Doppervelhältnisse im Fünfgewebe.

von G. BOL (in Freiburg i. Br.).

Wenn die Kurven eines Viergewebes Tangenten besitzen, so ist das Doppervelhältnis der vier Tangenten an die Gewebekurven durch einem Punkte invariant bei allen stetig differenzierbaren topologischen abbildungen. Diese Invariante kann vom Ort unabhängig sein, — dann redet man von einem « Doppelverhältnissgewebe » — oder aber sie ist eine Ortsfunktion. Im letzteren Fall bilden die Kurven längs denen das Doppelverhältnis fest bleibt jedenfalls im Kleinen eine fünfte Kurvenschar, die « Doppelverhältnisschar » des Viergewebes.

Man kann sich nun die Frage stellen, ob es 5-Gewebe gibt in denen jede Schar Doppelverhältnisschar der vier anderen ist — darin ist also enthalten das keines der Doppelverhältnisse konstant sein darf. Es zeigt sich dann sehr einfach ⁽¹⁾, das dies nur der Fall ist für Gewebe die sich topologisch abbilden lassen auf vier Geradenbüschel und die Kegelschnitte durch ihren vier Scheiteln, also auf ein « Ausnahme-5-Gewebe » ⁽²⁾.

In dieser Note soll nun aber gezeigt werden, das von den vorausgesetzten fünf Bedingungen nur drei unabhängig sind, es gilt nämlich der Satz: Sind in einem 5-Gewebe drei der Scharen Doppelverhältnisscharen, so lässt es sich abbilden auf ein Ausnahme-5-Gewebe ⁽³⁾.

Dieser Satz ist übrigens nicht neu, er wurde zuerst von A. PANTAZI bewiesen ⁽⁴⁾, allerdings nur für Gewebe vom Range 6 und im Zusammenhang mit der Flächentheorie des fünfdimensionalen projektiven Raumes ⁽⁵⁾.

Hier soll nun der Satz unabhängig von der mehrdimensionalen Geometrie und ohne Zuhilfenahme tieferer Sätze aus der Gewebegeometrie in ganz ein-

⁽¹⁾ Vgl. W. BLASCHKE und G. BOL, *Geometrie der Gewebe*, S. 110, Aufgabe 7, Berlin und Leipzig, 1938.

⁽²⁾ *Geometrie der Gewebe*, S. 108.

⁽³⁾ Vgl. die in der zitierten Aufgabe gestellte Frage.

⁽⁴⁾ *Sur les 5-tissus du plan de rang maximum et les surfaces représentatives de l'espace projectif à cinq dimensions*, C. R. de l'Acad. d. Sc., Roum 1937, S. 278.

⁽⁵⁾ Vgl. auch *Geometrie der Gewebe*, § 30, S. 250-259 und die Ausgaben 8 und 9 dezu.

facher Weise neu bewiesen werden. Durch Beispiele wird weiter gezeigt, dass zwei der drei Bedingungen nicht ausreichen.

Bei etwas abweichender Wahl der Voraussetzungen wollen wir zunächst den Satz beweisen:

Ist in einem 5-Gewebe längs drei der Scharen das Doppelverhältnis der vier übrigen jeweils konstant ⁽⁶⁾, so sind entweder alle Doppelverhältnisse im Gewebe konstant oder die drei Scharen bilden ein Sechseckgewebe.

Beweis: Sind x, y die Koordinaten unserer Ebene und ist $f_i(x, y)$ der Richtungskoeffizient der i -ten Schar, so gilt in jedem Punkte die bekannte und leicht zu bestätigende Identität

$$(1) \quad D(f_1, f_2, f_4, f_5)D(f_2, f_3, f_4, f_5)D(f_3, f_1, f_4, f_5) = 1$$

Wird nun die i -te Schar dargestellt durch $t_i(x, y) = \text{konst.}$, so ist nach Voraussetzung:

$$(2) \quad \begin{aligned} D(f_2, f_3, f_4, f_5) &= F(t_1) \\ D(f_3, f_1, f_4, f_5) &= G(t_2) \\ D(f_1, f_2, f_4, f_5) &= H(t_3). \end{aligned}$$

Aus (1) folgt also:

$$(3) \quad F(t_1)G(t_2)H(t_3) = 1,$$

und wenn die Funktionen F, G, H keine Konstanten sind, die entsprechenden Doppelverhältnisse also im Gewebe nicht konstant sind, so besagt (3) daß die drei Scharen 1, 2, 3 ein Sechseckgewebe bilden ⁽⁷⁾, es ist ja

$$(4) \quad \log |F(t_1)| + \log |G(t_2)| + \log |H(t_3)| = 0.$$

Ist aber in (3) etwa F eine Konstante, so muss auch $G(t_2)H(t_3)$ konstant sein, was nur möglich ist wenn auch G und H konstant sind. Denn zwischen t_2 und t_3 kann keine Abhängigkeit bestehen. Dann aber sind die Werte sämtlicher drei Doppelverhältnisse im Gewebe fest und dasselbe muss dann für die übrigen beiden gelten, die man ja durch jene drei ausdrücken kann. Damit ist der Satz bewiesen.

Jetzt lässt sich aber auch leicht der in der Einleitung formulierte Satz zeigen. Da hier F, G, H nicht konstant sein sollen kann man jedenfalls im Kleinen die Transformation anwenden

$$(5) \quad \begin{aligned} u &= 1/F(t_1) = f(x, y), \\ v &= G(t_2) = g(x, y). \end{aligned}$$

⁽⁶⁾ Es wird also hierbei noch nicht verlangt, dass die Doppelverhältnisse nicht konstant sein sollen.

⁽⁷⁾ Vgl. *Geometrie der Gewebe*, S. 18.

Dann wird

$$(6) \quad H(t_3) = 1/FG = \frac{u}{v}$$

längs der dritten Schar konstant, nach der Abbildung (5) sind also die Scharen 1 und 2 achsenparallel und die Schar 3 besteht aus Geraden durch den Koordinatenanfangspunkt.

Falls wie wir voraussetzen wollen unsere Doppelverhältnisse stetig differenzierbare Ortsfunktionen sind ⁽⁸⁾, so ist die Abbildung (5) im kleinen topologisch und erhält sämtliche Doppelverhältnisse. Gibt man also den Richtungskoeffizienten der i -ten Schar in der u, v -Ebene an durch g_i , sodass

$$(7) \quad g_1 = \infty, \quad g_2 = 0, \quad g_3 = \frac{v}{u},$$

so wird

$$D(g_2, g_3, g_4, g_5) = \frac{g_4 - \frac{v}{u}}{g_5 - \frac{v}{u}} = \frac{1}{u}$$

$$(8) \quad D(g_3, g_1, g_4, g_5) = \frac{g_4 - \frac{v}{u}}{g_5 - \frac{v}{u}} = v$$

$$D(g_1, g_2, g_4, g_5) = \frac{g_5}{g_4} = \frac{u}{v}.$$

Diese Gleichungen sind abhängig, jede geht aus den beiden anderen hervor. Aus den beiden letzten kann man g_4 und g_5 auflösen man findet:

$$(9) \quad g_4 = \frac{v(v-1)}{u(u-1)}, \quad g_5 = \frac{v-1}{u-1}.$$

Für die fünfte Schar ergibt sich daraus durch Integration der Gleichung $\frac{dv}{du} = g_5$ die Darstellung

$$(10) \quad \frac{v-1}{u-1} = \text{konst},$$

für die vierte erhält man

$$\frac{dv}{v(v-1)} = \frac{du}{u(u-1)}$$

⁽⁸⁾ Das ist z. B. sicher dann der Fall, wenn $t_i(x, y)$ zweimal stetig differenzierbar ist.

also

$$(11) \quad \frac{v(u-1)}{u(v-1)} = \text{konst.}$$

Die fünfte Schar ist also jetzt das Geradenbüschel durch dem Punkte (1,1), die vierte besteht aus den gleichseitigen Hyperbeln durch (0,0) und (1,1), deren Asymptoten achsenparallel sind, also aus den Kegelschnitten durch den Scheiteln der vier Geradenbüscheln 1, 2, 3, 5. Damit ist alles bewiesen.

Dass zwei Doppelverhältnisbedingungen nicht ausreichen ist leicht zu sehen. Wir behaupten sogar:

Ist in einem beliebigen 3-Gewebe $F(t_1)$ konstant längs den Kurven der ersten Schar, $G(t_2)$ konstant längs den Kurven der zweiten, so kann man immer zwei weitere Scharen 4 und 5 angehen, derart dass

$$(12) \quad D(2, 3, 4, 5) = F(t_1), \quad D(3, 1, 4, 5) = G(t_2)$$

wird.

Man erhält nämlich aus (12) zwei Gleichungen für die Richtungskoeffizienten der gesuchten Scharen, die sich immer eindeutig auflösen lassen.

Da hier 1, 2 und 3 kein Sechseckgewebe zu bilden brauchen, lässt sich das Gewebe sicher nicht immer auf ein Ausnahmewebe abbilden. Aber auch wenn für das Gewebe (1, 2, 3) ein Sechseckgewebe gewählt wird, ist das im allgemeinen nicht der Fall. Denn bei beliebiger Wahl von F und G in (12) ist dann im allgemeinen sicher nicht

$$D(1, 2, 4, 5) = 1/FG$$

längs der dritter Schar konstant.

Man könnte sich einmal die Frage stellen, wieviele weitere Sechseckbedingungen notwendig sind, um die Abbildbarkeit auf ein Ausnahme-5-Gewebe zu gewährleisten, doch dürfte diese Frage nicht so leicht zu beantworten sein.