Un teorema di unicità per l'equazione

$$F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0 \quad (*).$$

Memoria di NATALIA BERRUTI ONESTI (a Pavia) (**)

Sunto. Nel presente lavoro l'A. dimostra un teorema di unicità per l'equazione

$$(I) \quad F(x, y, z, p, q) = 0$$

(dove è $p = \frac{\partial z}{\partial x}$, $q = \frac{\partial z}{\partial y}$) per la quale in una precedente ricerca l'A. ha stabilito la esistenza di almeno una soluzione $z = z(x, y)$, relativa al problema di Cauchy, che risulta definita in un campo A ben determinato del piano (x, y) , ed ammette in tale campo derivate parziali del primo ordine lipschitziane.

Considerato l'insieme $\bar{J}$ di funzioni $\bar{z}(x, y)$ le quali in A hanno derivate parziali del primo ordine lipschitziane, soddisfano la (I) e soddisfano a date condizioni iniziali, si dimostra, sotto le stesse ipotesi del teorema di esistenza sopra ricordato, che ogni funzione dell'insieme $\bar{J}$ coincide in tutto il campo A con la suddetta soluzione $z = z(x, y)$, di cui è stata provata l'esistenza.

In una Memoria di alcuni anni fa ⁽¹⁾ ci siamo occupati del problema di CAUCHY per l'equazione

$$(I) \quad F(x, y, z, p, q) = 0$$

(dove è $p = \frac{\partial z}{\partial x}$, $q = \frac{\partial z}{\partial y}$), ed abbiamo dimostrato un teorema di esistenza di almeno una soluzione $z = z(x, y)$ della (I), soddisfacente le condizioni di

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività dei Gruppi di Ricerca Matematica del Consiglio Nazionale delle Ricerche (gruppo n. 19).

(**) Il presente lavoro ha formato oggetto della comunicazione «Sopra un teorema di unicità per l'equazione $F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0$ » tenuta in occasione del VII Congresso Nazionale dell'U.M.I. (Genova, 30 settembre - 5 ottobre 1963).

(1) N. BERRUTI ONESTI, *Un teorema di esistenza per l'equazione $F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0$* , Annali della Sc. Norm. Sup. di Pisa, vol. XIII (1959), pp. 89-114. Questo lavoro in seguito verrà brevemente indicato con [M].

CAUCHY, sotto ipotesi più ampie di quelle che figurano nei trattati classici ⁽²⁾, nei quali la funzione $F(x, y, z, p, q)$ viene supposta continua assieme alle proprie derivate parziali dei primi due ordini, e, considerato l'insieme di funzioni pure continue assieme alle proprie derivate parziali dei primi due ordini, l'esistenza ed unicità della soluzione della (I) è stabilita in un intorno sufficientemente piccolo della curva iniziale.

Nel lavoro citato in ⁽¹⁾, supposta la funzione $F(x, y, z, p, q)$ continua e lipschitziana assieme alle proprie derivate parziali del primo ordine in un campo

$$\Omega_{\infty}: \quad -\infty < x < +\infty, \quad -\infty < y < +\infty, \quad -\infty < z < +\infty,$$

$$|p| \leq \Omega_1, \quad |q| \leq \Omega_2,$$

dove Ω_1 e Ω_2 sono due numeri reali positivi, l'esistenza di almeno una soluzione della (I), soddisfacente le condizioni di CAUCHY, viene dimostrata nell'insieme di funzioni $z(x, y)$ lipschitziane assieme alle proprie derivate parziali del primo ordine, e risulta definita in un campo A ben determinato del piano (x, y) ⁽³⁾.

Nel presente lavoro riprendiamo in esame l'equazione (I), allo scopo di stabilire l'unicità della soluzione $z = z(x, y)$ di cui in $[M]$ è stata dimostrata l'esistenza. E, considerato l'insieme $\bar{J}$ di funzioni $\bar{z}(x, y)$ definite in A , le quali in tale campo hanno derivate parziali del primo ordine $\bar{p}(x, y)$ e $\bar{q}(x, y)$ lipschitziane, soddisfano la (I), e soddisfano alle condizioni iniziali assegnate (cfr. in seguito le (II) del n. 1, *a*) e la nota ⁽¹⁰⁾), dimostriamo, sotto le stesse ipotesi del teorema di esistenza citato in ⁽¹⁾, che in tutto il campo A è

$$(I^*) \quad \bar{z}(x, y) = z(x, y).$$

Nel n. 1 sono richiamati, con qualche complemento, i risultati ottenuti in $[M]$, e nel n. 2 è dimostrato il teorema di unicità.

La dimostrazione, in cui seguiamo il metodo delle caratteristiche già

⁽²⁾ Per indicazioni bibliografiche riguardanti il problema di Cauchy per l'equazione (I) rinviamo alla Memoria $[M]$; cfr. le note ⁽¹⁾-⁽³⁾ di pag. 89. Per una ampia bibliografia relativa alle equazioni differenziali a derivate parziali del primo ordine cfr. CINQUINI CIBRARIO M., CINQUINI S., *Equazioni a derivate parziali di tipo iperbolico*, Monografie Matematiche del C.N.R., N. 12, Ediz. Cremonese, Roma (1964), Bibliografia del Cap. I, pagg. 122-129.

⁽³⁾ Riguardo al modo in cui è definito il campo A di esistenza della soluzione della (I) costruita in $[M]$, cfr. il n. 1, *b*) del presente lavoro.

usato da altri Autori ⁽⁴⁾, ha presentato, rispetto a quella che figura nella Memoria citata per prima in ⁽⁴⁾, e relativa alla equazione $p = f(x, y, z, q)$, nuove difficoltà, dovute sia alla diversa forma dell'equazione (I) da noi considerata, sia al modo in cui è definito il campo A di esistenza della soluzione $z = z(x, y)$ costruita in $[M]$; ciò ha richiesto una opportuna impostazione del procedimento dimostrativo, che risulta alquanto laborioso, e nuove varie considerazioni, talvolta sottili, di teoria di funzioni di variabile reale. D'altra parte l'unicità della soluzione della (I) viene dimostrata nello stesso campo A sopra nominato poichè, per il procedimento che seguiamo, è utile tenere conto della corrispondenza biunivoca stabilita in $[M]$ tra i punti del campo A del piano (x, y) e i punti del rettangolo $R: [-a \leq t \leq a, \alpha \leq \xi \leq \beta]$ del piano (t, ξ) ⁽⁵⁾ in cui è definito il sistema delle strisce caratteristiche relativo alla (I).

Tenendo presente, in particolare, che i punti della curva iniziale $y = f(x)$, $(\alpha \leq x \leq \beta)$ corrispondono biunivocamente, secondo la corrispondenza sopra citata, ai punti del segmento $t = 0, \alpha \leq \xi \leq \beta$, fissiamo, all'inizio della dimostrazione, quattro valori reali qualsiasi $\tau_1, \tau_2, \xi_1, \xi_2$, con $-a < \tau_1 < 0 < \tau_2 < a, \alpha < \xi_1 < \xi_2 < \beta$, e ci proponiamo di dimostrare che la (I*) è soddisfatta in tutto il campo $\bar{A}$, interno ad A , corrispondente (sempre secondo la corrispondenza sopra ricordata) al rettangolo $[\tau_1 \leq t \leq \tau_2, \xi_1 \leq \xi \leq \xi_2]$. Dapprima (capoversi *a*) - *d*) del n. 2) si dimostra che la (I*) risulta soddisfatta in un campo A_0 sufficientemente piccolo, appartenente ad A , limitato da quattro curve le cui equazioni vengono determinate nel corso della dimostrazione (cfr. le (50) del n. 2, *b*)); ed è poi facile verificare (capoverso *e*) del n. 2) che la stessa (I*) è soddisfatta in tutto il campo $\bar{A}$, e quindi anche in tutto il campo A .

Nella determinazione del campo A_0 ha presentato particolare difficoltà l'inversione del cambiamento di variabili definito dalle equazioni

$$(II^*) \quad \begin{cases} x = \bar{X}(t, \xi) \\ y = \bar{Y}(t, \xi) \end{cases}$$

⁽⁴⁾ M. CINQUINI CIBRARIO e S. CINQUINI, *Sopra una forma più ampia del problema di Cauchy per l'equazione $p = f(x, y, z, q)$* , Annali di Matematica pura ed applicata, T. XXXII (1951), pp. 121-155. Cfr. § 2, n. 5; altri teoremi di unicità relativi alla stessa equazione $p = f(x, y, z, q)$, sono stati stabiliti dagli stessi Autori, indipendentemente dal metodo delle caratteristiche, sia nella Memoria ora citata (cfr. § 3, nn. 7-9), sia in «Ancora sopra una forma più ampia del problema di Cauchy per l'equazione $p = f(x, y, z, q)$ » Annali della Sc. Norm. Sup. di Pisa, S. III, vol. VI (1952), pp. 187-243 (cfr. Cap. II, § 3 e § 4).

⁽⁵⁾ Cfr. in $[M]$ le (21) e (22), e quanto brevemente si dice nel n. 3; a complemento di ciò cfr. quanto viene rilevato nella nota ⁽¹³⁾ del presente lavoro.

(cfr. le (15) del n. 2, a)), ottenuta mediante la costruzione delle due funzioni

$$(III^*) \quad \left\{ \begin{array}{l} t = U(x, y) \\ \xi = V(x, y) \end{array} \right.$$

(cfr. le (49) del n. 2, b)) che risultano definite nel campo A_0 . Le (III*), assieme alle (II*), stabiliscono una corrispondenza biunivoca tra i punti del rettangolo $R_0: [t_0 \leq t \leq t_0 + \delta, \xi_1 \leq \xi \leq \xi_2]$ (⁵⁾), appartenente a R' , e quelli del campo A_0 ; e i punti delle già menzionate curve rappresentate dalle (50) del n. 2, b), che costituiscono il contorno di A_0 , corrispondono, secondo la corrispondenza definita dalle (II*) e (III*), ai punti dei lati del rettangolo R_0 .

Il problema di risolvere il sistema (II*) rispetto alle variabili t, ξ ha presentato, in confronto a quello analogo che interviene in $[M]$ (cfr. in $[M]$ n. 1, b) e c)), ulteriori complicazioni, dovute principalmente al fatto che nel presente lavoro, fissato (all'inizio del n. 2, a)) il valore t_0 , sopra la curva Γ_0 (cfr. le (9') del n. 2, a)) corrispondente nel campo A a tale valore, non sono soddisfatte, se è $t_0 \neq 0$, tutte quelle condizioni che, in virtù delle ipotesi fatte sui dati iniziali, sono invece verificate sopra la già menzionata curva $y = f(x)$, ($\alpha \leq x \leq \beta$); condizioni delle quali appunto in $[M]$ si fa uso nel problema in questione. Pertanto nel presente lavoro, pur tenendo conto di quanto è stato fatto in $[M]$ a tale proposito, è stato necessario ricorrere a nuovi accorgimenti ed a opportuni artifici.

Ha pure particolare rilievo la disuguaglianza (54) ottenuta nel n. 2, c) (dove l'espressione di W è data dalla (53)), usufruendo della quale abbiamo potuto da un lato dimostrare (cfr. n. 2, c) e n. 3) la lipschitzianità, nel complesso delle due variabili x, y , delle funzioni $U(x, y)$ e $V(x, y)$ nel campo A_0 , e d'altra parte verificare (cfr. la (74) del n. 2, d)) che la corrispondenza definita dalle (II*) e (III*) è tale che a ogni insieme di punti del campo A_0 di misura superficiale nulla corrisponde biunivocamente, nel rettangolo R_0 , un insieme di punti pure di misura superficiale nulla.

Nel n. 4, infine, tenendo conto di considerazioni svolte nel n. 3, arrechiamo un complemento al lavoro citato in (¹).

(⁵) Osserviamo che t_0 è un qualsiasi valore di (τ_1, τ_2) che viene fissato all'inizio della dimostrazione, e che si suppone, per maggiore comodità di calcolo, non negativo; peraltro cfr. quanto si dice nella nota (¹⁵) del n. 2, a). Il numero positivo δ viene determinato in modo da risultare indipendente dal valore t_0 fissato (cfr. quanto si dice nella prima parte del capoverso e) del n. 2, e nelle note (¹⁷), (²³), e (³⁴)).

1. **Preliminari** - *a*) Ricordiamo il teorema di esistenza dimostrato in [M], enunciandone la tesi in forma opportuna, in modo da porre in rilievo alcune proprietà della soluzione $z = z(x, y)$ dell'equazione

$$(I) \quad F(x, y, z, p, q) = 0$$

(dove è $p = \frac{\partial z}{\partial x}$, $q = \frac{\partial z}{\partial y}$), di cui nel teorema sopra citato è stata provata l'esistenza, le quali intervengono nella dimostrazione del teorema di unicità che forma oggetto del n. 2 del presente lavoro.

Sia $F(x, y, z, p, q)$ una funzione definita per ogni quintupla (x, y, z, p, q) del campo

$$\Omega_{\infty}: \quad -\infty < x < +\infty, \quad -\infty < y < +\infty, \quad -\infty < z < +\infty, \\ |p| \leq \Omega_1, \quad |q| \leq \Omega_2$$

(dove Ω_1 e Ω_2 sono due numeri reali positivi), la quale sia in tale campo continua assieme alle sue derivate parziali F_x, F_y, F_z, F_p, F_q ; si supponga che le funzioni F_p ed F_q non si annullino contemporaneamente per alcuna quintupla (x, y, z, p, q) di Ω_{∞} , e che esistano dieci costanti non negative $M_i, L_i, (i = 1, 2, 3, 4, 5)$ tali che sia

$$(1) \quad \begin{cases} |F_x(x, y, z, p, q)| \leq M_1, & |F_y(\dots)| \leq M_2, & |F_z(\dots)| \leq M_3, \\ |F_p(\dots)| \leq M_4, & |F_q(\dots)| \leq M_5 \quad (6) \end{cases}$$

(6) È ovvio, tenendo presenti le ultime due delle (1), che, in virtù delle ipotesi fatte sopra le funzioni F_p ed F_q , non può essere $M_4 = M_5 = 0$.

Inoltre possiamo senz'altro escludere il caso particolare in cui anche soltanto una delle due costanti M_4, M_5 è nulla.

Infatti, se è, per es., $M_4 = 0$, dalla quarta delle (1) segue che per ogni quintupla (x, y, z, p, q) di Ω_{∞} è $F_p(x, y, z, p, q) = 0$; e quindi la (I) si riduce alla

$$F(x, y, z, q) = 0,$$

che, quando si consideri y come variabile indipendente e x come parametro, è una equazione differenziale ordinaria nella funzione incognita z .

In [M] è sottinteso che i suddetti casi particolari sono esclusi.

per ogni quintupla (x, y, z, p, q) di Ω_∞ , e

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} |F_x(x_1, y_1, z_1, p_1, q_1) - F_x(x_2, y_2, z_2, p_2, q_2)| \leq \\ \leq L_1\{|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| + |z_1 - z_2| + |p_1 - p_2| + |q_1 - q_2|\} \\ \\ |F_y(\dots) - F_y(\dots)| \leq \\ \leq L_2\{\dots\} \\ \\ |F_z(\dots) - F_z(\dots)| \leq \\ \leq L_3\{\dots\} \\ \\ |F_p(\dots) - F_p(\dots)| \leq \\ \leq L_4\{\dots\} \\ \\ |F_q(\dots) - F_q(\dots)| \leq \\ \leq L_5\{\dots\} \end{array} \right. \quad (7)$$

per ogni coppia di quintuple $(x_1, y_1, z_1, p_1, q_1)$, $(x_2, y_2, z_2, p_2, q_2)$ di Ω_∞ .

Siano inoltre $f(x)$, $\zeta(x)$, $\pi(x)$, $\chi(x)$ quattro funzioni definite e continue in un intervallo (α, β) , $f(x)$ e $\zeta(x)$ abbiano derivate $f'(x)$ e $\zeta'(x)$ continue in tale intervallo, e sia in tutto (α, β)

$$(3) \quad |\pi(x)| \leq \mu_1 < \Omega_1, \quad |\chi(x)| \leq \mu_2 < \Omega_2, \quad |f'(x)| \leq k_2, \quad |\zeta'(x)| \leq k_3,$$

(7) Escludiamo i casi particolari in cui l'una o l'altra delle due costanti L_4, L_5 è uguale a zero (e quindi il caso in cui è $L_4 = L_5 = 0$).

Infatti, se è, per es., $L_4 = 0$, dalla quarta delle (2) segue che per ogni quintupla (x, y, z, p, q) di Ω_∞ è $F_p(x, y, z, p, q) = h$, dove h è una costante che, poichè si è già escluso (cfr. la nota (6)) il caso particolare in cui è $M_4 = 0$, possiamo supporre diversa da zero, e tale che, tenendo presente la quarta delle (1), sia $|h| \leq M_4$.

Allora in questo caso la (I) si riduce alla forma

$$(1') \quad p = f(x, y, z, q)$$

che è già stata considerata sotto ipotesi più ampie; cfr., per es., M. CINQUINI CIBRARIO e S. CINQUINI, Memorie citate in (4). Fra altri Autori che pure si sono occupati della (1') ci limitiamo a ricordare E. BAIADA, M. VOLPATO, C. VINTI; per indicazioni bibliografiche dettagliate vedi CINQUINI CIBRARIO M., CINQUINI S., luogo citato in (2).

In $[M]$ è sottinteso che i suddetti casi particolari sono esclusi.

(dove μ_1, μ_2, k_2 e k_3 sono costanti non negative); esistano tre costanti non negative k_4, k_5, λ tali che sia

$$\left\{ \begin{array}{l} |\pi(x_1) - \pi(x_2)| \leq k_4 |x_1 - x_2|, \quad |\chi(x_1) - \chi(x_2)| \leq k_5 |x_1 - x_2|, \\ |f'(x_1) - f'(x_2)| \leq \lambda |x_1 - x_2| \end{array} \right.$$

per ogni coppia di valori reali x_1, x_2 di (α, β) ; sia infine

$$\left\{ \begin{array}{l} \zeta'(x) = \pi(x) + \chi(x)f'(x) \\ F(x, f(x), \zeta(x), \pi(x), \chi(x)) = 0 \\ F_q(x, f(x), \zeta(x), \pi(x), \chi(x)) - F_p(x, f(x), \zeta(x), \pi(x), \chi(x))f'(x) \neq 0 \end{array} \right.$$

per ogni valore reale x di (α, β) .

Sotto tali ipotesi esiste almeno una funzione $z(x, y)$ definita in un campo A del piano (x, y) ⁽⁸⁾, la quale:

1°) è continua in tutto il campo A assieme alle derivate parziali $p(x, y) = \frac{\partial z(x, y)}{\partial x}$, $q(x, y) = \frac{\partial z(x, y)}{\partial y}$, e, qualunque sia la coppia di punti $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ di A , è

$$(4) \quad |z(x_1, y_1) - z(x_2, y_2)| \leq \Omega_1 |x_1 - x_2| + \Omega_2 |y_1 - y_2|;$$

2°) è tale che esistono due costanti positive μ, ν , in modo che per qualunque coppia di punti $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ di A valgono le

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} |p(x_1, y_1) - p(x_2, y_2)| \leq \mu \{|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|\} \\ |q(x_1, y_1) - q(x_2, y_2)| \leq \nu \{|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|\} \end{array} \right. \quad (9);$$

3°) soddisfa in tutto il campo A la

$$(I) \quad F(x, y, z, p, q) = 0,$$

⁽⁸⁾ Per il modo in cui il campo A è definito, cfr. il capoverso *b)* del presente numero.

⁽⁹⁾ Riguardo alle (4) e alle (5) cfr. rispettivamente le (7') e quanto si dice alla fine della nota ⁽¹³⁾.

e soddisfa inoltre in tutto (α, β) le condizioni

$$(II) \quad z(x, f(x)) = \zeta(x), \quad p(x, f(x)) = \pi(x), \quad q(x, f(x)) = \chi(x) \quad (^{10}).$$

b) Il campo A in cui risulta definita la soluzione della (I) $z = z(x, y)$, della quale nel teorema ricordato nel precedente capoverso è stata provata l'esistenza, è costituito (cfr. nn. 2-3 di $[M]$) dai punti del piano (x, y) appartenenti al campo C limitato dalle curve

$$\left\{ \begin{array}{l} y = f(x), \quad (\alpha \leq x \leq \beta) \\ \\ y = Y(a, \Phi(a, x)), \quad (X(a, \alpha) \leq x \leq X(a, \beta)) \\ \\ \left\{ \begin{array}{l} x = X(t, \alpha) \\ y = Y(t, \alpha) \end{array} \right. \quad (0 \leq t \leq a) \\ \\ \left\{ \begin{array}{l} x = X(t, \beta) \\ y = Y(t, \beta) \end{array} \right. \quad (0 \leq t \leq a) \quad (^{11}), \end{array} \right.$$

(¹⁰) Qui rileviamo tutte tre le condizioni ora scritte, alle quali soddisfa la soluzione della (I) $z = z(x, y)$ costruita in $[M]$, dato che il campo funzionale $\bar{J}$ nel quale viene dimostrata, nel n. 2 del presente lavoro, l'unicità, è quello costituito dalle funzioni $\bar{z}(x, y)$ che, oltre a soddisfare le condizioni 1° e 2°, la (I) e la prima delle (II), soddisfano anche ad entrambe le ultime due delle (II). Infatti, come è noto, nell'insieme di funzioni $z(x, y)$ per le quali, essendo soddisfatte le condizioni 1° e 2° e la prima delle (II), non sono soddisfatte anche entrambe le ultime due delle (II), l'unicità della soluzione della (I) può mancare.

(¹¹) Ricordiamo che α è un numero reale positivo non superiore al minore dei due numeri

$$(a) \quad \frac{1}{M_3} \log \frac{M_1 + M_3 \Omega_1}{M_1 + M_3 \mu_1}, \quad \frac{1}{M_3} \log \frac{M_2 + M_3 \Omega_2}{M_2 + M_3 \mu_2},$$

e tale che sia

$$1 - L_4 g(a) > 0, \quad \gamma_1 - G(a) > 0,$$

dove, essendo γ_1 il numero reale positivo ricordato nella (31) del presente lavoro e

$$(b) \quad \Lambda = L_4(1 + \Omega_1) + L_5(1 + \Omega_2) + L_1 + L_2 + L_3(\Omega_1 + \Omega_2) + 2M_3 + M_4 + M_5,$$

$$(c) \quad M = M_4(1 + \Omega_1) + M_5(1 + \Omega_2) + M_1 + M_2 + M_3(\Omega_1 + \Omega_2),$$

le funzioni $g(t)$ e $G(t)$ hanno rispettivamente, per $t \geq 0$, la seguente espressione (cfr. pag. 97 e pag. 103 di $[M]$)

$$(d) \quad g(t) = \frac{1 + k_2 + k_3 + k_4 + k_5}{\Lambda} (e^{\Lambda t} - 1),$$

e dai punti appartenenti al campo C^* limitato dalle curve

$$\left\{ \begin{array}{l} y = Y(-a, \Phi(-a, x)), \quad (X(-a, \alpha) \leq x \leq X(-a, \beta)) \\ \\ y = f(x), \quad (\alpha \leq x \leq \beta) \\ \\ \left\{ \begin{array}{l} x = X(t, \alpha) \\ y = Y(t, \alpha) \end{array} \right. \quad (-a \leq t \leq 0) \\ \\ \left\{ \begin{array}{l} x = X(t, \beta) \\ y = Y(t, \beta) \end{array} \right. \quad (-a \leq t \leq 0), \end{array} \right.$$

dove $X(t, \xi)$, $Y(t, \xi)$ sono funzioni continue nel rettangolo $R' : [-a \leq t \leq a, \alpha \leq \xi \leq \beta]$ assieme alle derivate $\frac{dX(t, \xi)}{dt}$, $\frac{dY(t, \xi)}{dt}$ e, per ogni t fissato di $(-a, a)$, a rapporto incrementale limitato rispetto a ξ in (α, β) , con costante di LIPSCHITZ indipendente da t , le quali in tutto R' soddisfano il sistema

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{dX(t, \xi)}{dt} = \\ \quad = F_p(X(t, \xi), Y(t, \xi), z(X(t, \xi), Y(t, \xi)), p(X(t, \xi), Y(t, \xi)), q(X(t, \xi), Y(t, \xi))) \\ \\ \frac{dY(t, \xi)}{dt} = \\ \quad = F_q(X(t, \xi), Y(t, \xi), z(X(t, \xi), Y(t, \xi)), p(X(t, \xi), Y(t, \xi)), q(X(t, \xi), Y(t, \xi))) \end{array} \right.$$

$$(e) \quad G(t) = \left[L_5 + L_4 \frac{k_2 + L_5 g(t)}{1 - L_4 g(t)} \right] M t + \frac{\lambda M_4^2 t}{(1 - L_4 g(t))^2} + \frac{M_4 (L_5 + k_2 L_4) g(t)}{1 - L_4 g(t)}.$$

È ovvio che in (a) della presente nota si sottintende che sia $M_3 > 0$, e anche, poichè può essere $\mu_1 = \mu_2 = 0$, $M_1 > 0$, $M_2 > 0$.

D'altra parte in [M] (cfr. pag. 93, dove appunto è sottinteso che sia $M_i > 0$, ($i = 1, 2, 3$)) è evidente quanto avviene nei casi particolari in cui una, due, o tutte tre le costanti M_i ($i = 1, 2, 3$) sono nulle. Analogo rilievo vale per la (39) di [M], dove è pure sottinteso che sia $M_3 > 0$.

Soggiungiamo che in (d), tenendo presente l'espressione di Λ ricordata in (b) della presente nota, è certamente $\Lambda > 0$. Infatti se fosse $\Lambda = 0$, dovrebbe anche essere $M_4 = M_5 = 0$, e ciò, come si è rilevato nella nota (e), è in contrasto con le ipotesi fatte sopra le funzioni F_p , F_q .

con le condizioni

$$X(0, \xi) = \xi, \quad Y(0, \xi) = f(\xi), \quad (\alpha \leq \xi \leq \beta),$$

mentre $\Phi(t, x)$ è la funzione che viene definita nella prima parte del capoverso *b)* del n. 1 di $[M]$ (cfr. anche la nota ⁽¹³⁾ del presente lavoro). Ricordiamo inoltre che $X(t, \xi)$, $Y(t, \xi)$, assieme alle funzioni $Z(t, \xi)$, $P(t, \xi)$, $Q(t, \xi)$ ⁽¹²⁾, pure continue in R' con le derivate $\frac{dZ(t, \xi)}{dt}$, $\frac{dP(t, \xi)}{dt}$, $\frac{dQ(t, \xi)}{dt}$ e, per ogni t fissato di $(-a, a)$, a rapporto incrementale limitato rispetto a ξ in (α, β) con costante di LIPSCHITZ indipendente da t , costituiscono in R' la soluzione del sistema di equazioni differenziali delle caratteristiche relativo alla (I), che scriviamo sotto forma integrale ^(12')

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} X(t, \xi) = \xi + \int_0^t F_p(X(\tau, \xi), Y(\tau, \xi), Z(\tau, \xi), P(\tau, \xi), Q(\tau, \xi)) d\tau \\ Y(t, \xi) = f(\xi) + \int_0^t F_q(\dots) d\tau \\ Z(t, \xi) = \zeta(\xi) + \int_0^t [F_p(\dots) P(\tau, \xi) + F_q(\dots) Q(\tau, \xi)] d\tau \\ P(t, \xi) = \pi(\xi) - \int_0^t [F_x(\dots) + F_z(\dots) P(\tau, \xi)] d\tau \\ Q(t, \xi) = \chi(\xi) - \int_0^t [F_y(\dots) + F_z(\dots) Q(\tau, \xi)] d\tau. \end{array} \right.$$

Infine rileviamo che nel teorema dimostrato in $[M]$, mediante le tre funzioni $Z(t, \xi)$, $P(t, \xi)$, $Q(t, \xi)$ sono state costruite nel campo A rispettivamente la

⁽¹²⁾ Osserviamo che, in virtù della corrispondenza biunivoca stabilita in $[M]$ tra i punti del campo A e i punti del rettangolo R' (cfr. la ⁽⁵⁾ del presente lavoro), in tutto R' è

$$z(X(t, \xi), Y(t, \xi)) = Z(t, \xi), \quad p(X(t, \xi), Y(t, \xi)) = P(t, \xi), \quad q(X(t, \xi), Y(t, \xi)) = Q(t, \xi).$$

^(12') Cfr. le (16) di $[M]$, pag. 99. Il sistema delle caratteristiche relativo alla (I) viene qui scritto in forma integrale, perchè tale forma risulta utile per il seguito. È evidente, tenendo conto di quanto si è rilevato nella ⁽¹²⁾ e ricordando le due condizioni che seguono le (6), che il sistema (6), scritto in forma integrale, è lo stesso sistema formato dalle prime due delle (7) che qui seguono.

soluzione $z(x, y)$ della (I) e le sue derivate parziali del primo ordine $p(x, y)$ e $q(x, y)$ ⁽¹³⁾, per le quali in tutto A è

$$(7') \quad |p(x, y)| \leq \Omega_1, \quad |q(x, y)| \leq \Omega_2.$$

2. Teorema. — *Supponiamo che siano verificate tutte le ipotesi del teorema di esistenza ricordato nel n. 1 a), e indichiamo con $\bar{J}$ l'insieme delle funzioni $z = \bar{z}(x, y)$ definite nel campo A , le quali in tale campo soddisfano le condizioni 1°), 2°), 3°) del n. 1, a). Allora ogni funzione $z = \bar{z}(x, y)$ dell'insieme $\bar{J}$ è tale che in tutto il campo A è identicamente*

$$(8) \quad \bar{z}(x, y) = z(x, y),$$

dove $z = z(x, y)$ è la soluzione della (I), della quale nel teorema sopra citato è stata provata l'esistenza nel campo A .

⁽¹³⁾ Cfr. in $[M]$ le (26) del n. 1, e il n. 3.

A complemento di quanto abbiamo rilevato nel presente capoverso, osserviamo che, considerate in $[M]$ le funzioni $X(t, \xi)$, $Y(t, \xi)$, $Z(t, \xi)$, $P(t, \xi)$, $Q(t, \xi)$ definite nel rettangolo R' : $[-a \leq t \leq a, \alpha \leq \xi \leq \beta]$, si può ripetere il procedimento svolto nei capoversi a)-d) del n. 1 di $[M]$, quando si intende che per $t \leq 0$ la funzione $g(t)$ è definita da

$$(1'') \quad g(t) = \frac{1 + k_2 + k_3 + k_4 + k_5}{\Lambda} (e^{\Lambda |t|} - 1),$$

e la funzione $G(t)$ ha l'espressione che si ottiene dalla (e) della ⁽¹⁴⁾ del presente lavoro, sostituendo $|t|$ in luogo di t , e tenendo conto della (1'') della presente nota.

Quindi, procedendo in modo analogo a quello seguito in $[M]$, si può definire la funzione $\xi = \Phi(t, x)$ nel campo

$$\Delta': \quad -a \leq t \leq a, \quad X(t, \alpha) \leq x \leq X(t, \beta),$$

e, considerata in Δ' la funzione $y = Y(t, \Phi(t, x))$, si giunge a definire in tutto il campo A le funzioni

$$(2'') \quad \begin{cases} t = T(x, y) \\ \xi = \xi(x, y) \end{cases}$$

(cfr. le (21) di $[M]$). Le (2''), assieme alle

$$\begin{cases} x = X(t, \xi) \\ y = Y(t, \xi) \end{cases}$$

definite nel rettangolo R' , stabiliscono una corrispondenza biunivoca tra i punti del campo A e i punti del rettangolo R' .

Riguardo alle funzioni $T(x, y)$, $\xi(x, y)$, $z(x, y)$, $p(x, y)$, $q(x, y)$ definite in tutto il campo A , cfr. anche quanto si dice nel n. 4, b) del presente lavoro. In particolare cfr. le (101) dalle quali seguono, essendo $\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \leq |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$, le (5) del n. 1 del presente lavoro.

a) Per dimostrare l'asserto fissiamo quattro valori reali qualsiasi $\tau_1, \tau_2, \xi_1, \xi_2$, con $-a < \tau_1 < 0 < \tau_2 < a$, $\alpha < \xi_1 < \xi_2 < \beta$, e, indicato con $\bar{A}$ il campo del piano (x, y) limitato dalle quattro curve

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{l} y = Y(\tau_1, \Phi(\tau_1, x)), \quad (X(\tau_1, \xi_1) \leq x \leq X(\tau_1, \xi_2)) \\ y = Y(\tau_2, \Phi(\tau_2, x)), \quad (X(\tau_2, \xi_1) \leq x \leq X(\tau_2, \xi_2)) \\ \left\{ \begin{array}{l} x = X(t, \xi_1) \\ y = Y(t, \xi_1) \end{array} \right. \quad (\tau_1 \leq t \leq \tau_2) \\ \left\{ \begin{array}{l} x = X(t, \xi_2) \\ y = Y(t, \xi_2) \end{array} \right. \quad (\tau_1 \leq t \leq \tau_2) \quad (14), \end{array} \right.$$

ci proponiamo di provare che per ogni funzione $z = \bar{z}(x, y)$ dell'insieme $\bar{J}$ è verificata la (8) in tutto il campo $\bar{A}$.

A tale scopo, fissato un valore reale qualsiasi t_0 , con $\tau_1 \leq t_0 \leq \tau_2$, che, per maggiore comodità di riferimento al teorema di esistenza dimostrato in [M], possiamo supporre non negativo ⁽¹⁵⁾, consideriamo la curva

$$\Gamma_0) \quad y = Y(t_0, \Phi(t_0, x)), \quad (X(t_0, \xi_1) \leq x \leq X(t_0, \xi_2)),$$

o anche, in forma parametrica,

$$(9') \quad \left\{ \begin{array}{l} x = X(t_0, \xi) \\ y = Y(t_0, \xi) \end{array} \right. \quad (\xi_1 \leq \xi \leq \xi_2),$$

⁽¹⁴⁾ Le prime due delle (9) (nelle quali $\Phi(t, x)$ è la funzione ricordata in seguito alle (6) del n. 1 del presente lavoro) possono anche essere scritte rispettivamente nella forma parametrica

$$\left\{ \begin{array}{l} x = X(\tau_1, \xi) \\ y = Y(\tau_1, \xi) \end{array} \right. \quad (\xi_1 \leq \xi \leq \xi_2), \quad \left\{ \begin{array}{l} x = X(\tau_2, \xi) \\ y = Y(\tau_2, \xi) \end{array} \right. \quad (\xi_1 \leq \xi \leq \xi_2),$$

mentre le ultime due delle stesse (9) hanno anche rispettivamente l'equazione (cfr. [M], pag. 104)

$$\xi(x, y) = \xi_1, \quad \xi(x, y) = \xi_2.$$

⁽¹⁵⁾ Sceglierlo un valore di (τ_1, τ_2) negativo, il procedimento sarebbe del tutto analogo a quello che viene svolto nel seguito. Ciò si può verificare, per es., con il cambiamento di variabile $T = -t$, $(\tau_1 \leq t \leq 0)$.

e supponiamo che in ogni punto (x, y) appartenente a Γ_0 sia

$$(10) \quad \bar{z}(x, y) = z(x, y), \quad \bar{p}(x, y) = p(x, y), \quad \bar{q}(x, y) = q(x, y),$$

dove è $\bar{p}(x, y) = \frac{\partial \bar{z}(x, y)}{\partial x}$, $p(x, y) = \frac{\partial z(x, y)}{\partial x}$, $\bar{q}(x, y) = \frac{\partial \bar{z}(x, y)}{\partial y}$, $q(x, y) = \frac{\partial z(x, y)}{\partial y}$.

Consideriamo il sistema di equazioni differenziali ordinarie

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d\bar{X}(t, \xi)}{dt} = \\ = F_p(\bar{X}(t, \xi), \bar{Y}(t, \xi), \bar{z}(\bar{X}(t, \xi), \bar{Y}(t, \xi)), \bar{p}(\bar{X}(t, \xi), \bar{Y}(t, \xi)), \bar{q}(\bar{X}(t, \xi), \bar{Y}(t, \xi))) \\ \frac{d\bar{Y}(t, \xi)}{dt} = \\ = F_q(\bar{X}(t, \xi), \bar{Y}(t, \xi), \bar{z}(\dots), \bar{p}(\dots), \bar{q}(\dots)), \end{array} \right.$$

e osserviamo che, in virtù delle ipotesi fatte, dalle ultime due delle (1) segue che in ogni punto (x, y) del campo A (e quindi in ogni punto (x, y) del campo $\bar{A}$, interno ad A) è

$$(12) \quad \left\{ \begin{array}{l} |F_p(x, y, \bar{z}(x, y), \bar{p}(x, y), \bar{q}(x, y))| \leq M_4 \\ |F_q(x, y, \bar{z}(x, y), \bar{p}(x, y), \bar{q}(x, y))| \leq M_5. \end{array} \right.$$

Inoltre se $\bar{\mu}$ e $\bar{\nu}$ sono le costanti positive corrispondenti a quelle che figurano nelle (5) e relative alle funzioni $\bar{p}(x, y)$ e $\bar{q}(x, y)$ rispettivamente, tenendo presente che, in virtù delle ipotesi fatte, dalla (4) segue che per qualunque coppia di punti (x_1, y_1) , (x_2, y_2) del campo A è

$$|\bar{z}(x_1, y_1) - \bar{z}(x_2, y_2)| \leq \Omega_1 |x_1 - x_2| + \Omega_2 |y_1 - y_2|,$$

e inoltre tenendo presenti le (2), per qualsiasi coppia di punti (x_1, y_1) , (x_2, y_2) del campo A si ha, posto

$$L_4' = L_4(1 + \Omega_1 + \bar{\mu} + \bar{\nu}), \quad L_4'' = L_4(1 + \Omega_2 + \bar{\mu} + \bar{\nu})$$

$$L_5' = L_5(1 + \Omega_1 + \bar{\mu} + \bar{\nu}), \quad L_5'' = L_5(1 + \Omega_2 + \bar{\mu} + \bar{\nu}),$$

$$(13) \quad \left\{ \begin{array}{l} |F_p(x_1, y_1, \bar{z}(x_1, y_1), \bar{p}(x_1, y_1), \bar{q}(x_1, y_1)) - F_p(x_2, y_2, \bar{z}(x_2, y_2), \bar{p}(x_2, y_2), \bar{q}(x_2, y_2))| \leq \\ \leq L_4' |x_1 - x_2| + L_4'' |y_1 - y_2| \leq \Lambda_4 \{ |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| \}, \\ |F_q(x_1, y_1, z(x_1, y_1), \bar{p}(x_1, y_1), \bar{q}(x_1, y_1)) - F_q(x_2, y_2, \bar{z}(x_2, y_2), p(x_2, y_2), \bar{q}(x_2, y_2))| \leq \\ \leq L_5' |x_1 - x_2| + L_5'' |y_1 - y_2| \leq \Lambda_5 \{ |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| \}, \end{array} \right.$$

dove si è indicato con Λ_4 il maggiore dei numeri L_4', L_4'' , e con Λ_5 il maggiore dei numeri L_5', L_5'' .

Allora si può determinare un numero reale positivo δ_0 ⁽¹⁶⁾, per il quale supponiamo che sia $\delta_0 \leq \tau_1 + a$, $\delta_0 \leq a - \tau_2$, $\delta_0 \leq \frac{\bar{d}}{\sqrt{M_4^2 + M_5^2}}$, dove $\bar{d}$ è la minima distanza (positiva) dei punti del contorno del campo $\bar{A}$ dai punti del contorno del campo A ⁽¹⁷⁾, tale che nel rettangolo $R_0': [t_0 - \delta_0 \leq t \leq t_0 + \delta_0, \xi_1 \leq \xi \leq \xi_2]$ il sistema (11) ammette una ed una sola soluzione $\bar{X}(t, \xi)$, $\bar{Y}(t, \xi)$, per la quale è, per ogni ξ di (ξ_1, ξ_2) ,

$$(14) \quad \bar{X}(t_0, \xi) = X(t_0, \xi), \quad \bar{Y}(t_0, \xi) = Y(t_0, \xi),$$

⁽¹⁶⁾ Cfr., per es., G. SANSONE, *Equazioni differenziali nel campo reale*, Parte I, Cap. I, § 3, n. 1 e n. 4. Osserviamo che, nel nostro caso, le funzioni

$$F_p(x, y, \bar{z}(x, y), \bar{p}(x, y), \bar{q}(x, y)), F_q(x, y, \bar{z}(x, y), \bar{p}(x, y), \bar{q}(x, y))$$

che figurano al secondo membro delle (11) non dipendono da t . Quindi la limitazione per il valore δ_0 , che viene fatta in seguito, è soltanto dovuta al fatto che l'intervallo $(t_0 - \delta_0, t_0 + \delta_0)$ deve appartenere all'intervallo $(-a, a)$, e ogni punto $[\bar{X}(t, \xi), \bar{Y}(t, \xi)]$, con (t, ξ) appartenente al rettangolo $R_0': [t_0 - \delta_0 \leq t \leq t_0 + \delta_0, \xi_1 \leq \xi \leq \xi_2]$ deve appartenere al campo A (cfr. le note ⁽¹⁷⁾ e ⁽¹⁸⁾).

⁽¹⁷⁾ È evidente che, affinché l'intervallo $(t_0 - \delta_0, t_0 + \delta_0)$ appartenga all'intervallo $(-a, a)$, è sufficiente che per il numero positivo δ_0 siano soddisfatte, in luogo delle prime due disuguaglianze sopra scritte, rispettivamente le disuguaglianze $\delta_0 \leq t_0 + a$, $\delta_0 \leq a - t_0$. Inoltre, affinché ogni punto $[\bar{X}(t, \xi), \bar{Y}(t, \xi)]$, con (t, ξ) appartenente a R_0' , appartenga (come si verifica in seguito nella nota ⁽¹⁸⁾) al campo A è sufficiente che per il numero positivo δ_0 , con $\delta_0 \leq t_0 + a$, $\delta_0 \leq a - t_0$,

sia verificata, anziché la disuguaglianza $\delta_0 \leq \frac{\bar{d}}{\sqrt{M_4^2 + M_5^2}}$, la disuguaglianza $\delta_0 \leq \frac{d_0}{\sqrt{M_4^2 + M_5^2}}$,

dove d_0 è la minima distanza (positiva) dei punti della curva Γ_0 , rappresentata in forma parametrica dalle (9'), dai punti del contorno del campo A . Peraltro, se il numero positivo δ_0 soddisfa le disuguaglianze del testo, tale numero risulta indipendente dal valore t_0 fissato.

le funzioni $\bar{X}(t, \xi)$, $\bar{Y}(t, \xi)$ sono continue in R'_0 assieme alle derivate $\frac{d\bar{X}(t, \xi)}{dt}$, $\frac{d\bar{Y}(t, \xi)}{dt}$, e ogni punto $[\bar{X}(t, \xi), \bar{Y}(t, \xi)]$, con (t, ξ) appartenente a R'_0 , appartiene al campo A ⁽¹⁸⁾.

Consideriamo ora il sistema

$$(15) \quad \begin{cases} x = \bar{X}(t, \xi) \\ y = \bar{Y}(t, \xi) \end{cases}$$

⁽¹⁸⁾ Osserviamo che se il numero positivo ϑ_0 soddisfa alle tre disuguaglianze sopra scritte $\vartheta_0 \leq \tau_1 + a$, $\vartheta_0 \leq a - \tau_2$, $\vartheta_0 \leq \frac{\bar{d}}{\sqrt{M_4^2 + M_5^2}}$ (dove $\bar{d}$ è il numero positivo del quale si è precisato il significato nel testo), considerato il sistema (11), e costruite, per ogni ξ di (ξ_1, ξ_2) e per ogni t di $(t_0 - \vartheta_0, t_0 + \vartheta_0)$, le successioni approssimanti

$$(1^*) \quad \begin{cases} \bar{X}^{[n]}(t, \xi) = X(t_0, \xi) + \\ + \int_{t_0}^t F_p(\bar{X}^{[n-1]}(\tau, \xi), \bar{Y}^{[n-1]}(\tau, \xi), \bar{z}(\bar{X}^{[n-1]}(\tau, \xi), \bar{Y}^{[n-1]}(\tau, \xi)), \bar{p}(\dots), \bar{q}(\dots)) d\tau \\ \bar{Y}^{[n]}(t, \xi) = Y(t_0, \xi) + \int_{t_0}^t F_q(\dots) d\tau \end{cases} \quad (n = 1, 2, \dots),$$

dove per $n=1$ si intende che sotto il segno di integrale, è, per ogni ξ di (ξ_1, ξ_2) ,

$$(2^*) \quad \bar{X}^{[0]}(\tau, \xi) = X(t_0, \xi), \quad \bar{Y}^{[0]}(\tau, \xi) = Y(t_0, \xi),$$

si verifica che ogni punto $[\bar{X}^{[n]}(t, \xi), \bar{Y}^{[n]}(t, \xi)]$, ($n=1, 2, \dots$), con (t, ξ) appartenente a R'_0 , appartiene al campo A .

Si ha infatti, tenendo presenti le (1*), le (2*), e le (12), per ogni t di $(t_0 - \vartheta_0, t_0 + \vartheta_0)$ e per ogni ξ di (ξ_1, ξ_2) ,

$[\bar{X}^{[1]}(t, \xi) - X(t_0, \xi)]^2 + [\bar{Y}^{[1]}(t, \xi) - Y(t_0, \xi)]^2 \leq (M_4^2 + M_5^2)(t - t_0)^2 \leq (M_4^2 + M_5^2)\vartheta_0^2 \leq \bar{d}^2$, e pertanto, tenendo presente che ogni punto $[X(t_0, \xi), Y(t_0, \xi)]$, $(\xi_1 \leq \xi \leq \xi_2)$ appartiene alla curva Γ_0 , e ricordando il significato del numero $\bar{d}$, segue che ogni punto $[\bar{X}^{[1]}(t, \xi), \bar{Y}^{[1]}(t, \xi)]$, con (t, ξ) appartenente a R'_0 , appartiene al campo A . Analogamente, tenendo presenti le (1*), si verifica che ogni punto $[\bar{X}^{[n]}(t, \xi), \bar{Y}^{[n]}(t, \xi)]$, ($n=2, 3, \dots$), con (t, ξ) appartenente a R'_0 , appartiene al campo A .

Allora da tale verifica segue che le funzioni $\bar{X}(t, \xi)$, $\bar{Y}(t, \xi)$ cui convergono uniformemente in R'_0 rispettivamente le $\bar{X}^{[n]}(t, \xi)$ e $\bar{Y}^{[n]}(t, \xi)$, ($n=1, 2, \dots$), e che in R'_0 soddisfano il sistema (11), sono tali che ogni punto $[\bar{X}(t, \xi), \bar{Y}(t, \xi)]$, con (t, ξ) appartenente a R'_0 , appartiene al campo A .

nel rettangolo $[t_0 \leq t \leq t_0 + \delta_0, \xi_1 \leq \xi \leq \xi_2]$ ⁽¹⁹⁾, e ricordiamo che per ogni coppia di valori reali distinti ξ', ξ'' di (α, β) e per ogni t di $(0, \alpha)$ è ⁽²⁰⁾

$$(16) \quad \left\{ \begin{array}{l} 0 < m_1 \leq 1 - L_4 g(\alpha) \leq 1 - L_4 g(t) \leq \\ \leq \frac{X(t, \xi') - X(t, \xi'')}{\xi' - \xi''} \leq 1 + L_4 g(t) \leq 1 + L_4 g(\alpha) \leq m_2 \\ \left| \frac{Y(t, \xi') - Y(t, \xi'')}{\xi' - \xi''} \right| \leq k_2 + L_5 g(t) \leq k_2 + L_5 g(\alpha), \end{array} \right.$$

dove $g(t)$ è la funzione espressa dalla (d) della ⁽¹¹⁾ del presente lavoro.

Allora, considerato il sistema delle (11) che, tenendo presenti le (14), scriviamo in forma integrale

$$(17) \quad \left\{ \begin{array}{l} \bar{X}(t, \xi) = X(t_0, \xi) + \int_{t_0}^t F_p(\bar{X}(\tau, \xi), \bar{Y}(\tau, \xi), \bar{z}(\bar{X}(\tau, \xi), \bar{Y}(\tau, \xi)), \bar{p}(\dots), \bar{q}(\dots)) d\tau \\ \bar{Y}(t, \xi) = Y(t_0, \xi) + \int_{t_0}^t F_q(\bar{X}(\tau, \xi), \bar{Y}(\tau, \xi), \bar{z}(\bar{X}(\tau, \xi), \bar{Y}(\tau, \xi)), \bar{p}(\dots), \bar{q}(\dots)) d\tau, \end{array} \right.$$

e tenuto conto delle (13), in virtù di un noto lemma ⁽²¹⁾ si ha, per qualunque coppia di valori reali distinti ξ', ξ'' di (ξ_1, ξ_2) e per ogni t di $(t_0, t_0 + \delta_0)$,

$$(18) \quad \left| \frac{\bar{X}(t, \xi') - \bar{X}(t, \xi'')}{\xi' - \xi''} \right| + \left| \frac{\bar{Y}(t, \xi') - \bar{Y}(t, \xi'')}{\xi' - \xi''} \right| \leq L e^{\int_{t_0}^t (\Lambda_4 + \Lambda_5) d\tau} = L e^{\Lambda_0(t-t_0)},$$

dove si è posto, per brevità,

$$L = 1 + k_2 + (L_4 + L_5) g(\alpha),$$

$$\Lambda_0 = \Lambda_4 + \Lambda_5,$$

⁽¹⁹⁾ Ci limitiamo a considerare tale rettangolo, per maggiore comodità di riferimento al teorema ricordato nel n. 1, a), rilevando che il procedimento che viene esposto nel seguito si può seguire in modo analogo quando si prenda in considerazione il rettangolo $[t_0 - \delta_0 \leq t \leq t_0, \xi_1 \leq \xi \leq \xi_2]$.

⁽²⁰⁾ Cfr. le prime due delle (11) e la (13) di [M].

⁽²¹⁾ M. CINQUINI CIBRARIO, S. CINQUINI, Memoria citata per prima in ⁽⁴⁾; cfr. § 1, n. 1. Qui ci troviamo in un caso particolare poichè le funzioni che figurano al secondo membro delle (17), sotto il segno di integrale, sono lipschitziane.

e anche

$$\left\{ \begin{aligned} \left| \frac{\bar{X}(t, \xi') - \bar{X}(t, \xi'')}{\xi' - \xi''} - \frac{X(t_0, \xi') - X(t_0, \xi'')}{\xi' - \xi''} \right| &\leq L \Lambda_4 \int_{t_0}^t e^{\int_{t_0}^{\tau} \Lambda_0 du} d\tau = \\ &= L \frac{\Lambda_4}{\Lambda_0} (e^{\Lambda_0(t-t_0)} - 1) \\ \left| \frac{\bar{Y}(t, \xi') - \bar{Y}(t, \xi'')}{\xi' - \xi''} - \frac{Y(t_0, \xi') - Y(t_0, \xi'')}{\xi' - \xi''} \right| &\leq L \Lambda_5 \int_{t_0}^t e^{\int_{t_0}^{\tau} \Lambda_0 du} d\tau = \\ &= L \frac{\Lambda_5}{\Lambda_0} (e^{\Lambda_0(t-t_0)} - 1) \quad (22), \end{aligned} \right.$$

da cui, tenendo presenti le (16), segue

$$(19) \quad \left\{ \begin{aligned} 1 - L_4 g(a) - L \frac{\Lambda_4}{\Lambda_0} (e^{\Lambda_0(t-t_0)} - 1) &\leq \frac{\bar{X}(t, \xi') - \bar{X}(t, \xi'')}{\xi' - \xi''} \leq \\ &\leq 1 + L_4 g(a) + L \frac{\Lambda_4}{\Lambda_0} (e^{\Lambda_0(t-t_0)} - 1) \\ \left| \frac{\bar{Y}(t, \xi') - \bar{Y}(t, \xi'')}{\xi' - \xi''} \right| &\leq k_2 + L_5 g(a) + L \frac{\Lambda_5}{\Lambda_0} (e^{\Lambda_0(t-t_0)} - 1). \end{aligned} \right.$$

Determiniamo ora un numero reale positivo δ_1 , con $\delta_1 \leq \delta_0$, tale che per qualunque coppia di valori t^*, t^{**} di (τ_1, τ_2) per i quali è $0 < t^{**} - t^* \leq \delta_1$ sia

$$(20) \quad 1 - L_4 g(a) - L \frac{\Lambda_4}{\Lambda_0} (e^{\Lambda_0(t^{**}-t^*)} - 1) > 0 \quad (23).$$

(22) Avendo in (?) escluso il caso particolare in cui è $L_4 = L_5 = 0$, è evidentemente escluso qui il caso particolare in cui è $\Lambda_0 = 0$. In questo caso, infatti, dovrebbe essere $\Lambda_4 = \Lambda_5 = 0$, e quindi anche, ricordando l'espressione di Λ_4 e Λ_5 , $L_4 = L_5 = 0$.

(23) Sarebbe sufficiente, per il seguito, fissare un numero reale positivo ϑ' , con $\vartheta' \leq \delta_0$, tale che per ogni t di $(t_0, t_0 + \vartheta')$ si abbia

$$1 - L_4 g(a) - L \frac{\Lambda_4}{\Lambda_0} (e^{\Lambda_0(t-t_0)} - 1) > 0.$$

Peraltro, facendo come nel testo, il numero δ_1 risulta indipendente dal valore fissato t_0 .

Allora, posto

$$(21) \quad \begin{cases} 1 - L_4 g(a) - L \frac{\Lambda_4}{\Lambda_0} (e^{\Lambda_0 \delta_1} - 1) = \bar{m} \\ 1 + L_4 g(a) + L \frac{\Lambda_4}{\Lambda_0} (e^{\Lambda_0 \delta_1} - 1) = \bar{M}, \end{cases}$$

per ogni t di $(t_0, t_0 + \delta_1)$ si ha

$$(22) \quad 0 < \bar{m} \leq \frac{\bar{X}(t, \xi') - \bar{X}(t, \xi'')}{\xi' - \xi''} \leq \bar{M},$$

per qualunque coppia di valori reali distinti ξ', ξ'' di (ξ_1, ξ_2) .

Quindi per ogni t fissato di $(t_0, t_0 + \delta_1)$ la funzione

$$x = \bar{X}(t, \xi),$$

considerata come funzione della sola ξ , è continua e crescente nell'intervallo (ξ_1, ξ_2) , e pertanto esiste la funzione inversa

$$\xi = \Psi(t, x)$$

definita nel campo

$$\bar{\Delta}_1: \quad t_0 \leq t \leq t_0 + \delta_1, \quad \bar{X}(t, \xi_1) \leq x \leq \bar{X}(t, \xi_2).$$

Tale funzione, per ogni t fissato dell'intervallo $(t_0, t_0 + \delta_1)$, considerata come funzione della sola x , è crescente nell'intervallo $(\bar{X}(t, \xi_1), \bar{X}(t, \xi_2))$, e, tenendo presente la (22), si ha, per ogni t di $(t_0, t_0 + \delta_1)$ e per qualsiasi coppia di valori distinti x', x'' di $(\bar{X}(t, \xi_1), \bar{X}(t, \xi_2))$

$$(23) \quad 0 < \frac{1}{\bar{M}} \leq \frac{\Psi(t, x') - \Psi(t, x'')}{x' - x''} \leq \frac{1}{\bar{m}};$$

e si ha anche, ricordando come è stata definita in $[M]$ la funzione $\xi = \Phi(t, x)$ ⁽²⁴⁾, e tenendo presente la prima delle (14),

$$(24) \quad \Psi(t_0, x) = \Phi(t_0, x)$$

per ogni x dell'intervallo $(\bar{X}(t_0, \xi_1), \bar{X}(t_0, \xi_2))$ ⁽²⁵⁾.

Inoltre, se t', t'', x sono tre qualsiasi valori reali, con $t' \neq t''$, tali che i punti (t', x) , (t'', x) appartengono al campo $\bar{\Delta}_1$, per la corrispondenza biunivoca che esiste tra i punti del campo $\bar{\Delta}_1$ e quelli del rettangolo $[t_0 \leq t \leq t_0 + \delta_1, \xi_1 \leq \xi \leq \xi_2]$, è

$$x = \bar{X}(t', \Psi(t', x)), \quad x = \bar{X}(t'', \Psi(t'', x)).$$

Quindi, se è $\Psi(t', x) \neq \Psi(t'', x)$, si ha, posto per brevità

$$\xi' = \Psi(t', x), \quad \xi'' = \Psi(t'', x),$$

$$(25) \quad \frac{\bar{X}(t', \xi') - \bar{X}(t'', \xi')}{t' - t''} + \frac{\bar{X}(t'', \xi') - \bar{X}(t'', \xi'')}{\xi' - \xi''} \frac{\Psi(t', x) - \Psi(t'', x)}{t' - t''} = 0,$$

da cui segue, tenendo presente la prima delle (17), la prima delle (12) e la (22),

$$(26) \quad \left| \frac{\Psi(t', x) - \Psi(t'', x)}{t' - t''} \right| \leq \frac{M_4}{m} \quad (26).$$

D'altra parte, se è $\Psi(t', x) = \Psi(t'', x)$, la (26) è senz'altro verificata, essendo nullo il primo membro di tale disuguaglianza.

b) Ora consideriamo la funzione

$$y = \bar{Y}(t, \Psi(t, x))$$

definita nel campo $\bar{\Delta}_1$, e dimostriamo che è possibile determinare un numero reale positivo δ , con $\delta \leq \delta_1$, tale che per qualunque terna di valori reali

⁽²⁴⁾ Cfr. pag. 98 di $[M]$.

⁽²⁵⁾ Tale intervallo, in virtù della prima delle (14), coincide evidentemente con l'intervallo $(X(t_0, \xi_1), X(t_0, \xi_2))$.

⁽²⁶⁾ Rileviamo che nella (15) di $[M]$ si sottintende che sia $\Phi(t, x) \neq \Phi(\bar{t}, x)$. D'altra parte è evidente che se è $\Phi(t, x) = \Phi(\bar{t}, x)$ la (17) di $[M]$ è soddisfatta, essendo in tale caso nullo il primo membro della (17) stessa.

t, t^*, x , con $t \neq t^*$, per i quali i punti $(t, x), (t^*, x)$ appartengono al campo

$$(27) \quad \bar{\Delta}: \quad t_0 \leq t \leq t_0 + \delta, \quad \bar{X}(t, \xi_1) \leq x \leq \bar{X}(t, \xi_2)$$

si ha

$$(28) \quad \frac{\bar{Y}(t, \Psi(t, x)) - \bar{Y}(t^*, \Psi(t^*, x))}{t - t^*} > 0.$$

A tale scopo, procedendo in modo analogo a quello seguito in $[M]$, osserviamo che, posto, per brevità,

$$\Psi = \Psi(t, x), \quad \Psi^* = \Psi(t^*, x) \quad (27),$$

e supposto che sia

$$(29) \quad \Psi \neq \Psi^*,$$

possiamo scrivere

$$\begin{aligned} \frac{\bar{Y}(t, \Psi(t, x)) - \bar{Y}(t^*, \Psi(t^*, x))}{t - t^*} = \\ = \frac{\bar{Y}(t, \Psi) - \bar{Y}(t^*, \Psi)}{t - t^*} + \frac{\bar{Y}(t^*, \Psi) - \bar{Y}(t^*, \Psi^*)}{\Psi - \Psi^*} \frac{\Psi(t, x) - \Psi(t^*, x)}{t - t^*}, \end{aligned}$$

e anche, ricordando la (25),

$$(30) \quad \frac{\bar{Y}(t, \Psi(t, x)) - \bar{Y}(t^*, \Psi(t^*, x))}{t - t^*} = \frac{\bar{Y}(t, \Psi) - \bar{Y}(t^*, \Psi)}{t - t^*} - \frac{\bar{Y}(t^*, \Psi) - \bar{Y}(t^*, \Psi^*)}{\Psi - \Psi^*} \frac{\frac{\bar{X}(t, \Psi) - \bar{X}(t^*, \Psi)}{t - t^*}}{\frac{\bar{X}(t^*, \Psi) - \bar{X}(t^*, \Psi^*)}{\Psi - \Psi^*}}.$$

(27) Osserviamo che, poichè la funzione $\Psi(t, x)$, considerata, per ogni t fissato di $(t_0, t_0 + \delta)$, come funzione della sola x , è crescente nell'intervallo $(\bar{X}(t, \xi_1) \leq x \leq \bar{X}(t, \xi_2))$, in tutto il campo $\bar{\Delta}_1$ è

$$\xi_1 = \Psi(t, \bar{X}(t, \xi_1)) \leq \Psi(t, x) \leq \Psi(t, \bar{X}(t, \xi_2)) = \xi_2;$$

pertanto i valori considerati Ψ e Ψ^* appartengono all'intervallo (ξ_1, ξ_2) , e quindi anche ad (α, β) .

Allora, ricordando che per ogni ξ di (α, β) è ⁽²⁸⁾

$$(31) \quad 0 < \gamma_1 \leq F_q(\xi, f(\xi), \zeta(\xi), \pi(\xi), \chi(\xi)) - F_p(\dots)f'(\xi) \leq \gamma_2,$$

e supposto, per fissare le idee, $t^* < t$, consideriamo la differenza

$$(32) \quad D = \frac{\bar{Y}(t, \Psi(t, x)) - \bar{Y}(t^*, \Psi(t^*, x))}{t - t^*} - \\ - [F_q(\Psi, f(\Psi), \zeta(\Psi), \pi(\Psi), \chi(\Psi)) - F_p(\dots)f'(\Psi)].$$

Tenuto conto della (30), applicando ai due rapporti $\frac{\bar{Y}(t, \Psi) - \bar{Y}(t^*, \Psi)}{t - t^*}$, $\frac{\bar{X}(t, \Psi) - \bar{X}(t^*, \Psi)}{t - t^*}$ che figurano al secondo membro della (30) il teorema del valor medio, e tenendo presenti le (11), si ha

$$(33) \quad D = F_q(\bar{X}(\tilde{t}, \Psi), \bar{Y}(\tilde{t}, \Psi), \bar{z}(\bar{X}(\tilde{t}, \Psi), \bar{Y}(\tilde{t}, \Psi)), \bar{p}(\dots), \bar{q}(\dots)) - F_q(\Psi, \dots, \chi(\Psi)) - \\ - F_p(\bar{X}(\tilde{t}, \Psi), \bar{Y}(\tilde{t}, \Psi), \bar{z}(\bar{X}(\tilde{t}, \Psi), \bar{Y}(\tilde{t}, \Psi)), \bar{p}(\dots), \bar{q}(\dots)).$$

$$\cdot \left[\frac{\frac{\bar{Y}(t^*, \Psi) - \bar{Y}(t^*, \Psi^*)}{\Psi - \Psi^*}}{\frac{\bar{X}(t^*, \Psi) - \bar{X}(t^*, \Psi^*)}{\Psi - \Psi^*}} - f'(\Psi) \right] +$$

$$+ f'(\Psi)[F_p(\Psi, \dots, \chi(\Psi)) - F_p(\bar{X}(\tilde{t}, \Psi), \bar{Y}(\tilde{t}, \Psi), \bar{z}(\bar{X}(\tilde{t}, \Psi), \bar{Y}(\tilde{t}, \Psi)), \bar{p}(\dots), \bar{q}(\dots))],$$

dove $\tilde{t}$ e $\tilde{t}$ sono due opportuni valori interni all'intervallo (t^*, t) .

Osserviamo che, ricordando che in ogni punto della curva Γ_0 , rappresentata in forma parametrica dalle (9'), sono verificate le (10) e che, in virtù della corrispondenza biunivoca stabilita in $[M]$ tra i punti del campo C del piano (x, y) e i punti del rettangolo $R: [0 \leq t \leq \alpha, \alpha \leq \xi \leq \beta]$ del piano (t, ξ) , in tutto il rettangolo R è (come abbiamo ricordato nella ⁽¹²⁾)

$$(34) \quad \left\{ \begin{array}{l} z(X(t, \xi), Y(t, \xi)) = Z(t, \xi), \quad p(X(t, \xi), Y(t, \xi)) = P(t, \xi) \\ q(X(t, \xi), Y(t, \xi)) = Q(t, \xi), \end{array} \right.$$

⁽²⁸⁾ Cfr. la (19) di $[M]$.

si ha

$$\begin{aligned} F_q(X(t_0, \Psi), Y(t_0, \Psi), \bar{z}(X(t_0, \Psi), Y(t_0, \Psi)), \bar{p}(X(t_0, \Psi), Y(t_0, \Psi)), \bar{q}(X(t_0, \Psi), Y(t_0, \Psi))) = \\ = F_q(X(t_0, \Psi), Y(t_0, \Psi), Z(t_0, \Psi), P(t_0, \Psi), Q(t_0, \Psi)). \end{aligned}$$

Allora, tenuto anche conto delle (13), (17) e (12), e ricordando due disuguaglianze ottenute in [M] ⁽²⁹⁾, si ottiene

$$\begin{aligned} (35) \quad & |F_q(\bar{X}(\tilde{t}, \Psi), \bar{Y}(\tilde{t}, \Psi), \bar{z}(\bar{X}(\tilde{t}, \Psi), \bar{Y}(\tilde{t}, \Psi)), \bar{p}(\dots), \bar{q}(\dots)) - F_q(\Psi, \dots, \chi(\Psi))| = \\ & = |F_q(\bar{X}(\tilde{t}, \Psi), \bar{Y}(\tilde{t}, \Psi), \bar{z}(\bar{X}(\tilde{t}, \Psi), \bar{Y}(\tilde{t}, \Psi)), \bar{p}(\dots), \bar{q}(\dots)) - \\ & - F_q(X(t_0, \Psi), Y(t_0, \Psi), \bar{z}(X(t_0, \Psi), Y(t_0, \Psi)), \bar{p}(\dots), \bar{q}(\dots)) + \\ & + F_q(X(t_0, \Psi), Y(t_0, \Psi), Z(t_0, \Psi), P(t_0, \Psi), Q(t_0, \Psi)) - F_q(\Psi, \dots, \chi(\Psi))| \leq \\ & \leq \Lambda_5 \{ |\bar{X}(\tilde{t}, \Psi) - X(t_0, \Psi)| + |\bar{Y}(\tilde{t}, \Psi) - Y(t_0, \Psi)| \} + L_5 M t_0 \leq \\ & \leq \Lambda_5 (M_4 + M_5) (t - t_0) + L_5 M \alpha, \end{aligned}$$

ed analogamente

$$\begin{aligned} (36) \quad & |F_p(\bar{X}(\tilde{t}, \Psi), \bar{Y}(\tilde{t}, \Psi), \bar{z}(\bar{X}(\tilde{t}, \Psi), \bar{Y}(\tilde{t}, \Psi)), \bar{p}(\dots), \bar{q}(\dots)) - F_p(\Psi, \dots, \chi(\Psi))| \leq \\ & \leq \Lambda_4 (M_4 + M_5) (t - t_0) + L_4 M \alpha. \end{aligned}$$

Ora consideriamo la differenza

$$D^* = \frac{\frac{\bar{Y}(t^*, \Psi) - \bar{Y}(t^*, \Psi^*)}{\Psi - \Psi^*}}{\frac{\bar{X}(t^*, \Psi) - \bar{X}(t^*, \Psi^*)}{\Psi - \Psi^*}} - f'(\Psi)$$

⁽²⁹⁾ Cfr. in [M] le prime due disuguaglianze di pag. 102, che, per comodità del lettore trascriviamo

$$\begin{aligned} & |F_p(X(t', \xi), Y(t', \xi), Z(t', \xi), P(t', \xi), Q(t', \xi)) - F_p(\xi, f(\xi), \zeta(\xi), \pi(\xi), \chi(\xi))| \leq L_4 M t \\ & |F_q(X(t', \xi), \dots, Q(t', \xi)) - F_q(\xi, \dots, \chi(\xi))| \leq L_5 M t, \end{aligned}$$

dove M è la costante espressa dalla (c) della nota ⁽¹¹⁾. In entrambe le (35) e (36) che seguono abbiamo, in luogo delle coppie t', ξ e t', ξ che figurano rispettivamente nella prima e seconda delle disuguaglianze ora scritte, la coppia di valori t_0, Ψ .

che figura al secondo membro della (33), osservando che possiamo scrivere

$$(37) \quad D^* = \frac{\frac{\bar{Y}(t^*, \Psi) - \bar{Y}(t^*, \Psi^*)}{\Psi - \Psi^*}}{\frac{\bar{X}(t^*, \Psi) - \bar{X}(t^*, \Psi^*)}{\Psi - \Psi^*}} - \frac{\frac{Y(t_0, \Psi) - Y(t_0, \Psi^*)}{\Psi - \Psi^*}}{\frac{X(t_0, \Psi) - X(t_0, \Psi^*)}{\Psi - \Psi^*}} +$$

$$+ \frac{\frac{Y(t_0, \Psi) - Y(t_0, \Psi^*)}{\Psi - \Psi^*}}{\frac{X(t_0, \Psi) - X(t_0, \Psi^*)}{\Psi - \Psi^*}} - f'(\Psi).$$

Indicando con D_1^* la prima differenza che figura al secondo membro dell'uguaglianza (37) ora scritta, si ha

$$D_1^* = \frac{1}{\frac{\bar{X}(t^*, \Psi) - \bar{X}(t^*, \Psi^*)}{\Psi - \Psi^*} \cdot \frac{X(t_0, \Psi) - X(t_0, \Psi^*)}{\Psi - \Psi^*}}$$

$$\cdot \left\{ \frac{X(t_0, \Psi) - X(t_0, \Psi^*)}{\Psi - \Psi^*} \left[\frac{\bar{Y}(t^*, \Psi) - \bar{Y}(t^*, \Psi^*)}{\Psi - \Psi^*} - \frac{Y(t_0, \Psi) - Y(t_0, \Psi^*)}{\Psi - \Psi^*} \right] - \right.$$

$$\left. - \frac{Y(t_0, \Psi) - Y(t_0, \Psi^*)}{\Psi - \Psi^*} \left[\frac{\bar{X}(t^*, \Psi) - \bar{X}(t^*, \Psi^*)}{\Psi - \Psi^*} - \frac{X(t_0, \Psi) - X(t_0, \Psi^*)}{\Psi - \Psi^*} \right] \right\},$$

da cui, tenendo presenti le (16) e la (22), e le (17), segue

$$(38) \quad |D_1^*| \leq \frac{1}{m(1 - L_4 g(a))} \cdot$$

$$\cdot \left| \frac{1 + L_4 g(a)}{|\Psi - \Psi^*|} \int_{t_0}^{t^*} \left| F_q(\bar{X}(\tau, \Psi), \bar{Y}(\tau, \Psi), \bar{z}(\bar{X}(\tau, \Psi), \bar{Y}(\tau, \Psi)), \bar{p}(\dots), \bar{q}(\dots)) - \right. \right.$$

$$\left. - F_q(\bar{X}(\tau, \Psi^*), \bar{Y}(\tau, \Psi^*), \bar{z}(\bar{X}(\tau, \Psi^*), \bar{Y}(\tau, \Psi^*)), \bar{p}(\dots), \bar{q}(\dots)) \right| d\tau +$$

$$+ \frac{k_2 + L_5 g(a)}{|\Psi - \Psi^*|} \int_{t_0}^{t^*} \left| F_p(\bar{X}(\tau, \Psi), \bar{Y}(\tau, \Psi), \bar{z}(\bar{X}(\tau, \Psi), \bar{Y}(\tau, \Psi)), \bar{p}(\dots), \bar{q}(\dots)) - \right.$$

$$\left. - F_p(\bar{X}(\tau, \Psi^*), \bar{Y}(\tau, \Psi^*), \bar{z}(\bar{X}(\tau, \Psi^*), \bar{Y}(\tau, \Psi^*)), \bar{p}(\dots), \bar{q}(\dots)) \right| d\tau \Bigg|.$$

Poichè, tenendo presenti le (13) e la (18), si ha per ogni τ di $(t_0, t_0 + \delta_1)$

$$\begin{aligned} & |F_q(\bar{X}(\tau, \Psi), \bar{Y}(\tau, \Psi), \bar{z}(\bar{X}(\tau, \Psi), \bar{Y}(\tau, \Psi)), \bar{p}(\dots), \bar{q}(\dots)) - \\ & \quad - F_q(\bar{X}(\tau, \Psi^*), \bar{Y}(\tau, \Psi^*), \bar{z}(\bar{X}(\tau, \Psi^*), \bar{Y}(\tau, \Psi^*)), \bar{p}(\dots), \bar{q}(\dots))| \leq \\ & \leq \Lambda_5 \{ |\bar{X}(\tau, \Psi) - \bar{X}(\tau, \Psi^*)| + |\bar{Y}(\tau, \Psi) - \bar{Y}(\tau, \Psi^*)| \} \leq \Lambda_5 L e^{\Lambda_0(\tau-t_0)} |\Psi - \Psi^*|, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & |F_p(\bar{X}(\tau, \Psi), \bar{Y}(\tau, \Psi), \bar{z}(\bar{X}(\tau, \Psi), \bar{Y}(\tau, \Psi)), \bar{p}(\dots), \bar{q}(\dots)) - \\ & \quad - F_p(\bar{X}(\tau, \Psi^*), \bar{Y}(\tau, \Psi^*), \bar{z}(\bar{X}(\tau, \Psi^*), \bar{Y}(\tau, \Psi^*)), \bar{p}(\dots), \bar{q}(\dots))| \leq \\ & \leq \Lambda_4 \{ |\bar{X}(\tau, \Psi) - \bar{X}(\tau, \Psi^*)| + |\bar{Y}(\tau, \Psi) - \bar{Y}(\tau, \Psi^*)| \} \leq \Lambda_4 L e^{\Lambda_0(\tau-t_0)} |\Psi - \Psi^*|, \end{aligned}$$

dalla (38) segue, essendo $t^* < t$,

$$(39) \quad |D_1^*| \leq \frac{L e^{\Lambda_0 a}}{m(1 - L_4 g(a))} [(1 + L_4 g(a)) \Lambda_5 + (k_2 + L_5 g(a)) \Lambda_4] (t - t_0).$$

Inoltre, considerata la seconda differenza che figura al secondo membro della (37), ripetendo gli stessi calcoli svolti in $[M]$ ⁽³⁰⁾, si ottiene

$$(40) \quad \left| \frac{\frac{Y(t_0, \Psi) - Y(t_0, \Psi^*)}{\Psi - \Psi^*}}{\frac{X(t_0, \Psi) - X(t_0, \Psi^*)}{\Psi - \Psi^*}} - f'(\Psi) \right| \leq \frac{\lambda |\Psi(t, x) - \Psi(t^*, x)|}{1 - L_4 g(t_0)} + \frac{(L_5 + k_2 L_4) g(t_0)}{1 - L_4 g(t_0)},$$

dalla quale, tenendo presente la (26), segue

$$(41) \quad \left| \frac{\frac{Y(t_0, \Psi) - Y(t_0, \Psi^*)}{\Psi - \Psi^*}}{\frac{X(t_0, \Psi) - X(t_0, \Psi^*)}{\Psi - \Psi^*}} - f'(\Psi) \right| \leq \frac{\lambda M_4 (t - t_0)}{m(1 - L_4 g(a))} + \frac{(L_5 + k_2 L_4) g(a)}{1 - L_4 g(a)}.$$

⁽³⁰⁾ Vedi in $[M]$ l'ultima disuguaglianza di pag. 102, nella quale la differenza che figura in valore assoluto al primo membro coincide con la seconda differenza al secondo membro della (37) del presente lavoro, quando in luogo dei valori $\bar{t}, \bar{\xi}, \bar{\xi}$ si sostituiscono, rispettivamente, i valori t_0, Ψ, Ψ^* . Per ottenere la (40) che qui segue basta ripetere i calcoli svolti in $[M]$ a partire dalla disuguaglianza suddetta fino al secondo membro della prima disuguaglianza di pag. 103.

Allora, tenuto conto della (41) ora scritta, della (39), della prima delle (12), delle (35) e (36), e della terza delle (3), dalla (33) segue

$$(42) \quad |D| \leq \Theta + H(t - t_0)$$

dove abbiamo posto, per brevità,

$$(43) \quad \Theta = Ma(L_5 + k_2 L_4) + M_4 g(a) \frac{L_5 + k_2 L_4}{1 - L_4 g(a)}$$

e

$$(43') \quad H = (M_4 + M_5)(\Lambda_5 + k_2 \Lambda_4) + \\ + \frac{M_4}{m(1 - L_4 g(a))} \{ \lambda M_4 + L e^{\Lambda_4 a} [(1 + L_4 g(a)) \Lambda_5 + (k_2 + L_5 g(a)) \Lambda_4] \}.$$

Quindi dalla (42), tenendo presenti la (32) e la (31), segue

$$(44) \quad \gamma_1 - \Theta - H(t - t_0) \leq \frac{\bar{Y}(t, \Psi(t, x)) - \bar{Y}(t^*, \Psi(t^*, x))}{t - t^*} \leq \\ \leq \gamma_2 + \Theta + H(t - t_0),$$

dove osserviamo che, ricordando l'espressione della funzione $G(t)$ ⁽³¹⁾, si ha

$$(44') \quad \Theta < G(a) \text{ }^{(32)}.$$

Ora, ricordando che è

$$\gamma_1 - G(a) > 0 \text{ }^{(33)},$$

⁽³¹⁾ Cfr. la (e) della nota ⁽¹¹⁾; nella (c) e (d) della stessa nota figurano rispettivamente l'espressione di M e $g(t)$.

⁽³²⁾ Infatti, tenendo presente che si ha $1 - L_4 g(a) > 0$, e ricordando che è (cfr. la nota ⁽⁷⁾) $L_4 > 0$, $L_5 > 0$, si ha $\frac{1}{1 - L_4 g(a)} > 1$ e $L_4 L_5 g(a) > 0$, e quindi anche, essendo $Ma > 0$,

$$Ma(L_5 + k_2 L_4) < Ma[L_5 + L_4(k_2 + L_5 g(a))] < Ma\left[L_5 + L_4 \frac{k_2 + L_5 g(a)}{1 - L_4 g(a)}\right];$$

pertanto, ricordando l'espressione della funzione $G(t)$, e tenendo presente la (43), la (44') è verificata.

⁽³³⁾ Cfr. in [M] la terza riga, a partire dal basso, di pag. 103.

e quindi anche, tenendo presente la (44'),

$$\gamma_1 - \Theta > 0,$$

determiniamo un numero reale positivo δ , con $\delta \leq \delta_1$, tale che per una qualsiasi coppia di valori t', t'' di (τ_1, τ_2) per i quali è $0 < t'' - t' \leq \delta$, sia

$$(45) \quad \gamma_1 - \Theta - H(t'' - t') > 0 \quad (34).$$

Allora, posto

$$(45') \quad \begin{cases} \gamma_1 - \Theta - H\delta = \Gamma' \\ \gamma_2 + \Theta + H\delta = \Gamma'', \end{cases}$$

dalla (44) segue che per qualsiasi coppia di punti distinti (t^*, x) , (t, x) , con $t^* < t$, appartenenti al campo $\bar{\Delta}$ definito dalle (27), per i quali è soddisfatta la (29), si ha

$$(46) \quad 0 < \Gamma' \leq \frac{\bar{Y}(t, \Psi(t, x)) - \bar{Y}(t^*, \Psi(t^*, x))}{t - t^*} \leq \Gamma'',$$

e quindi la (28) è senz'altro verificata.

D'altra parte, se la (29) non è soddisfatta, vale a dire se è

$$\Psi(t, x) = \Psi(t^*, x),$$

osserviamo che, essendo identicamente, nel campo $\bar{\Delta}_1$, $\bar{X}(t, \Psi(t, x)) \equiv x$, si ha

$$\bar{X}(t, \Psi(t, x)) = \bar{X}(t^*, \Psi(t^*, x)),$$

(34) Rileviamo, analogamente a quanto abbiamo fatto nelle note (17) e (23), che sarebbe sufficiente, per il seguito, fissare un numero reale positivo δ'' , con $\delta'' \leq \delta_1$, tale che per ogni t di $(t_0, t_0 + \delta'')$ si abbia

$$\gamma_1 - \Theta - H(t - t_0) > 0.$$

Peraltro, nel modo in cui si è fatto nel testo, il numero δ risulta indipendente dal valore t_0 fissato.

e quindi anche, indicando brevemente con Ψ il valore comune a $\Psi(t, x)$ e a $\Psi(t^*, x)$,

$$\bar{X}(t, \Psi) = \bar{X}(t^*, \Psi).$$

Pertanto, tenendo presente la prima delle (11), in virtù del teorema di ROLLE, esiste almeno un valore τ' interno a (t^*, t) per il quale è

$$(47) \quad F_p(\bar{X}(\tau', \Psi), \bar{Y}(\tau', \Psi), \bar{z}(\bar{X}(\tau', \Psi), \bar{Y}(\tau', \Psi)), \bar{p}(\dots), \bar{q}(\dots)) = 0.$$

Allora, ricordando la (31), consideriamo la differenza

$$(48) \quad D' = \frac{\bar{Y}(t, \Psi) - \bar{Y}(t^*, \Psi)}{t - t^*} - \\ - [F_q(\Psi, f(\Psi), \zeta(\Psi), \pi(\Psi), \chi(\Psi)) - F_p(\dots)f'(\Psi)],$$

e osserviamo che, applicando al rapporto $\frac{\bar{Y}(t, \Psi) - \bar{Y}(t^*, \Psi)}{t - t^*}$ il teorema del valor medio, e tenendo presente la seconda delle (11), possiamo scrivere, tenuto conto della (47),

$$D' = F_q(\bar{X}(\tau'', \Psi), \bar{Y}(\tau'', \Psi), \bar{z}(\bar{X}(\tau'', \Psi), \bar{Y}(\tau'', \Psi)), \bar{p}(\dots), \bar{q}(\dots)) - F_q(\Psi, \dots, \chi(\Psi)) + \\ + f'(\Psi)[F_p(\Psi, \dots, \chi(\Psi)) - F_p(\bar{X}(\tau', \Psi), \bar{Y}(\tau', \Psi), \bar{z}(\bar{X}(\tau', \Psi), \bar{Y}(\tau', \Psi)), \bar{p}(\dots), \bar{q}(\dots))],$$

dove τ'' è un opportuno valore interno a (t^*, t) ; e da questa uguaglianza segue, tenendo presenti le (35) e (36), e la terza delle (3),

$$|D'| \leq (M_4 + M_5)(\Lambda_5 + k_2\Lambda_4)(t - t_0) + Ma(L_5 + k_2L_4),$$

e anche, ricordando la (43) e la (43'),

$$|D'| < \Theta + H(t - t_0).$$

Pertanto, ricordando la (48) e la (31), segue

$$(48') \quad \gamma_1 - \Theta - H(t - t_0) < \frac{\bar{Y}(t, \Psi) - \bar{Y}(t^*, \Psi)}{t - t^*} < \gamma_2 + \Theta + H(t - t_0),$$

e quindi, tenendo presenti le (45'), la (46) è soddisfatta anche nel caso in cui è $\Psi(t, x) = \Psi(t^*, x)$ ⁽³⁵⁾.

Allora, con ragionamento analogo a quello fatto in $[M]$ ⁽³⁶⁾, rileviamo che dalla (46) segue che se t^*, t, x sono tre qualsiasi valori reali tali che i punti (t^*, x) , (t, x) appartengono al campo $\bar{\Delta}$, è

$$\bar{Y}(t, \Psi(t, x)) \geq \bar{Y}(t^*, \Psi(t^*, x))$$

secondo che è

$$t \geq t^*.$$

Quindi, per ogni x' fissato in modo che la retta $x = x'$ abbia punti in comune con il campo $\bar{\Delta}$, si può stabilire una corrispondenza biunivoca tra i valori t , tali che i punti (t, x') appartengano al campo $\bar{\Delta}$, e i valori $y = \bar{Y}(t, \Psi(t, x'))$.

Dunque esiste la funzione inversa $t = U(x', y)$, e, sostituendo in $\xi = \Psi(t, x')$ a t la funzione $t = U(x', y)$, si ottiene $\xi = \Psi(U(x', y), x') = V(x', y)$.

Allora, facendo variare x in modo che i punti (t, x) appartengano al campo $\bar{\Delta}$, si giunge a costruire le due funzioni

$$(49) \quad \begin{cases} t = U(x, y) \\ \xi = V(x, y). \end{cases}$$

⁽³⁵⁾ Mediante considerazioni analoghe a quelle ora svolte in seguito alla (46), si può verificare che la (20) di $[M]$ è soddisfatta anche nel caso, che nella (18) di $[M]$ va escluso, in cui è $\Phi(t, x) = \Phi(\bar{t}, x)$. Peraltro il procedimento ora esposto si presenta, nel caso riguardante la $[M]$, notevolmente più semplice. Infatti, considerata la differenza

$$I' = \frac{Y(t, \xi) - Y(\bar{t}, \xi)}{t - \bar{t}} - [F_q(\xi, \dots, \chi(\xi)) - F_p(\xi, \dots, \chi(\xi)) f'(\xi)]$$

(dove abbiamo brevemente indicato con ξ il valore comune a $\Phi(t, x)$ e a $\Phi(\bar{t}, x)$), la quale può essere scritta in forma analoga a quella di D' espressa dalla uguaglianza che segue la (48) del presente lavoro), basta tenere presenti, in $[M]$, le prime due disuguaglianze di pag. 102 (cfr. la ⁽²⁹⁾ del presente lavoro) e la terza delle (3) (cfr. la terza delle (3) del presente lavoro), per provare che è, ricordando l'espressione di $G(t)$ (riportata nella (e) della ⁽¹¹⁾ del presente lavoro) e tenendo conto di quanto abbiamo rilevato nella ⁽³²⁾ del presente capoverso

$$|I'| \leq Ma [L_5 + k_2 L_4] < G(a).$$

Quindi, tenendo presente la (19) di $[M]$ (cfr. la (31) del presente lavoro) e l'espressione di I' considerata poc'anzi, segue che la (20) di $[M]$ è soddisfatta anche nel caso in cui è $\Phi(t, x) = \Phi(\bar{t}, x)$.

⁽³⁶⁾ Cfr. $[M]$, pag. 104.

Tali funzioni sono definite nel campo A_0 del piano (x, y) limitato dalle quattro curve

$$(50) \quad \left\{ \begin{array}{l} y = Y(t_0, \Phi(t_0, x)), \quad (X(t_0, \xi_1) \leq x \leq X(t_0, \xi_2)) \\ y = \bar{Y}(t_0 + \delta, \Psi(t_0 + \delta, x)), \quad (\bar{X}(t_0 + \delta, \xi_1) \leq x \leq \bar{X}(t_0 + \delta, \xi_2)) \\ \left\{ \begin{array}{l} x = \bar{X}(t, \xi_1) \\ y = \bar{Y}(t, \xi_1) \end{array} \right. \quad (t_0 \leq t \leq t_0 + \delta) \\ \left\{ \begin{array}{l} x = \bar{X}(t, \xi_2) \\ y = \bar{Y}(t, \xi_2) \end{array} \right. \quad (t_0 \leq t \leq t_0 + \delta) \quad (^{37}) \end{array} \right.$$

e stabiliscono, assieme alle (15), una corrispondenza biunivoca e continua tra i punti del rettangolo

$$R_0: \quad t_0 \leq t \leq t_0 + \delta, \quad \xi_1 \leq \xi \leq \xi_2$$

e i punti del campo A_0 .

Osserviamo che dalla (46) segue che per una qualsiasi coppia di punti distinti (x, y') , (x, y'') di A_0 si ha

$$(51) \quad \frac{1}{\Gamma''} \leq \frac{U(x, y') - U(x, y'')}{y' - y''} \leq \frac{1}{\Gamma'}.$$

Dunque la funzione $U(x, y)$, per ogni x^* fissato tale che la retta $x = x^*$ abbia punti in comune con il campo A_0 è lipschitziana rispetto a y con costante di Lipschitz indipendente da x .

c) Rileviamo ora una disuguaglianza, della quale faremo uso in seguito (^{37'}); vale a dire verifichiamo che per qualsiasi coppia di valori distinti t', t'' di $(t_0, t_0 + \delta)$, e per qualunque coppia di valori distinti (ξ', ξ'') di (ξ_1, ξ_2) per i quali è

$$(52) \quad |\xi' - \xi''| \leq \frac{M_4 \delta}{m}$$

(³⁷) La prima equazione delle (50) coincide evidentemente, tenendo presenti le (14) e la (24), con l'equazione $y = \bar{Y}(t_0, \Psi(t_0, x))$, $(\bar{X}(t_0, \xi_1) \leq x \leq \bar{X}(t_0, \xi_2))$, mentre le ultime due delle stesse (50) possono essere scritte rispettivamente nella forma $V(x, y) = \xi_1$, $V(x, y) = \xi_2$.

(^{37'}) Cfr. la (63) e la (74).

si ha, posto

$$(53) \quad W = \frac{\bar{X}(t'', \xi') - \bar{X}(t'', \xi'')}{\xi' - \xi''} \frac{\bar{Y}(t', \xi') - \bar{Y}(t'', \xi')}{t' - t''} -$$

$$- \frac{\bar{X}(t', \xi') - \bar{X}(t'', \xi')}{t' - t''} \frac{\bar{Y}(t'', \xi') - \bar{Y}(t'', \xi'')}{\xi' - \xi''},$$

$$(54) \quad 0 < \Gamma' \bar{m} \leq W \leq \Gamma'' \bar{M}.$$

A tale scopo consideriamo, per i suddetti valori t', t'', ξ', ξ'' , la differenza

$$(55) \quad \bar{D} = \frac{\bar{Y}(t', \xi') - \bar{Y}(t'', \xi')}{t' - t''} - \frac{\bar{Y}(t'', \xi') - \bar{Y}(t'', \xi'')}{\xi' - \xi''} \frac{\frac{\bar{X}(t', \xi') - \bar{X}(t'', \xi')}{t' - t''}}{\frac{\bar{X}(t'', \xi') - \bar{X}(t'', \xi'')}{\xi' - \xi''}} -$$

$$- [F_q(\xi', \dots, \chi(\xi')) - F_p(\xi', \dots, \chi(\xi')) f'(\xi')];$$

e, tenendo presente che l'espressione che è nel secondo membro della (55) fuori dal segno di parentesi quadra coincide, quando in luogo dei valori t', t'', ξ', ξ'' si sostituiscono rispettivamente i valori t, t^*, Ψ, Ψ^* , con la differenza che figura al secondo membro della (30), sviluppiamo calcoli del tutto analoghi a quelli svolti in seguito alla (32). Vale a dire, considerata, in luogo della espressione D che figura nella (32), la espressione $\bar{D}$ ora scritta, ripetiamo i calcoli svolti in seguito alla (32) fino alla (46), tenendo però presente che, in luogo della differenza $\Psi(t, x) - \Psi(t^*, x)$ per la quale nel secondo membro della (40) si tiene conto della (26), abbiamo, ora, la differenza $\xi' - \xi''$; e poichè ξ' e ξ'' sono due valori distinti qualsiasi di (ξ_1, ξ_2) per i quali è verificata la (52), si ottiene facilmente, tenendo presenti le (42), (43) e (43'),

$$|\bar{D}| \leq \Theta + H\delta.$$

Da tale disuguaglianza, ricordando la (55), e tenendo presenti la (31) e le (45'), segue che per qualsiasi coppia di valori distinti t', t'' di $(t_0, t_0 + \delta)$ e per qualsiasi coppia di valori distinti ξ', ξ'' di (ξ_1, ξ_2) per i quali è

soddisfatta la (52), si ha

$$(56) \quad 0 < \Gamma' \leq \frac{\bar{Y}(t', \xi') - \bar{Y}(t'', \xi')}{t' - t''} - \\ - \frac{\bar{Y}(t'', \xi') - \bar{Y}(t'', \xi'')}{\xi' - \xi''} \frac{\frac{\bar{X}(t', \xi') - \bar{X}(t'', \xi')}{t' - t''}}{\frac{\bar{X}(t'', \xi') - \bar{X}(t'', \xi'')}{\xi' - \xi''}} \leq \Gamma''.$$

Allora, moltiplicando i membri della triplice disuguaglianza (56) per il rapporto $\frac{\bar{X}(t'', \xi') - \bar{X}(t'', \xi'')}{\xi' - \xi''}$ che, essendo verificata la (22), è positivo, segue, tenendo presente la (22), che per qualsiasi coppia di valori distinti t', t'' di $(t_0, t_0 + \delta)$ e per qualsiasi coppia di valori distinti ξ', ξ'' di (ξ_1, ξ_2) per i quali è soddisfatta la (52), è verificata, tenendo presente la (53), la disuguaglianza (54).

Usufruendo della (54), possiamo dimostrare che, qualunque sia la coppia di valori distinti ξ^*, ξ^{**} di (ξ_1, ξ_2) per i quali è

$$(57) \quad |\xi^* - \xi^{**}| \leq \frac{M_4 \delta}{m}$$

e anche, per fissare le idee, $\xi^* < \xi^{**}$, nel campo (appartenente ad A_0) limitato dalle curve

$$(58) \quad \left\{ \begin{array}{l} y = \bar{Y}(t_0, \Psi(t_0, x)), \quad (\bar{X}(t_0, \xi^*) \leq x \leq \bar{X}(t_0, \xi^{**})) \\ y = \bar{Y}(t_0 + \delta, \Psi(t_0 + \delta, x)), \quad (\bar{X}(t_0 + \delta, \xi^*) \leq x \leq \bar{X}(t_0 + \delta, \xi^{**})) \\ \left\{ \begin{array}{l} x = \bar{X}(t, \xi^*) \\ y = \bar{Y}(t, \xi^*) \end{array} \right. \quad (t_0 \leq t \leq t_0 + \delta) \\ \left\{ \begin{array}{l} x = \bar{X}(t, \xi^{**}) \\ y = \bar{Y}(t, \xi^{**}) \end{array} \right. \quad (t_0 \leq t \leq t_0 + \delta) \end{array} \right.$$

le funzioni $U(x, y)$ e $V(x, y)$ sono lipschitziane nel complesso delle variabili x, y , con costante di Lipschitz indipendente dalla coppia di valori ξ^*, ξ^{**} considerata.

Infatti consideriamo due punti distinti qualsiasi (x', y') , (x'', y'') del campo A_0 per i quali, posto

$$(59) \quad \begin{cases} t' = U(x', y'), & t'' = U(x'', y'') \\ \xi' = V(x', y'), & \xi'' = V(x'', y''), \end{cases}$$

si abbia

$$(60) \quad |\xi' - \xi''| \leq \frac{M_4 \delta}{m},$$

e supponiamo inoltre, dapprima, che sia

$$(61) \quad \xi' \neq \xi'', \quad t' \neq t'';$$

quindi per i valori t' , t'' , ξ' , ξ'' che sono dati dalle (59), tenendo presenti le (60) e ricordando le (52) e (53), è soddisfatta la (54).

Allora, tenendo presente che, in virtù della corrispondenza biunivoca definita dalle (15) e (49) si ha, tenuto conto delle (59),

$$\begin{cases} x' = \bar{X}(t', \xi'), & x'' = \bar{X}(t'', \xi'') \\ y' = \bar{Y}(t', \xi'), & y'' = \bar{Y}(t'', \xi''), \end{cases}$$

procedendo in modo analogo a quello seguito in $[M]$, possiamo scrivere, tenendo presenti le (59),

$$(62) \quad \left\{ \begin{aligned} y' - y'' &= \frac{\bar{Y}(t', \xi') - \bar{Y}(t'', \xi'')}{t' - t''} [U(x', y') - U(x'', y'')] + \\ &\quad + \frac{\bar{Y}(t'', \xi') - \bar{Y}(t'', \xi'')}{\xi' - \xi''} [V(x', y') - V(x'', y'')] \\ x' - x'' &= \frac{\bar{X}(t', \xi') - \bar{X}(t'', \xi'')}{t' - t''} [U(x', y') - U(x'', y'')] + \\ &\quad + \frac{\bar{X}(t'', \xi') - \bar{X}(t'', \xi'')}{\xi' - \xi''} [V(x', y') - V(x'', y'')]. \end{aligned} \right.$$

Il sistema ora scritto, considerato come un sistema (non omogeneo) di due equazioni lineari nelle incognite $U(x', y') - U(x'', y'')$, $V(x', y') - V(x'', y'')$, ha come determinante dei coefficienti l'espressione W che figura nella (53).

Tenendo presente che, come si è sopra rilevato, per i valori t', t'', ξ', ξ'' espressi dalle (59), la (54) è soddisfatta, risolviamo il sistema (62), ottenendo

$$(63) \quad \left\{ \begin{array}{l} U(x', y') - U(x'', y'') = \frac{\begin{vmatrix} y' - y'' & \frac{\bar{Y}(t'', \xi') - \bar{Y}(t', \xi'')}{\xi' - \xi''} \\ x' - x'' & \frac{\bar{X}(t'', \xi') - \bar{X}(t', \xi'')}{\xi' - \xi''} \end{vmatrix}}{W} \\ \\ V(x', y') - V(x'', y'') = \frac{\begin{vmatrix} \frac{\bar{Y}(t', \xi') - \bar{Y}(t'', \xi'')}{t' - t''} & y' - y'' \\ \frac{\bar{X}(t', \xi') - \bar{X}(t'', \xi'')}{t' - t''} & x' - x'' \end{vmatrix}}{W}. \end{array} \right.$$

Da tali uguaglianze, tenendo presenti la seconda delle (19) e la (22), le (17) e le (12), e infine la (54), segue

$$(64) \quad \left\{ \begin{array}{l} |U(x', y') - U(x'', y'')| \leq \frac{1}{m\Gamma'} \left\{ \bar{M} |y' - y''| + \right. \\ \left. + \left[k_2 + L_s g(a) + L \frac{\Lambda_5}{\Lambda_0} (e^{\Lambda_0 a} - 1) \right] |x' - x''| \right\} \\ \\ |V(x', y') - V(x'', y'')| \leq \frac{1}{m\Gamma'} \{ M_5 |x' - x''| + M_4 |y' - y''| \} \quad (38). \end{array} \right.$$

(38) Osserviamo che nel caso particolare in cui è $x' = x''$, con il procedimento ora seguito si ritrova la (51), in cui sia $x = x'$, la quale peraltro non segue dalla prima delle (64), quando in questa si ponga $x' = x''$. Infatti in tale caso particolare si ha, ricordando la (53),

$$W = \frac{\bar{X}(t'', \xi') - \bar{X}(t'', \xi'')}{\xi' - \xi''} \frac{\bar{Y}(t', \xi') - \bar{Y}(t'', \xi'')}{t' - t''},$$

dove, essendo $\xi' = \Psi(t', x')$, $\xi'' = \Psi(t'', x')$, e quindi

$$\bar{Y}(t', \xi') = \bar{Y}(t', \Psi(t', x')), \quad \bar{Y}(t'', \xi'') = \bar{Y}(t'', \Psi(t'', x')),$$

si ha, ricordando la (46),

$$(1^{**}) \quad 0 < \Gamma' \leq \frac{\bar{Y}(t', \xi') - \bar{Y}(t'', \xi'')}{t' - t''} \leq \Gamma'.$$

Ora consideriamo i due casi particolari sopra esclusi, in cui per i punti (x', y') , (x'', y'') di A_0 considerati non sono verificate, tenendo presenti le (59), entrambe le (61), rilevando che, in virtù della corrispondenza biunivoca definita dalle (15) e (49), e poichè i punti (x', y') , (x'', y'') sono distinti, nel caso in cui si ha $t' = t''$, è $\xi' \neq \xi''$, e nel caso in cui si ha $\xi' = \xi''$, è $t' \neq t''$.

Nel primo caso osserviamo che, essendo $t' = t''$, si ha, ricordando come è stata definita alla fine del capoverso precedente la funzione $V(x, y)$ e tenendo presenti le prime due delle (59),

$$V(x', y') = \Psi(t', x'), \quad V(x'', y'') = \Psi(t', x'');$$

e quindi, tenendo presente la (23), nella quale sia $t = t'$ ⁽³⁹⁾, si ha

$$|V(x', y') - V(x'', y'')| \leq \frac{1}{m} |x' - x''|.$$

Da tale disuguaglianza, tenendo presente che è $\frac{M_5}{\Gamma'} > 1$ ⁽⁴⁰⁾, segue, essendo $\bar{m} > 0$,

$$(65) \quad |V(x', y') - V(x'', y'')| < \frac{M_5}{m\Gamma'} |x' - x''|.$$

Allora dalla prima delle (63) segue, a semplificazioni fatte,

$$U(x', y') - U(x'', y'') = (y' - y'') \frac{1}{\frac{\bar{Y}(t', \xi') - \bar{Y}(t'', \xi'')}{t' - t''}},$$

da cui, essendo $y' \neq y''$, e tenendo presente la (1**) della presente nota, segue la (51), nella quale sia $x' = x''$. Osserviamo, d'altra parte, che, poichè, tenendo presente le (21), è $\frac{\bar{M}}{m} > 1$, dalla (51) segue la prima delle (64), nella quale sia $x' = x''$.

⁽³⁹⁾ Nel caso particolare che stiamo considerando, è sicuramente $x' \neq x''$, poichè è $\xi' \neq \xi''$, e la funzione $\bar{X}(t, \xi)$, per ogni t fissato di $(t_0, t_0 + \vartheta)$, è funzione crescente di ξ in (ξ_1, ξ_2) .

⁽⁴⁰⁾ Infatti, tenendo presente la (48'), la prima delle (45'), e tenendo conto della seconda delle (17) e della seconda delle (12), si ha

$$0 < \Gamma' < \frac{\bar{Y}(t, \Psi) - \bar{Y}(t^*, \Psi)}{t - t^*} \leq M_5,$$

da cui segue $\frac{M_5}{\Gamma'} > 1$.

D'altra parte, tenendo presenti le prime due delle (59), si ha, essendo $t' = t''$,

$$(66) \quad U(x', y') - U(x'', y'') = 0.$$

Pertanto, tenendo presenti la (65), la (66) e le (64), si conclude che le (64) sono soddisfatte anche nel caso particolare ora considerato.

Nel secondo caso, vale a dire se per i punti distinti (x', y') , (x'', y'') del campo A_0 considerati è, tenendo presenti le ultime due delle (59), $\xi' = \xi''$, osserviamo che i punti (x', y') , (x'', y'') appartengono entrambi alla curva

$$\begin{cases} x = \bar{X}(t, \xi') \\ y = \bar{Y}(t, \xi') \end{cases} \quad (t_0 \leq t \leq t_0 + \delta),$$

e che considerata, per fissare le idee, la curva

$$(67) \quad y = \bar{Y}(t', \Psi(t', x)), \quad (\bar{X}(t', \xi_1) \leq x \leq \bar{X}(t', \xi_2)),$$

in ogni punto (x, y) di tale curva distinto da (x', y') per il quale è

$$(67') \quad |V(x, y) - V(x'', y'')| \leq \frac{M_4 \delta}{m} \quad (41)$$

si ha, tenendo presente la (60) e la prima delle (64),

$$\begin{aligned} |U(x, y) - U(x'', y'')| &\leq \frac{1}{m\Gamma'} \left\{ \bar{M} |y - y''| + \right. \\ &\quad \left. + \left[k_2 + L_5 g(a) + L \frac{\Lambda_5}{\Lambda_0} (e^{\Lambda_0 a} - 1) \right] |x - x''| \right\}; \end{aligned}$$

e si ha anche, poichè in ogni punto (x, y) appartenente alla curva (67) è

$$U(x, y) = U(x', y') = t',$$

(41) In virtù della corrispondenza biunivoca definita dalle (15) e (49), considerato l'intervallo (η', η'') comune ai due intervalli (ξ_1, ξ_2) e $\left(\xi' - \frac{M_4 \delta}{m}, \xi' + \frac{M_4 \delta}{m}\right)$, la disuguaglianza (67') ora scritta è certamente soddisfatta in ogni punto (x, y) del campo corrispondente, secondo la suddetta corrispondenza, al rettangolo $[t_0 \leq t \leq t_0 + \delta, \eta' \leq \xi \leq \eta'']$. Osserviamo inoltre che in ogni punto (x, y) appartenente alla curva (67) e distinto da (x', y') è certamente, posto $\xi = V(x, y)$, $\xi \neq \xi'$. Pertanto, tenendo presente la prima delle (64), la disuguaglianza che segue a quella ora scritta è senz'altro verificata.

$$|U(x', y') - U(x'', y'')| \leq \frac{1}{m\Gamma'} \left\{ \bar{M} |y - y''| + \right. \\ \left. + \left[k_2 + L_5 g(a) + L \frac{\Lambda_5}{\Lambda_0} (e^{\Lambda_0 a} - 1) \right] |x - x''| \right\}.$$

Da tale disuguaglianza (che vale per qualsiasi punto (x, y) appartenente alla curva (67) distinto dal punto (x', y') , e per il quale è soddisfatta la (67')), facendo tendere il punto (x, y) al punto (x', y') lungo la curva (67), segue

$$(68) \quad |U(x', y') - U(x'', y'')| \leq \frac{1}{m\Gamma'} \left\{ \bar{M} |y' - y''| + \right. \\ \left. + \left[k_2 + L_5 g(a) + L \frac{\Lambda_5}{\Lambda_0} (e^{\Lambda_0 a} - 1) \right] |x' - x''| \right\}^{(42)}.$$

D'altra parte, essendo $\xi' = \xi''$, si ha, tenendo presenti le ultime due delle (59),

$$(68') \quad V(x', y') - V(x'', y'') = 0.$$

⁽⁴²⁾ A complemento di quanto abbiamo rilevato nella ⁽³⁸⁾, osserviamo che se è $x' = x''$, anche nel caso particolare ora considerato (per il primo caso particolare cfr. la ⁽³⁹⁾) si ritrova la (51), in cui sia $x = x'$, la quale peraltro non segue dalla (68), quando in questa si considera il caso in cui è $x' = x''$. Infatti, essendo $\xi' = \xi''$, e anche $x' = x''$, si ha

$$\bar{X}(t', \xi') = \bar{X}(t'', \xi')$$

e

$$\Psi(t', x') = \Psi(t'', x') = \xi'.$$

Allora possiamo ragionare come in seguito alla (46), considerando la differenza espressa dalla (48) nella quale si sostituiscano, in luogo dei valori t, t^*, Ψ , rispettivamente i valori t', t'', ξ' e si ottiene, tenendo presente la (48') e le (45'),

$$(2^{**}) \quad 0 < \Gamma' < \frac{\bar{Y}(t', \xi') - \bar{Y}(t'', \xi')}{t' - t''} < \Gamma''.$$

D'altra parte possiamo scrivere, essendo $t' \neq t''$, e tenendo presenti le prime due delle (59),

$$y' - y'' = \frac{\bar{Y}(t', \xi') - \bar{Y}(t'', \xi')}{t' - t''} [U(x', y') - U(x'', y'')],$$

e da tale uguaglianza, tenendo presente che è $y' \neq y''$, e tenendo conto della ^(2^{**}) della presente nota, segue che la (51), nella quale sia $x = x'$, è soddisfatta. Anche qui,

come nella ⁽³⁸⁾, osserviamo che, essendo $\frac{\bar{M}}{m} > 1$, dalla (51) segue la prima delle (64), nel caso particolare in cui sia $x' = x''$.

Pertanto, tenendo presenti le (68) e (68'), e le (64), possiamo affermare che le (64) sono soddisfatte anche nel secondo caso particolare ora considerato.

Dunque, tenendo presenti le (64), (65), (66), (68) e (68'), si conclude che per qualsiasi coppia di punti (x', y') , (x'', y'') del campo A_0 , per i quali, ricordando le ultime due delle (59), è verificata la (60), le (64) sono soddisfatte; e quindi si ha anche, posto

$$K' = \frac{1}{m\Gamma'} \left[\bar{M} + k_2 + L_5 g(a) + L \frac{\Lambda_5}{\Lambda_0} (e^{\Lambda_0 a} - 1) \right]$$

$$K'' = \frac{M_4 + M_5}{m\Gamma'},$$

$$(69) \quad \begin{cases} |U(x', y') - U(x'', y'')| \leq K' \sqrt{(x' - x'')^2 + (y' - y'')^2} \\ |V(x', y') - V(x'', y'')| \leq K'' \sqrt{(x' - x'')^2 + (y' - y'')^2}. \end{cases}$$

Da quanto abbiamo ora ottenuto segue, tenendo presenti le ultime due delle (59), la (60), e le (69), che qualunque sia la coppia di valori distinti ξ^* , ξ^{**} di (ξ_1, ξ_2) per i quali è soddisfatta la (57) ed è, per fissare le idee, $\xi^* < \xi^{**}$, nel campo limitato dalle curve (58) le funzioni $U(x, y)$ e $V(x, y)$ risultano lipschitziane, con costante di Lipschitz indipendente dalla coppia di valori ξ^* , ξ^{**} considerata.

Da tale proprietà segue che è possibile dividere il campo A_0 in un numero finito di parti in ognuna delle quali le funzioni $U(x, y)$ e $V(x, y)$ sono lipschitziane nel complesso delle variabili x, y , e quindi, in ognuna di tali parti, uniformemente continue. Pertanto le funzioni $U(x, y)$ e $V(x, y)$ sono uniformemente continue nel campo A_0 ⁽⁴³⁾.

d) Ora osserviamo che in ogni punto del campo A (e quindi in ogni punto del campo A_0) è

$$F(x, y, \bar{z}(x, y), \bar{p}(x, y), \bar{q}(x, y)) = 0;$$

⁽⁴³⁾ Dalla proprietà ora rilevata non segue senz'altro che le funzioni $U(x, y)$ e $V(x, y)$ sono lipschitziane, nel complesso delle due variabili, in tutto il campo A_0 . Infatti, come si può verificare con esempi, in un campo del piano (x, y) che non sia convesso la lipschitzianità (nel complesso delle variabili) di una funzione di due variabili x, y non gode, in generale, della proprietà additiva, a differenza di quanto avviene per le funzioni di una sola variabile definite in un intervallo, per le quali tale proprietà, relativa alla condizione di Lipschitz, è verificata.

Peraltro nel n. 3, mediante ulteriori considerazioni, si verifica che le funzioni $U(x, y)$ e $V(x, y)$ risultano lipschitziane (nel complesso delle due variabili x, y) in tutto il campo A_0 .

e quindi, tenendo presenti le condizioni cui soddisfano le funzioni $F(x, y, z, p, q)$, $\bar{z}(x, y)$, $\bar{p}(x, y)$ e $\bar{q}(x, y)$, sopra ogni segmento di retta $y = \bar{y}$ appartenente al campo A_0 è, per quasi tutti gli x ,

$$(70) \quad F_x + F_z \bar{p} + F_p \bar{p}_{x'} + F_q \bar{q}_{x'} = 0,$$

e sopra ogni segmento di retta $x = \bar{x}$ appartenente al campo A_0 si ha, per quasi tutti gli y ,

$$(71) \quad F_y + F_z \bar{q} + F_p \bar{p}_{y'} + F_q \bar{q}_{y'} = 0.$$

Inoltre osserviamo che in quasi tutto il campo A_0 si ha, come si può verificare,

$$(72) \quad \bar{p}_{y'}(x, y) = \bar{q}_{x'}(x, y) \quad (41).$$

(41) Per verificare quanto si è ora affermato, consideriamo un qualsiasi valore y^* tale che la retta $y = y^*$ abbia punti in comune con il campo A_0 e che in quasi tutti i punti comuni a tale retta e al campo A_0 esista finita la derivata parziale $\bar{p}'_y(x, y)$; e consideriamo un qualunque segmento di tale retta $y = y^*$, $x_1 \leq x \leq x_2$ tutto costituito di punti appartenenti al campo A_0 e interni al campo A nel quale, ricordiamo, le funzioni $\bar{p}(x, y)$ e $\bar{q}(x, y)$ sono lipschitziane nel complesso delle variabili x, y .

Si ha evidentemente, per ogni x fissato di (x_1, x_2) ,

$$\bar{z}(x, y^*) = \bar{z}(x_1, y^*) + \int_{x_1}^x \bar{p}(u, y^*) du.$$

da cui segue (cfr., per es., M. CINQUINI CIBRARIO e S. CINQUINI, luogo cit. per primo in (4), nota (17), p. 140. Cfr. anche M. VOLPATO, *Sulla derivazione sotto il segno di integrale*, Rend. Acc. Nazionale dei Lincei, vol. XII (1952), pp. 146-150)

$$(a') \quad \bar{q}(x, y^*) = \bar{q}(x_1, y^*) + \int_{x_1}^x \bar{p}'_y(u, y^*) du.$$

Dalla (a') segue allora, per quasi tutti gli x di (x_1, x_2) ,

$$(b') \quad \bar{q}'_x(x, y^*) = \bar{p}'_y(x, y^*).$$

Poichè per quasi tutti gli y^* tali che la retta $y = y^*$ abbia punti in comune con il campo A_0 la derivata parziale $\bar{p}'_y(x, y)$ esiste finita in quasi tutti i punti comuni alla retta $y = y^*$ e al campo A_0 , possiamo concludere, tenendo presente la (b'), che la (72) è soddisfatta in quasi tutti i punti interni ad A_0 , e quindi in quasi tutto il campo A_0 .

Pertanto in ogni punto del campo A_0 in cui sono soddisfatte le (70) e (71), e la (72) si ha

$$(73) \quad \begin{cases} F_x + F_z \bar{p} + F_p \bar{p}' + F_q \bar{p}_v' = 0 \\ F_v + F_z \bar{q} + F_p \bar{q}' + F_q \bar{q}_v' = 0. \end{cases}$$

Dunque in ogni punto del campo A_0 , ad eccezione che in un insieme di punti E di misura superficiale nulla, sono soddisfatte entrambe le (73).

Osserviamo inoltre che, tenendo presenti la (53) e la (54), ricordando che per ogni ξ fissato di (ξ_1, ξ_2) esistono finite in tutto $(t_0, t_0 + \delta)$ le derivate $\frac{\partial \bar{X}(t, \xi)}{\partial t}$, $\frac{\partial \bar{Y}(t, \xi)}{\partial t}$ (⁴⁴), e che per ogni t fissato di $(t_0, t_0 + \delta)$ le derivate $\frac{\partial \bar{X}(t, \xi)}{\partial \xi}$, $\frac{\partial \bar{Y}(t, \xi)}{\partial \xi}$ esistono finite in quasi tutto (ξ_1, ξ_2) , si ha, per ogni t di $(t_0, t_0 + \delta)$ e per quasi tutti i valori ξ di (ξ_1, ξ_2) ,

$$(74) \quad 0 < \Gamma \bar{m} \leq J \begin{pmatrix} \bar{X} & \bar{Y} \\ t & \xi \end{pmatrix} \leq \Gamma'' \bar{M}.$$

Allora la corrispondenza biunivoca definita dalle (15) e (49) tra i punti del campo A_0 e i punti del rettangolo R_0 è tale che all'insieme di punti E di misura superficiale nulla del campo A_0 corrisponde, nel rettangolo R_0 , un insieme di punti E' , avente pure misura superficiale nulla (⁴⁵).

Pertanto in ogni punto di R_0 , ad eccezione che nei punti appartenenti a E' , si ha, tenendo presenti le (73),

$$(75) \quad \begin{cases} F_x(\bar{X}(t, \xi), \bar{Y}(t, \xi), \bar{z}(\bar{X}(t, \xi), \bar{Y}(t, \xi)), \bar{p}(\dots), \bar{q}(\dots)) + \\ \quad + F_z(\dots) \bar{p}(\dots) + F_p(\dots) \bar{p}'(\dots) + F_q(\dots) \bar{p}_v'(\dots) = 0 \\ F_v(\bar{X}(t, \xi), \bar{Y}(t, \xi), \bar{z}(\bar{X}(t, \xi), \bar{Y}(t, \xi)), \bar{p}(\dots), \bar{q}(\dots)) + \\ \quad + F_z(\dots) \bar{q}(\dots) + F_p(\dots) \bar{q}'(\dots) + F_q(\dots) \bar{q}_v'(\dots) = 0. \end{cases}$$

(⁴⁴) Mentre altrove, considerando, per ogni ξ fissato di (ξ_1, ξ_2) , la coppia $\bar{X}(t, \xi)$, $\bar{Y}(t, \xi)$ come soluzione del sistema (11) di equazioni differenziali ordinarie in $(t_0, t_0 + \delta)$, usiamo la notazione $\frac{d\bar{X}(t, \xi)}{dt}$, $\frac{d\bar{Y}(t, \xi)}{dt}$, ora, considerando, nella (74) che segue, lo Jacobiano delle

funzioni $\bar{X}(t, \xi)$, $\bar{Y}(t, \xi)$ rispetto a t e a ξ , usiamo il simbolo di derivata parziale.

(⁴⁵) Cfr. M. CINQUINI CIBRARIO e S. CINQUINI, *Sopra una nuova estensione di un teorema di esistenza per equazioni a derivate parziali del primo ordine*, Annali di Matematica pura ed applicata, T. XLIII (1957), pp. 51-81. Cfr. ivi in particolare quanto si dice in seguito alle (53) del n. 2, k), p. 72.

Definiamo ora in R_0 le funzioni

$$(76) \quad \begin{cases} \bar{Z}(t, \xi) = \bar{z}(\bar{X}(t, \xi), \bar{Y}(t, \xi)) \\ \bar{P}(t, \xi) = \bar{p}(\bar{X}(t, \xi), \bar{Y}(t, \xi)) \\ \bar{Q}(t, \xi) = \bar{q}(\bar{X}(t, \xi), \bar{Y}(t, \xi)). \end{cases}$$

Osserviamo che tali funzioni risultano lipschitziane in R_0 , e che per ogni ξ fissato di (ξ_1, ξ_2) esiste finita in $(t_0, t_0 + \delta)$ la derivata $\frac{d\bar{Z}(t, \xi)}{dt}$ per la quale si ha, tenendo presenti le (11) e le (76),

$$(77) \quad \frac{d\bar{Z}(t, \xi)}{dt} = \bar{P}(t, \xi) F_x(\bar{X}(t, \xi), \bar{Y}(t, \xi), \bar{Z}(t, \xi), \bar{P}(t, \xi), \bar{Q}(t, \xi)) + \\ + \bar{Q}(t, \xi) F_q(\dots)$$

in tutto R_0 .

Inoltre, poichè le funzioni $\bar{p}(x, y)$ e $\bar{q}(x, y)$ sono lipschitziane nel campo A_0 , in quasi tutto A_0 sono differenziabili⁽⁴⁶⁾; quindi in corrispondenza ad ogni punto (x, y) interno ad A_0 , ad eccezione che per i punti di un insieme di A_0 di misura superficiale nulla⁽⁴⁷⁾, esiste un numero reale positivo $\bar{r}$ tale che per qualunque coppia di numeri reali h, k per i quali il punto $(x+h, y+k)$ appartiene al campo A_0 ed è $\sqrt{h^2 + k^2} \leq \bar{r}$, si ha

$$(78) \quad \begin{cases} \bar{p}(x+h, y+k) - \bar{p}(x, y) = h\bar{p}_x'(x, y) + k\bar{p}_y'(x, y) + \rho\varepsilon_1(h, k) \\ \bar{q}(x+h, y+k) - \bar{q}(x, y) = h\bar{q}_x'(x, y) + k\bar{q}_y'(x, y) + \rho\varepsilon_2(h, k), \end{cases}$$

dove è $\rho = \sqrt{h^2 + k^2}$, ed $\varepsilon_1(h, k)$, $\varepsilon_2(h, k)$ sono infinitesimi con ρ .

Dunque in ogni punto del campo A_0 , ad eccezione che per i punti di un insieme E_0 di misura superficiale nulla, sono verificate entrambe le (78) ed entrambe le (73). Indichiamo con E'_0 l'insieme dei punti, pure di misura superficiale nulla, che nel rettangolo R_0 corrisponde, secondo la corrispondenza biunivoca definita dalle (15) e (49), all'insieme E_0 del campo A_0 ; e

⁽⁴⁶⁾ Vedi H. RADEMACHER, *Über partielle und totale Differenzierbarkeit von Funktionen mehrerer Variablen und über die Transformation der Doppelintegrale*, Mathematische Annalen, Band 79, (1919), pp. 310-359; cfr. in particolare n. 3, Satz 1, e n. 4, p. 317.

⁽⁴⁷⁾ È evidente che ogni punto, appartenente ad E , nel quale almeno una delle derivate $\bar{p}_x'$, $\bar{p}_y'$, $\bar{q}_x'$, $\bar{q}_y'$ non esiste finita appartiene a tale insieme di misura superficiale nulla.

consideriamo un punto qualsiasi (t, ξ) di R_0 non appartenente a E'_0 , osservando che in tale punto sono verificate entrambe le (75), e nel punto (x, y) di A_0 ad esso corrispondente, secondo la corrispondenza sopra nominata, sono verificate entrambe le (78). Allora, ricordando che in tutto R_0 esistono finite le derivate $\frac{d\bar{X}(t, \xi)}{dt}$, $\frac{d\bar{Y}(t, \xi)}{dt}$, segue, tenendo presenti le (78), e in virtù del teorema elementare di derivazione di funzione composta, che nel punto (t, ξ) considerato esistono finite le derivate $\frac{d\bar{P}(t, \xi)}{dt}$, $\frac{d\bar{Q}(t, \xi)}{dt}$, e si ha, tenendo conto delle (11) e delle (76),

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\bar{P}(t, \xi)}{dt} = \bar{p}_x'(\bar{X}(t, \xi), \bar{Y}(t, \xi)) F_p(\bar{X}(t, \xi), \bar{Y}(t, \xi), \bar{Z}(t, \xi), \bar{P}(t, \xi), \bar{Q}(t, \xi)) + \\ \quad + \bar{p}_v'(\dots) F_q(\dots) \\ \frac{d\bar{Q}(t, \xi)}{dt} = \bar{q}_x'(\bar{X}(t, \xi), \bar{Y}(t, \xi)) F_p(\bar{X}(t, \xi), \bar{Y}(t, \xi), \bar{Z}(t, \xi), \bar{P}(t, \xi), \bar{Q}(t, \xi)) + \\ \quad + \bar{q}_v'(\dots) F_q(\dots), \end{array} \right.$$

e anche, tenendo presenti le (75) e le (76),

$$(79) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d\bar{P}(t, \xi)}{dt} = - [F_x(\bar{X}(t, \xi), \bar{Y}(t, \xi), \bar{Z}(t, \xi), \bar{P}(t, \xi), \bar{Q}(t, \xi)) + F_z(\dots) \bar{P}(t, \xi)] \\ \frac{d\bar{Q}(t, \xi)}{dt} = - [F_v(\bar{X}(t, \xi), \bar{Y}(t, \xi), \bar{Z}(t, \xi), \bar{P}(t, \xi), \bar{Q}(t, \xi)) + F_z(\dots) \bar{Q}(t, \xi)]. \end{array} \right.$$

Dunque in ogni punto di R_0 che non appartiene all'insieme di misura superficiale nulla E'_0 , le (79) sono soddisfatte.

Osserviamo che, ricordando che in ogni punto della curva Γ_0 sono soddisfatte le ultime due delle (10) e tenendo presenti le (14), per ogni ξ di (ξ_1, ξ_2) è

$$\bar{p}(\bar{X}(t_0, \xi), \bar{Y}(t_0, \xi)) = p(X(t_0, \xi), Y(t_0, \xi))$$

$$\bar{q}(\bar{X}(t_0, \xi), \bar{Y}(t_0, \xi)) = q(X(t_0, \xi), Y(t_0, \xi)),$$

e quindi anche, tenendo presenti le ultime due delle (76) e le ultime due delle (34),

$$\bar{P}(t_0, \xi) = P(t_0, \xi), \quad \bar{Q}(t_0, \xi) = Q(t_0, \xi).$$

Allora dalle (79) segue che per quasi tutti gli ξ di (ξ_1, ξ_2) si ha, per ogni t di $(t_0, t_0 + \delta)$,

$$(80) \quad \left\{ \begin{array}{l} \bar{P}(t, \xi) = P(t_0, \xi) - \int_{t_0}^t [F_x(\bar{X}(\tau, \xi), \dots, \bar{Q}(\tau, \xi)) + F_z(\dots) \bar{P}(\tau, \xi)] d\tau \\ \bar{Q}(t, \xi) = Q(t_0, \xi) - \int_{t_0}^t [F_v(\dots) + F_z(\dots) \bar{Q}(\tau, \xi)] d\tau, \end{array} \right.$$

e poichè per ogni t fissato di $(t_0, t_0 + \delta)$ entrambi i membri delle (80) sono funzioni continue di ξ in (ξ_1, ξ_2) , segue che le (80) sono soddisfatte in tutto R_0 . Quindi dalle (80) segue che in tutto R_0 esistono continue le $\frac{d\bar{P}(t, \xi)}{dt}$, $\frac{d\bar{Q}(t, \xi)}{dt}$, e sono soddisfatte le (79).

Osserviamo inoltre che, ricordando che in ogni punto della curva Γ_0 è soddisfatta la prima delle (10) e tenendo presenti le (14), per ogni ξ di (ξ_1, ξ_2) è

$$\bar{z}(\bar{X}(t_0, \xi), \bar{Y}(t_0, \xi)) = z(X(t_0, \xi), Y(t_0, \xi)),$$

e quindi anche, tenendo presente la prima delle (76) e la prima delle (34),

$$(81) \quad \bar{Z}(t_0, \xi) = Z(t_0, \xi).$$

Allora, tenendo presenti le (17) e le (76), la (77) e la (81), e le (80), si conclude che la quintupla di funzioni $\bar{X}(t, \xi)$, $\bar{Y}(t, \xi)$, $\bar{Z}(t, \xi)$, $\bar{P}(t, \xi)$, $\bar{Q}(t, \xi)$ soddisfa in tutto R_0 il sistema di equazioni differenziali

$$(82) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d\bar{X}(t, \xi)}{dt} = F_p(\bar{X}(t, \xi), \bar{Y}(t, \xi), \bar{Z}(t, \xi), \bar{P}(t, \xi), \bar{Q}(t, \xi)) \\ \frac{d\bar{Y}(t, \xi)}{dt} = F_q(\dots) \\ \frac{d\bar{Z}(t, \xi)}{dt} = F_p(\dots) \bar{P}(t, \xi) + F_q(\dots) \bar{Q}(t, \xi) \\ \frac{d\bar{P}(t, \xi)}{dt} = -[F_x(\dots) + F_z(\dots) \bar{P}(t, \xi)] \\ \frac{d\bar{Q}(t, \xi)}{dt} = -[F_v(\dots) + F_z(\dots) \bar{Q}(t, \xi)] \end{array} \right.$$

con le condizioni iniziali

$$(83) \quad \left\{ \begin{array}{l} \bar{X}(t_0, \xi) = X(t_0, \xi), \quad \bar{Y}(t_0, \xi) = Y(t_0, \xi), \quad \bar{Z}(t_0, \xi) = Z(t_0, \xi), \\ \bar{P}(t_0, \xi) = P(t_0, \xi), \quad \bar{Q}(t_0, \xi) = Q(t_0, \xi), \quad (\xi_1 \leq \xi \leq \xi_2). \end{array} \right.$$

D'altra parte, per il modo in cui è stata costruita, nel teorema di esistenza dimostrato in [M], la soluzione della (I) $z = z(x, y)$, è associata a questa la quintupla di funzioni $X(t, \xi)$, $Y(t, \xi)$, $Z(t, \xi)$, $P(t, \xi)$, $Q(t, \xi)$, che in tutto R_0 soddisfa il sistema (82) (il quale è lo stesso sistema delle caratteristiche relativo alla (I) che, in forma integrale, è riportato nelle (7) del presente lavoro), con le condizioni (83).

Pertanto in tutto R_0 le funzioni $\bar{X}(t, \xi)$, $\bar{Y}(t, \xi)$, $\bar{Z}(t, \xi)$, $\bar{P}(t, \xi)$, $\bar{Q}(t, \xi)$ coincidono rispettivamente con le funzioni $X(t, \xi)$, $Y(t, \xi)$, $Z(t, \xi)$, $P(t, \xi)$, $Q(t, \xi)$.

Quindi in tutto il campo A_0 è verificata la (8), e le curve (50) che costituiscono il contorno del campo A_0 coincidono rispettivamente con le curve

$$\left\{ \begin{array}{l} y = Y(t_0, \Phi(t_0, x)), \quad (X(t_0, \xi_1) \leq x \leq X(t_0, \xi_2)) \\ y = Y(t_0 + \delta, \Phi(t_0 + \delta, x)), \quad (X(t_0 + \delta, \xi_1) \leq x \leq X(t_0 + \delta, \xi_2)) \\ \left. \begin{array}{l} x = X(t, \xi_1) \\ y = Y(t, \xi_1) \end{array} \right\} \quad (t_0 \leq t \leq t_0 + \delta) \\ \left. \begin{array}{l} x = X(t, \xi_2) \\ y = Y(t, \xi_2) \end{array} \right\} \quad (t_0 \leq t \leq t_0 + \delta). \end{array} \right.$$

Allora, se, avendo fissato all'inizio del capoverso *a)* del presente numero il valore $t_0 = 0$, è $\delta \geq \tau_2$ ⁽⁴⁷⁾, tenendo presente che, in virtù delle condizioni (II) del n. 1, *a)* alle quali soddisfa ogni funzione dell'insieme $\bar{J}$, sopra la curva $y = f(x)$, $(\xi_1 \leq x \leq \xi_2)$ le (10) sono soddisfatte, è così pro-

⁽⁴⁷⁾ È ovvio che, fissato il valore $t_0 = 0$, è certamente $\delta < a$, essendo $\delta \leq \delta_0$, $\delta_0 \leq a - \tau_2$ (cfr. la seconda delle tre disuguaglianze alle quali abbiamo supposto, nella prima parte del capoverso *a)* del presente numero, che soddisfi il numero positivo δ_0), e $\tau_2 > 0$. Così pure è evidente che se per il valore t_0 di (τ_1, τ_2) fissato è $t_0 < \tau_2$, è $t_0 + \delta < a$.

vato ⁽⁴⁸⁾ che la (8) è verificata in tutto il campo limitato dalle curve

$$(84) \quad \left\{ \begin{array}{l} y = f(x), \quad (\xi_1 \leq x \leq \xi_2) \\ y = Y(\tau_2, \Phi(\tau_2, x)), \quad (X(\tau_2, \xi_1) \leq x \leq X(\tau_2, \xi_2)) \\ \left\{ \begin{array}{l} x = X(t, \xi_1) \\ y = Y(t, \xi_1) \end{array} \right. \quad (0 \leq t \leq \tau_2) \\ \left\{ \begin{array}{l} x = X(t, \xi_2) \\ y = Y(t, \xi_2) \end{array} \right. \quad (0 \leq t \leq \tau_2). \end{array} \right.$$

e) Supponiamo invece che, fissato il valore $t_0 = 0$, sia $\delta < \tau_2$. Rileviamo allora che, per il modo in cui è stato determinato il numero reale positivo δ , qualunque sia il valore $\bar{t}$ di $(0, \tau_2)$, per il quale supponiamo che siano verificate (come per il valore t_0 fissato all'inizio del capoverso a) del presente numero) le (10), in tutto il campo (appartenente ad A) limitato dalle curve

$$(85) \quad \left\{ \begin{array}{l} y = Y(\bar{t}, \Phi(\bar{t}, x)), \quad (X(\bar{t}, \xi_1) \leq x \leq X(\bar{t}, \xi_2)) \\ y = Y(\bar{t} + \delta, \Phi(\bar{t} + \delta, x)), \quad (X(\bar{t} + \delta, \xi_1) \leq x \leq X(\bar{t} + \delta, \xi_2)) \\ \left\{ \begin{array}{l} x = X(t, \xi_1) \\ y = Y(t, \xi_1) \end{array} \right. \quad (\bar{t} \leq t \leq \bar{t} + \delta) \\ \left\{ \begin{array}{l} x = X(t, \xi_2) \\ y = Y(t, \xi_2) \end{array} \right. \quad (\bar{t} \leq t \leq \bar{t} + \delta) \end{array} \right.$$

la (8) è soddisfatta.

Infatti ricordiamo, innanzitutto, che il numero positivo δ_0 è stato determinato in modo da risultare indipendente dal valore t_0 fissato ⁽⁴⁹⁾, e pertanto, qualunque sia il valore $\bar{t}$ di $(0, \tau_2)$, nel rettangolo $[\bar{t} \leq t \leq \bar{t} + \delta_0]$,

⁽⁴⁸⁾ Osserviamo che se è $t_0 = 0$, il procedimento svolto nei capoversi a) - c) del presente numero si semplifica notevolmente, tenendo presente quanto è stato fatto in $[M]$ nei capoversi a) - c) del n. 1.

⁽⁴⁹⁾ Cfr. la nota ⁽¹⁷⁾.

$\xi_1 \leq \xi \leq \xi_2$] è definita una ed una sola soluzione $\bar{X}(t, \xi)$, $\bar{Y}(t, \xi)$ del sistema (11), con le condizioni

$$\bar{X}(\bar{t}, \xi) = X(\bar{t}, \xi), \quad \bar{Y}(\bar{t}, \xi) = Y(\bar{t}, \xi), \quad (\xi_1 \leq \xi \leq \xi_2),$$

per la quale nello stesso rettangolo $[\bar{t} \leq t \leq \bar{t} + \delta_0, \xi_1 \leq \xi \leq \xi_2]$ sono verificate le condizioni elencate subito dopo le (14) del capoverso a) del presente numero.

Inoltre, ricordando come è stato determinato il numero positivo $\delta_1 \leq \delta_0$ ⁽⁵⁰⁾, qualunque sia il valore $\bar{t}$ di $(0, \tau_2)$, per ogni t di $(\bar{t}, \bar{t} + \delta_1)$ la (22) è soddisfatta per qualsiasi coppia di valori distinti ξ', ξ'' di (ξ_1, ξ_2) .

Infine, tenendo presente come è stato determinato il numero positivo $\delta \leq \delta_1$ ⁽⁵¹⁾, qualunque sia il valore $\bar{t}$ di $(0, \tau_2)$ per il quale, come abbiamo sopra rilevato, siano verificate (come per il valore t_0 fissato all'inizio del capoverso a) del presente numero) le (10), per ogni coppia di punti distinti (t, x) , (t^*, x) appartenenti al campo

$$\bar{t} \leq t \leq \bar{t} + \delta, \quad \bar{X}(t, \xi_1) \leq x \leq \bar{X}(t, \xi_2)$$

è soddisfatta la (46).

Pertanto, dopo avere fissato, all'inizio del capoverso a) del presente numero, un qualsiasi valore $\bar{t}$ di $(0, \tau_2)$ per il quale, come si è detto, si suppongono verificate le (10), si può procedere come nei capoversi a) - d) del presente numero, e dimostrare quindi che la (8) è soddisfatta in tutto il campo limitato dalle curve (85).

Sia ora r il minimo intero positivo per il quale è

$$r\delta \geq \tau_2.$$

Allora, ricordando ancora che, in virtù delle condizioni (II) del n. 1, a) cui soddisfa ogni funzione $\bar{z}(x, y)$ dell'insieme $\bar{J}$, sopra la curva $y = f(x)$, $(\xi_1 \leq x \leq \xi_2)$ sono soddisfatte le (10), dopo avere fissato, all'inizio del capoverso a) del presente numero, il valore $\bar{t} = 0$, possiamo procedere come nei capoversi a) - d) ⁽⁵²⁾, e dimostrare quindi che la (8) è soddisfatta

⁽⁵⁰⁾ Cfr. la (20) e la nota ⁽²³⁾.

⁽⁵¹⁾ Cfr. la (45) e la nota ⁽³⁴⁾.

⁽⁵²⁾ Cfr. la nota ⁽⁴⁸⁾.

in tutto il campo (appartenente ad A) limitato dalle curve

$$(86) \quad \left\{ \begin{array}{l} y = f(x), \quad (\xi_1 \leq x \leq \xi_2) \\ \\ y = Y(\delta, \Phi(\delta, x)), \quad (X(\delta, \xi_1) \leq x \leq X(\delta, \xi_2)) \\ \\ \left\{ \begin{array}{l} x = X(t, \xi_1) \\ y = Y(t, \xi_1) \end{array} \right. \quad (0 \leq t \leq \delta) \\ \\ \left\{ \begin{array}{l} x = X(t, \xi_2) \\ y = Y(t, \xi_2) \end{array} \right. \quad (0 \leq t \leq \delta). \end{array} \right.$$

Segue allora che in tutto il campo limitato dalle curve (86), e quindi, in particolare, in ogni punto della curva rappresentata dalla seconda delle stesse (86), le (10) sono soddisfatte, e pertanto si può di nuovo procedere, fissando il valore $\bar{t} = \delta$, nel modo suddetto, e così di seguito. Dunque, così procedendo, dopo r operazioni si arriva a dimostrare che la (8) è soddisfatta in tutto il campo limitato dalle curve (84).

In modo analogo (cfr. le note ⁽¹⁸⁾ e ⁽¹⁹⁾) si dimostra che la stessa (8) è soddisfatta nel campo del piano (x, y) limitato dalle curve

$$\left\{ \begin{array}{l} y = Y(\tau_1, \Phi(\tau_1, x)), \quad (X(\tau_1, \xi_1) \leq x \leq X(\tau_1, \xi_2)) \\ \\ y = f(x), \quad (\xi_1 \leq x \leq \xi_2) \\ \\ \left\{ \begin{array}{l} x = X(t, \xi_1) \\ y = Y(t, \xi_1) \end{array} \right. \quad (\tau_1 \leq t \leq 0) \\ \\ \left\{ \begin{array}{l} x = X(t, \xi_2) \\ y = Y(t, \xi_2) \end{array} \right. \quad (\tau_1 \leq t \leq 0). \end{array} \right.$$

Pertanto la (8) risulta soddisfatta in tutto il campo $\bar{A}$, interno al campo A , limitato dalle curve (9).

Allora, poichè i valori $\tau_1, \tau_2, \xi_1, \xi_2$ fissati all'inizio del capoverso α del presente numero sono quattro valori qualsiasi, con $-a < \tau_1 < 0 < \tau_2 < a$,

$\alpha < \xi_1 < \xi_2 < \beta$, la (8) risulta soddisfatta in un qualsiasi campo interno al campo A .

Dunque, in virtù della continuità delle funzioni $z(x, y)$ e $\bar{z}(x, y)$, si conclude che la (8) è soddisfatta in tutto il campo A .

3. Osservazione I. - A complemento di quanto abbiamo rilevato nel capoverso c) del n. 2 a proposito delle funzioni $U(x, y)$ e $V(x, y)$ definite nel campo A_0 , verifichiamo che esse risultano lipschitziane, nel complesso delle variabili x, y , in tutto il campo A_0 ⁽⁵³⁾.

A tale scopo ricordiamo che per qualunque coppia di punti (x', y') , (x'', y'') di A_0 per i quali, tenendo presenti le ultime due delle (59), è verificata la (60), sono soddisfatte le (69).

Inoltre osserviamo che, in virtù della continuità uniforme della funzione $V(x, y)$ nel campo A_0 , in corrispondenza al numero positivo $\frac{M_4 \delta}{m}$ possiamo determinare un numero positivo σ , tale che per qualunque coppia di punti (x', y') , (x'', y'') di A_0 , per i quali è

$$(87) \quad \sqrt{(x' - x'')^2 + (y' - y'')^2} < \sigma$$

si ha

$$(88) \quad |V(x', y') - V(x'', y'')| \leq \frac{M_4 \delta}{m};$$

Allora, considerati due punti qualsiasi (x', y') , (x'', y'') di A_0 , distinguiamo il caso in cui per tali punti la (88) è verificata, e il caso in cui la (88) stessa non è verificata.

Nel primo caso, ricordando le ultime due delle (59) e la (60), le (69), per quanto si è dimostrato in seguito alla (60), sono soddisfatte.

Nel secondo caso, vale a dire se è

$$(89) \quad |V(x', y') - V(x'', y'')| > \frac{M_4 \delta}{m} \quad (54),$$

se N è il minimo intero positivo per il quale è

$$N \frac{M_4 \delta}{m} \geq \xi_2 - \xi_1,$$

⁽⁵³⁾ Cfr. la nota ⁽⁴³⁾.

⁽⁵⁴⁾ È ovvio che in questo caso la distanza tra i punti (x', y') , (x'', y'') è non inferiore a σ ; infatti se fosse verificata la (87), anche la (88) sarebbe soddisfatta, contrariamente a quanto ora abbiamo supposto.

dividiamo l'intervallo (ξ_1, ξ_2) in N parti uguali mediante i punti di suddivisione

$$(90) \quad \xi^{(0)} \equiv \xi_1, \quad \xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \dots, \xi^{(N)} \equiv \xi_2.$$

Indicato con $A^{(i)}$ il campo, appartenente ad A_0 , limitato dalle curve

$$(91) \quad \left\{ \begin{array}{l} y = \bar{Y}(t_0, \Psi(t_0, x)), \quad (\bar{X}(t_0, \xi^{(i-1)}) \leq x \leq \bar{X}(t_0, \xi^{(i)})) \\ \\ y = \bar{Y}(t_0 + \delta, \Psi(t_0 + \delta, x)), \quad (\bar{X}(t_0 + \delta, \xi^{(i-1)}) \leq x \leq \bar{X}(t_0 + \delta, \xi^{(i)})) \\ \\ \left\{ \begin{array}{l} x = \bar{X}(t, \xi^{(i-1)}) \\ y = \bar{Y}(t, \xi^{(i-1)}) \end{array} \right. \quad (t_0 \leq t \leq t_0 + \delta) \\ \\ \left\{ \begin{array}{l} x = \bar{X}(t, \xi^{(i)}) \\ y = \bar{Y}(t, \xi^{(i)}) \end{array} \right. \quad (t_0 \leq t \leq t_0 + \delta), \end{array} \right.$$

e considerate le parti $A^{(1)}, A^{(2)}, \dots, A^{(N)}$ in cui, in corrispondenza alla suddivisione fatta dell'intervallo (ξ_1, ξ_2) , risulta diviso il campo A_0 , osserviamo che, essendo $0 < \xi^{(i)} - \xi^{(i-1)} \leq \frac{M_4 \delta}{m}$ e ricordando quanto si è rilevato nel capo-

verso c) del n. 2 in merito alle funzioni $U(x, y)$ e $V(x, y)$ considerate nel campo limitato dalle curve (58) (dove ξ^*, ξ^{**} sono due valori qualsiasi di (ξ_1, ξ_2) , con $\xi^* < \xi^{**}$, per i quali è verificata la (57)), in ogni campo $A^{(i)}$, ($i = 1, 2, \dots, N$) le funzioni $U(x, y)$ e $V(x, y)$ sono lipschitziane. E precisamente si ha che per qualsiasi coppia di punti (x', y') , (x'', y'') appartenenti a uno qualunque dei campi $A^{(i)}$, ($i = 1, 2, \dots, N$) sono soddisfatte le (69).

Posto ancora, per la coppia sopra considerata di punti di A_0 , (x', y') , (x'', y'') , per i quali è verificata la (89),

$$\xi' = V(x', y'), \quad \xi'' = V(x'', y''),$$

e supposto, per fissare le idee, che sia $\xi' < \xi''$, sia s il numero dei punti (90) che sono interni all'intervallo (ξ', ξ'') ⁽⁵⁵⁾, e siano questi

$$\xi^{(n_0)}, \xi^{(n_0+1)}, \dots, \xi^{(n_0+s-1)},$$

⁽⁵⁵⁾ Poichè è $\frac{M_4 \delta}{m} < \xi'' - \xi' \leq \xi_2 - \xi_1$, si ha $1 \leq s \leq N - 1$.

dove abbiamo indicato con n_0 il minimo intero positivo per il quale è $\xi^{(n_0)} > \xi'$.

Allora, indicando con (x_j, y_j) un punto qualsiasi della curva

$$\begin{cases} x = \bar{X}(t, \xi^{(j)}) \\ y = \bar{Y}(t, \xi^{(j)}) \end{cases} \quad (t_0 \leq t \leq t_0 + \delta) \quad (j = n_0, n_0 + 1, \dots, n_0 + s - 1),$$

e ricordando quanto si è sopra rilevato in merito alle funzioni $U(x, y)$ e $V(x, y)$ considerate in uno qualunque dei campi $A^{(i)} (i = 1, 2, \dots, N)$, possiamo scrivere, tenendo presente la prima delle (69),

$$\begin{aligned} |U(x', y') - U(x'', y'')| &\leq \\ &\leq |U(x', y') - U(x_{n_0}, y_{n_0})| + |U(x_{n_0}, y_{n_0}) - U(x_{n_0+1}, y_{n_0+1})| + \dots + \\ &\quad + |U(x_{n_0+s-1}, y_{n_0+s-1}) - U(x'', y'')| \leq \\ &\leq K' [\sqrt{(x' - x_{n_0})^2 + (y' - y_{n_0})^2} + \sqrt{(x_{n_0} - x_{n_0+1})^2 + (y_{n_0} - y_{n_0+1})^2} + \dots + \\ &\quad + \sqrt{(x_{n_0+s-1} - x'')^2 + (y_{n_0+s-1} - y'')^2}], \end{aligned}$$

e anche, indicando con L il limite superiore delle distanze tra i punti di A_0 , e tenendo presente che è $s + 1 \leq N$,

$$(92) \quad |U(x', y') - U(x'', y'')| \leq K'(s + 1)L \leq K'NL.$$

Ricordando che è $\sqrt{(x' - x'')^2 + (y' - y'')^2} \geq \sigma^{(56)}$, se $\bar{n}$ è il minimo intero positivo per il quale è

$$\bar{n}\sigma \geq L,$$

dalla (92) segue

$$(93) \quad |U(x', y') - U(x'', y'')| \leq K'N\bar{n}\sigma \leq K'N\bar{n}\sqrt{(x' - x'')^2 + (y' - y'')^2}.$$

⁽⁵⁶⁾ Cfr. la nota a piè di pag. ⁽⁵⁴⁾.

Analogamente, tenendo presente la seconda delle (69), si ottiene

$$(94) \quad |V(x', y') - V(x'', y'')| \leq K'' N \bar{n} \sqrt{(x' - x'')^2 + (y' - y'')^2}.$$

Dunque, essendo $K' N \bar{n} \geq K'$, $K'' N \bar{n} \geq K''$, si conclude, tenendo presenti le (69), le (93) e (94), che per qualsiasi coppia di punti (x', y') , (x'', y'') di A_0 sono soddisfatte le (93) e (94), e pertanto le funzioni $U(x, y)$ e $V(x, y)$ soddisfano nel campo A_0 alla condizione di Lipschitz, nel complesso delle due variabili x, y .

4. Osservazione II. - *a)* Mediante considerazioni del tutto analoghe a quelle svolte nel numero precedente, possiamo arrecare un complemento a quanto viene dimostrato in $[M]$ (cfr. pagg. 105-107) riguardo alle funzioni $T(x, y)$ e $\xi(x, y)$, e alle $z(x, y)$, $p(x, y)$ e $q(x, y)$ definite nel campo C .

Osserviamo, innanzitutto, che la disuguaglianza (23') di $[M]$ (nella quale si tenga presente l'espressione di D che è data alla pag. 105 di tale lavoro) è soddisfatta per qualsiasi coppia di valori distinti t_1, t_2 di $(0, \alpha)$ e per qualsiasi coppia di valori distinti ξ_1, ξ_2 di (α, β) ⁽⁵⁷⁾ per i quali è

$$(95) \quad |\xi_1 - \xi_2| \leq \frac{M_4 \alpha}{1 - L_4 g(\alpha)}.$$

Ciò si può verificare in modo del tutto analogo a quello con cui è stata dimostrata la (54) del presente lavoro, considerando, in luogo della differenza che figura al secondo membro della (55) del presente lavoro, la differenza

$$(96) \quad N - [F_q(\xi_1, \dots, \chi(\xi_1)) - F_p(\xi_1, \dots, \chi(\xi_1))f'(\xi_1)],$$

dove N è l'espressione che abbiamo considerata in $[M]$ (cfr. ivi alla fine di pag. 105). Tenendo presente che tale espressione N coincide con il secondo membro della (18) di $[M]$ quando in luogo dei valori t_1, t_2, ξ_1, ξ_2 si sostituiscono rispettivamente i valori $t, \bar{t}, \xi, \bar{\xi}$, ripetiamo sulla (96) i calcoli effettuati in $[M]$ sopra la differenza I (cfr. pagg. 100-103 di tale Memoria) tenendo però presente che, in luogo della differenza $\Phi(t, x) - \Phi(\bar{t}, x)$ che interviene nei calcoli di pag. 103, abbiamo, ora, la differenza $\xi_1 - \xi_2$; e

⁽⁵⁷⁾ Nei casi particolari in cui è $t_1 = t_2$, oppure $\xi_1 = \xi_2$, si verifica che le (24) (e quindi anche le (25)) di $[M]$ sono soddisfatte, ragionando in modo analogo a quello con cui nel presente lavoro, dopo avere stabilite le (64), si è verificato che le (64) stesse sono soddisfatte anche nei casi particolari in cui è $t' = t''$, oppure $\xi' = \xi''$.

poichè ξ_1, ξ_2 sono due valori distinti qualsiasi di (α, β) per i quali è verificata la (95), si ottiene, tenendo presente la (19) di $[M]$ e l'espressione di $G(t)$, la disuguaglianza che precede la (23'), e quindi anche la stessa (23') di $[M]$.

Ciò premesso, ragioniamo in modo del tutto analogo a quello con cui, nel n. 3 del presente lavoro, siamo pervenuti alle (93) e (94), tenendo presente che le (25) di $[M]$ risultano soddisfatte per qualsiasi coppia di punti $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ appartenenti al campo C per i quali, posto $\xi_1 = \xi(x_1, y_1)$, $\xi_2 = \xi(x_2, y_2)$, è soddisfatta la (95) del presente lavoro, e che, verificata la continuità della funzione $\xi(x, y)$ nel campo C , in virtù di tale continuità è possibile determinare, in corrispondenza al numero $\frac{M_4 a}{1 - L_4 g(a)}$, un numero positivo δ^* , tale che, per qualsiasi coppia di punti $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ di C per i quali è

$$\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} < \delta^*,$$

risulta

$$|\xi(x_1, y_1) - \xi(x_2, y_2)| \leq \frac{M_4 a}{1 - L_4 g(a)}.$$

Allora se N^* è il minimo intero positivo per il quale è

$$N^* \frac{M_4 a}{1 - L_4 g(a)} \geq \beta - \alpha,$$

e, essendo Λ^* il limite superiore delle distanze tra i punti del campo C , P^* è il minimo intero positivo per il quale è

$$P^* \delta^* \geq \Lambda^*,$$

per qualunque coppia di punti $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ del campo C si ottiene, tenendo presenti le (25) di $[M]$,

$$(97) \quad \left\{ \begin{array}{l} |T(x_1, y_1) - T(x_2, y_2)| \leq \\ \leq \frac{m_2 + k_2 + L_5 g(a_0)}{m_1(\gamma_1 - G(a))} N^* P^* \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \\ | \xi(x_1, y_1) - \xi(x_2, y_2) | \leq \\ \leq \frac{M_4 + M_5}{m_1(\gamma_1 - G(a))} N^* P^* \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}. \end{array} \right.$$

Inoltre, rilevando che le (27), (28) e (29) di [M] sono verificate per qualsiasi coppia di punti (x_1, y_1) , (x_2, y_2) del campo C per i quali, posto $\xi_1 = \xi(x_1, y_1)$, $\xi_2 = \xi(x_2, y_2)$, è verificata la (95) del presente lavoro, per qualunque coppia di punti (x_1, y_1) , (x_2, y_2) del campo C si ottiene, tenendo presenti le (27), (28) e (29) di [M], e le (97) sopra scritte,

$$(98) \left\{ \begin{aligned} |z(x_1, y_1) - z(x_2, y_2)| &\leq \frac{N^* P^*}{m_1(\gamma_1 - G(a))} [(k_3 + \Lambda_1 g(a_0))(M_4 + M_5) + \\ &\quad + (M_4 \Omega_1 + M_5 \Omega_2)(m_2 + k_2 + L_5 g(a_0))] \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}, \\ |p(x_1, y_1) - p(x_2, y_2)| &\leq \frac{N^* P^*}{m_1(\gamma_1 - G(a))} [(k_4 + \Lambda_2 g(a_0))(M_4 + M_5) + \\ &\quad + (M_1 + M_3 \Omega_1)(m_2 + k_2 + L_5 g(a_0))] \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}, \\ |q(x_1, y_1) - q(x_2, y_2)| &\leq \frac{N^* P^*}{m_1(\gamma_1 - G(a))} [(k_5 + \Lambda_3 g(a_0))(M_4 + M_5) + \\ &\quad + (M_2 + M_3 \Omega_2)(m_2 + k_2 + L_5 g(a_0))] \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}. \end{aligned} \right.$$

b) Rileviamo inoltre che, considerate le funzioni $T(x, y)$, $\xi(x, y)$, $z(x, y)$, $p(x, y)$ e $q(x, y)$ definite in tutto il campo A (cfr. n. 1, b) del presente lavoro), ripetendo le considerazioni fatte nel capoverso a) del presente numero riguardo alle stesse funzioni sopra nominate considerate nel campo C , si verifica, tenendo presente quanto abbiamo rilevato nella nota ⁽¹³⁾, che per qualunque coppia di valori distinti t_1, t_2 di $(-a, a)$ e per qualunque coppia di valori distinti ξ_1, ξ_2 di (α, β) per i quali è

$$|\xi_1 - \xi_2| \leq \frac{M_4 a}{1 - L_4 g(a)}$$

è soddisfatta la (23') di [M]. E quindi (tenendo anche presente quanto si è detto nella ⁽⁹⁷⁾ del presente lavoro) per qualsiasi coppia di punti (x_1, y_1) , (x_2, y_2) del campo A per i quali è

$$(99) \quad |\xi(x_1, y_1) - \xi(x_2, y_2)| \leq \frac{M_4 a}{1 - L_4 g(a)}$$

sono verificate le (24) e (25) di [M]. Allora, ragionando in modo del tutto analogo a quello con cui, nel capoverso a) del presente numero, abbiamo

ottenuto le (97), verificata la continuità della funzione $\xi(x, y)$ in tutto il campo A , e determinato, in corrispondenza al numero $\frac{M_4 \alpha}{1 - L_4 g(a)}$, un numero positivo δ^{**} tale che per qualsiasi coppia di punti $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ di A per i quali è

$$\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} < \delta^{**}$$

sia soddisfatta la (99), se Λ^{**} è il limite superiore delle distanze tra i punti di A , e P^{**} è il minimo intero positivo per il quale è

$$P^{**} \delta^{**} \geq \Lambda^{**},$$

si ottiene, ricordando che N^* è il minimo intero positivo per il quale è $N^* \frac{M_4 \alpha}{1 - L_4 g(a)} \geq \beta - \alpha$, per qualsiasi coppia di punti $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ di A

$$(100) \quad \left\{ \begin{array}{l} |T(x_1, y_1) - T(x_2, y_2)| \leq \\ \leq \frac{m_2 + k_2 + L_5 g(a_0)}{m_1(\gamma_1 - G(a))} N^* P^{**} \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \\ | \xi(x_1, y_1) - \xi(x_2, y_2) | \leq \\ \leq \frac{M_4 + M_5}{m_1(\gamma_1 - G(a))} N^* P^{**} \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}. \end{array} \right.$$

Inoltre, ragionando in modo analogo a quello con cui, nel capoverso $a)$ del presente numero abbiamo ottenuto le (98), si verifica, tenendo presenti le (100), che per qualsiasi coppia di punti $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ del campo A si ha

$$(101) \quad \left\{ \begin{array}{l} |z(x_1, y_1) - z(x_2, y_2)| \leq \frac{N^* P^{**}}{m_1(\gamma_1 - G(a))} [(k_3 + \Lambda_1 g(a_0)) (M_4 + M_5) + \\ + (M_4 \Omega_1 + M_5 \Omega_2) (m_2 + k_2 + L_5 g(a_0))] \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}, \\ |p(x_1, y_1) - p(x_2, y_2)| \leq \frac{N^* P^{**}}{m_1(\gamma_1 - G(a))} [(k_4 + \Lambda_2 g(a_0)) (M_4 + M_5) + \\ + (M_1 + M_3 \Omega_1) (m_2 + k_2 + L_5 g(a_0))] \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}, \\ |q(x_1, y_1) - q(x_2, y_2)| \leq \frac{N^* P^{**}}{m_1(\gamma_1 - G(a))} [(k_5 + \Lambda_3 g(a_0)) (M_4 + M_5) + \\ + (M_2 + M_3 \Omega_2) (m_2 + k_2 + L_5 g(a_0))] \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}. \end{array} \right.$$