^2\varphi_3 - 4\alpha^3 \geqq 0,\\
&\varphi_3 + 3\alpha\varphi_3 - 6\alpha^2 \geqq 0.
\end{aligned}$$

Così, data ancora l'equazione differenziale (40) con le condizioni

$$y(a) = y'(a) = 0, \quad y(b) = y'(b) = 0,$$

si trova, in base al teor. XIV, che: *Tali equazioni possiedono l'unica soluzione nulla se esiste una funzione* ω *sempre positiva in* (a, b), *con derivata terza assolutamente continua e quarta generalmente continua, per la quale, in* (a, b), *riesca*

$$\begin{aligned}
&\varphi_0\omega + \varphi_1\omega' + \varphi_2\omega'' + \varphi_3\omega''' - \omega^{IV} \leqq 0,\\
&\varphi_1\omega + 2\varphi_2\omega' + 3\varphi_3\omega'' - 4\omega''' = 0,\\
&\varphi_2\omega + 3\varphi_3\omega' - 6\omega'' \geqq 0,
\end{aligned}$$

e quindi, in particolare, comunque risultino la costante α *e le funzioni* F(x) *e* P(x), *generalmente continue e sommabili in* (a, b), P(x) *essendovi non negativa, se si può porre*:

$$\begin{aligned}
\varphi_3 &= F,\\
\varphi_2 &= P + 6\alpha^2 - 3\alpha F,\\
\varphi_1 &= -8\alpha^3 + 2\alpha^2 F - 2P\alpha,
\end{aligned}$$

soddisfacendo φ_0 *la limitazione*

$$\varphi_0 \leqq 3\alpha^4 - F\alpha^3 + P\alpha^2.$$

L'osservazione generale fatta può dare frutti cospicui anche da un altro punto di vista, consentendo essa, come andiamo ad indicare, una generalizzazione dei teoremi fondamentali VII e VIII. Una soluzione $[y_h]$ del sistema omogeneo (27_0) sarà detta *normale* se tutte le sue componenti hanno nel punto iniziale a valori *zero*, meno una che ha valore *uno*. La trasformazione $y_h = \Sigma\, \omega_{hk}\eta_k$ trasforma soluzioni normali del sistema (27_0) in soluzioni normali del sistema trasformato se la matrice della trasformazione è unitaria nel punto iniziale. Ciò posto si può enunciare il teorema:

XV. *Se è possibile determinare gli elementi* $\omega_{hk}(x)$ *della matrice della trasformazione* $y_h = \Sigma\, \omega_{hk}\eta_k$, *in maniera che la matrice sia unitaria in* a *e diagonale in* b, *e le funzioni*

$$\varphi^*_{hk} = \sum_{\mu,\nu}^{1,p} \varphi_{\mu\nu}\Omega_{\mu h}\omega_{\nu k} - \sum_{\mu=1}^{p} \Omega_{\mu h}\omega'_{\mu k}, \quad \text{per} \quad h \neq k, \qquad (h, k = 1,\dots, p),$$

siano non negative in (a, b), *la componente* j^{ma} *di una soluzione normale del sistema* (27_0) *che sia diversa da zero in* a *è tale anche in* b, *la componente* i^{ma} $(i \neq j)$ *sarà pur essa diversa da zero in* b *se* $\varphi_{ij}^*(x)$ *non è identicamente nulla, oppure se per un certo indice* $l \neq i$ *è* $\varphi_{lj}^*(x)$ *non identicamente nulla ed essendo* b *un punto di continuità di* $\varphi_{il}^*(x)$ *si ha* $\varphi_{il}^*(b) > 0$.

L'applicazione di tale teorema sarà presumibilmente utile per un perfezionamento, nei singoli casi particolari, del teor. XIII, secondo il quale l'ipotesi $\varepsilon_{hh}\varphi_{hk}(x) \geqq 0$ in (a, b), porta all'identico annullamento di molti coefficienti φ_{hk}.

3. **Teoremi di confronto con condizioni terminali.** — Facile conseguenza del teor. V è questo:

XVI. *Supposto l'intervallo* (a, b) *finito, le funzioni*

$$f(x, y_1, y_2), \quad g(x, y_1, y_2),$$

verifichino le ipotesi del teor. V, *per* $p = 2$, *e le* u(x) *e* v(x) *siano soluzioni, in* R, *rispettivamente delle due equazioni differenziali del second'ordine:*

$$y'' = f(x, y, y'),$$
$$y'' = g(x, y, y'),$$

allora, dalle relazioni terminali

$$u(a) \geqq v(a), \quad u(b) \geqq v(b), \tag{41}$$

si deduce, in tutto (a, b),

$$u(x) \geqq v(x). \tag{42}$$

e se

$$u(b) > v(b), \tag{43}$$

si ha

$$u(x) > v(x), \quad \text{per} \quad a < x \leqq b. \tag{44}$$

Ed invero, se per un punto ξ di (a, b) risultasse

$$v(\xi) > u(\xi), \tag{45}$$

esisterebbero dei punti x_1 e x_2 di (a, b) per i quali si avrebbe

$$x_1 < \xi < x_2,$$
$$u(x_1) = v(x_1), \quad u(x_2) = v(x_2),$$

e, detto x_0 l'estremo superiore dei numeri x_1, si avrebbe

$$x_0 < \xi,$$
$$u(x_0) = v(x_0), \quad u'(x_0) \leqq v'(x_0),$$

donde, per il teor. V,

$$v'(x) - u'(x) \geqq 0, \quad \text{per} \quad x \geqq x_0 .$$

Ma

$$\int_{x_0}^{x_2} (v'(x) - u'(x))dx = [v(x_2) - u(x_2)] - [v(x_0) - u(x_0)] = 0,$$

e quindi $v'(x) - u'(x) \equiv 0$ in (x, x_2), e pertanto $v(\xi) = u(\xi)$, in contradizione con la (45). Dimostrata così la (42), se, essendo $u(b) > v(b)$, per un certo punto interno ad (a, b), risultasse $v(\xi) = u(\xi)$, ivi si avrebbe anche $v'(\xi) = u'(\xi)$, e quindi, di nuovo in base al teor. V, $v(x) \geqq u(x)$, per $x \geqq \xi$, donde $v(b) \geqq u(b)$, il che è assurdo.

Dal teor. VI si deduce il seguente:

XVII. *Supposto l'intervallo* (a, b) *finito, le funzioni* $\omega(x)$, $\varphi(x, y_1, y_2)$, $\psi(x, y_1, y_2)$ *verifichino le ipotesi del teor.* VI, *per* $p = 2$, *e le* $u(y)$ *e* $v(x)$ *siano soluzioni, in* R, *rispettivamente delle equazioni differenziali del second'ordine*

$$y'' = \omega(x)\varphi(x, y, y'),$$
$$y'' = \omega(x)\psi(x, y, y'),$$

allora dalle relazioni terminali (41) *si deduce, in tutto* (a, b), *la* (42), *e, dalle* (41) *e* (43), *la* (44) [20].

Se $\omega(x) \equiv 1$, *ed essendo l'insieme* N, *al più, costituito dai punti* a *e* b, *per ogni punto interno all'intervallo* (a, b), *vale sempre una delle seguenti*

---

[20] In questo teorema è contenuto, come particolarissimo caso, quello a cui ho fatto cenno nelle prime righe del presente scritto, mentre ciò non si può dire per i teoremi di confronto dati dalla Dott. Ida Groppi nella nota: *A proposito di alcuni criteri di confronto per le equazioni differenziali del second'ordine.* [« Bollettino dell'Unione matematica italiana », Anno XVII (1938-XVI)], pp. 179-182.

diseguaglianze

$$\varphi(x,\ u(x),\ u'(x)) < \psi(x,\ u(x),\ u'(x)),$$
$$\varphi(x,\ v(x),\ v'(x)) < \psi(x,\ v(x),\ v'(x)),$$

dalle relazioni terminali (23) *si deduce*

$$u(x) > v(x), \quad \text{per} \quad a < x < b.$$

Dimostrata la prima parte del teorema, ciò che si ottiene con ragionamento identico a quello seguito per dimostrare il teor. XVI, se, nell'ipotesi della seconda parte, per un punto ξ interno ad (a, b) risultasse $v(\xi) = u(\xi)$, ivi si avrebbe $v'(\xi) = u'(\xi)$, e quindi

$$\begin{aligned} v''(\xi) - u''(\xi) &= \psi(\xi,\ u(\xi).\ u'(\xi)) - \varphi(\xi,\ u(\xi),\ u'(\xi)),\\ &= \psi(\xi,\ v(\xi),\ v'(\xi)) - \psi(\xi,\ v(\xi),\ v'(\xi)),\end{aligned}$$

onde $v''(\xi) - u''(\xi) > 0$, e pertanto $v(x) > u(x)$ in un intorno destro di ξ, il che è assurdo ([21]).

([21]) Dunque, in particolare, se la funzione $\psi(x,\ y_1,\ y_2)$ è, rispetto alla x, del tipo C e generalmente continua nel dominio rettangolare $R[(a,\ a_1,\ a_2);\ (b.\ b_1,\ b_2)]$, e, comunque si fissino x in (a, b). fuori di un certo insieme N privo di derivato, e y_2 nell'interno di (a_2, b_2), funzione non decrescente di y_1, dal confronto delle due equazioni

$$\begin{aligned} y'' &= 0,\\ y'' &= \omega(x)\psi(x,\ y,\ y'),\end{aligned}$$

sì ricava ché: se la seconda è unitaria nella sua soluzione $v(x)$, in R, ed esistono due costanti c_1 e c_2, per le quali si ha. in (a, b),

$$a_1 < c_1\frac{b-x}{b-a} + c_2\frac{x-a}{b-a} < b_1, \quad a_2 < \frac{c_2 - c_1}{b-a} < b_2,$$

e generalmente

$$\psi\left(x,\ c_1\frac{b-x}{b-a} + c_2\frac{x-a}{b-a},\ \ \frac{c_2 - c_1}{b-a}\right) \geqq 0,$$

allora dalle relazioni terminali

$$(\alpha) \qquad v(a) \leqq c_1, \quad v(b) \leq c_2,$$

segue, in tutto (a, b),

$$(\beta) \qquad v(x) \leqq c_1\frac{b-x}{b-a} + c_2\frac{x-a}{b-a}.$$

Se, per esempio, assegnata l'equazione lineare

$$y'' = \psi(x) + \psi_0(x)y + \psi_1(x)y',$$

con ψ, ψ_0, ψ_1 generalmente continue in (a, b), e ivi sommabili, si ha. in (a, b), generalmente,

$$\begin{gathered}\psi_0(x) \geqq 0,\\ (b-a)\psi(x) + [c_1(b-x) + c_2(x-a)]\psi_0(x) + (c_2 - c_1)\psi_1(x) \geqq 0,\end{gathered}$$

per ogni soluzione $v(x)$ dell'equazione, verificante le relazioni terminali (α), si ha la limitazione (β). Si ritrova così un ben noto risultato della teoria delle equazioni differenziali lineari del second'ordine, di solito enunciato per $c_1 = c_2 = 0$.

4. Teoremi d'esistenza per le soluzioni dei sistemi di equazioni differenziali ordinarie, dipendenti da un parametro, in grande nel parametro. — Dal teor. I di Caratheodory e dai teoremi II e III si deduce facilmente il seguente:

XVIII. *Nel dominio rettangolare di punti estremi inferiore* $(\mathrm{a}, \mathrm{a}_1, \ldots, \mathrm{a}_p, \lambda')$ *e superiore* $(\mathrm{b}, \mathrm{b}_1, \ldots, \mathrm{b}_p, \lambda'')$, *dello spazio* $(\mathrm{x}, \mathrm{y}_1, \ldots, \mathrm{y}_p, \lambda)$, *le funzioni*

$$\alpha_h(\lambda), \quad f_h(x, y_1, \ldots, y_p, \lambda), \qquad (h = 1, \ldots, p),$$

siano di tipo C, *rispetto alla* x, *e, avendosi*

$$a_h < \alpha_h(\lambda) < b_h, \qquad (h = 1, \ldots, p, \ \lambda' < \lambda < \lambda''),$$

e supposto l'intervallo (a, b) *finito, per due valori* λ_1 *e* λ_2 *di* λ, *interni all'intervallo* (λ', λ''), *con* $\lambda_1 < \lambda_2$, *le* $[\mathrm{u}_h(\mathrm{x})]$ *e* $[\mathrm{v}_h(\mathrm{x})]$ *siano soluzioni, nel dominio rettangolare* $\mathrm{R}[(\mathrm{a}, \mathrm{a}_1, \ldots, \mathrm{a}_p), (\mathrm{b}, \mathrm{b}_1, \ldots, \mathrm{b}_p)]$, *dei sistemi di equazioni differenziali e di condizioni iniziali che si ottengono dal sistema*

$$\left\{ \begin{array}{l} y_h' = f_h(x, y_1, \ldots, y_p, \lambda), \\ y_h(a) = \alpha_h(\lambda), \end{array} \right. \qquad (h = 1, \ldots, p), \tag{46}$$

ponendovi, rispettivamente, $\lambda = \lambda_1$ *e* $\lambda = \lambda_2$, *il sistema di equazioni differenziali conservandosi unitario, in* R, *per ogni valore di* λ *nell'intervallo (chiuso)* (λ_1, λ_2). *In ciascuna delle seguenti ipotesi:*

d') *mantenendo* λ *nell'intervallo* (λ_1, λ_2), *comunque si fissi* x *in* (a, b), *fuori di un certo insieme di misura nulla, le* f_h *e* α_h *sono funzioni non decrescenti delle rimanenti variabili;*

d'') *è*

$$f_h \equiv \omega_h(x)\varphi_h(x, y_1, \ldots, y_p, \lambda), \qquad (h = 1, \ldots, p),$$

con $\omega_h(\mathrm{x})$ *sommabile in* (a, b), *ivi quasi ovunque non negative,* φ_h *generalmente continua, rispetto alla* x, *e, mantenendo* λ *nell'intervallo* (λ_1, λ_2), *comunque si fissino* x *in* (a, b), *fuori di un certo insieme privo di derivate, e* y_h *nell'interno dell'intervallo* $(\mathrm{a}_h, \mathrm{b}_h)$, *le* φ_h *e* α_h *sono funzioni non decrescenti di ciascuna delle rimanenti variabili,*

si può costruire un intervallo $(\lambda_1', \lambda_2'')$, *al quale l'intervallo* (λ_1, λ_2) *è interno, contenuto nell'intervallo* (λ', λ'') *e, per* λ *in* $(\lambda_1', \lambda_2'')$ *e* x *in* (a, b), *definire una soluzione* $[\mathrm{y}_h(\mathrm{x}, \lambda)]$, *in* R, *del sistema* (46). *Per* λ *in* (λ_1, λ_2) *le* $\mathrm{y}_h(\mathrm{x}, \lambda)$ *sono funzioni continue del punto* (x, λ), *per ogni fissata* x *non decrescente in* λ, *e verificano le limitazioni*

$$u_h(x) \leq y_h(x, \lambda) \leq v_h(x), \qquad (h = 1, \ldots, p). \tag{47}$$

Ci limiteremo a dimostrare il teorema nell'ipotesi d'), nella quale, dunque, si può fissare, in (a, b), un insieme N, di misura nulla, tale che per ogni punto x di (a, b), fuori di esso, le f_h siano funzioni continue del punto $(y_1, y_2, \ldots, y_p, \lambda)$, non decrescenti in ciascuna delle variabili $y_1, y_2, \ldots, y_p, \lambda$, e si ha:

$$|f_h(x, y_1, \ldots, y_p, \lambda)| \leqq F(x),$$

con $F(x)$ sommabile in (a, b). Indicheremo con I l'insieme di punti che si ottiene dall'intervallo (a, b) privandolo dei punti di N. Poichè, per x in I,

$$f_h(x, u_1(x), \ldots, u_p(x), \lambda_1) \leqq f_h(x, u_1(x), \ldots, u_p(x), \lambda_2),$$
$$\alpha_h(\lambda_1) \leqq \alpha_h(\lambda_2),$$

possiamo, intanto, in base al teor. II, asserire che, in (a, b),

$$u_h(x) \leqq v_h(x).$$

In virtù del teor. I si può costruire un intorno $(\lambda_1 - \sigma', \lambda_1 + \sigma'')$ del punto λ_1 e, per x in $)a, b)$ e λ in tale intorno, definire una soluzione $[y_h(x, \lambda)]$, in R, del sistema (46). Per x in I e per ogni valore λ dell'intorno destro $(\lambda_1, \lambda_1 + \sigma'')$ di λ_1, che non superi λ_2, si ha:

$$f_h(x, u_1(x), \ldots, u_p(x), \lambda_1) \leqq f_h(x, u_1(x), \ldots, u_p(x), \lambda),$$
$$f_h(x, y_1(x, \lambda), \ldots, y_p(x, \lambda), \lambda) \leqq f_h(x, y_1(x, \lambda), \ldots, y_p(x, \lambda), \lambda_2),$$

e quindi, in (a, b),

$$u_h(x) \leqq y_h(x, \lambda) \leqq v_h(x), \quad \left(\text{per} \quad \lambda_1 \leqq \lambda \begin{smallmatrix} < \lambda_1 + \sigma'' \\ \leqq \lambda_2 \end{smallmatrix}, \quad h = 1, \ldots, p\right).$$

Esistono dunque dei valori μ dell'intervallo (λ_1, λ_2), maggiori di λ_1, tali che per ogni λ dell'intervallo (chiuso) (λ_1, μ) si può definire una soluzione $[y_h(x, \lambda)]$, in R, del sistema (46), verificante le limitazioni (47). Detto μ_0 l'estremo superiore dell'insieme numerico descritta da tali μ, sarà $\mu_0 \leqq \lambda_2$, e il teorema può ritenersi completamente dimostrato se faremo vedere che, precisamente, riesce $\mu_0 = \lambda_2$. Costruiremo, a tale scopo, una successione crescente $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n, \ldots$, di valori di μ avente per limite μ_0. Per x in I si ha:

$$f_h(x, y_1(x, \mu_n), \ldots, y_p(x, \mu_n), \mu_n) \leqq f_h(x, y_1(x, \mu_n), \ldots, y_p(x, \mu_n), \mu_{n+1}),$$
$$f_h(x, u_1(x), \ldots, u_p(x), \lambda_1) \leqq f_h(x, u_1(x), \ldots, u_p(x), \mu_n),$$
$$f_h(x, y_1(x, \mu_n), \ldots, y_p(x, \mu_n), \mu_n) \leqq f_h(x, y_1(x, \mu_n), \ldots, y_p(x, \mu_n), \lambda_2),$$

e quindi, per x in (a, b),

$$u_h(x) \leqq y_h(x, \mu_n) \leqq y_h(x, \mu_{n+1}) \leqq v_h(x).$$

Esiste, pertanto, per ogni x in (a, b), il limite

$$\lim_{n \to \infty} y_h(x, \mu_n),$$

e, indicandolo con $y_h^{\,0}(x)$, si ha

$$a_h < u_h(x) \leqq y_h^{\,0}(x) \leqq v_h(x) < b_h.$$

Per ogni x in I si ha

$$\lim_{n\to\infty} f_h(x, y_1(x, \mu_n), \dots, y_p(x, \mu_n), \mu_n) = f_h(x, y_1^0(x), \dots, y_p^0(x), \mu_0)$$
$$|f_h(x, y_1(x, \mu_n), \dots, y_p(x, \mu_n), \mu_n)| \leqq F(x),$$

donde la sommabilità in (a, b), della funzione

$$f_h(x, y_1^0(x), \dots, y_k^0(x), \mu_0),$$

laddove, per essere $\lim \alpha_h(\mu_n)$ (per $n\to\infty$) $= \alpha_h(\mu_0)$, dall'equazione

$$y_h(x, \mu_n) = \alpha_h(\mu_n) + \int_a^x f_h(t, y_1(t, \mu_n), \dots, y_p(t, \mu_n), \mu_n)dt,$$

passando al limite per $n\to\infty$, si ricava, per x in (a, b),

$$y_h^0(x) = \alpha_h(\mu_0) + \int_a^x f_h(t, y_1^0(t), \dots, y_p^0(t), \mu_0)dt.$$

Si ha dunque che per $\lambda = \mu_0$ esiste la soluzione $[y_h^0(x)]$, in R, del sistema (46), con le $y_h^0(x)$ verificanti le limitazioni (29). Se fosse $\mu_0 < \lambda_2$, si potrebbero trovare, in base al teor. I, valori di $\mu > \mu_0$, dell'intervallo (λ_1, λ_2), tali che per ogni λ dell'intervallo (λ_1, μ) si potrebbe costruire una soluzione $[y_h(x, \lambda)]$, in R, del sistema (46), con le $y_h(x, \lambda)$ verificanti le (47), il che è assurdo, per essere μ_0 l'estremo superiore dell'insieme numerico costituito dai detti valori.

Un teorema analogo, che tralasciamo di enunciare, sussiste, ovviamente, per le equazioni

$$y^{(p)} = f(x, y, y', \dots, y^{(p-1)}, \lambda),$$
$$y^{(k)}(a) = \alpha_k(\lambda), \qquad (k = 0, 1, \dots, p-1),$$

dipendenti dal parametro λ. Rileviamo di esso un caso particolare interessante. Sia $\varphi(x, y_1, \dots, y_p)$, rispetto alla x, di tipo C nel dominio rettangolare $R[(a, a_1, \dots, a_p); (b, b_1, \dots, b_p)]$ e generalmente continua e verifichi la condizione di LIPSCHITZ, secondo CARATHEODORY, si abbia cioè, per quasi tutti i valori di x in (a, b),

$$|\varphi(x, u_1, \dots, u_p) - \varphi(x, v_1, \dots, v_p)| \leqq L(x)\sum_{h=1}^{p} |u_h - v_h|,$$

comunque si scelgano le quantità u_h e v_h nell'intervallo (a_h, b_h) $(h = 1, \dots, p)$, essendo $L(x)$ una funzione sommabile in (a, b). L'equazione differenziale

$$y^{(p)} = \lambda\varphi(x, y, y', \dots, y^{(p-1)}),$$

riesce allora unitaria, in R, qualunque valore si dia al parametro λ. Sia $u(x)$ una soluzione. in R, dell'equazione

$$y^{(p)} = \varphi(x,\ y,\ y',\dots,\ y^{(p-1)}),$$

e si abbia

$$u^{(k)}(a) = \alpha_k. \qquad (k = 0,\ 1,\dots,\ p-1),$$
$$\alpha_k \geqq 0, \qquad (k = 0,\ 1,\dots,\ p-1),$$
$$a_h < 0 < b_h, \qquad (h = 1,\ 2,\dots,\ p),$$

e, in R, generalmente rispetto alla x,

$$\varphi(x,\ y_1,\dots,\ y_p) \geqq 0,$$

e non decrescente in ciascuna delle $p-1$ variabili $y_1,\dots,\ y_{p-1}$. In tali ipotesi si può affermare, in base al teor. IX, l'esistenza di un intervallo $(\lambda',\ \lambda'')$, con $\lambda' < 0$ e $\lambda'' > 1$, tale che per ogni valore di λ in tale intervallo è possibile definire una soluzione $y(x,\ \lambda)$, in R, delle equazioni:

$$y^{(p)} = \lambda\varphi(x,\ y,\ y',\dots,\ y^{(p-1)}),$$
$$y^{(k)}(a) = \lambda\alpha_k, \qquad (k = 0,\ 1,\dots,\ p-1),$$

risultando, per λ nell'intervallo $(0,\ 1)$,

$$0 \leqq y^{(k)}(x,\ \lambda) \leqq u^{(k)}(x)), \qquad (k = 0,\ 1,\dots,\ p-1),$$

e le $y^{(k)}(x,\lambda)$ $(k = 0.\ 1,\dots,p-1)$, per ogni fissato x, funzioni non decrescenti di λ.

Non si pensi che tale intervallo $(\lambda',\ \lambda'')$, di variabilità del parametro λ, consentita dal teorema, riesca, in generale, banalmente ristretto. È istruttivo, al riguardo, l'esempio delle semplicissime equazioni:

$$y' = \lambda y^2,$$
$$y(0) = \lambda,$$

considerate al variare di x nell'intervallo $(0,\ b)$, con $b < 1$, la cui soluzione

$$y = \frac{\lambda}{1-\lambda^2 x},$$

può definirsi nell'intervallo $(0,\ b)$ solo se λ si mantiene in un intervallo $(\lambda',\ \lambda'')$ interno all'intervallo $(-1/\sqrt{b},\ 1/\sqrt{b})$, fra i quali vi è bene l'intervallo $(0,\ 1)$, il cui estremo destro può essere però vicino tanto quanto si vuole a $1/\sqrt{b}$, pur di prendere b abbastanza prossimo a uno.