Intorno alle varietà isotrope.

Memoria di E. BOMPIANI (a Roma).

Sunto. - *Premessi alcuni richiami sulle relazioni fra la teoria delle varietà isotrope, sviluppata dal* LENSE *e poi dal* PINL, *e la teoria delle geometrie riemanniane di specie superiore sviluppata dall'A.* (§ 1), *si illustra la necessità di considerare in queste teorie i fatti proiettivi, servendosi di alcuni esempi.*

Questi riguardano: le superficie rigate isotrope (*studiate dal* LENSE) (§ 2); *alcune superficie isotrope non rigate* (*studiate dal* PINL) *e varietà isotrope* (*studiate dal* LENSE) (§ 3); *le proiezioni delle varietà isotrope* (§ 4).

§ 1. Richiami sulle deformazioni di specie superiore e sulle varietà isotrope.

1. In una comunicazione svolta alla XIV Riunione della Deutsche Mathematiker Vereinigung (Baden-Baden, 13 Settembre 1938) mi sono occupato delle relazioni fra geometrie riemanniane di specie superiore e superficie totalmente isotrope [1]. Alle prime ero giunto dalla considerazione di corrispondenze fra superficie o varietà di due spazî euclidei (convenientemente ampi) che conservano non solo le lunghezze di archi corrispondenti (ordinaria geometria di RIEMANN) ma anche le loro curvature fino a quelle di un dato ordine assegnato (questo aumentato di uno è la *specie* della geometria: quella di RIEMANN

---

[1] Riporto qui il sunto di quella comunicazione dato nel programma della Riunione. « Riemannsche Geometrie gegebener Gattung: geometrische und analytische Erklärungen. Abwickelbarkeit gegebener Gattung zweier Mannigfaltigkeiten aufeinander. Die « darstellende Mannigfaltigkeit » einer Verbiegung und ihre projektiven Eigenschaften als projektivinvariante Eigenschaften der Verbiegung. Äquivalenz der « darstellende Mannigfaltigkeit » einer Verbiegung gegebener Gattung und der totalisotropen Mannigfaltigkeiten derselben Gattung. Klassen von totalisotropen Flächen gegebener Gattung ».

Per quanto riguarda le mie ricerche posso riferirmi alla mia Memoria: *Geometrie riemanniane di specie superiore* (« R. Accademia d'Italia », Memorie della Classe di Scienze fisiche etc., vol. 6, n. 8, 1935, p. 269-520), ove sono stati citati i miei lavori precedenti sull'argomento. Però, come in essa è avvertito esplicitamente (e a differenza di quanto ho visto scritto da altri), quella Memoria *non* riassume i risultati precedenti (se non in quanto è necessario). Per es. non vi sono i risultati geometrici delle quattro Note: *Invarianti e covarianti metrici nelle deformazioni di specie superiore delle superficie*, pubblicate nei « Rendic. della R. Accademia dei Lincei », negli anni 1919-1921.

è di specie 1). Alla teoria delle varietà totalmente isotrope è invece giunto il LENSE partendo dal problema di integrare l'equazione di MONGE $\sum_1^n{}_i (dx^i)^2 = 0$ con funzioni di due o più variabili [1].

Non è scopo di questa Nota di riassumere i risultati del LENSE (e del PINL) e i miei su questi argomenti. Mi limito invece (dopo qualche necessario richiamo) a profittare dell'occasione offertami da alcuni recenti lavori sull'argomento per insistere, con qualche esempio, sull'importanza, più volte segnalata, che hanno i fatti proiettivi in questa teoria. A questi fatti, già messi in evidenza fin dalle mie prime Note sull'argomento (dal 1914), sono esplicitamente dedicate le Parti I e III della mia Memoria citata della R. Accademia d'Italia; ed essi affiorano continuamente anche nelle altre (si vedano per es. le considerazioni sul trasporto di vettori nella Parte IV). La loro considerazione è *necessaria* per una reale comprensione dell'argomento: e di essi infatti si sono serviti nei lavori più recenti il LENSE e il PINL [2]. Aggiungo che proprio in relazione a queste ricerche e a risultati esposti a Baden-Baden (che mi riserbo di pubblicare in altra occasione) mi è stato necessario approfondire la teoria (proiettiva) della quasi asintotiche sopra una superficie [3].

2. Ricordo, per comodità del Lettore, quanto segue.

Data in uno spazio euclideo S_n una varietà V_k descritta dal punto di coordinate cartesiane ortogonali $x^i(u^1, \ldots, u^k)$, $i = 1, \ldots, n$, si considerino in un suo punto $P \equiv S(0)$, lo spazio tangente $S(1)$, lo spazio 2–osculatore $S(2)$, e

---

(1) Citerò soltanto le tre Note più recenti di J. LENSE: *Ueber isotrope Mannigfaltigkeiten* (« Mathematische Annalen », Bd. 116, 1939, p. 297-309); *Beiträge zur Theorie der isotropen Mannigfaltigkeiten* (« Monatshefte für Math. u. Phys. », Bd. 48, 1939, p. 121-128); *Längentrene Abbildung, isotrope Mannigfaltigkeiten von Rang null, Einbettungssatz* (« Jahresbericht d. Deutschen Mathem. Verein. », Bd. I, 1940, p. 1-6) ove si trovano altre indicazioni bibliografiche su lavori del LENSE stesso e di M. PINL.

(2) Si veda per es. la Nota del LENSE nei « Math. Ann. » (1939) ove si trovano riesposte, per le superficie, le nozioni di spazio osculatore e di classificazione proiettiva delle curve su di esse. La prima idea di quegli spazi è di DEL PEZZO; io me ne servo (avendo largamente estesa quell'idea) da circa 30 anni (sono stati poi incontrati di nuovo dal VITALI). Il LENSE indica lo spazio osculatore contenente l'intorno d'ordine ν con S_ν. Preferisco la mia notazione, $S(\nu)$, perchè di solito (e sempre in Italia) l'indice apposto in basso alla lettera che serve a designare lo spazio indica la sua dimensione.

(3) E. BOMPIANI: *Geometria proiettiva di un'equazione a derivate parziali lineare omogenea. - I. Classificazione delle quasi-asintotiche. - II. Sistemi invarianti associati ad un sistema di quasi-asintotiche* (« Rend. R. Acc. dei Lincei », (6) vol. XXVIII, 1938, p. 283-301).

Come altro esempio dell'uso di fatti proiettivi in queste questioni vedasi la mia Memoria: *Le superficie emisotrope nello spazio euclideo a quattro dimensioni* (« R. Accademia d'Italia », Memorie della Classe di Scienze fisiche, etc., vol. XII, 1940, n. 1, p. 1-23).

così di seguito fino allo spazio $(\nu-1)$-osculatore $S(\nu-1)$. Gli infinitesimi principali delle distanze di un punto $\overline{P}$ prossimo a P da $S(0)$, $S(1), \ldots, S(\nu-1)$ sono espressi da ν *forme fondamentali invarianti tutte del 1° ordine* (cioè quando $\overline{P}\to P$ su una curva solo la tangente in P ad essa ha influenza sull'infinitesimo principale della distanza che si considera) *e di gradi* (nelle du^s, $s=1,\ldots,k$) *rispett.* $2, 4, \ldots, 2\nu$ (¹).

Queste forme (con le dovute condizioni d'integrabilità) *individuano la geometria riemanniana di specie* ν, indipendentemente dall'ambiente euclideo in cui s'immagina immersa la V_k. *I loro coefficienti sono componenti di ordinari tensori covarianti simmetrici rispettiv. a* $2, 4, \ldots, 2\nu$ *indici.*

Una V_k e una $\overline{V}_k$ che diano luogo alle stesse ν forme si dicono applicabili (o deformate una dell'altra) di specie ν.

Se si considerano due *determinate* V_k e $\overline{V}_k$, appartenenti rispettivamente ad S_n e ad $S_{\bar n}$, applicabili di specie ν, e se è *data* la corrispondenza determinata dall'applicabilità (talchè punti corrispondenti delle due varietà si possano associare ad uno *stesso* gruppo di valori delle variabili $u^1, \ldots, u^k$), cioè se si esamina una *data* deformazione, alle forme precedenti (invarianti *anche* per trasformazioni delle u) si possono sostituire forme più semplici (come struttura analitica) che *non* sarebbero invarianti qualora su *ciascuna* V_k si cambiassero ad arbitrio i parametri (²).

L'applicabilità di specie ν si esprime allora con l'uguaglianza, in punti corrispondenti di V_k e di $\overline{V}_k$, (cioè rappresentati dallo stesso gruppo di u), di espressioni del tipo seguente:

$$\sum_1^n{}_i \frac{\partial^h x^i}{\partial u^{r_1}\ldots\partial u^{r_h}}\cdot\frac{\partial^l x^i}{\partial u^{s_1}\ldots\partial u^{s_l}}=\sum_1^{\bar n}{}_{\bar i} \frac{\partial^h x^{\bar i}}{\partial u^{r_1}\ldots\partial u^{r_h}}\,\frac{\partial^k x^{\bar i}}{\partial u^{s_1}\ldots\partial u^{s_l}}, \qquad h,\ l\leq\nu. \tag{2.1}$$

Se $h\geq l$, h si chiama *ordine* dell'espressione precedente (detta *simbolo*) e se $h=l$ il *simbolo* si dice *principale*, in caso diverso *dedotto*. Si dimostra allora che *condizione necessaria e sufficiente per l'applicabilità di specie* ν *è l'uguaglianza dei simboli principali d'ordine* $\leq\nu$; *essa porta di conseguenza*

(¹) Queste forme, e il loro significato geometrico, si trovano esplicitamente date nelle mie Note Lincee ricordate del 1919-1921. Esse si sono presentate poi, e *senza* il significato geometrico, nelle ricerche di varî altri Geometri: per un confronto fra queste ricerche vedasi l'Introduzione alla mia Memoria dell'Accademia d'Italia del 1935.

(²) Mi sono servito di queste forme più semplici, invarianti per cambiamenti simultanei delle variabili sulle due varietà (cioè quando fra esse sia già *data* la corrispondenza) nella Nota: *Basi analitiche per una teoria delle deformazioni delle superficie di specie superiore* (« Rend. R. Acc. dei Lincei », (5) vol. XXV, 1916, p. 627-634). Sono soltanto queste forme più semplici che intervengono, per le ragioni che vedremo, nella teoria delle varietà isotrope.

l'uguaglianza di tutt'i simboli dedotti d'ordine $\leq \nu + 1$ *e anzi (più in generale) di tutt'i simboli per cui* $h + l \leq 2\nu + 1$.

Nel caso delle *superficie*, posto $u^1 = u$, $u^2 = v$ e $x^i_{pq} = \dfrac{\partial^{p+q} x^i}{\partial u^p \partial v^q}$ conviene scrivere

$$[pqrs] = [rspq] = \sum_1^n{}_i \frac{\partial^{p+q} x^i}{\partial u^p dv^q} \frac{\partial^{r+s} x^i}{\partial u^r \partial v^s} = \sum_1^n{}_i x^i_{pq} x^i_{rs}; \tag{2.2}$$

se $p + q \geq r + s$ l'ordine del simbolo è $p + q$; ed è principale se $p + q = r + s$. Se l'applicabilità è di specie ν (e non $\nu + 1$) esistono curve corrispondenti delle due superficie aventi in punti corrispondenti la stessa ν-esima curvatura (oltre le precedenti): la loro equazione differenziale (di primo ordine, in du/dv, e di grado $2\nu + 2$) si ottiene uguagliando le $(\nu + 1)$-esime forme fondamentali delle due superficie.

3. Nello studio di una deformazione data fra una V_k di S_n e una $\overline{V}_k$ di $S_{\bar{n}}$ riesce conveniente adoperare la W_k di $S_{n+\bar{n}}$ descritta dal punto $x^j(u^1, \ldots, u^k)$, $j = 1, \ldots, n + \bar{n}$, così definito $(i = \sqrt{-1})$: le prime n coordinate sono quelle di un punto di V_k, le ultime n sono quelle del punto corrispondente di $\overline{V}_k$ moltiplicate per i.

La W_k *è la varietà rappresentativa (o figurativa) della deformazione data* (¹).

La convenienza dell'uso di W_k *è nello studio delle proprietà proiettive invarianti nella deformazione di* V_k *in* $\overline{V}_k$: essendo queste proiezioni di W_k le sue proprietà proiettive appartengono tanto a V_k quanto a $\overline{V}_k$ (le quali in relazione agli ambienti S_n ed $S_{\bar{n}}$ in cui sono immerse potranno avere proprietà proiettive più particolari). Le proprietà proiettive di W_k non dipendono separatamente da n ed $\bar{n}$, ma soltanto da $N = n + \bar{n}$.

Le condizioni del tipo (2.1) *per l'applicabilità si scrivono annullando i corrispondenti simboli costruiti per* W_k (cioè con le x^j).

In altri termini: *per la* W_k *rappresentativa della deformazione di specie* ν *data fra* V_k *e* $\overline{V}_k$ *sono identicamente nulle le prime* ν *forme fondamentali:* ciò può esprimersi scrivendo con la notazione delle matrici

$$\| dx^j \|^2 = 0, \quad \| d^2 x^j \|^2 = 0, \ldots, \quad \| d^\nu x^j \|^2 = 0$$

o con notazione vettoriale

$$(dx)^2 = 0, \quad (d^2 x)^2 = 0, \ldots, \quad (d^\nu x)^2 = 0$$

(¹) Si veda la mia Memoria dell'Accademia d'Italia del 1935, Parte II, Cap. V e poi *passim*, particolarmente Parte III.

o più esplicitamente, con i simboli (principali d'ordine p)

$$A_{r_1 \dots r_p, s_1 \dots s_p} = \sum_1^N{}_j \frac{\partial^p x^j}{\partial u^{r_1} \dots \partial u^{r_p}} \frac{\partial^p x^j}{\partial u^{s_1} \dots \partial u^{s_p}},$$

$$A_{r_1 \dots r_p, s_1 \dots s_p} du^{r_1} \dots du^{r_p} du^{s_1} \dots du^{s_p} = 0, \qquad p = 1, 2, \dots, \nu.$$

Non è invece identicamente nulla la $(\nu+1)$-esima forma (costruita come le precedenti, ma con i simboli d'ordine $\nu+1$).

Una tale W_k è *isotropa di specie* ν o ν*-isotropa*. È questa la ragione delle relazioni fra le mie ricerche e quelle del LENSE (e poi del PINL) (1).

Su una tale W_k tutte le curve sono ν-isotrope, cioè i loro S_ν osculatori hanno spazî improprî $S^*_{\nu-1}$ appartenenti all'assoluto Q, di equazione $\sum_1^N{}_j (x^j)^2 = 0$ sull'iperpiano improprio (per l'annullarsi dei simboli principali d'ordine $\leq \nu$); ma vi sono curve $(\nu+1)$-isotrope che soddisfano all'equazione differenziale ottenuta annullando la $(\nu+1)$-esima forma fondamentale di W_k (2).

L'appartenenza di tutti quegli $S^*_{\nu-1}$, e quindi degli spazi improprî degli $S(\nu)$ alla quadrica Q dello S^*_{N-1} improprio di S_N porta di necessità a relazioni fra la dimensione di quegli $S(\nu)$ ed N: ed è questa l'origine di molti fatti proiettivi invarianti nel passaggio da V_k a $\overline{V}_k$, o relativi a W_k (3).

L'annullarsi dei simboli dedotti d'ordine $\nu+1$, relativi a W_h esprime il seguente fatto geometrico: *lo spazio improprio di un generico* $S(\nu+1)$ *sta nello spazio polare rispetto a* Q *dello spazio improprio del suo* $S(\nu)$ *(appartenente, come s'è detto, a* Q*)*.

4. Da quanto precede riceve un netto significato l'annullarsi della $(\nu+1)$-esima forma fondamentale e la determinazione delle tangenti per cui ciò avviene in ogni punto (che si diranno $(\nu+1)$-isotrope).

Comincio dal caso delle superficie isotrope ($\nu = 1$).

Si consideri un suo punto P, il piano ivi tangente, la sua retta impropria S_1^* appartenente a Q di S^*_{N-1}. Si cercano le tangenti in P tali che

---

(1) Se si parte dalla W_k, risulta *determinata* la corrispondenza fra due sue proiezioni V_k e $\overline{V}_k$: è per questo che, come s'è detto nella nota (2) del n. 2, in questo caso le forme che occorrono sono quelle da me date fin dal 1916.

(2) Anche queste linee sono definite nella mia Memoria del 1935. Se si ritorna alle due V_k deformate di specie ν esse sono su ciascuna le linee che conservano invariante nella deformazione la ν-esima curvatura.

(3) Per le varietà i cui $S(\nu)$ osculatori hanno spazî impropri non appartenenti all'assoluto (come quelle qui dette isotrope) ma in particolari relazione di tangenza con esso preferirei la denominazione «emisotrope» (proposta per le superficie dallo SCHOUTEN). Per esse, oltre l'indice ν, occorre un altro carattere, il *rango* introdotto dal LENSE.

gli elementi del 2° ordine di curve della superficie, E_2, ad esse tangenti siano 2–isotropi, cioè che i piani cui essi appartengono abbiano le loro rette improprie su Q.

Si ricordi che i piani osculatori in P alle curve per P con tangente assegnata stanno in uno S_3 (che indico con $S(2, 1)$, osculatore secondo la tangente data) passante per il piano tangente. Si tratta di vedere quali di questi S_3 (al variare della tangente) hanno i loro piani improprî su Q.

Se $S(2) \equiv S_5$ (caso generale) quegli S_3 descrivono il cono quadrico di Del Pezzo e v'è corrispondenza proiettiva fra essi e le tangenti; i loro piani improprî descrivono un cono quadrico che ha per vertice $S_1{}^*$, su Q, e lo $S_4{}^*$ di questo cono, per quanto s'è notato sopra, sta nello spazio polare di $S_1{}^*$ rispetto a Q. Sicchè $S_4{}^*$ taglia pure Q in un cono avente $S_1{}^*$ per vertice. I due coni hanno in comune quattro piani: a questi, per la proiettività detta, corrispondono quattro tangenti che sono quelle 2–isotrope cercate.

Se la superficie possiede un doppio sistema coniugato, quindi $S(2) \equiv S_4$, gli $S_3 \equiv S(2, 1)$ formano fascio intorno al piano tangente: e v'è una proiettività fra gli S_3 del fascio e le coppie di tangenti dell'involuzione che ha per rette doppie le tangenti coniugate. In S^*_{N-1} abbiamo un fascio di piani per $S_1{}^*$ in uno $S_3{}^*$ (improprio di S_4) che sta nello spazio polare di $S_1{}^*$: $S_3{}^*$ taglia Q in due piani del fascio cui corrispondono due coppie di tangenti nell'involuzione nominata: sono queste le tangenti 2–isotrope.

Se infine la superficie possiede un sistema semplice di asintotiche, cioè ancora $S(2) \equiv S_4$, gli $S_3 \equiv S(2, 1)$ sono riferiti proiettivamente alle tangenti: con lo stesso ragionamento di prima si hanno in $S_3{}^*$ improprio di S_4 due piani di Q, quindi, per la proiettività, due tangenti alle quali è da aggiungersi la tangente asintotica contata due volte: sono queste le tangenti 2–isotrope.

E non mi occupo dei casi più particolari.

5. La $(\nu + 1)$–esima forma fondamentale per le varietà ν–isotrope ha il significato geometrico seguente. Preso un punto P su W_k e un punto $\overline{P}$ sopra una curva *qualsiasi* di W_k uscente da P con tangente $du^1 : du^2 : \ldots : du^k$, l'infinitesimo principale del quadrato della distanza $P\overline{P}$ vale, a prescindere da un fattore numerico

$$\| d^{\nu+1} x \|^2 = \| x_{r_1 \ldots r_{\nu+1}} du^{r_1} \ldots du^{r_{\nu+1}} \|^2 =$$
$$= A_{r_1 \ldots r_{\nu+1},\, s_1 \ldots s_{\nu+1}} du^{r_1} \ldots du^{r_{\nu+1}} du^{s_1} \ldots du^{s_{\nu+1}}$$

ove le $A_{\ldots,\ldots}$ sono i simboli principali d'ordine $\nu + 1$ relativi a W_k.

Le direzioni che annullano questa forma sono tali che su *qualsiasi* curva uscente da P secondo una di esse quell'infinitesimo principale è nullo; o in altri termini: ***tutti** gli elementi d'ordine* $\nu+1$, $E_{\nu+1}$ *di curve con quelle tangenti sono* $(\nu+1)$*-isotropi.*

Tali elementi $E_{\nu+1}$ relativi ad una tangente riempiono uno spazio lineare passante per lo $S(\nu)$ in P (la cui dimensione dipende dalle equazioni a derivate parziali lineari omogenee d'ordine $\leq \nu+1$ cui soddisfa la varietà, cioè cui soddisfano le coordinate proiettive dei suoi punti) che io indico con $S(\nu+1, 1)$ poichè contiene gli $S_{\nu+1}$ osculatori alle curve per P con quella tangente, cioè secondo un E_1 fissato.

Gli spazi improprî degli $S(\nu+1, 1)$ *relativi alle tangenti che annullano la* $(\nu+1)$*-esima forma fondamentale appartengono pure all'assoluto* Q *dello spazio.*

Quindi, è bene notarlo esplicitamente, *non soltanto le curve che rendono nulla la* $(\nu+1)$*-esima forma fondamentale sono* $(\nu+1)$*-isotrope, ma tutti gli* $E_{\nu+1}$ *ad esse tangenti sono tali:* sicchè conviene dare l'attributo di $(\nu+1)$-isotrope alle tangenti stesse.

Riprendendo a considerare gli $S(\nu+1, 1)$ osculatori in P aggiungo che, al variare della tangente, essi descrivono un cono avente per vertice lo $S(\nu)$ in P e proiettante la varietà che rappresenta (al solito modo di VERONESE) la totalità delle forme d'ordine $\nu+1$ di uno spazio proiettivo S_{k-1} (in cui i differenziali $du^1, \dots, du^k$ sono coordinate proiettive omogenee). Le varie circostanze che possono presentarsi riguardo a questo cono dipendono dal numero e dal tipo delle equazioni dette di ordine $\leq \nu+1$ (quindi dall'indipendenza o meno dello $S(\nu)$ dallo spazio della varietà rappresentativa di quelle forme e dalle varie eventualità d'incidenza di $S(\nu)$ con la varietà stessa). Nel caso generale o *normale,* in cui *non* esistano di quelle equazioni, gli spazî ora nominati sono indipendenti: allora $S(\nu+1)$ ha la dimensione (massima) $\binom{\nu+k+1}{k}-1$; gli $S(\nu+1, 1)$ hanno dimensione $\binom{\nu+k}{k}$ e il loro cono ha ordine $(\nu+1)^{k-1}$. In questo caso si ha una corrispondenza proiettiva fra le tangenti in P e i relativi $S(\nu+1, 1)$. Negli altri casi diminuisce la dimensione degli $S(\nu+1)$ (ed eventualmente anche degli spazi d'ordine d'osculazione $<\nu+1$); può diminuire l'ordine del cono e la proiettività di prima trasformarsi in una proiettività fra gli $S(\nu+1, 1)$ e un'involuzione nella stella di tangenti. Maggiori precisazioni non sono possibili se non si fissa il numero e il tipo delle equazioni dette.

Comunque la ricerca delle tangenti $(\nu+1)$-isotrope in un punto equivale alla ricerca, nello spazio improprio dell'ambiente, dell'intersezione della quadrica assoluto con il cono precedente; agli $S(\nu+1, 1)$ appartenenti all'assoluto corrispondono, in una delle proiettività precedenti, le tangenti $(\nu+1)$-isotrope costituenti un cono d'ordine $2(\nu+1)$ (nello S_k tangente in P).

6. Come ho detto, la $(\nu+1)$–esima forma per una W_k ν–isotropa (sempre col linguaggio della superficie figurativa) si trova già nella mia Memoria dell'Accademia del 1935. E per ora questa soltanto è intervenuta nei lavori del LENSE e del PINL.

Ma anche per queste varietà, come per quelle non isotrope si può costruire una serie di forme fondamentali invarianti aventi semplice significato geometrico.

E non c'è assolutamente nulla da cambiare a quanto è detto in quella Memoria (Parte IV, Cap. I), a cominciare dalla $(\nu+3)$–esima forma, purchè gli $S(\nu+3)$ siano generici rispetto all'assoluto (1).

§ 2. Superficie rigate isotrope.

1. Un primo esempio dell'interesse dei fatti proiettivi in problemi di questa natura è offerto dal problema di classificare le rigate isotrope. Questo problema è già stato, parzialmente, trattato dal LENSE (2).

I fatti proiettivi da ricordare sono i seguenti (3).

a) Lo spazio lineare contenente due generiche generatrici infinitamente vicine è un S_2 o un S_3. Nel primo caso la superficie è sviluppabile (luogo delle tangenti ad una curva, o cono). Nel caso opposto lo S_3 si dirà tangente lungo una generatrice, e s'indicherà con $S_g(1)$.

b) Due S_3 tangenti infinitamente vicini (cioè tre generatrici infinitamente vicine) possono appartenere ad uno S_3 (superficie non sviluppabili di S_3) ad uno S_4 o ad uno S_5: in ogni caso si dirà questo spazio 2–osculatore $S_g(2)$ lungo una generatrice.

c) Se questo $S_g(2) \equiv S_4$ gli S_3 tangenti sono gli S_3 osculatori di una curva (con i casi degeneri che qui per brevità tralascio): le generatrici della rigata si trovano nei piani osculatori a questa curva (e in generale non passano per i suoi punti, ma ciò può anche accadere).

---

(1) Cioè si può prendere come s-esima forma fondamentale, per $s \geq \nu+3$, e a meno d'un fattore numerico, il quadrato della distanza di un punto preso nell'intorno d'ordine s del punto generico P dallo $S\,(s-1)$ osculatore in P: perchè questo $S\,(s-1)$ non ha, in generale, particolari relazioni con Q.

(2) J. LENSE: *Ueber Kurven mit isotropen Normalen* (« Mathem. Annalen », Bd. 112, 1935, p. 139-154); *Ueber vollisotrope Flächen* (« Monatsh. für Math. u. Phys. », Bd. 43, 1936, p. 177-186); *Ueber isotrope Mannigfaltigkeiten* (« Math. Annalen », Bd. 116, 1939, p. 297-309).

(3) E. BOMPIANI: *Alcune proprietà proiettivo-differenziali dei sistemi di rette negli iperspazi* (« Rend. Circ. Mat. di Palermo », vol. XXXVII, 1914, p. 297-331).

Fatti analoghi accadono quando si prendono in esame intorni di una generatrice di ordine più elevato.

2. Supponiamo ora la rigata isotropa ed escludiamo senz'altro le sviluppabili.

Lo spazio $S_g(1)$ generico è quindi un S_3. Poichè i piani tangenti alla rigata lungo una generatrice g riempiono lo S_3, il suo piano improprio S_2^* deve appartenere alla quadrica (non degenere) assoluto Q dello spazio S_n in cui è data la superficie. Poichè Q sta in uno S_{n-1}^* (improprio) e deve contenere ∞^1 piani è $n \geq 6$.

Esaminiamo il caso $S_g(2) \equiv S_4$. Quegli ∞^1 S_2^* sono osculatori ad una curva (poichè due infinitamente vicini stanno in S_3^* improprio di un S_4: tralasciamo anche qui i casi degeneri), e, variando con continuità, devono appartenere ad uno stesso sistema di Q. Se $n = 6$, $n - 1 = 5$ i piani di un sistema hanno un punto comune, mentre qui due S_2^* infinitamente vicini devono tagliarsi in una retta; non può essere $n = 6$, quindi $n \geq 7$.

Poichè gli S_3 tangenti inviluppano una curva (vedi *c)*) e quegli S_3 tagliano S_{n-1}^* in piani di Q, questa curva è 3–isotropa. Sicchè:

La più generale rigata isotropa (non sviluppabile) con $\mathrm{S_g(2)} \equiv \mathrm{S_4}$ *si ottiene prendendo, in uno spazio di dimensione* $\mathrm{n} \geq 7$, *una curva 3–isotropa e in ciascun suo piano osculatore una generatrice.*

Si conferma subito analiticamente che le rigate così costruite sono isotrope.

Se la curva 3–isotropa è descritta dal punto $y(u)$, è per ipotesi, nella notazione vettoriale ([1]), $y'^2 = 0$, $y''^2 = 0$, $y'''^2 = 0$.

Se nel piano osculatore (y, y', y'') si dà una retta, congiungente per es. i punti $y + \lambda(u)y' + \mu(u)y''$ e $y + \rho(u)y' + \sigma(u)y''$ essa dà luogo ad una rigata isotropa (cioè per cui $ds^2 \equiv 0$).

3. Passiamo al caso $S_g(2) \equiv S_5$ (che è il caso generale).

I piani impropri S_2^* degli S_3 tangenti sono tali che due infinitamente vicini s'incontrano in un punto (improprio di una generatrice g): il suo luogo, curva impropria γ della rigata, è tale che una sua tangente sta in uno S_2^*, cioè questi passano per le tangenti di γ. Si costruisca ora una curva C di S_n le cui tangenti incontrino quegli S_2^* (la curva C è necessariamente isotropa) e si chiamino corrispondenti punti di C e di γ per cui l'incidenza abbia luogo: è chiaro che le congiungenti punti corrispondenti di C e di γ danno una

---

([1]) Ponendo cioè in generale $ab = \sum_i a^i b^i$.

rigata del tipo richiesto (s' intende che *non* debbono essere incidenti le tangenti in punti corrispondenti di C e di γ).

Si noti che dovendo due S_2^* infinitamente vicini incontrarsi in un punto (e non in una retta come nel caso precedente) può anche essere $n=6$. Sicchè:

La più generale rigata isotropa con $S_g(2)\equiv S_5$ *si ottiene prendendo: sull'assoluto* Q *di* S_{n-1}^* *improprio di* S_n, $n\geq 6$, *una curva* γ *(le cui tangenti appartengano a* Q*) e per le sue tangenti un sistema* ∞^1 *di* S_2^* *appartenenti a* Q*; una curva* C *di* S_n *le cui tangenti incontrino gli* S_2^**; e congiungendo coppie di punti di* C *e di* γ *per le quali ha luogo l'incidenza voluta.*

Anche qui la verifica analitica è immediata.

Presa sull'assoluto Q la curva descritta da $z^i(u)$ $(z^{n+1}=0)$ per cui, in notazione vettoriale, $z^2=0$, $z'^2=0$ e per individuare il piano S_2^* per la tangente un punto $y^i(u)$ $(y^{n+1}=0)$ per cui

$$y^2=0,\quad yz=0,\quad yz'=0$$

e posto (F funzione arbitraria)

$$x^i(u)=\int F(u)y^i du, \qquad (x^{n+1}=1),$$

la rigata descritta da

$$X^i(u,v)=x^i(u)+vz^i(u)$$

è isotropa e con $S_g(2)\equiv S_5$ a patto che il piano osculatore nel punto u alla curva descritta da z e la tangente nel punto u alla curva descritta da y non s'incontrino.

Si può osservare che se $n=6$, quindi se Q è una V_4^2 non specializzata di S_5, presa la curva z che con le sue tangenti sta su Q, il piano $(zz'y)$ è necessariamente uno dei due piani secondo cui lo S_3 polare di zz' sega la quadrica.

4. Naturalmente si possono considerare casi più particolari derivanti non solo da caratteri proiettivi della rigata ma da particolari (non necessarie) relazioni proiettive di essa con l'assoluto. Così per es. il piano $S_2^*(z, z', y)$ sta sempre nello S_{n-3} polare della tangente zz'; si può esigere ch'esso stia nello S_{n-4} polare del piano osculatore $zz'z''$ (pur essendo distinto da esso); ciò porta $yz''=0$. Se fosse $n=6$ lo S_2 polare di $(zz'z'')$ coinciderebbe con lo $S_2^*(z, z', y)$; ma poichè questo è un piano della quadrica (sicchè il suo piano polare è esso stesso) coinciderebbe con $(zz'z'')$ contro l'ipotesi. Sicchè $n\geq 7$, ed è questo un risultato del LENSE [1].

[1] Nell'ultimo lavoro citato del LENSE, § 5, p. 303.

Ma si possono ricercare risultati più particolari esigendo per es. che lo S_2^* $(zz'y)$ sia nello S_{n-k-2} polare dello S_k $(zz' \dots z^k)$: se questo non deve contenere il punto y, quindi il piano S_2^*, deve essere $n \geq k+5$.

Risultati più determinati si ottengono se si fissa la dimensione dell'ambiente cui deve appartenere la rigata in esame.

5. Esaminiamo ora le rigate trovate in rapporto alla loro seconda forma fondamentale, Se la rigata è descritta dal punto di coordinate cartesiane ortogonali

$$X^i = x^i(u) + vz^i(u), \qquad i = 1, \dots, n \tag{5.1}$$

(e per l'omogeneità $x^{n+1} = 1$, mentre $z^{n+1} = 0$, quindi $X^{n+1} = 1$ in punti propri) per essere la rigata isotropa si ha $ds^2 \equiv 0$ quindi, in notazione vettoriale,

$$z^2 = 0, \quad z'^2 = 0, \quad (\text{e } zz' = 0, \ z'z'' = 0), \quad x'^2 = 0, \quad x'z = 0, \quad x'z' = 0, \tag{5.2}$$

e per la seconda forma fondamentale

$$|(x'' + vz'')du^2 + 2z'dudv|^2 = (x''^2 + 2vx''z'' + v^2z''^2)du^4 + 4x''z'du^3dv. \tag{5.3}$$

Le linee 2-isotrope sono quindi $du^3 = 0$, cioè le generatrici contate tre volte, e quelle definite da

$$(x''^2 + 2vx''z'' + v^2z''^2)du + 4x''z'dv = 0. \tag{5.4}$$

Queste coincidono con le generatrici se e solo se

$$x''z' = 0 \quad \text{equivalente a} \quad x'z'' = 0. \tag{5.5}$$

Esaminiamo una rigata con $S_g(2) \equiv S_4$. Su di essa si ha una *curva trasversale* (quasi-asintotica) il cui piano osculatore in un punto è contenuto nello $S_g(1) \equiv S_3$ per esso, che assumiamo come curva $x(u)$. Per essa si ha

$$x'' = hx' + kz' + lz \tag{5.6}$$

(ove s'intendono sostituite ad x e z le x^i e z^i) e come conseguenza di questa e delle (5.2) risulta $x''z' = 0$; cioè:

Sulle rigate con $S_g(2) \equiv S_4$ *le linee 2-isotrope coincidono tutte con le generatrici.*

Secondo lo schema del LENSE esse appartengono dunque sempre al tipo I; per esse la seconda forma vale $v^2z''^2du^4$: quindi *la curva trasversale è il luogo dei punti della rigata per cui è identicamente nulla la seconda forma fondamentale (da contarsi due volte se si vuole tener presente il fatto che in detta forma figura* v^2*).*

Se invece $S_g(2) \equiv S_5$ può accadere sia che $x''z' = 0$ nel qual caso le uniche linee 2-isotrope sono le generatrici (tipo I del LENSE) sia che $x''z' \neq 0$ (tipo II) nel qual caso le linee 2-isotrope sono determinate da un'equazione di RICCATI.

Quindi inversamente, mentre le rigate del tipo II appartengono proiettivamente allo stesso tipo (fino all'intorno del 2° ordine di una generatrice) le rigate del tipo I appartengono a due tipi proiettivamente distinti [1].

6. Qualora si volesse procedere allo studio sistematico delle superficie rigate isotrope di specie $\nu > 1$ bisognerebbe tener conto dei fatti proiettivi relativi alle rigate di S_n (e ad intorni di ordine comunque elevato di una generatrice) stabiliti nella mia Memoria già citata del Circolo Matematico di Palermo. Qui mi limito a stabilire le distinzioni essenziali per $\nu = 2$.

Escluso il caso delle superficie sviluppabili, i casi da considerare sono i seguenti:

a) $S_g(1) \equiv S_3$, $S_g(2) \equiv S_4$; le dimensioni degli spazi osculatori successivi lungo una generatrice vanno crescendo di un'unità, $S_g(3) \equiv S_5, \ldots$, fino a raggiungere la dimensione dell'ambiente.

b) $S_g(1) \equiv S_3$, $S_g(2) \equiv S_5$, $S_g(3) \equiv S_6$; poi aumento di un'unità per ogni spazio successivo fino alla dimensione ambiente.

c) $S_g(1) \equiv S_3$, $S_g(2) \equiv S_5$, $S_g(3) \equiv S_7$: per gli spazî osculatori successivi possono darsi varie eventualità che non prenderò in esame.

In ogni caso lo spazio improprio dello $S_g(2)$ appartiene alla quadrica Q di S^*_{n-1} improprio di S_n.

7. Nel caso *a)* gli $S_g(1)$ risultano gli S_3 osculatori ad una curva C (e casi degeneri che lascio da parte) e le generatrici della rigata stanno nei piani osculatori a C. Poichè gli $S_g(2) \equiv S_4$ sono osculatori a C e i loro $S_3{}^*$ impropri stanno su Q, la C è 4-isotropa. Per l'esistenza della superficie, Q deve contenere ∞^1 $S_3{}^*$ osculatori ad una curva, cioè due $S_3{}^*$ infinitamente vicini debbono tagliarsi in $S_2{}^*$ (pure di Q). Già le quadriche di S_7 contengono S_3: ma per un S_2 di una tale quadrica non passano ∞^1 S_3 (com'è necessario perchè ve ne siano due infinitamente vicini); ciò accade invece per le quadriche di S_8, quindi dev'essere $n \geq 9$.

---

(1) Per le rigate del tipo I si può fare un'ulteriore distinzione considerando sulla rigata la curva nei cui punti si annulla identicamente la seconda forma. Questa curva taglia, in generale, una generatrice generica in due punti distinti (diremo questo il tipo I_1); ma può accadere il fatto contrario (per *ogni* generatrice: tipo I_2). Le rigate per cui $S_g(2) \equiv S_4$ appartengono *sempre* al tipo I_2; mentre le rigate per cui $S_g(2) \equiv S_5$ e pure appartenenti al tipo I ($x''z' = 0$) appartengono in generale al tipo I_1 e in particolare al tipo I_2 quando $x''^2 \cdot z''^2 = (x''z'')^2$, cioè, assunta la quasi-asintotica come direttrice, quando $x''z'' = 0$. Le circostanze $\bar{x}''z' = 0$ e $x''z'' = 0$ sono caratterizzate geometricamente da quanto è detto al n. 4 di questo §.

In S_n, $n \geq 9$, *le superficie del tipo in esame si ottengono a partire dalle curve 4-isotrope* (senza altre operazioni d'integrazione) *nel modo ora detto.*

8. Nel caso *b)* gli $S_g(2) \equiv S_5$ sono osculatori ad una curva C e le generatrici della rigata stanno nei suoi S_3 osculatori. Questi S_5 hanno S_4 impropri appartenenti a Q (e osculatori ad una curva): quindi C è 5-isotropa. Tenuto conto della condizione che a Q debbono appartenere (almeno) ∞^1 S_4 per un suo S_3 risulta $n \geq 11$.

In S_n, $n \geq 11$, *le superficie del tipo in esame si ottengono a partire dalle curve 5-isotrope* (senz'altre integrazioni).

9. Il caso *c)* è quello generale. In esso gli S_4 impropri degli ∞^1 $S_g(2) \equiv S_5$ stanno ancora su Q (ma non sono più gli S_4 osculatori ad una curva). Due infinitamente vicini si tagliano in un piano osculatore alla curva $z(u)$ impropria della rigata: e da ciò segue $n \geq 10$. Fissata una curva γ appartenente, insieme ai suoi piani osculatori, a Q e per ciascuno di questi un S_4^* pure appartenente a Q, due di questi S_4^* infinitamente vicini si tagliano in uno S_2^* (di Q, naturalmente) contenente una tangente a γ: sono questi gli S_2^* impropri degli $S_g(1) \equiv S_3$. Si prenda ora in S_n una curva C le cui tangenti incontrino gli S_2^* (senza incontrare le tangenti a γ); C è quindi una curva 2-isotropa (la retta all'infinito di un suo piano osculatore sta in un S_4^* quindi su Q). Si chiamino corrispondenti punti di C e di γ per i quali avviene l'incidenza voluta: le congiungenti punti corrispondenti danno una rigata del tipo voluto. S'intende che gli S_4^* per i piani osculatori a γ devono esser presi sulle sezioni di Q con gli $S^*_{n-1-2-1} \equiv S^*_{n-4}$ polari di detti piani osculatori. Sicchè:

In S_n, $n \geq 10$, *le rigate in esame si costruiscono prendendo su* Q *una curva* γ *i cui piani osculatori appartengano pure a* Q; *negli* S^*_{n-4} *polari di questi piani si prendano a piacere* ∞^1 S_4^* *che li contengano e stiano su* Q. *Trovati gli* S_2^* *caratteristici di questi* S_4^* *si prenda una curva* C *di* S_n *le cui tangenti incontrino gli* S_2^* *(senza incontrare le tangenti a* γ *in essi contenute): le congiungenti punti di* C *e di* γ *per i quali ha luogo l'incidenza voluta sono generatrici della più generale rigata del tipo in esame.*

10. Esaminiamo brevemente la terza forma fondamentale. Se la rigata è rappresentata da

$$X^i(u, v) = x^i(u) + v z^i(u) \tag{10.1}$$

ove $z^i(u)$ descrive la sua curva impropria, l'ipotesi che la rigata sia 2-isotropa porta:

(10.2) $$z^2 = z'^2 = z''^2 = 0, \quad x'^2 = x''^2 = 0, \quad x'z = x'z' = x''z' = x''z'' = 0$$

insieme alle loro conseguenze differenziali.

La terza forma differenziale $\Sigma\,(d^3X^i)^2$ è perciò

$$\|(x''' + vz''')du^3 + 3z''du^2dv\|^2 = \{(x'''^2 + 2vx'''z''' + v^2z'''^2)du + 6x'''z''dv\}\,du^5$$

quindi cinque dei sei sistemi di linee 3-isotrope coincidono *sempre* con le generatrici.

Coincidono tutti se e solo se $x'''z'' = 0$.

Passiamo ora in esame, rispetto a queste curve, i varî tipi già distinti.

Nel tipo *a)* esiste una curva (quasi-asintotica) tale che il suo S_2 osculatore in ogni punto sta nello $S_g(1) \equiv S_3$ per esso. Questa curva, quando si assuma come direttrice $x(u)$, dà luogo ad un'equazione del tipo (5.6) cioè

(10.3) $$x'' = hx' + kz' + lz \quad \text{o} \quad x'' = [x', z', z]$$

(il secondo membro indica una combinazione lineare dei tre punti indicati); e per derivazione

(10.4) $$x''' = [z'', x', z', z].$$

Risulta da questa che $x'''z'' = 0$ e anche

$$x'''^2 = 0, \quad x'''z''' = 0$$

mentre $z'''^2 \neq 0$ se la rigata non dev'essere 3-isotropa.

Nel tipo *b)* esiste una quasi-asintotica tale che il suo S_3 osculatore in un punto sta nello $S_g(2) \equiv S_5$ (senza che avvenga il fatto precedente relativo ad S_2); assunta questa come direttrice $x(u)$ deve valere una equazione del tipo

(10.5) $$x''' = [x'', z'', x', z', x, z]$$

quindi si hanno le stesse conseguenze di prima. Cioè

Nelle rigate 2-isotrope dei tipi a) *e* b) *tutt'i sistemi di linee 3-isotrope coincidono con quello delle generatrici; assunta come direttrice* x(u) *la quasi-asintotica, la terza forma fondamentale è del tipo* $v^2z'''^2du^6$; *quindi la quasi-asintotica è la linea (da considerarsi doppia se si vuole tener conto del fattore* v^2*) nei punti della quale la terza forma è nulla.*

Invece *per le rigate di tipo* c) *si ha in generale un sistema di linee 3-isotrope distinto dalle generatrici (individuato da un'equazione di Riccati); ma può anche accadere, quando* $x'''z'' = 0$, *il contrario* [1].

---

[1] Anche qui si potrebbe fare un'ulteriore distinzione nel caso che tutti i sistemi di linee isotrope coincidano con le generatrici come in fine al n. 5 (v. nota). Il risultato relativo al caso generale è già dato (per rigate ν-isotrope) nella mia Memoria dell'Accademia d'Italia (1935) nel 2° alinea del n. 13 a p. 378.

§ 3. Esame di alcuni esempi di superficie isotrope.

1. Come secondo esempio dell'interesse dei fatti proiettivi in queste questioni riprendiamo in esame, da un punto di vista un po' più geometrico, alcune superficie isotrope non rigate considerate dal PINL.

Cominciamo dalla superficie [1]:

$$(1.1)\qquad \begin{array}{llll} x^1=\dfrac{1}{2}(u+2iuv^2), & x^3=\dfrac{1}{2}(v+2iu^2v), & & x^6=\dfrac{1}{2i}(u^2+iv^2) \\ & & x^5=i\sqrt{2}iuv, & \\ x^2=\dfrac{1}{2i}(u-2iuv^2), & x^4=\dfrac{1}{2i}(v-2iu^2v), & & x^7=\dfrac{i}{2}(v^2+iu^2) \end{array}.$$

Introduciamo le coordinate $(y^0=1)$

$$(1.2)\qquad \begin{array}{llll} y^1=x^1+ix^2=u, & y^3=x^3+ix^4=v, & y^6=x^6+ix^7=-iu^2, & \\ & & & y^5=x^5 \\ y^2=x^1-ix^2=2iuv^2, & y^4=x^3-ix^4=2iu^2v, & y^7=x^6-ix^7=v^2, & \end{array}$$

o anche $(z^0=1)$

$$(1.3)\qquad \begin{array}{llll} z^1=y^1=u, & z^3=y^3=v, & z^6=iy^6=u^2 & \\ & & & z^5=\dfrac{1}{i\sqrt{2i}}x^5=uv. \\ z^2=\dfrac{1}{2i}y^2=uv^2, & z^4=\dfrac{y^4}{2i}=u^2v, & z^7=y^7=v^2 & \end{array}$$

Nelle nuove coordinate z^i, ottenute dalle x^i con una trasformazione affine, le equazioni dell'assoluto

$$(1.4)\qquad \Sigma(x^i)^2=0,\ x^0=0$$

si scrivono

$$(1.5)\qquad z^1z^2+z^3z^4-\frac{1}{2}z^6z^7-(z^5)^2=0,\quad z^0=0.$$

Quindi è lo stesso studiare la superficie data (1.1) rispetto alla quadrica (1.4) o la (1.3) rispetto alla (1.5).

Le (1.3) sono più maneggevoli (essendo ciascuna delle z^i monomia in u, v). Esse mostrano subito che la superficie in esame è una proiezione su S_7 della F^9 di S_9 che rappresenta (al solito modo di VERONESE) la totalità delle cubiche piane. Se individuiamo questa con le stesse z^i date dalle (1.3) e ponendo

---

[1] M. PINL, *W-Projektionen totalisotroper Flächen* II («Časopis pro Pest. Math. a. Phys.», vol. 66, 1940, p. 23-35); equazioni (15) a p. 27 prendendo in esse il segno + e ponendo $u_1=u$, $u_2=v$, $i=\sqrt{-1}$. Per l'omogeneità può porsi $x^0=1$. (Questo lavoro sarà indicato con W-II, per distinguerlo dall'altro con lo stesso titolo, che indicherò con W-I, pubblicato nella stessa raccolta, vol. 66, 1937, p. 95-102).

inoltre
$$z^8 = u^3, \quad z^9 = v^3$$
la superficie in esame si ottiene proiettando la F^9 di S_9 dalla retta dei punti $A_8 A_9$ (in generale si indichi con A_s il punto di coordinale δ_s^α, $\alpha = 0, \ldots, 9$, essendo il δ_s^α il solito simbolo di KRONECKER).

Le cubiche piane rappresentate dalla (1.3) passano per i punti all'infinito degli assi nel piano cartesiano u, v; quindi *la superficie in esame è razionale del 7° ordine* F^7 *di* S_7 *proiezione della* F^9 *di* S_9 *da due suoi punti.*

Il piano tangente nel punto (u, v) alla (1.3) taglia lo S_6 improprio $z^0 = 0$ nella retta individuata dai due punti:

$$\begin{array}{lllllll} z^1 = 1, & z^2 = v^2, & z^3 = 0, & z^4 = 2uv, & z^6 = 2u, & z^7 = 0, & z^5 = v \\ z^1 = 0, & z^2 = 2uv, & z^3 = 1, & z^4 = u^2, & z^6 = 0, & z^7 = 2v, & z^5 = u. \end{array}$$

Si verifica subito che questa retta appartiene all'assoluto Q di equazioni (1.5), cioè che effettivamente la superficie è isotropa. Segue anche senza calcoli che per essa $S(2) \equiv S_5$ perchè per es. una sua proiezione è la superficie di VERONESE. Sulla F^7 esistono due sistemi di coniche, proiezioni dei due sistemi di cubiche di F^9 passanti per A_8 o per A_9 (sono le curve rappresentate da $u = \text{cost.}$, o da $v = \text{cost.}$; è comune a questi due sistemi la retta $z^0 = z^1 = z^3 = z^6 = z^7 = z^5 = 0$ immagine della cubica per $A_8 A_9$). Naturalmente le rette all'infinito dei piani di quelle coniche, rette rappresentate per le curve $v = k$ dalle equazioni

$$z^0 = 0, \quad z^3 = 0, \quad z^7 = 0, \quad z^5 = kz^1, \quad z^4 = kz^6, \quad z^2 = k^2 z^1$$

(e analogamente per $u = k$) appartengono a Q.

Ciò può esprimersi dicendo che: i due sistemi di coniche appartengono a piani isotropi o sono totalmente isotrope. Il PINL si esprime (l. c. pag. 28) dicendo che esse sono 2-isotrope: ma è chiaro che l'esser piane e 2-isotrope porta che stanno in piani isotropi (cioè le cui rette improprie appartengono all'assoluto). Anzi basta che una curva piana sia isotropa (1-isotropa) perchè il suo piano sia isotropo nel senso ora specificato: ed anche questo è evidente.

Lo $S(2) \equiv S_5$ osculatore nel punto (u, v) di F^7 ha le equazioni (Z^i coordinate correnti)

$$\begin{aligned} Z^2 + v^2 Z^1 + 2uvZ^3 - 2vZ^5 - uZ^7 &= uv^2 Z^0 \\ Z^4 + u^2 Z^3 + 2uvZ^1 - 2uZ^5 - vZ^6 &= u^2 v Z^0. \end{aligned}$$

Tutti questi S_5 incontrano sia la retta $Z^1 = Z^3 = Z^4 = Z^5 = Z^6 = Z^0 = 0$ (nel punto per cui $Z^2 : Z^7 = u : 1$) sia la retta $Z^1 = Z^2 = Z^3 = Z^5 = Z^7 = Z^0 = 0$ (nel punto per cui $Z^4 : Z^6 = v : 1$): e ciò è chiaro se si pensa che ciascun S_5

osculatore alla F^9 di S_9 taglia in un punto ogni piano ad essa tangente; in particolare quelli tangenti in A_8 e in A_9 che si proiettano nelle due rette considerate.

2. Chiarita la natura di F^7 in S_7 passiamo alla proiezione in S_5 considerata dal Pinl. Nelle nostre notazioni essa si ottiene proiettando la F^7 dai punti A_6A_7 sullo S_5 dei punti $A_0, \ldots, A_5$. Conviene riscrivere le equazioni di F^7 in parametri omogenei $u:v:w$

$$z^0 = w^3, \quad z^1 = uw^2, \quad z^2 = uv^2, \quad z^3 = vw^2, \quad z^4 = vu^2, \quad z^6 = u^2w, \quad z^7 = v^2w, \quad z^5 = uvw.$$

Sulla linea

$$v = 0, \quad z^2 = z^3 = z^4 = z^7 = z^5 = 0 \quad \text{e} \quad z^0 = w^3, \quad z^1 = uw^2, \quad z^6 = u^2w$$

cioè

$$z^0 = w^2, \quad z^1 = uw, \quad z^6 = u^2$$

si trova per $w = 0$ il punto A_6; e così sulla $u = 0$ per $w = 0$ il punto A_7. Sicchè i due punti appartengono alla F^7 e la proiezione su S_5 è quindi una $F_2{}^5$.

Del resto le equazioni

$$z^0 = w^3, \quad z^1 = uw^2, \quad z^2 = uv^2, \quad z^3 = vw^2, \quad z^4 = vu^2, \quad z^5 = uvw$$

mostrano che la superficie di S_5 rappresenta le cubiche piane tangenti alle rette $u = 0$ e $v = 0$ nei punti di $w = 0$. O anche, considerando la superficie di S_5 come proiezione della $F_2{}^9$ di S_9 dai punti $A_6A_7A_8A_9$, basta notare che le rette A_7A_9 ed A_6A_8 sono tangenti (in A_9 e risp. in A_8) alla $F_2{}^9$ per arrivare alla stessa conclusione.

Anzi si vede così immediatamente che la $F_2{}^5$ di S_5 possiede ***tre*** distinti sistemi ∞^1 di coniche; essi sono le proiezioni dei seguenti sistemi di curve su $F_2{}^9$: 1°) C^3 per A^8; 2°) C^3 per A^9; 3°) C^6 tangenti in A_8 ad A_6A_8 e in A_9 ad A_7A_9.

3. Questi tre sistemi di coniche sono rappresentati su $F_2{}^5$ dalle equazioni:

$$u = k_1w, \quad v = k_2w, \quad uv = k_3w^2.$$

Essi costituiscono, come ha osservato il Pinl, i sistemi di *linee principali* di F_2^5. Anche questo fatto è geometricamente chiaro. Ricordo che, secondo una definizione da me data di quelle linee (1), per una tangente principale (e soltanto per queste) si possono condurre curve il cui S_3 osculatore coin-

(1) E. Bompiani: *Sopra alcune estensioni dei teoremi di Meusnier e di Eulero* (« Atti R. Accad. di Torino », vol. 48, 1912-13, p. 393-410).

cida con lo $S_3 \equiv S(2,1)$ contenente il piano tangente e il piano osculatore ad una qualsiasi curva della superficie avente quella tangente. Ora è evidente che tal condizione è sempre soddisfatta per una curva piana; quindi è certo che i tre sistemi di coniche di F^5 ne sono sistemi di linee principali. Ma si vede anche che i due primi sistemi sono doppi e l'ultimo semplice, sicchè essi esauriscono i cinque sistemi di linee principali della superficie. Riprendiamo perciò in esame la F^9 di S_9. I piani tangenti alla superficie nei punti di una C^3 stanno in uno S_6 (che può pensarsi come quello di due C^3 infinitamente vicine). Se C^3 passa per A_8, il relativo S_6 contenendo la tangente A_6A_8 si proietta, quando si passa alla F^5, in un S_4 che contiene tutti i piani tangenti ad F^5 nei punti della C^2 proiezione di C^3. Sicchè questa C^3 è tale che v'è un S_4 tangente ad F^5 in tutti i suoi punti: allora, per un mio teorema [1], il sistema di queste C^2 assorbe *due* sistemi di linee principali; e poichè altrettanto accade per il sistema di C^2 che si ha proiettando quelle delle C^3 per A^9 è dimostrato quanto si voleva.

4. Analiticamente, l'equazione differenziale delle linee principali di F^5 è, fatto $w=1$:

$$d(uv)\cdot(du)^2(dv)^2=0$$

e conferma quanto precede.

L'assoluto di S_5 (nelle coordinate z^i) ha le equazioni

$$z^0=0,\quad z^1z^2+z^3z^4-(z^5)^2=0.$$

I piani delle coniche del primo sistema, di equazioni

$$z^1=kz^0,\quad z^4=k^2z^3,\quad z^5=kz^3$$

hanno le loro rette improprie ($z^0=0$) sull'assoluto; e così quelli del secondo sistema.

Le coniche del terzo sistema, rappresentate da

$$z^0=vw,\quad z^1=kw^2,\quad z^2=kv^2,\quad z^3=v^2,\quad z^4=k^2w^2,\quad z^5=kvw$$

hanno due impropri *distinti* (per $v=0$ e per $w=0$) sull'assoluto ed appartengono ai piani

$$z^5=kz^0,\quad z^4=kz^1\quad z^2=kz^3;$$

le rette improprie di qnesti non appartengono all'assoluto e non gli sono tangenti.

---

[1] E. Bompiani-E. Bortolotti: *Ricerche sulle superficie nello spazio a cinque dimensioni e nuove caratterizzazioni della superficie di Veronese* (« Math. Zeitschr. », Bd. 42, 1937, p. 411-429); p. 415, I.

I precedenti fatti proiettivi possono enunciarsi dicendo che *i due sistemi doppi di linee principali sono costituiti da coniche totalmente isotrope e quello semplice da cerchi.*

Il PINL afferma invece (¹) che i primi due sistemi sono costituiti da linee 2-isotrope e l'ultimo da curve piane ipersferiche (cioè appunto cerchi) con normali principali isotrope il che evidentemente non è.

5. È pure proiezione della medesima F^7 di S_7 sopra uno S_5 l'altra superficie data dal PINL (²)

$$x^1 = \frac{v}{2}(1-u^2), \quad x^2 = \frac{v}{2i}(1+u^2), \quad x^3 = \frac{1}{2}(u^2+v^2), \quad x^4 = \frac{v}{2i}(2u+\sqrt{2}v)$$

$$x^5 = \pm v\left(\sqrt{2}u + \frac{v}{2}\right)$$

che è una trasformata proiettiva (quindi identica ad essa quando se ne studiano le proprietà proiettive) della superficie (scambiando in essa u con v)

$$z^0 = 1, \quad z^1 = u, \quad z^2 = uv^2, \quad z^5 = uv, \quad z^6 = u^2, \quad z^7 = v^2;$$

e questa è una proiezione della F^9 già considerata dai punti $A_3 A_4 A_8 A_9$ (o della F^7 dai punti A_3, A_4) (³).

Nelle coordinate z^i l'equazione differenziale delle linee principali si forma quasi a vista e dà

$$du^2 dv^2 (udv - vdu) = 0.$$

Quindi sono linee principali, e formano due sistemi *doppi,* i sistemi di coniche $u = \text{cost.}$ e $v = \text{cost.}$ (proiezioni come nel caso precedente delle cubiche di F^9 per A_8 e A_9) e inoltre le curve $v = ku$ ($k = \text{cost.}$), cioè

$$z^0 = 1, \quad z^1 = u, \quad z^2 = k^2 u^3, \quad z^5 = ku^2, \quad z^6 = u^2, \quad z^7 = k^2 u^2$$

che sono cubiche (razionali normali). Sicchè:

Le linee principali della superficie in esame si distribuiscono in due sistemi, ciascuno doppio, di coniche e in un sistema di cubiche (razionali normali in S_3 *dello* S_5*).*

(¹) W-II, p. 29.

(²) W-II, p. 32, equazioni (43).

(³) La superficie in esame rappresenta le cubiche piane passanti per un punto assegnato con data tangente e aventi in comune il punto tangenziale di quello: di più le coniche polari di questo tangenziale (rispetto a tutte le cubiche del sistema) passano tutte per un altro punto fisso (oltre i due dati). La superficie è del 6° ordine (tre dei nove punti d'intersezione di due cubiche del sistema sono fissi al variare di queste).

Lo S_3 della cubica $v = ku$ è quello di equazioni $z^5 = kz^6$, $z^7 = k^2 z^6$ mentre lo S_4' tangente fisso lungo essa ha l'equazione

$$z^7 - 2kz^5 + k^2 z^6 = 0.$$

Invece dell' ultimo sistema il Pinl trova (¹) un sistema non meglio specificato di curve appartenenti ad un S_4 *fisso* (come se ciò fosse compatibile con l'*appartenenza* della superficie ad un S_5 !!).

6. È pure una proiezione della F^9 di S^9 l'altra superficie considerata dal Pinl (²) di cui non sto a riscrivere le equazioni, ma che si vede facilmente esser proiettivamente identica a quella di equazioni

$$z^0 = 1, \quad z^1 = u, \quad z^2 = uv^2 + \frac{1}{3}u^3, \quad z^3 = v, \quad z^4 = u^2 v - v^3,$$
$$z^5 = uv, \quad z^6 = u^2, \quad z^7 = v^2,$$

Basta proiettare la F^9 sullo $S_7 : z^8 = z^9 = 0$ dalla retta dello S_3 dei punti $A_2 A_4 A_8 A_9$ che ha in esso le equazioni $z^8 = -3z^2$, $z^9 = z^4$; lo S_3 sega F_2^9 in una $C^3(w = 0)$ che non è incontrata da questa retta: quindi la superficie in esame è ancora una $\overline{F}^9$ (di S^7).

La proiezione di questa considerata dal Pinl, sopra lo S_5 $z^1 = z^2 = 0$ dalla retta $A_1 A_2$, cioè di equazioni

$$z^0 = 1, \quad z^3 = v, \quad z^4 = u^2 v - v^3, \quad z^5 = uv, \quad z^6 = u^2, \quad z^7 = v^2$$

ha $S(2) \equiv S_5$ e rappresenta le cubiche piane passanti per tre punti fissi distinti allineati (su $w = 0$; $v = 0$, $u = \pm v$) e tali inoltre che le coniche polari di uno determinato di questi (1, 0, 0) rispetto a tutte le cubiche del sistema passino per un altro punto fisso (0, 0, 1) non allineato con quelli. La superficie è quindi del 6° ordine.

L'equazione differenziale delle sue linee principali è (³):

$$dv^2(udv - vdu)(du^2 - dv^2) = 0$$

(¹) W-II, p. 34. Le curve considerate dal Pinl stanno effettivamente in S_4, però *variabile* da curva a curva, e sono quartiche razionali normali. È quindi errata anche l'equazione (55) del Pinl, cioè lo sono i calcoli che la precedono: il che è del tutto comprensibile data la complicazione della rappresentazione di cui si serve il Pinl. Bastava rendersi conto del carattere proiettivo della questione e passare alla rappresentazione qui adottata della superficie per rendere i calcoli immediati.

(²) W-II, p. 34, equazioni (60).

(³) Il Pinl non dà l'equazione delle linee principali a causa della complicazione del calcolo (rechnerische Kompliziertheit). Con la rappresentazione precedente esso diventa immediato.

quindi i sistemi di linee principali sono:

1°) il sistema, *doppio,* delle *coniche* $v = \text{cost.}$

2°) i *due* sistemi di *coniche* $v = \pm u + c$ (c costante) di equazioni

$$z^0 = 1, \quad z^3 = \pm u + c, \quad z^6 = u^2, \quad z^5 = (\pm u + c)u, \quad z^7 = (\pm u + c)^2$$
$$z^4 = -c(2u^2 \pm 3cu + c^2)$$

appartenenti ai piani dei due sistemi

$$z^5 = \pm (z^6 + cz^3 - c^2 z^0), \quad z^7 = z^6 + 2cz^3 - c^2 z^0, \quad z^4 = -2cz^6 - 3c^2 z^3 + 2c^3 z^0;$$

lungo una di queste linee la superficie *non* ha S_4 tangente fisso: i due piani corrispondenti ad uno stesso valore di c stanno in uno S_3 e le rette caratteristiche di questi S_3 (al variare di c) stanno in un cono cubico ($z^6 = 0$, $z^3 = cz^0$, $z^7 = c^2 z^0$, $z^4 = -c^3 z^0$).

3°) il sistema (semplice) delle *cubiche* $v = ku$ di equazioni:

$$z^0 = 1, \quad z^3 = ku, \quad z^4 = ku^3 - k^3 u^3, \quad z^5 = ku^2, \quad z^6 = u^2, \quad z^7 = k^2 u^2$$

negli S_3 $z^7 = kz^5 = k^2 z^6$ passanti per il piano $z^7 = z^5 = z^6 = 0$; lungo ciascuna di queste linee le superficie ha un S_4 tangente fisso, di equazione $z^7 - 2kz^5 + k^2 z^6 = 0$.

Si ha qui dunque un esempio di superficie con un sistema (doppio) di coniche ed uno di cubiche sghembe che sono linee principali e lungo le quali la superficie ha S_4 tangente fisso: mentre questo fatto *non* accade per gli altri due sistemi di linee principali, che pure sono coniche.

7. Un analogo esame, di carattere proiettivo, potrebbe farsi in relazione ad altri esempi di superficie isotrope portati dal Lense e dal Pinl.

Ma qui voglio limitarmi a portare invece l'attenzione su circostanze speciali che si presentano in alcuni di essi appresso esaminati.

Si tratta del fatto che il $ds^2 \equiv 0$ di una superficie isotropa risulti somma di due, o più, quadrati di elementi lineari ciascuno dei quali risulti identicamente nullo; per es. $ds^2 = ds_1^2 + ds_2^2$ con $ds_1^2 \equiv 0$, $ds_2^2 \equiv 0$. Le due superficie alle quali si riferiscono il ds_1^2 e il ds_2^2 sono già superficie isotrope.

Quando si presenta questa circostanza eccezionale *la corrispondenza fra le due superficie proiezioni col* ds_1^2 *e* ds_2^2 *rimane del tutto arbitraria,* a differenza del caso generale di cui essa è determinata.

Se ciò accade, cioè se si prendono in considerazione superficie isotrope con ds^2 spezzato in due o più parti anch'esse isotrope non c'è nemmeno bisogno che il ds_1^2 e il ds_2^2 si riferiscano a superficie (data l'arbitrarietà della corrispondenza) ma uno o anche tutt'e due possono riferirsi a linee.

Supponiamo per es. che l'ambiente (euclideo) di una superficie isotropa sia un S_n, e che il suo ds^2 si spezzi in un ds_1^2 relativo alle $n-2$ coordinate $x^{i'}(u, v)$, $i' = 1, \ldots, n-2$ e in un ds_2^2 relativo alle coordinate rimanenti; e che sia $ds_1^2 \equiv 0$ e $ds_2^2 \equiv 0$. Se lo S_{n-2} del ds_1^2 è euclideo (cioè il suo S^*_{n-3} improprio non risulta tangente all'assoluto Q (che rappresentiamo sempre con $\sum_1^n (x^i)^2 = 0$) altrettanto accade del piano ortogonale in cui è dato ds_2^2. Ma per essere questo isotropo non può riferirsi che ad una retta isotropa; quindi, qualunque sia la corrispondenza che si pone fra i punti della superficie di S_{n-2} e i punti della retta isotropa per costruire la superficie di S_n questa risulta sempre appartenente non già ad S_n ma allo S_{n-1} congiungente S_{n-2} col punto improprio di quella retta isotropa. In questo S_{n-1}, il cui S^*_{n-2} risulta tangente a Q, vige una metrica che non è euclidea (infatti il suo assoluto è degenere).

Come altro esempio prendiamo in S_h e S_k ortogonali di $S_n (h + k = n$; $h, k \geq 3)$ due curve isotrope (con $ds_1^2 \equiv 0$, $ds_2^2 \equiv 0$); esse definiscono una superficie isotropa con un doppio sistema coniugato associando (cioè scrivendo uno dopo l'altro) i due gruppi di coordinate cioè, più geometricamente, proiettando dagli S^*_{h-1} e S^*_{k-1} impropri di S_h e di S_k i punti delle due curve (da S^*_{h-1} la curva di S_k e vic.) e prendendo i punti d'intersezione degli S_h ed S_k proiettanti: per questa superficie, con $S(2) \equiv S_4$, la seconda forma fondamentale è in generale riducibile al tipo $adu^4 + bdv^4$ (ed è di questo tipo se nessuna delle due curve date è 2-isotropa), mentre è riducibile al tipo bdv^4 se una delle curve è 2-isotropa (e si avrebbe una superficie 2-isotropa se le due curve fossero 2-isotrope).

Analoghe considerazioni possono farsi per le varietà isotrope quando il loro $ds^2 \equiv 0$ si spezzi nella somma di più ds_1^2 già essi stessi nulli, cioè riferentesi anch'essi a varietà isotrope proiezioni della varietà data. La circostanza eccezionale dal punto di vista geometrico che qui si presenta è sempre l'indeterminazione della corrispondenza fra le varietà proiezioni, che possono anche essere di dimensioni differenti.

Esaminiamo ora gli esempi del PINL.

8. Nell'esempio dato dal PINL (¹) di una superficie isotropa di S_8 con $S(2) \equiv S_5$ osculatore e un sistema triplo (e uno semplice) di linee 2-isotrope,

(¹) M. PINL: *Zur Existenztheorie und Klassifikation totalisotroper Flächen* (« Compositio Mathematica », vol. 5, 1937, p. 208-238); si vedano le equazioni (89) a p. 230. L'altro esempio, esaminato qui al n. 9. è dato con le equazioni (105). In questo lavoro il PINL distribuisce le superficie 1-isotrope in più classi a seconda che i 4 sistemi di linee 2-isotrope, date dall'andi cui trascrivo le equazioni così:

$$x^1 = \frac{1}{2}(u - u^2v - kv), \quad x^2 = \frac{1}{2i}(u + u^2v + kv)$$

$$x^3 = \frac{1}{2}\left(v - \frac{u^3}{3} + ku\right), \quad x^4 = \frac{1}{2i}\left(v + \frac{u^3}{3} - ku\right)$$

$$x^5 = \frac{u^2}{4} + uv, \quad x^6 = \frac{1}{i}\left(\frac{u^2}{4} - uv\right)$$

$$x^7 = \frac{v^2}{2}, \quad x^8 = \frac{v^2}{2i} \quad (x^0 = 1)$$

stacchiamo le prime sei coordinate $(x^1, \dots, x^6)$ dalle ultime (x^7, x^8).

Le prime rappresentano una rigata isotropa in S_6, $ds_1{}^2 = 0$; le ultime due, nel piano cartesiano $(x^7 = x,\ x^8 = y)$ una *retta isotropa* $x = iy$. La superficie *appartiene* ad un S_7 (proiettivo) rappresentato nello $S_8(x^1, \dots, x^8)$ dall'equazione $x = iy$; questo S_7 è tangente all'assoluto (euclideo) di S_8 nel punto $(0, \dots, 0, i, 1)$ quindi l'assoluto subordinato dal precedente entro S_7 è un cono con vertice in quel punto (e perciò la metrica entro S_7 *non* è euclidea).

Ma in realtà la scelta di x^7 (quindi di $x^8 = -ix^7$) è del tutto superflua e artificiosa: perchè ciò che è essenziale in questo caso *non* è quella particolare superficie ma il cono V_3 che proietta dal punto segnalato la superficie di S_6: *è questo cono*, la cui rappresentazione parametrica è fornita dalle $x^1, \dots, x^6$ precedenti e da $x^7 = w$, $x^8 = -iw$ con w nuova variabile indipendente da u, v, *che è isotropo*, e quindi qualsiasi superficie tracciata su di esso (e che dal vertice si proietti nella superficie di S_6) è isotropa.

---

nullarsi della seconda forma fondamentale sono: (I) tutti coincidenti; (II) coincidono a coppie; (III) tre coincidenti e uno distinto da essi; (IV) due coincidenti e due distinti fra loro e da quelli; (VII) tutti distinti (e in particolare: (V) in ciascun punto formano gruppo armonico o (VI) equianarmonico). Indi esamina queste superficie in rapporto alla dimensione dello $S(2)$ osculatore e costruisce esempi negli spazî euclidei di dimensione minima che possono contenere superficie dei varî tipi.

Alle superficie isotrope che, nel linguaggio di questa teoria, hanno alcuni sistemi multipli di linee 2-isotrope è dedicato (per ν qualsiasi e non solo per $\nu = 1$) il Cap. II della Parte III della mia Memoria dell'Accademia d'Italia (1935) (dal titolo: *Deformazioni di specie ν con linee a ν-esime curvature invarianti multiple*); sicchè, come ha notato il LENSE («Math. Ann.», 1939) i risultati relativi alla classificazione del PINL seguono dai miei quando si specifichi la dimensione dell'ambiente (il PINL, che pure cita la mia Memoria, non fa cenno di questo fatto).

Quanto al criterio di classificazione esso è certo legittimo, ma se si accettano come tipi (meglio: sottotipi di VII) quelli V e VI non vedo perchè non si potrebbe aggiungere un altro tipo (più generale di V e VI e meno di VII): quello delle superficie tali che l'invariante assoluto delle 4 tangenti in un punto che annullano la seconda forma sia costante al variare del punto sulla superficie.

Una tale superficie è rappresentata da $w = \varphi(u, v)$. E si noti che *qualunque sia* $\varphi(u, v)$, *sempre la sua seconda forma fondamentale coincide con quella della rigata di* S_6 (quindi nemmeno da questo punto di vista si giustifica la particolare scelta di x^7, x^8 fatta dal PINL). Infatti la seconda forma è

$$\| x_{uu} du^2 + 2x_{uv} du dv + x_{vv} dv^2 \|^2$$

e i suoi coefficienti sono formati con i simboli principali del 2° ordine $(p + q = 2,\ r + s = 2)$

$$[pqrs] = \sum_1^8{}_i \frac{\partial^2 x^i}{\partial u^p \partial u^q} \frac{\partial x^i}{\partial u^r \partial u^s} = \sum_1^6{}_{i'} \frac{\partial^2 x^{i'}}{\partial u^p \partial u^q} \frac{\partial^2 x^{i'}}{\partial u^r \partial u^s}$$

eliminandosi i due termini analoghi in x^7 e x^8, qualunque sia φ.

Se si osserva che essendo la superficie di S_6 rigata sono nulli, fra i simboli precedenti, quelli contenenti la coppia 02 (per la linearità in v delle $x^{i'}$) e che le cubiche $v = \text{cost.}$ sono totalmente isotrope (e basterebbe che fossero 2-isotrope) sicchè $[2020] = 0$ risulta senza alcun calcolo che la seconda forma si riduce (come trova il PINL) a $4[2011] du^3 dv = 4 du^3 dv$ (1).

(1) Nella mia Memoria dell'Accademia d'Italia (1935), al n. 13, p. 378, è dato un teorema per le deformazioni di specie ν, che per $\nu = 1$ e nel linguaggio delle superficie isotrope si particolarizza così:

Le superficie isotrope di S_6 o di S_7 con un sistema triplo di curve 2-isotrope e l'altro (semplice) distinto da esso sono necessariamente rigate e il sistema triplo è costituito dalle generatrici.

Questo risultato potrebbe apparire in contrasto con l'esempio ora esaminato del PINL (perchè per le rigate non sviluppabili è $S(2) \equiv S_4$, mentre in quest'esempio è $S(2) \equiv S_5$). *Non esiste alcuna contraddizione fra i due risultati* perchè la metrica da me assunta in S_6 o in S_7 è quella *euclidea*, mentre come s'è dimostrato ora, quella del PINL nell'ambiente S_7 della sua superficie *non* è *euclidea* (la quadrica assoluto è degenere).

Si capisce che si potrebbe fare una teoria delle superficie (e varietà) isotrope in una metrica diversa da quella euclidea; in particolare, come accade nell'esempio del PINL, prendendo nello S_n una quadrica degenere in un suo S^*_{n-1} (improprio). Se questa è un cono di prima specie (e analogamente potrebbe farsi per qualsiasi specie) ci si riduce con una proiezione dalle superficie isotrope in questa metrica a quelle isotrope in una metrica euclidea di un S_{n-1}; e ogni superficie sul cono proiettante una superficie euclidea-isotropa di S_{n-1} è isotropa nella metrica euclidea di S_n (e infatti nell'esempio del PINL se si proietta la superficie dal vertice del cono sopra uno S_6 si ottiene appunto una rigata in accordo col mio teorema citato).

D'altra parte è vero che si può sempre pensare un S_{n+1} per S_n e in uno S^*_n per S^*_{n-1} contenuto in S_{n+1} una quadrica non degenere Q che tocchi S^*_{n-1} e sia tagliata da esso nel cono di prima; ma quest'ampliamento di S_n in S_{n+1} e la scelta di Q sono del tutto arbitrarii.

Per questa ragione l'esempio del PINL può sembrare, per lo meno, poco soddisfacente. Una costruzione di superficie isotrope *appartenenti* ad S_8 e con un sistema triplo di linee 2-isotrope è data appresso (n. 12).

9. Un' analisi simile può essere fatta per l'esempio di cui riscrivo le equazioni così (k *costante* $\neq \pm i$):

$$
\begin{aligned}
x^1 &= \frac{1}{2}\left(u - \frac{u^3}{3} - kv\right), & x^2 &= \frac{1}{2i}\left(u + \frac{u^3}{3} + kv\right) \\
x^3 &= \frac{1}{2}\left(v + \frac{v^3}{3} + ku\right), & x^4 &= \frac{1}{2i}\left(v - \frac{v^3}{3} - ku\right) \\
x^5 &= \frac{1}{8}(5u^2 - 3v^2), & x^6 &= \frac{1}{8i}(5v^2 - 3u^2) \\
x^7 &= \frac{1}{2}\left(\frac{u^2}{4} + 2uv + \frac{v^2}{4}\right), & x^8 &= \frac{1}{2i}\left(\frac{u^2}{4} + 2uv + \frac{v^2}{4}\right).
\end{aligned}
$$

Anche qui la superficie appartiene allo S_7: $x^7 = ix^8$ con le stesse circostanze già esaminate. La superficie rappresentata da $x^1, \ldots, x^6$ è già isotropa nel suo S_6; e la scelta di x^7, x^8 può essere sostituita dall'altra $x^7 = \varphi(u, v)$, $x^8 = -i\varphi$.

La superficie di S_6, proiettivamente identica all'altra

$$z^0 = 1, \quad z^1 = u, \quad z^2 = v, \quad z^3 = u^2, \quad z^4 = v^2, \quad z^5 = u^3, \quad z^6 = v^3$$

(quindi proiezione della solita F^9 di S_9) possiede il doppio sistema coniugato (u, v) poichè $\frac{\partial^2 z^i}{\partial u \partial v} = 0$; affinchè la superficie di S_7 *non* possegga un sistema coniugato, cioè $S(2) \equiv S_5$, occorre e basta che sia $\varphi_{uv} \neq 0$: e, salva questa condizione, la φ può scegliersi arbitrariamente e sempre si ha una superficie isotropa di S_7 con $S(2) \equiv S_5$. Anche qui ciò che è essenziale *non* è la superficie ma il *cono* V_3 *isotropo* che proietta la superficie di S_6 da $(0, \ldots, 0, i, 1)$.

Su questa le cubiche $v =$ cost. e $u =$ cost. *non* sono 2-isotrope, quindi $[2020] \neq 0$, $[0202] \neq 0$ e si calcola a vista (basta tener presenti x^5 e x^6 le quali soltanto portano un contributo non nullo) che questi simboli valgono 1 e -1; per l'esistenza del doppio sistema coniugato sono nulli gli altri simboli principali del 2° ordine; quindi la seconda forma fondamentale è $du^4 - dv^4$. Le curve 2-isotrope della superficie di S_6 sono cubiche sghembe.

10. Quanto al metodo con cui il PINL ottiene gli esempi dirò che in alcuni casi si serve della mia superficie figurativa relativa a due superficie note fra loro applicabili; in altri dell'integrazione di particolari sistemi pfaffiani. Ma come ho mostrato nella conferenza di Baden-Baden si possono costruire esempi di superficie (e varietà) isotrope (e non soltanto 1-isotrope, ma di qualsiasi specie anche > 1) contenenti quante si vogliono costanti arbitrarie (ed anche funzioni arbitrarie) senza alcuna operazione d'integrazione.

Mi riservo di pubblicare in seguito il metodo allora esposto; a scanso di equivoci, noto esplicitamente che, per quanto grande sia l'arbitrarietà degli integrali così costruiti, non è con ciò certo esaurita l'integrazione della $ds^2 = 0$ (e delle analoghe equazioni per le superficie e varietà isotrope di di specie superiore) in due o più variabili.

11 Il LENSE ha considerato varietà isotrope luoghi di ∞^1 spazi lineari costruite come segue [1]. Si consideri in S_n uno spazio euclideo $S^{(1)}$ (la cui dimensione non occorre fissare per ora, purchè in esso siano possibili le costruzioni seguenti) e in esso una curva 2-isotropa C' (rispetto alla quadrica non degenere Q' che l'assoluto Q determina in esso); poi un $S^{(2)}$ nello spazio di dimensione massima ortogonale ad $S^{(1)}$ ed in esso una curva 2-isotropa $C^{(2)}$; e così di seguito fino ad un $S^{(m-1)}$ e ad una curva $C^{(m-1)}$ in esso pure 2-isotropa.

Se $z_s(u)$ è il vettore rappresentante $C^{(s)}$ si prenda il vettore $y_s = z'_s(u)$ e si consideri la V_m rappresentata in S_n dal vettore

$$x = y(u) + \sum_{1}^{m-1}{}_s u_s y_s(u)$$

con le ulteriori condizioni $y'^2 = 0$ (cioè la curva C descritta da y è isotropa) e $y'y_s = 0$, $y'y'_s = 0$. È evidente che la V_m così generata è isotropa. Naturalmente n deve essere abbastanza grande perchè si possano eseguire in esso le costruzioni precedenti.

In realtà le curve $C^{(s)}$ non intervengono nella costruzione che attraverso gli elementi da esse determinati sullo S^*_{n-1} improprio di S_n. Sicchè la costruzione può esporsi più geometricamente così.

Si prendano più spazi (non tangenti all'assoluto Q) in S^*_{n-1} fra loro indipendenti e tali che ciascuno sia polare dello spazio congiungente i rimanenti; e in ciascuno si prenda una curva che appartenga con le sue tangenti a Q (s'intende che questa condizione limita inferiormente la dimensione di quegli spazi). Fra i punti di queste curve $\gamma', \dots, \gamma^{(m-1)}$ si dia una corrispondenza (fissata ad arbitrio) e si consideri lo spazio lineare congiungente le tangenti ad esse in un gruppo di punti corrispondenti e di questo spazio quello polare rispetto a Q; e si fissi ad arbitrio un punto di questo spazio polare su Q: questo punto si dirà corrispondente al gruppo di partenza e al variare del gruppo su $\gamma' \dots \gamma^{(m-1)}$ descriverà una curva γ.

Sia ora C una curva di S_n la cui sviluppabile abbia γ come linea impropria: si corrispondono punti di C e di γ situati sopra una tangente a C,

[1] Si vedano i *Beiträge* già citati, § 4, p. 126.

quindi punti di C e gruppi di punti su $\gamma' \dots \gamma^{(m-1)}$. La varietà descritta dagli S_{m-1} congiungenti un punto di C e il corrispondente gruppo è quella richiesta.

Che la V_m sia isotropa risulta da ciò che lo spazio considerato congiungente le tangenti in un gruppo di punti corrispondenti di $\gamma' \dots \gamma^{(m-1)}$ e così anche quello che lo congiunge al punto corrispondente di γ appartiene a Q (per le relazioni di polarità): e su questi spazi stanno i punti impropri delle tangenti a γ.

Per rendersi conto della dimensione (piuttosto alta) dello spazio S_n cui dà luogo questa costruzione consideriamo il caso di due sole γ', γ''.

L'appartenenza di γ' a Q con le sue tangenti porta che γ' potrà essere una retta di Q: supponiamo dunque (ed è l'ipotesi che dà luogo alla dimensione minima per l'ambiente) che γ' e γ'' siano rette di Q. Il minimo spazio contenente γ' e *non* tangente a Q dovrà essere un S_3 (se fosse un S_2 riuscirebbe tangente); poichè altrettanto accade per γ'' dovrà lo spazio di Q essere un S_7^*, cioè $S_n \equiv S_8$: questo è il minimo spazio euclideo contenente una V_3 costruita come sopra. Vediamo però quale sia lo spazio (proiettivo) d'appartenenza della V_3. Lo spazio congiungente i punti e le tangenti corrispondenti di γ' e γ'' è lo S_3 di queste due rette il quale appartiene a Q ed è quindi autopolare. Ne segue che γ è una curva (arbitraria) di questo S_3; quindi C, e così tutta la V_3, sta in S_4 per lo S_3. Lo spazio d'appartenenza ha dimensione 4 (e non 8).

Il caso immediatamente successivo si ha quando per es. γ' sia una retta e γ'' una curva sopra una quadrica di S_4 (cui appartengono anche le tangenti). Q sta in S_8 e $S_n \equiv S_9$. Gli S_3 per γ' e per le tangenti a γ'' hanno S_4 polari, rispetto a Q, nello S_6 polare di γ' il quale contiene lo S_4 di γ'': sicchè γ, γ', γ'' stanno in questo S_6; e perciò C e quindi V_3 stanno in uno S_7. Anche in questo caso lo spazio d'appartenenza di V_3 ha dimensione inferiore a quella dello spazio euclideo in cui giace.

Solo in S_n per $n \geq 10$ si possono avere col procedimento del LENSE varietà V_3 isotrope di piani che abbiano S_n (euclideo) per spazio di appartenenza.

Una ricerca analoga potrebbe farsi nel caso di una V_m (cioè di più curve).

12. Qualora si volessero costruire le V_3 isotrope luogo di ∞^1 piani (senza restringersi a quelle precedenti) bisognerebbe sempre cominciare dall'analisi dei caratteri proiettivi. Precisamente due piani infinitamente vicini del sistema (e quindi gli S_3 tangenti nei punti di un piano) o stanno in uno S_3, o in uno S_4 o in uno S_5. Lasciando da parte il primo caso (varietà sviluppabili), gli spazi impropri S_3^* o rispettivamente S_4^* di S_4 o di S_5 devono stare su Q; e due infinitamente vicini di questi debbono tagliarsi almeno in una retta (impropria di un piano del sistema).

Nel caso degli S_3^*, lo S_{n-1}^* deve essere almeno un S_7: perchè S_3 esistono già sulle quadriche (non degeneri) di S_7, e per una retta di esse ne passano ∞^1 (fra i quali vanno scelti due infinitamente vicini). Quindi la dimensione dell'ambiente dev'essere in questo caso $n \geq 8$.

Nel caso degli S_4^* dev'essere invece $n \geq 10$.

Non mi voglio indugiare nello studio di queste particolari varietà; ma voglio far notare (come risulta del resto dal calcolo del Lense, che vale non soltanto per le più particolari varietà di piani da lui costruite) che una superficie *generica* immersa in questa varietà, la quale seghi in curve (non rette) i piani di essa, ha $S(2) \equiv S_5$: perchè il fatto di possedere curve piane riguarda l'intorno del 3° ordine del punto sulla superficie (e così l'eventuale appartenenza di due piani infinitamente vicini ad un S_4) quindi non porta di necessità alcuna riduzione nella dimensione di $S(2)$.

E per una tal superficie con $S(2) \equiv S_5$ risulta pure geometricamente chiaro che tre dei quattro sistemi di linee 2-isotrope coincidono nel sistema di curve piane (cioè che la seconda forma fondamentale può ridursi al tipo $a du^3 dv$). Si riprenda allo scopo il ragionamento del § 1, n. 4. Lo S_4^* improprio dello $S(2) \equiv S_5$ in P contiene nell'ipotesi attuale un S_3^* di Q: quello improprio dello S_4 contenente i piani tangenti in P e nel punto infinitamente vicino della linea piana per esso (S_4 che io chiamo bitangente in P nella direzione data: è lo S_4 tangente al cono di Del Pezzo secondo lo $S_3 \equiv S(2, 1)$ relativo a questa). Ne segue che S_4^* taglia Q in due S_3^* e la loro intersezione è il piano improprio dello $S(2, 1)$ ora ricordato.

Il cono quadrico (sezione di quello di Del Pezzo) in S_4^* ha quindi in comune con Q un solo piano al di fuori dell'ultimo nominato (che ne assorbe tre); in corrispondenza (cioè per la proiettività ricordata al § 1, n. 4) si ha che la tangente alla linea piana in P assorbe tre delle tangenti 2-isotrope, mentre la rimanente è distinta da essa, come volevasi.

(Il ragionamento sull'intersezione dei due coni si segue forse meglio segandoli con un piano di S_4^* non incidente la retta vertice: si ha, come sezione di Q, una coppia di rette e, come sezione del cono di Del Pezzo, una conica tangente ad una di esse nel loro punto d'intersezione; risulta quindi evidente che in questo punto sono raccolte tre intersezioni, com'è detto sopra, e quindi che tre dei quattro sistemi di linee 2-isotrope coincidono nel sistema di curve piane).

Faccio osservare per chiudere che una tale superficie generica presa su una varietà del tipo esaminato esistente in S_8 (euclideo) fornisce un esempio di superficie con linee 2-isotrope triple *appartenente* ad S_8: ciò che non è per l'esempio del PINL esaminato al n. 8 nè per quelli costruibili col procedimento del LENSE (che dà superficie appartenenti ad S_n euclideo per $n \geq 10$).

§ 4. Alcuni teoremi sulle proiezioni di varietà isotrope.

1. Come ho già avuto occasione di ricordare (§ 1) il procedimento della varietà figurativa di una applicabilità di specie ν fra una V_k di S_n e una $\overline{V}_k$ di $S_{\overline{n}}$ fa passare da queste a una W_k di $S_N(N = n + \overline{n})$ ν-isotropa; e viceversa da W_k, per proiezioni da spazi ortogonali, a due varietà applicabili di specie ν, quando le proiezioni siano effettivamente di dimensione k (talchè per es. da due qualsiansi superficie fra loro applicabili di S_3 si deduce una superficie 1-isotropa di S_6 e da questa si deducono coppie di superficie applicabili, o anche superficie di S_4 applicabili sul piano euclideo: e di questo procedimento mi sono servito per es. per dimostrare, senza alcun calcolo, l'esistenza di un doppio sistema coniugato permanente in una deformazione di una superficie di S_3).

Il PINL, relativamente al solo caso $\nu = 1$, cioè per W_k con $ds^2 = 0$ ha considerato, per suggerimento del WINTERNITZ [1], la seguente operazione. Siano x^j, $j = 1, \ldots, N$ coordinate cartesiane dei punti di W_k e si ponga

$$\begin{aligned} x^j &= x^j(u^1, \ldots, u^k) && \text{per } j = 1, \ldots, N - k \\ x^{N-k+s} &= iu^s, && s = 1, 2, \ldots, k. \end{aligned}$$

La V_k descritta da x^j, $j \leq N - k$, è detta W-proiezione di W_k.

È chiaro che, *quando questa operazione abbia senso,* rientra come caso estremamente particolare in quanto io avevo già pubblicato nel 1935.

Ma l'operazione ha senso solo quando la proiezione di W_k sullo S_k $x^j = 0$, $j \leq N - k$, dà luogo ad una regione a k dimensioni (e non ad un numero minore) di S_k altrimenti le posizioni fatte non sono più lecite.

L'eventualità da escludere può invece benissimo presentarsi; per es. per $k = 2$ la proiezione ortogonale di W_2 su quel piano può essere una curva.

Anche le A-proiezioni e B-proiezioni del PINL rientrano nel mio procedimento generale.

2. Nella Nota *W-II* il PINL ha dato il seguente teorema [2]:

Ogni W-proiezione di una superficie isotropa di uno spazio euclideo

[1] W-I.
[2] In fine a pag. 24.

(complesso) S_7 con $S(2) \equiv S_5$ sopra un qualsiasi S_5 coordinato è una superficie di questo spazio con $S(2) \equiv S_5$.

Il teorema vale quando la retta impropria da cui si proietta non appartenga all'assoluto e quando la proiezione ortogonale della superficie sopra un piano avente per giacitura quella retta non sia una curva.

Alla dimostrazione del PINL ne sostituisco un'altra, più semplice, che prova il teorema più generale seguente:

Data in uno spazio euclideo $S_{n+2} (n \geq 5)$ *una superficie* σ *isotropa con* $S(2) \equiv S_5$, *la sua proiezione da una retta impropria di* S_{n+2} *che non appartenga all'assoluto* Q *sopra un qualsiasi* S_n *ortogonale a quella giacitura è una superficie con* $S(2) \equiv S_5$ *(purchè la proiezione ortogonale di* σ *su un piano avente quella giacitura non sia una linea).*

Indicando come già si è fatto con un asterisco elementi impropri di S_{n+2}, l'assoluto Q, lo $S_1{}^*$ di cui è parola e il suo S^*_{n-1} polare rispetto a Q si possono rappresentare con le equazioni:

$$Q: \qquad x^0 = 0, \quad \Sigma(x^i)^2 = 0$$
$$S_1{}^*: \qquad x^0 = x^1 = \ldots = x^n = 0$$
$$S^*_{n-1}: \qquad x^0 = x^{n+1} = x^{n+2} = 0$$

essendo $x^1, \ldots, x^{n+2}$ coordinate cartesiane ortogonali in S_{n+2} (e $x^0 = 1$ per l'omogeneità, in punti propri). Per l'ipotesi relativa alla proiezione di σ questa può rappresentarsi con le equazioni parametriche:

$$x^{i'} = x^{i'}(u, v), \quad i' = 1, \ldots, n, \quad x^{n+1} = u, \quad x^{n+2} = v; \tag{2.1}$$

e per l'ipotesi che σ sia isotropa sono nulli i simboli del 1° ordine

$$[1010] = [1001] = [0101] = 0 \tag{2.2}$$

e quelli dedotti del 2° ordine

$$[2010] = [2001] = [1110] = [1101] = [0210] = [0201] = 0 \tag{2.3}$$

costruiti per le x^i, $i = 1, \ldots, n$; mentre per l'ipotesi $S(2) \equiv S_5$ le x^i *non* sono soluzioni di equazioni a derivate parziali lineari omogenee del 2° ordine.

I simboli relativi alla proiezione σ' di σ descritta da $x^{i'}(u, v)$ s'indichino con un apice; si ha:

$$[1010]' + 1 = 0, \quad [1001]' = 0, \quad [0101]' + 1 = 0, \tag{2.4}$$
$$[2010]' = [2001]' = [1110]' = [1101]' = [0210]' = [0201]' = 0. \tag{2.5}$$

Se lo $S(2)$ relativo ad un punto generico di σ' *non* fosse un S_5 dovrebbe valere per le $x^{i'}$ almeno una relazione del tipo

$$\alpha x_{uu} + \beta x_{uv} + \gamma x_{vv} = a x_u + b x_v. \tag{2.6}$$

Se ciò fosse moltiplicando la precedente (scritta per $x^{i'}$), per $x^{i'}_u$, e poi per $x^{i'}{}_v$, e sommando rispetto ad i' si avrebbe:

$$\alpha[2010]' + \beta[1110]' + \gamma[0210]' = a[1010]' + b[0110]'$$
$$\alpha[2001]' + \beta[1101]' + \gamma[0201]' = a[1001]' + b[0101]'$$

cioè $a = 0$, $b = 0$. Ma in tal caso la (2.6) sarebbe soddisfatta da tutte le x^i, contro l'ipotesi $S(2) \equiv S_5$ per σ.

Il ragionamento fatto prova di più che *σ e σ' soddisfano alle stesse equazioni del 2° ordine* (nessuna nel caso precedente): si è infatti dimostrato che se un' equazione (2.6) è soddisfatta dalle $x^{i'}$ è soddisfatta anche dalle x^i [1].

Ancora: il ragionamento fatto vale anche per $n = 4$; siccome ogni superficie di S_4 soddisfa ad (almeno) una equazione (2.6), la conclusione che se ne trae è questa:

Ogni superficie isotropa di S_6 *possiede o un doppio sistema coniugato o un sistema (semplice) di asintotiche (in particolare: è rigata).*

E questo risultato è caso particolare di un altro già da me stabilito [2].

3. Il risultato precedente non è più valido, come ho avvertito, se la superficie è proiettata ortogonalmente sopra un piano, avente per giacitura $S_1{}^*$, in una curva (e non in una regione del piano), cioè se la superficie sta in un cilindro luogo di $\infty^1 S_n$ passanti per $\overset{*}{S}_{n-1}$ (polare di $S_1{}^*$).

Si può prendere allora come rappresentazione della superficie ($x^0 = 1$)

$$x^{i'} = x^{i'}(u, v), \quad i' = 1, \dots, n, \quad x^{n+1} = v, \quad x^{n+2} = \varphi(v) \tag{3.1}$$

e per Q quella già data.

Per i simboli di σ e della proiezione σ' si ha

$$0 = [1010] = [1010]', \quad 0 = [1001] = [1001]', \quad 0 = [0101] = [0101]' + 1 + \varphi'^2$$
$$0 = [2010] = [2010]', \quad 0 = [1110] = [1110]', \quad 0 = [0210] = [0210]'$$
$$0 = [2001] = [2001]', \quad 0 = [1101] = [1101]', \quad 0 = [0201] = [0201]' + \varphi'\varphi''.$$

Se per σ' valesse un'equazione (2.6) moltiplicandola per $x^{i'}_u$ e sommando rispetto ad i' si avrebbe un'identità; procedendo analogamente per $x^{i'}_v$ si avrebbe invece

$$\gamma\varphi'\varphi'' = b(1 + \varphi'^2). \tag{3.2}$$

[1] Si badi che già questo teorema, anche limitato al caso di $n = 5$, dice molto di più del teorema del PINL (relativo a *zero* equazioni del 2° ordine); ed afferma che se per es. vale *una* equazione allora σ e σ' hanno *tutt'e due* o un sistema coniugato o un sistema di asintotiche; cosa che un teorema come quello del PINL relativo alla dimensione di $S(2)$ non permetterebbe di affermare.

[2] Nella mia Memoria dell'Accademia d'Italia (1935), p. 367 per $\nu = 1$.

Questa condizione può esser soddisfatta senza che la (2.6) sia soddisfatta da x^{n+1} e da x^{n+2}. Se invece quest'ultimo fatto avviene, cioè se x^{n+1} e x^{n+2} sono soluzioni della (2.6), deve aversi:

$$b=0, \quad \gamma\varphi''=0 \tag{3.3}$$

e queste portano di conseguenza la (3.2) ma non viceversa.

Se per es. $\varphi'=\pm i$ quindi $\varphi''=0$, la (3.2) è soddisfatta ma non lo sono necessariamente le (3.3). La condizione $\varphi'=\pm i$ esprime che la proiezione di σ da S^*_{n-1} sul piano $x^{i'}=0$ è una retta isotropa: in questo caso anche σ' è isotropa. È proprio quel che avviene nell'ultimo esempio del PINL esaminato (§ 3, n. 9) in cui lo $S(2)$ generico relativo a σ' è un S_4 mentre quello relativo a σ è un S_5. Rimane così ben chiarito l'apparente contrasto fra l'esempio ricordato e il teorema del PINL riportato in principio del numero precedente.

Escluso questo caso, cioè quando $1+\varphi'^2 \neq 0$, e supposto che le linee u su σ' (proiezioni delle linee u di σ appartenenti agli S_n generatori del cilindro) siano asintotiche o appartengano al doppio sistema coniugato, cioè che sia $\gamma=0$, dalla (3.2) si ha $b=0$ quindi sono soddisfatte le (3.3); sicchè in questo caso anche per σ è $S(2)\equiv S_4$.

È da notare che in ogni caso la superficie σ' è *emisotropa* cioè i suoi piani tangenti hanno giaciture tangenti all'assoluto (vi appartengono nel solo caso segnalato in cui σ' è isotropa): le linee isotrope doppie sono le linee u già considerate.

4. Il teorema dato al n. 2 può estendersi in più modi. Cominciamo dall'estensione alle V_k 1-isotrope di S_{n+k}, $(n>k)$ cioè tali che gli S^*_{k-1} impropri degli S_k tangenti appartengano all'assoluto Q (quadrica non degenere di S^*_{n+k-1}) di S_{n+k}. Prendiamo un S^*_{k-1} (di S^*_{n+k-1}) generico rispetto a Q e tale che la V_k *non* stia in un cono avente per vertice lo S^*_{n-1} polare, in S^*_{n+k-1}, di S^*_{k-1} rispetto a Q (cioè la proiezione ortogonale V_k' di V_k sopra un S_k euclideo per S^*_{k-1} riempia una regione a k dimensioni di S_k). In questa ipotesi (e non sto ad esaminare quella contraria come si è fatto per le superficie) voglio dimostrare che:

La V_k *isotropa e la sua proiezione* V_k' *soddisfano alle stesse equazioni a derivate parziali del 2° ordine (lineari, omogenee).*

Come prima per le superficie, può ora porsi per V_k, in coordinate cartesiane ortogonali

$$(x^0=1), \quad x^{i'}=x^{i'}(u^1,\dots,u^k), \quad i'=1,\dots,n; \quad x^{n+h}=u^h, \quad h=1,\dots,k, \tag{4.1}$$

ed è identicamente nulla la forma fondamentale del 1° ordine ($ds^2 \equiv 0$, quindi sono nulli i simboli del 1° ordine e quelli dedotti del 2° ordine, cioè somme di prodotti di una derivata seconda di x^i per una derivata prima: la somma essendo fatta per $i = 1, \ldots, n+k$).

Si vuol provare che, in conseguenza delle relazioni ora accennate, se le $x^{i'}$ soddisfano ad un' equazione:

$$\sum_{r,s} \alpha_{rs} \frac{\partial^2 x^{i'}}{\partial u^r \partial u^s} = \sum_r \alpha_r \frac{\partial x^{i'}}{\partial u^r} \tag{4.2}$$

vi soddisfano anche le x^i, cioè che sono le $\alpha_r = 0$.

Allo scopo si osservi che i simboli del 1° ordine relativi a V_k' sono

$$\Sigma_{i'} \left(\frac{\partial x^{i'}}{\partial u^r}\right)^2 = -1, \quad \Sigma_{i'} \frac{\partial x^{i'}}{\partial u^r} \frac{\partial x^{i'}}{\partial u^s} = 0, \quad r \neq s \tag{4.3}$$

e sono quindi nulli i simboli dedotti del 2° ordine.

Basta ora moltiplicare la (4.2) per $\dfrac{\partial x^{i'}}{\partial u^t}$ e sommare rispetto ad i' per avere le $\alpha_t = 0$.

Con ciò il teorema è provato. Segue in particolare che gli $S(2)$ generici di V_k e di V_k' hanno la stessa dimensione. Una conseguenza più particolare si può trarre dal fatto che se V_k' appartiene ad S_n e se $n < \dfrac{k(k+3)}{2}$, la V_k' soddisfa necessariamente ad equazioni del tipo esaminato in numero $\geq \dfrac{k(k+3)}{2} - n$; quindi

Una $\mathrm{V_k}$ *isotropa appartenente ad uno spazio euclideo di dimensione* $< \dfrac{\mathrm{k(k+3)}}{2} + \mathrm{k} = \dfrac{\mathrm{k(k+5)}}{2}$ *ha i suoi* S(2) *osculatori di dimensione inferiore alla normale, cioè a* $\dfrac{\mathrm{k(k+3)}}{2}$.

5. I teoremi precedenti riguardano le superficie e le varietà isotrope, o semplicemente isotrope. Essi si estendono alle superficie e varietà isotrope di specie ν, o ν-isotrope.

Per una tale V_k sono nulli tutti i simboli (principali e dedotti) d'ordine $\leq \nu$ e quelli dedotti d'ordine $\nu + 1$ (cioè in cui figuri una sola derivata d' ordine $\nu + 1$).

Consideriamo ora una proiezione V_k' della V_k fatta nelle stesse ipotesi del n. precedente; per essa i simboli del 1° ordine sono ancora dati delle (4.3) e sono tutti nulli quelli principali o dedotti d'ordine $\leq \nu$ e > 1 nonchè quelli dedotti d'ordine $\nu + 1$. Supposto che le $x^{i'}$ soddisfino ad un'equazione lineare omogenea d'ordine $\leq \nu + 1$ (e > 1) si conclude come prima che in essa devono mancare i termini con le derivate prime: cioè essa è soddisfatta da tutte le x^i. *Cioè* V_k *e* V_k' *soddisfano alle stesse equazioni a derivate parziali d'ordine* $\leq \nu + 1$; *in particolare hanno le stesse dimensioni i loro* S(h) *osculatori per* $h \leq \nu + 1$.

6. Un' estensione del tutto differente del teorema del n. 2 si ha con le considerazioni seguenti.

Cominciamo ad esaminare il caso di una superficie σ appartenente ad S_{n+5} e tale che la sua proiezione ortogonale sopra un S_5 euclideo (cioè il cui $S_4{}^*$ improprio abbia posizione generica rispetto a Q) sia una superficie σ'' con $S(2) \equiv S_5$; e sia σ' la proiezione fatta da $S_4{}^*$ ortogonalmente sopra un S_n (cioè questo passi per lo $\overset{*}{S}_{n-1}$ polare di $S_4{}^*$ rispetto a Q in $\overset{*}{S}_{n+4}$ improprio di S_{n+5}).

Si supponga ora σ 2–isotropa (cioè tale che gli spazi impropri degli $S(2)$ osculatori appartengano a Q). Si vuol dimostrare che σ e σ' soddisfano alle stesse equazioni a derivate parziali del 3° ordine.

Indichiamo con $x^i(u, v)$ le coordinate dei punti di σ, con $x^{i'}$, $i' = 1, \dots, n$ quelle di σ' e con $x^{i''}$, $i'' = 1, \dots, 5$ quelle di σ'': le prime n coordinate x^i coincidono con le $x^{i'}$, le $x^{n+i''}$ con $x^{i''}$.

Si vuol provare che se c'è un' equazione

$$(6.1) \qquad \sum_{r,s} \alpha_{rs} x_{rs} = \sum_{p,q} \beta_{pq} x_{pq} \qquad \begin{array}{ll} r, s = 0, 1, 2, 3; & r + s = 3 \\ p, q = 0, 1, 2; & p + q = 1, 2 \end{array}$$

soddisfatta dalle $x^{i'}$ essa è soddisfatta anche dalle $x^{i''}$.

Indicando con uno o rispettivamente due apici i simboli relativi a σ' e a σ'' (e senza apici i simboli relativi a σ) si ha

$$[\dots] = [\dots]' + [\dots]''$$

per gli stessi indici contenuti nei tre simboli (e nello stesso ordine). Poichè i simboli d'ordine 1 e 2 e quelli dedotti d'ordine 3 relativi a σ sono nulli, gli analoghi relativi a σ e a σ' hanno valori uguali ed opposti.

Notiamo ora che per il fatto di appartenere σ'' ad S_5 e di avere $S(2) \equiv S_5$ è differente da zero il determinante costruito con le derivate prime e seconde delle $x^{i''}$ mentre le stesse soddisfano necessariamente ad un sistema di equazioni del tipo

$$(6.2) \qquad \begin{array}{ll} x_{30} = \sum_{pq} a_{pq} x_{pq}, & x_{21} = \sum_{pq} b_{pq} x_{pq}, \\ x_{12} = \sum_{pq} c_{pq} a_{pq}, & x_{03} = \sum_{pq} d_{pq} x_{pq}. \end{array} \qquad p + q = 1, 2$$

Ciò posto, s'immagini scritta la (6.1) per una $x^{i'}$ e si moltiplichi per $x^{i'}{}_{p'q'}(p' + q' = 1, 2)$ e si sommi rispetto ad i'; si avrà

$$(6.3) \qquad \sum_{r,s} \alpha_{rs} [rsp'q']' = \sum_{p,q} \beta_{pq} [pqp'q']'$$

e quindi anche

$$\sum_{r,s} \alpha_{rs}[rsp'q']'' = \sum_{p,q} \beta_{pq}[pqp'q']''. \tag{6.4}$$

Tenuto conto delle (6.2) queste si scrivono anche

$$\alpha_{30} \sum_{pq} a_{pq}[pqp'q']'' + \alpha_{21} \sum_{pq} b_{pq}[pqp'q']'' + \alpha_{12} \sum_{pq} c_{pq}[pqp'q'] + $$
$$+ \alpha_{03} \sum_{pq} d_{pq}[pqp'q']'' = \sum_{pq} \beta_{pq}[pqp'q']''$$

cioè, posto

$$\alpha_{30}a_{pq} + \alpha_{21}b_{pq} + \alpha_{12}c_{pq} + \alpha_{03}d_{pq} - \beta_{pq} = A_{pq},$$

$$\sum_{pq} A_{pq}[pqp'q']'' = 0. \tag{6.5}$$

Considerate queste 5 relazioni ($p', q' = 0, 1, 2, p' + q' = 1, 2$) come equazioni lineari nelle A_{pq}, il determinante dei coefficienti è il quadrato di quello prima supposto $\neq 0$ quindi $A_{pq} = 0$ cioè

$$\beta_{pq} = \alpha_{30}a_{pq} + \alpha_{21}b_{pq} + \alpha_{12}c_{pq} + \alpha_{03}d_{pq}.$$

Portate queste espressioni di β_{pq} nella (6.1) essa risulta combinazione lineare omogenea delle (6.2) (moltiplicate ordinatamente per $\alpha_{30}, \alpha_{21}, \alpha_{12}, \alpha_{03}$); quindi la (6.1) è soddisfatta anche dalle $x^{i''}$. E questo è quato si voleva provare.

Si può aggiungere che σ' non può soddisfare ad equazioni del 2° ordine. Una tale equazione può indicarsi ancora con la (6.1) prendendo tutte le $\alpha_{rs} = 0$. In tal caso dalle (6.4) si ricaverebbero le (6.5) con $A_{pq} = -\beta_{pq}$ quindi sarebbero anche le $\beta_{pq} = 0$; cioè non esiste l'equazione del 2° ordine.

Poichè σ' per $n < 5$ soddisferebbe certo ad almeno una tale equazione segue che superficie della specie voluta non esistono in spazi di dimensione < 10; e se si vuole che per σ sia $S(3) \equiv S_9$ (cioè di dimensione massima, o *normale* fino all'intorno del 3° ordine) poichè altrettanto deve accadere per σ' deve aversi $n \geq 9$, cioè superficie σ di questa specie non esistono in spazi di dimensione < 14. Riassumendo:

Se una superficie 2-isotropa σ di S_{n+5} *è proiettata ortogonalmente sopra un* S_5 *euclideo in una superficie per cui* $S(2) \equiv S_5$ *essa è proiettata (ortogonalmente) sopra un* S_n *ortogonale ad* S_5 *in una superficie σ' per cui pure* $S(2) \equiv S_5$. *Le superficie σ e σ' soddisfano alle stesse equazioni a derivate parziali del 3° ordine. Superficie σ siffatte non esistono entro spazi di dimensione minore di* 10 *e se* $S(3) \equiv S_9$ *in spazi di dimensione minore di* 14.

7. Se lo $S(2)$ generico di σ'' non fosse un S_5 si potrebbe ancora arrivare alle (6.5), ma da esse non si dedurrebbe l'annullarsi delle A_{pq}. In questo caso, se non intervengono altre circostanze particolari, possono benissimo le dimensioni degli $S(2)$ e degli $S(3)$ di σ' essere inferiori alle corrispondenti di σ.

Un tale caso si presenta certamente se σ'' è isotropa (basta che sia 1-isotropa), e allora lo è anche σ', perchè essendo in tal caso nulli i simboli $[\ldots]''$ del 1° ordine e quelli dedotti del 2° ordine delle cinque relazioni (6.5) due sono identicamente soddisfatte (per $p' + q' = 1$) e le tre rimanenti, che involgono solo A_{20}, A_{11}, A_{02} non sono neppur esse indipendenti.

8. Se dalle superficie si passa ad una V_k 2-isotropa situata in un S_{n+K}, $K = \frac{k(k+3)}{2}$, che si proietti ortogonalmente sopra un S_K in una V_k'' di cui l'ambiente sia lo $S(2)$ osculatore e che proiettata ortogonalmente sopra un S_n normale ad S_K dia luogo ad una V_k' si dimostra come prima che anche gli $S(2)$ osculatori di V_k' sono S_K e che V_k e V_k' soddisfano alle stesse equazioni a derivate parziali del 3° ordine. Ciò implica che $n \geq K$, quindi V_k del tipo considerato non possono esistere in spazi di dimensione $< k(k+3)$.

Più in generale si consideri una V_k ν-isotropa appartenente ad uno spazio euclideo $S_{n+k(\nu)}$ ove

$$k(\nu) = \binom{k+\nu}{\nu} - 1\,;$$

$k(\nu)$ è la dimensione massima (normale) di uno $S(\nu)$ costruito in un punto di una varietà a k dimensioni. Supponiamo che la V_k ammetta una proiezione ortogonale V_k'' sopra uno spazio euclideo $S_{k(\nu)}$ e che questo sia lo $S(\nu)$ osculatore a V_k'' (in altri termini: che V_k'' non soddisfi ad equazioni a derivate parziali lineari omogenee d'ordine $\leq \nu$).

Sia V_k' la proiezione ortogonale di V_k sopra un S_n normale ad $S_{k(\nu)}$.

La proiezione $\mathrm{V_k}'$ *ha gli* $\mathrm{S}(\nu)$ *di dimensione massima* $\mathrm{k}(\nu)$, *e inoltre* $\mathrm{V_k}'$ *e* $\mathrm{V_k}$ *soddisfano alle stesse equazioni a derivate parziali d'ordine* $\nu + 1$; *in particolare esse hanno* $\mathrm{S}(\nu+1)$ *della stessa dimensione e se questa dev'essere massima (cioè* $\mathrm{V_k}$ *normale fino all'ordine* $\nu + 1$) *l'ambiente di* $\mathrm{V_k}$ *non può avere dimensione inferiore a*

$$\binom{k+\nu+1}{\nu+1} + \binom{k+\nu}{\nu} - 2 = \binom{k+\nu}{\nu}\frac{k+2\nu+2}{\nu+1} - 2\,.$$

La dimostrazione è dello stesso tipo di quella del n. 6. Cioè divise le coordinate x^i di V_k in due gruppi $x^{i'}$ di n e $x^{i''}$ di $k(\nu)$ per essere nulli i simboli, relativi a V_k, principali e dedotti d'ordine $\leq \nu$ e dedotti d'ordine $\nu + 1$ si ha per gli analoghi simboli di V_k' e di V_k'' l'uguaglianza a meno del segno.

Per V_k'' non esistono, poichè per ipotesi $S(\nu) \equiv S_{k(\nu)}$, equazioni d'ordine $\leq \nu$; mentre tutte le derivate d'ordine $\nu + 1$ sono combinazioni lineari delle precedenti: si hanno dunque $\binom{k+\nu}{\nu+1}$ equazioni d'ordine $\nu + 1$ soddisfatte dalle $x^{i''}$.

Esista ora un' equazione d'ordine $\nu+1$ soddisfatta dalle $x^{i'}$. Da essa si traggono (moltiplicandone i termini per le derivate di $x^{i'}$ d'ordine $\leq \nu$ e sommando rispetto ad i') relazioni in numero di $k(\nu)$ fra i simboli d'ordine $\leq \nu$ e dedotti d'ordine $\nu+1$ relativi a V_k'. Queste relazioni si possono riscrivere sostituendovi i simboli analoghi relativi a V_k''. Ma i simboli (dedotti) d'ordine $\nu+1$ in esse si possono sostituire, in forza delle equazioni d'ordine $\nu+1$ soddisfatte da V_k'', con simboli d'ordine $\leq \nu$. Si hanno quindi $k(\nu)$ relazioni omogenee fra questi simboli; e i loro coefficienti sono espressioni lineari sia nei coefficienti della supposta equazione d'ordine $\nu+1$ per V_k' sia in quelli delle equazioni d'ordine $\nu+1$ soddisfatte da V_k''. Consideriamo questi coefficienti, gli stessi per tutte le $k(\nu)$ relazioni, e anch'essi in numero di $k(\nu)$, come incognite. Si ha un sistema omogeneo di $k(\nu)$ equazioni ed altrettante incognite e il determinante dei coefficienti è il quadrato del determinante formato con le derivate delle $x^{i''}$ d'ordine $\leq \nu$. Poichè questo è $\neq 0$, quelle incognite sono nulle: cioè i coefficienti dei termini d'ordine $\geq \nu$ nella supposta equazione sono combinazioni lineari degli analoghi nelle equazioni d'ordine $\nu+1$ di V_k''. Brevemente, la supposta equazione dev'essere combinazione lineare di quelle di V_k'', cioè è soddisfatta non solo dalle $x^{i'}$ ma anche dalle $x^{i''}$ (se esiste) cioè da tutte le x^i: V_k e V_k' soddisfano alle stesse equazioni d'ordine $\nu+1$. Lo stesso ragionamento prova che V_k' non può soddisfare equazioni d'ordine $\leq \nu$, e perciò necessariamente $n \geq k(\nu)$; e se non deve soddisfare equazioni d'ordine $\nu+1$ dev'essere $n \geq k(\nu+1)$, quindi l'ambiente di V_k di dimensione $\geq k(\nu)+k(\nu+1)$. Ciò prova quanto s'era affermato.

9. Altri teoremi di tipo più particolare possono ottenersi quando la V_k ν-isotropa possegga qualche proiezione di tipo particolare.

Supponiamo per es. che la V_k possegga come proiezione su un determinato $S_{k(\mu)}$ euclideo, $\mu \leq \nu$, una V_k'' rappresentante la totalità delle ipersuperficie V_{k-1}^{μ} di un S_k. Questa V_k'' ammette una rappresentazione analitica del tipo

$$x^{i''} = \varphi^{i''}(u^1, \ldots, u^k) \qquad i'' = 1, \ldots, k(\mu)$$

ove le $\varphi^{i''}$ sono polinomi linearmente indipendenti di grado $\leq \mu$ nelle u.

Sia $S_{n+k(\mu)}$ lo spazio cui appartiene V_k, e sia V_k' una sua proiezione sopra un S_n ortogonale allo $S_{k(\mu)}$ considerato e siano $x^{i'}$, $i'=1, \ldots, n$, coordinate cartesiane ortogonali dei punti di V_k' nel suo S_n; le coordinate di un punto di V_k sono le $x^{i'}$ e le $x^{i''}$.

Per l'ipotesi relativa a V_k sono nulli tutti i simboli d'ordine $\leq \nu$ e quelli dedotti d'ordine $\nu+1$.

Per l'ipotesi relativa a V_k'' sono nulli tutti i simboli (ad essa relativi) d'ordine $\geq \mu + 1$; mentre non è nullo il determinante formato con le derivate $x^{i''}$ d'ordine $\leq \mu$.

I simboli relativi a V_k' d'ordine $\leq \nu$ e quelli dedotti d'ordine $\nu + 1$ sono uguali e di segno opposto a quelli di V_k'' (quindi in particolare nulli quelli d'ordine $\geq \mu + 1$).

Si abbia ora un'equazione a derivate parziali lineare omogenea d'ordine $\leq \nu + 1$ soddisfatta dalle $x^{i'}$ cioè relativa a V_k'. Distinguiamo in essa i gruppi dei termini contenenti le derivate d'ordine $\nu + 1, \nu, \ldots, 1$.

Se si moltiplica l'equazione, scritta per $x^{i'}$, per una derivata di $x^{i'}$ d'ordine $< \nu + 1$ e si somma rispetto ad i' si ottiene una relazione lineare omogenea fra simboli, relativi a V_k', d'ordine $\leq \nu + 1$: e quelli d'ordine $\nu + 1$ sono solo quelli dedotti (e non i principali). Si hanno $k(\nu)$ di queste relazioni.

Per quanto s'è osservato queste possono scriversi come relazioni, con gli stessi coefficienti, fra simboli relativi a V_k''. Ma, per esser nulli quelli di essi d'ordine $\geq \mu + 1$, basterà conservare quei termini in cui compariscono simboli d'ordine $\leq \mu$: essi involgono i soli gruppi di termini (e quindi i loro soli coefficienti) dell'equazione supposta contenenti derivate d'ordine $\leq \mu$; e basta poi moltiplicare questi per derivate anch'esse d'ordine $\leq \mu$.

Si hanno quindi $k(\mu)$ relazioni lineari omogenee fra i $k(\mu)$ coefficienti dei termini d'ordine $\leq \mu$ nell'equazione supposta: considerati questi come incognite, i loro coefficienti nelle relazioni in esame sono i simboli d'ordine $\leq \mu$ relativi a V_k''. Il determinante di questi coefficienti è il quadrato del determinante formato con le derivate d'ordine $\leq \mu$ delle $x^{i''}$ ed è perciò differente da zero. Quindi nell'equazione supposta mancano tutti i termini d'ordine $\leq \mu$ ed in conseguenza è soddisfatta anche dalle $x^{i''}$; cioè da tutte le x^i.

È senz'altro evidente, per il ragionamento fatto, che l'equazione supposta non può essere d'ordine $\leq \mu$; e perciò dev'essere certo $n \geq k(\mu)$.

Concludendo:

Sia $\mathrm{V_k}$ *una varietà* ν*-isotropa appartenente ad un* $\mathrm{S_{n+k(\mu)}}$, $\mu \leq \nu$, *della quale si sappia che la proiezione sopra un* $\mathrm{S_{k(\mu)}}$ *euclideo è una* $\mathrm{V_k}''$ *rappresentativa delle* $\mathrm{V^{\mu}_{k-1}}$ *di* $\mathrm{S_k}$. *Detta* $\mathrm{V_k}''$ *la proiezione ortogonale di* $\mathrm{V_k}$ *sopra un* $\mathrm{S_n}$ *normale a* $\mathrm{S_{k(\mu)}}$, $\mathrm{V_k}$ *e* $\mathrm{V_k}''$ *hanno gli* $\mathrm{S}(\mu)$ *di dimensione normale* $= \mathrm{k}(\mu)$, *quindi* $\mathrm{n} \geq \mathrm{k}(\mu)$ *e di più esse soddisfano alle stesse equazioni a derivate parziali d'ordine* $\geq \mu + 1$ *e* $\leq \nu + 1$.

Per $\mu = 1$ si ha il teorema del n. 5 di questo paragrafo.

Con gli esempi arrecati credo di aver mostrato ancora una volta l'ufficio essenziale dei fatti proiettivi in questo tipo di ricerche.