Problèmes aux limites non homogènes (VII)

par J. L. LIONS (Paris) et E. MAGENES (Pavia)

Résumé - *Voir l'introduction.*

Introduction.

Soit A un opérateur différentiel linéaire elliptique d'ordre $2m$ dans un ouvert Ω de R^n, borné, de frontière Γ, et B_j $(j = 0, 1, \ldots, m-1)$ un système de m opérateurs différentiels d'ordre $< 2m$ formant un système normal et recouvrant A au sens de [2] et [20]. On cherche une "fonction" u (¹) solution de

$$(*) \qquad Au = f \quad \text{dans } \Omega, \quad B_j u = g_j \quad \text{sur } \Gamma, \; j = 0, \ldots, m-1,$$

les f et g_j étant donnés dans Ω et sur Γ.

Dans les articles (III)-(V) de [13] nous avons considéré ces problèmes pour les f et g_j dans diverses classes d'espaces construits à partir des espaces de SOBOLEV par la théorie de l'interpolation (l'article (II) se bornait au cas hilbertien).

Dans l'article (VI) nous avons, en particulier, résolu le problème (*) pour les g_j *distributions quelconques sur* Γ (en supposant que Γ est une variété indéfiniment différentiable). Alors u et Au étaient assujettis à des conditions de croissance au voisinage de Γ; grosso-modo, si *u et Au ne croissent "pas trop vite" au voisinage de Γ alors l'on peut définir les $B_j u$ sur Γ comme distributions sur* Γ (²).

Dans l'article présent, nous supposerons que *u est une distribution qnelconque dans Ω et que Au est une distribution qui "ne croit pas trop vite" au voisinage de Γ* (*condition précise*: $Au \in \Xi'(\Omega)$ défini au n. 5).

Alors, *la frontière Γ étant analytique et les coefficients de A et B_j étant analytiques, on peut définir les $B_j u$ sur Γ: ce sont des fonctionnelles analytiques.*

(¹) Les hypothèses précises sont données ci après.

(²) *La condition nécessaire et suffisante portant sur* Au pour que l'on puisse définir, par exemple, la trace de u sur Γ en tant que *distribution sur* Γ ne semble pas connue. L'article (VI) donne des conditions *suffisantes*.

En particulier donc toute fonction qui est solution d'une équation $Au=0$, avec A elliptique et à coefficients analytiques, admet une trace sur Γ qui est une fonctionnelle analytique.

Nous montrons outre, que, *f étant donné dans $\Xi'(\Omega)$ et les g_j étant des fonctionnelles analytiques données, on peut résoudre le problème* (*), *avec, dans un certain sens, "le théorème de l'alternative„.*

Ce travail a été inspiré par une intéressante conférence de G. Cimmino [4] (voir aussi sa communication au Congrès international de Stockolm, 1962) ([3]), dans laquelle il posait la question d'étudier les problèmes aux limites pour les opérateurs linéaires elliptiques en supposant que les données aux limites soient des fonctionnelles analytiques et il donnait des résultats sur ce problème dans des cas particuliers. Nous avons observé que certaines des méthodes que nous avons utilisées dans les articles précédents permettent de résoudre cette question de façon générale: on part des résultats "très réguliers", on les "transpose„ et on interprète les résultats "transposés„ à l'aide de théorèmes de traces. Par contre les détails techniques diffèrent essentiellement de ceux des articles précédents. Soulignons aussi que l'on n'utilise ici ni la théorie de l'interpolation des opérateurs linéaires, ni la théorie des problèmes aux limites dans L^p, $p \neq 2$: l'article présent peut donc être lu, pour l'essentiel, indépendamment des articles précédents.

Quelques problèmes, qui ne nous semblent pas dénués d'intérêt et qui nous semblent résolubles avec nos méthodes, se posent dans ces directions: 1) cas où la frontière et les coefficients, au lieu d'être analytiques, sont dans des classes de Gevrey; 2) cas où u n'est plus une distribution, mais une ultra-distribution (cf. [18], [19]) ou dans certaines classes de "fonctions généralisées„ considérées par Gelfand-Schilov [7].

Le plan de l'article est le suivant:

Mars 1963.

([3]) On doit évidemment signaler aussi les travaux de Köthe [11] et Tillmann [22] sur la trace des fonctions holomorphes.

1. - ESPACES $\mathcal{H}(\Gamma)$ et $\mathcal{H}'(\Gamma)$.

1.1. - On considère dans R^n un ouvert Ω borné de frontière Γ; on suppose que Γ est une *variété (compacte) analytique réelle* de dimension $n-1$, orientée, Ω étant d'un seul côté de Γ. (1)

Nous utiliserons constamment l'espace vectoriel $\mathcal{H}(\Gamma)$ des *fonctions analytiques* sur Γ.

Il est bien connu que l'on peut introduire dans $\mathcal{H}(\Gamma)$ une topologie d'espace vectoriel topologique localement convexe complet et plus précisément d'espace $(\mathcal{LF})$ selon GROTHENDIECK [8]. Habituellement on plonge par une procédé "standard,, Γ dans une variété analytique complexe $\tilde{\Gamma}$ de dimension $n-1$, de façon que si f est une fonction de $\mathcal{H}(\Gamma)$, il existe un entourage fermé U de Γ dans $\tilde{\Gamma}$, dépendant de f, dans lequel on puisse prolonger f en une fonction holomorphe dans l'intérieur de U et continue dans U; on considère alors une suite U_k $(k=0, 1, 2, \ldots)$ décroissante d'entourages fermés de Γ dans $\tilde{\Gamma}$ tels que $\bigcap_k U_k = \Gamma$ et les espaces $\mathcal{H}(U_k)$ des fonctions holomorphes dans l'intérieur de U_k et continues dans U_k avec la topologie habituelle de la convergence uniforme dans U_k; et enfin on définit la topologie dans $\mathcal{H}(\Gamma)$ comme la topologie limite inductive (cf. par ex. BOURBAKI [23], KÖTHE [12]) des topologies induites par l'application de $\mathcal{H}(U_k)$ dans $\mathcal{H}(\Gamma)$ obtenue par restriction des fonctions de $\mathcal{H}(U_k)$ sur Γ.

Il est, semble-t'il, préférable, dans notre cas, de définir la topologie dans $\mathcal{H}(\Gamma)$ en *ne sortant pas de la variété* Γ.

Or il est bien connu que les fonctions analytiques, par ex. dans une sphère de R^{n-1}, peuvent être caractérisées par des majorations des dérivées de tous les ordres (du type $\sup_x \left| \dfrac{\partial^k f(x)}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_{n-1}^{k_{n-1}}} \right| \leq k_1! \ldots k_{n-1}!\, L M^k$).

Tout récemment KOTAKE et NARASIMHAN [9] ont donné une autre caractérisation en utilisant, au lieu des dérivées d'ordre k, les puissances Λ^k d'un opérateur Λ lineaire elliptique quelconque à coefficients analytiques (cf. aussi NELSON [17]) et des majorations intégrales.

On peut donc essayer d'étendre ces caractérisations à l'espace $\mathcal{H}(\Gamma)$ et de les utiliser pour la définition de la topologie dans $\mathcal{H}(\Gamma)$. En fait pour l'utilisation de la première caractérisation on peut voir par ex. la conférence [4] de CIMMINO. Dans ce travail nous utiliserons les résultats de KOTAKE-NARASINHAM en prenant sur Γ l'opérateur *intrinsèque* de LAPLACE-BELTRAMI Δ et ses itérés Δ^k, $k=1, 2, \ldots$

(1) Pour les notions sur les variétés différentiables, les fonctions et les opérateurs différentiels sur les variétés que nous utiliserons dans ce travail, on peut voir par ex. DE RHAM [5] et ARONSZAJN - MILGRAM [2].

Fixons d'abord quelques notations; on désignera par $C^0(\Gamma)$ (resp. $L^2(\Gamma)$) l'espace des fonctions continues (resp. des classes des fonctions de carré sommables sur Γ pour la mesure de surface $d\sigma$) muni de la norme

$$\| f \|_{C^0(\Gamma)} = \sup_{x \in \Gamma} | f(x) |$$

(resp.
$$\| f \|_{L^2(\Gamma)} = \left(\int_\Gamma | f(x) |^2 \, d\sigma \right)^{\frac{1}{2}})$$

Nous considérons Γ, ce qui est possible, comme une variété de RIEMANN en prenant sur Γ la métrique riemanienne induite par la métrique de R^n.

On peut alors considérer l'opérateur de LAPLACE-BELTRAMI Δ (cf. par ex. DE RHAM [5] pag. 125) qui applique chaque fonction indéfiniment différentiable sur Γ dans une fonction indéfiniment différentiable sur Γ. On a alors la

PROPOSITION 1.1: - *L'espace $\mathcal{H}(\Gamma)$ est l'ensemble des fonctions f indéfiniment différentiables sur Γ telles qu'il existe deux constantes L_2 et M_2 (dépendantes de f) telles que, pour tout nombre entier $k \geq 0$, on ait*

$$\| \Delta^k f \|_{L^2(\Gamma)} \leq L_2 \, (2k)! \, M_2^k , \qquad (\Delta^0 f = f). \tag{1.1}$$

DÉMONSTRATION - En effet par définition des variétés analytiques réelles compactes, il existe un recouvrement ouvert de Γ, $\{\Gamma_i\}$, $i = 1 \dots, \nu$, et pour chaque Γ_i un systéme de coordonnées locales, $x \to \Theta_i(x) \equiv \{x_{i,1}(x), \dots, x_{i,n-1}(x)\}$ c'est-à-dire un homéomorphisme Θ_i de Γ_i sur une sphére S^{n-1} ouverte de R^{n-1}, satisfaisant aux conditions de compatibilité usuelles *analytiques*. Alors il suffit de remarquer que, en exprimant sur chaque Γ_i l'opérateur Δ à l'aide de coordonnées locales, on obtient dans S^{n-1} un opérateur Λ_i différentiel linéaire elliptique du deuxième ordre à coefficients analytiques dans S^{n-1} et appliquer à cet opérateur les résultats de KOTAKE-NARASINHAM [9], theorem 1.

Une deuxième caractérisation de $\mathcal{H}(\Gamma)$ est la suivante.

PROPOSITION 1.2: - *L'espace $\mathcal{H}(\Gamma)$ est l'ensemble des fonctions f indéfiniment différentiables sur Γ telles qu'il existe deux constantes L_0 et M_0 (dépendantes de f) telles que pour tout entier $k \geq 0$, on ait*

$$\| \Delta^k f \|_{C^0(\Gamma)} \leq L_0 \, (2k)! \, M_0^k , \qquad (\Delta^0 f = f). \tag{1.2}$$

DÉMONSTRATION – En utilisant la Prop. 1.1, il suffit de montrer que: si f est une fonction indéfiniment différentiable sur Γ telle que, pour $k = 0, 1, 2, \dots$, (1.1) soit vraie pour L_2 et M_2 constantes convenables, alors (1.2) est vraie pour L_0 et M_0 constantes convenables, et réciproquement.

Or (1.2) entraine évidemment (1.1), puisque

$$\| f \|_{L^2(\Gamma)} \leq c \| f \|_{C^0(\Gamma)}, \qquad c \text{ constante.}$$

Pour démontrer que (1.1) entraine (1.2), utilisons encore le recouvrement ouvert de Γ, $\{\Gamma_i\}$, $i = 1, \dots, \nu$, et le système de coordonnées locales $\{\Theta_i\}$, introduits dans la démonstration de la Prop. 1.1.

Il existe certainement pour chaque Γ_i un compact k_i de Γ tel que k_i soit contenu dans Γ_i et que $\bigcup_{i=1}^{\nu} k_i = \Gamma$. Soit f une fonction indéfiniment différentiable sur Γ et soit f_i "l'image" dans S^{n-1} de f (restreinte à Γ_i) par utilisation de l'homéonorphisme Θ_i; alors $\Delta^k f$ a pour image $\Lambda_i^k f_i$, $k = 1, 2, \dots$. et k_i a pour image un compact $\tilde{k}_i \subset S^{n-1}$. Mais les résultats désormais classiques sur la "regularisation à l'intérieur" des équations elliptiques nous donnent que, si $\varphi \in L^2(S^{n-1})$, avec $\Lambda_i^\mu \varphi \in L^2(S^{n-1})$, μ entier ≥ 1. alors $\varphi \in H^{2\mu}(S^*)$ pour chaque sphère S^* intérieure à S^{n-1} (5) et

$$\| \varphi \|_{H^{2\mu}(S^*)} \leq c \{ \| \Lambda_i^\mu \varphi \|_{L^2(S^{n-1})} + \| \varphi \|_{L^2(S^{n-1})} \}$$

d'où, par utilisation des inégalités de SOBOLEV, on déduit pour μ assez grand $\left(\frac{1}{2} - \frac{2\mu}{n-1} < 0\right)$, que φ est continue sur S^* et que

$$\sup_{y \in S^*} | \varphi(y) | \leq C^* (\| \Lambda_i^\mu \varphi \|_{L^2(S^{n-1})} + \| \varphi \|_{L^2(S^{n-1})})$$

Donc en conclusion on peut dire qu'il existe des constantes c_i, $i = 1, \dots, \nu$, telles que

$$\sup_{y \in \tilde{k}_i} | \Lambda_i^k f_i(y) | \leq c_i (\| \Lambda_i^{k+\mu} f_i \|_{L^2(S^{n-1})} + \| \Lambda_i^k f_i \|_{L^2(S^{n-1})})$$

pour tout k entier ≥ 0, μ étant fixé assez grand.

---

(5) $H^{2\mu}(S^*)$ est l'espace des fonctions de carré sommable dans S^* avec toutes ses dérivées d'ordre $\leq 2\mu$.

Alors on a aussi

$$\| \Delta^k f \|_{C^0(\Gamma)} \leq c\, (\| \Delta^{k+\mu} f \|_{L^2(\Gamma)} + \| \Delta^k f \|_{L^2(\Gamma)})$$

d'où, en utilisant (1.1)

$$\| \Delta^k f \|_{C^0(\Gamma)} \leq c\, L_2 M_2^k (2k)!\, [1 + M_2^\mu (2k+1) \dots (2k+2\mu)]$$

Mais $(2k+1)\dots(2k+2\mu) \leq c'\, e^{2k\mu}$, donc

$$[1 + M_2^\mu (2k+1) \dots . (2k+2\mu)] \leq c''\, M^k \; (c', c'', M \text{ constantes})$$

et alors on obtient (1.2) avec L_0 et M_0 constantes convenables.

Remarque 1.1. - On peut encore caractériser $\mathcal{H}(\Gamma)$, de façon analogue, comme l'espace des fonctions indéfiniment différentiables sur Γ telles qu'il existe deux constantes L_p et M_p (dépendant de f) telles que pout tout entier $k \geq 0$, on ait

$$\| \Delta^k f \|_{L^p(\Gamma)} \leq L_p (2k)!\, M_p^k$$

avec p fixé quelconque $1 < p < +\infty$.

Cette remarque s'étend aux points 1.2 et 1.3 ci après; nous n'insisterons pas sur cela.

1.2. Topologie sur $\mathcal{H}(\Gamma)$.

Désignons par $\mathcal{H}_{M,0}(\Gamma)$ (resp. $\mathcal{H}_{M,2}(\Gamma)$) l'espace des fonctions f de $\mathcal{H}(\Gamma)$ telles que l'on ait

$$\| \Delta^k f \|_{C^0(\Gamma)} \leq L_0 (2k)!\, M^k \qquad k = 0, 1, \dots . \tag{1.3}$$

avec M fixé et L_0 dépendant de f
(resp.

$$\| \Delta^k f \|_{L^2(\Gamma)} \leq L_2 (2k)!\, M^k \qquad k = 0, 1, \dots . \tag{1.4}$$

avec M fixé, L_2 dépendant de f)

On muni $\mathcal{H}_{M,0}(\Gamma)$ (resp. $\mathcal{H}_{M,2}(\Gamma)$) de la norme

$$\| f \|_{\mathcal{H}_{M,0}(\Gamma)} = \sup_k \frac{1}{(2k)!\, M^k} \| \Delta^k f \|_{C^0(\Gamma)} \tag{1.5}$$

(resp.

$$\| f \|_{\mathcal{H}_{M,2}(\Gamma)} = \sup_k \frac{1}{(2k)!\, M^k} \| \Delta^k f \|_{L^2(\Gamma)}) \tag{1.6}$$

Pour cette norme $\mathcal{H}_{M,0}(\Gamma)$ (resp. $\mathcal{H}_{M,2}(\Gamma)$) est un espace de BANACH.

On a, si $M < M'$

$$\mathcal{H}_{M,0}(\Gamma) \subset \mathcal{H}_{M',0}(\Gamma), \qquad \mathcal{H}_{M,2}(\Gamma) \subset \mathcal{H}_{M',2}(\Gamma)$$

avec injection continue.

On munit alors $\mathcal{H}(\Gamma)$ de la topologie *limite inductive* des $\mathcal{H}_{M,0}(\Gamma)$ (resp. $\mathcal{H}_{M,2}(\Gamma)$) pour $M = 1, 2, \ldots$ (cf. par ex. BOURBAKI [32] KÖTHE [12]). Les topologies definies sur $\mathcal{H}(\Gamma)$ par les $\mathcal{H}_{M,0}(\Gamma)$ ou les $\mathcal{H}_{M,2}(\Gamma)$ sont *équivalentes*, à cause de ce qu'on a vu à propos des Propositions 1.1 et 1.2.

L'espace $\mathcal{H}(\Gamma)$ rentre ainsi dans la famille des espaces $(\mathfrak{L}\mathfrak{F})$ au sens de GROTHENDIECK [8] (consulter également ROUMIEU [18]. et KÖTHE [10] [11] [12]).

1.3. ESPACE $\mathcal{H}'(\Gamma)$.

On désigne par $\mathcal{H}'(\Gamma)$ l'*espace dual* (fort) de $\mathcal{H}(\Gamma)$ (c'est un espace de *fonctionnelles analytiques*).

Nous allons démontrer la

PROPOSITION 1.3: – *Toute forme linéaire continue $u \to \mathfrak{L}(u)$ sur $\mathcal{H}(\Gamma)$ peut se représenter sous l'une des formes suivantes:*

$$\mathfrak{L}(u) = \sum_{k=0}^{\infty} \int_\Gamma \Delta^k u \, d\mu_k \tag{1.7}$$

avec $\mu_k \in (C^0(\Gamma))'$, mesure sur Γ, et $\sum_{k=0}^{\infty} M^k (2k)!\, | \mu_k | < + \infty$ quel que soit $M > 0$ ($| \mu_k | =$ variation totale de μ_k), et

$$\mathfrak{L}(u) = \sum_{k=0}^{\infty} \int_\Gamma g_k \Delta^k u \, d\sigma \tag{1.8}$$

avec $g_k \in L^2(\Gamma)$ et $\sum_{k=1}^{\infty} M^k (2k)!\, \| g_k \|_{L^2(\Gamma)} < + \infty$ quel que soit $M > 0$.

Démonstration. - Cette proposition résulte aussitôt des théorèmes de structure des formes linéaires continues sur les espaces considérés par Köthe et Roumieu. En fait par ex. pour démontrer (1.8) considérons l'espace E des suites $F \equiv \{f_0, f_1, \dots\}$ des fonctions $f_k \in L^2(\Gamma)$ telles qu'il existe des constantes L et M, dépendant de la suite F, avec

$$\| f_k \|_{L^2(\Gamma)} \leq L\,(2k)!\, M^k \qquad k = 0, 1, \dots . \tag{1.9}$$

On désigne par E_M le sous espace de E formé des suites telles que (1.9) ait lieu, avec M fixé, L pouvant dépendre de la suite; on munit E_M de la norme

$$\| F \|_{E_M} = \sup_k \frac{1}{(2k)!\, M^k} \| f_k \|_{L^2(\Gamma)} \qquad F = \{f_k\}$$

et enfin on munit E de la topologie limite inductive des topologies de E_M, pour $M = 1, 2 \dots$.

Alors E est un $(\mathfrak{L}\mathfrak{F})$ selon [8] et $\mathcal{H}(\Gamma)$ peut être considéré comme un sous-espace vectoriel fermé de E, en posant, pour tout $f \in \mathcal{H}(\Gamma)$, $F = \{\Delta^k f\}$.

Mais on connait (cf. par ex. Roumieu [18], Prop. 3 pag. 45) l'expression des formes linéaires continues sur E, $F \to \mathfrak{L}(F)$:

$$\mathfrak{L}(F) = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\Gamma} g_k\, f_k\, d\sigma$$

où les $g_k \in L^2(\Gamma)$ et $\sum_{k=1}^{\infty} M^k\, (2k)!\, \| g_k \|_{L^2(\Gamma)} < +\infty$ quel que soit $M > 0$. Toute forme linéaire continue sur $\mathcal{H}(\Gamma)$ pouvant, d'après le théorème de Hahn-Banach, se prolonger en une forme linéaire continue sur E, on a le résultat.

On démontre (1.7) de façon analogue.

Remarque 1.2. - Signalons que les μ_k et g_k ne sont pas définis de façon unique.

2. Opérateurs différentiels et problèmes aux limites considérés.

2.1. Dans l'ouvert Ω on considère un opérateur différentiel A donné par

$$Au = \sum_{|l|, |h| \leq m} (-1)^{|l|} D^l (a_{lh}(x)\, D_h\, u); \tag{2.1}$$

on utilise les notations habituelles; par ex.: $h = (h_1, \dots, h_n)$, h_i entier ≥ 0, $|h| = h_1 + \dots + h_n$, $D^h = \dfrac{\partial^{|h|}}{\partial x_1^{h_1} \dots \partial x_n^{h_n}}$.

On fera sur A les hypothèses suivantes:

($\mathcal{E}$) *A est proprement elliptique dans $\bar{\Omega}$* ($\bar{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$), (terminologie de [20]) ([6])

($\mathcal{A}1$) *les cofficients a_{lh} sont analytiques dans $\bar{\Omega}$.*

On considère dans Ω les problèmes aux limites suivants (où, naturellement, les hypothèses de différentiabilité seront précisées par la suite):

$$
\text{(2.2)} \qquad \left\{ \begin{array}{l} Au = f \text{ dans } \Omega, \qquad f \text{ donné} \\ \\ B_j u = g_j,\ j = 0, 1, \ldots, m-1 \text{ sur } \Gamma, \end{array} \right.
$$

où les g_j sont données sur Γ, et où

$$
\text{(2.3)} \qquad B_j u = \sum_{|h| \le m_j} b_{jh}(x)\, D^h u, \qquad 0 \le m_j < 2m;
$$

On suppose que

($\mathcal{A}2$) *les coefficients a_{jh} sont analytiques sur Γ;*

et que

($\mathcal{N}$) *le système des B_j est normal au sens de* ARONSZAJN-MILGRAM [2] ([7]);

($\mathcal{R}$) *le système des B_j recouvre A au sens de* AGMON-DOUGLIS-NIRENGERG [1] *et de* SCHECHTER [20] ([8]).

On désigne par A^* l'adjoint (formel) de A, donné par

$$
\text{(2.4)} \qquad A^* u = \sum_{|l|,\,|h| \le m} (-1)^{|l|} D^l (\bar{a}_{hl}(x)\, D^h u).
$$

On va introduire un adjoint formel du problème (2.2).

([6]) C'est à dire pour tout $x \in \bar{\Omega}$ et tout couple de vecteurs réels ξ et ξ' linéairement indépendants, le polynome en τ $\sum_{|l|,\,|h| = m} a_{lh}(x)\,(\xi + \tau\xi')^{l+h}$ possède m racines de partie imaginaire positive.

([7]) Cest à dire tel que $m_j \neq m_i$ pour $j \neq i$ et que pour tout $x \in \Gamma$ et tout vecteur $\xi \neq 0$ et normal à Γ en x on ait $\sum_{|h| = m_j} b_{jh}(x)\,\xi^h \neq 0$.

([8]) C'est à dire tel que pour tout $x \in \Gamma$ les polynomes en τ, $\sum_{|h| = m_j} b_{jh}(x)\,(\xi' + \tau\xi)^h$, $j = 0, \ldots, m-1$, où ξ' est un vecteur quelconque réel $\neq 0$ et tangent à Γ en x, et ξ un vecteur quelconque réel $\neq 0$ et normal à Γ en x, sont linéairement indépendants "modulo" le polynome $\prod_{i=1}^{m} (\tau - \tau_i(\xi', \xi))$ où $\tau_i(\xi', \xi)$ sont les racines de partie imaginaire positive du polynome $\sum_{|l|,\,h| = m} a_{lh}(x)\,(\xi' + \tau\xi)^{l+h}$.

Notons d'abord que l'on peut toujours - et de façon non unique - compléter le système $\{B_j\}_{j=0}^{m-1}$ par un système $\{C_j\}_{j=0}^{m-1}$, où les C_j sont des opérateurs différentiels d'ordre $\mu_j \leq 2m-1$ à coefficients analytiques sur Γ, tels que le système $\{B_0, \ldots, B_{m-1}, C_0, \ldots, C_{m-1}\}$ soit *normal* et de DIRICHLET (i. e. les ordres m_j, μ_j, $j = 0, \ldots, m-1$, parcourent exactement l'ensemble $0, 1, \ldots, 2m-1$).

Alors (cf. [2], [20]) il existe $2m$ opérateurs B_j^*, C_j^*, $j = 0, \ldots, m-1$, à coefficients analytiques sur Γ, avec

$$\text{ordre } B_j^* = 2m - \mu_j - 1,$$

$$\text{ordre } C_j^* = 2m - m_j - 1,$$

le système $\{B_0^*, \ldots, B_{m-1}^*, C_0^*, \ldots, C_{m-1}^*\}$ étant *normal* et de DIRICHLET et tels que l'on ait *la formule de* GREEN:

$$(Au, v) - (u, A^* v) = \sum_{j=0}^{m-1} \int_\Gamma (C_j u)(\overline{B_j^* v})\, d\sigma - \sum_{j=0}^{m-1} \int_\Gamma (B_j u)(\overline{C_j^* v})\, d\sigma \tag{2.5}$$

puor u, v suffisamment différentiables, et où $(f, g) = \int_\Omega f \bar{g}\, dx$.

Ceci posé, le problème

$$\begin{cases} A^* v = \varphi, \\ B_j^* v = \psi_j, \quad j = 0, \ldots, m-1 \end{cases} \tag{2.6}$$

sera dit *problème adjoint* (relativement à la formule de GREEN (2.5)) du problème (2.4).

2.2. Sous les hypothèses précédentes l'opérateur A^* définit, après passage au quotient convenable (cf. détails dans la suite), un isomorphisme d'un certain espace Φ de classes de fonctions (satisfaisant à $B_j^* u = 0$ sur Γ, si $u \in \Phi$) sur un espace fonctionnel Ψ.

Nous désirons ici prendre Ψ le "plus petit" possible. *Nous prendrons alors* $\Psi = \mathfrak{D}(\Omega)$, espace des fonctions indéfiniment différentiables et à support compact dans Ω muni de la topologie habituelle de L. SCHWARTZ [21] (et en fait un sous espace *fermé* de $\mathfrak{D}(\Omega)$, parce que Φ est obtenu comme quotient). Les hypothèses ($\mathcal{A}1$) et ($\mathcal{A}2$) interviendront essentiellement pour l'*interprétation* des résultats, après transposition de l'isomorphisme A^* de Φ sur Ψ, REMARQUE 2.1. - On pourrait prendre pour Ψ un espace encore plus petit: un sous espace fermé des espaces $\mathfrak{D}(\Omega; M_{(p)})$ tels qu'ils sont étudiés dans [19]. Nous ne poursuivrons pas ce point de vue ici.

3. Nouveaux espaces fonctionnels.

3.1. *On désigne par* $\mathfrak{F}_{A^*, B^*}$ *l'espace des fonctions* $u \in \mathfrak{D}(\overline{\Omega})$ *telles que* $A^* u \in \mathfrak{D}(\Omega)$ et $B_j^* u = 0$ *sur* Γ, $j = 0, 1, \ldots, m-1$.

Ici $\mathfrak{D}(\overline{\Omega})$ désigne d'espace des fonctions indéfiniment différentiables sur $\overline{\Omega}$, muni de la topologie naturelle d'espace de FRÉCHET.

On munit $\mathfrak{F}_{A^*, B^*}$ de la topologie de limite inductive ([6]) des espaces

$$\mathfrak{F}^{\alpha}_{A^*, B^*} = \{u \mid u \in \mathfrak{D}(\overline{\Omega}),\ A^* u \in \mathfrak{D}_{K_\alpha},\ B_j^* u = 0,\ j = 0, \ldots, m-1\},$$ où $K_\alpha =$

suite croissante de compacts $\subset \Omega$, de réunion Ω, chaque $\mathfrak{F}^{\alpha}_{A^*, B^*}$ étant muni de la topologie naturelle d'éspace de Frechet.

On définit de même $\mathfrak{F}_{A, B}$.

On désigne par N (resp. N^*) *l'espace des* $u \in \mathfrak{F}_{A, B}$ (resp. $\mathfrak{F}_{A^*, B^*}$) *tels que* $Au = 0$ (resp. $A^* u = 0$).

Les espaces N et N^* sont de *dimension finie* ([3] [20]).

3.2. Grace á [1], [3], [20] et N étant de dimension finie, on voit que, sous les hypothèses $(\mathcal{E})$, $(\mathfrak{N})$, $(\mathfrak{R})$, $(\mathcal{A}1)$ et $(\mathcal{A}2)$ (⁹), *l'opérateur* A^* *est un isomorphisme de l'espace quotient* $\mathfrak{F}_{A^*, B^*}/N^*$ *sur l'espace* $\{\mathfrak{D}(\Omega); N\}$, *où* $\{\mathfrak{D}(\Omega); N\}$ désigne le sous espace fermé de $\mathfrak{D}(\Omega)$ des $v \in \mathfrak{D}(\Omega)$ telles que

$$(v, w) = 0 \quad \text{pour tout } w \in N.$$

4. Transposition.

4.1. On transpose maintenant l'isomorphisme A^* obtenu en 3.2. Il vient:

THÉORÈME 4.1: - *On suppose que* $(\mathcal{E})$, $(\mathfrak{N})$, $(\mathfrak{R})$, $(\mathcal{A}1)$, $(\mathcal{A}2)$ (¹⁰) *ont lieu. Soit* $v^\cdot \to L(v^\cdot)$ *une forme anti-linéaire continue sur* $\mathfrak{F}_{A^* B^*}/N^*$. *Il existe un élément* $u^\cdot$ *et un seul de l'espace* $\{\mathfrak{D}(\Omega); N\}'$ (*dual de* $\{\mathfrak{D}(\Omega); N\}$) *tel que*

$$\langle u^\cdot, A^* v^\cdot \rangle = L(v^\cdot) \qquad \textit{pour tout } v^\cdot \in \mathfrak{F}_{A^*, B^*}/N^*. \tag{4.1}$$

$u^\cdot$ *dépend continûment de* L.

(⁹) Signalons qu'il suffit que les coefficients a_{lh} et b_{jh} soient indéfiniment différentiables respectivement sur $\overline{\Omega}$ et Γ.

(¹⁰) cf. note (⁹).

Dans (4.1), le crochet désigne la dualité entre $\{\mathfrak{D}(\Omega);\, N\}'$ et $\{\mathfrak{D}(\Omega);\, N\}$. Notons que [11]

$$\{\mathfrak{D}(\Omega);\, N\}' = \mathfrak{D}'(\Omega)/N, \tag{4.2}$$

($\mathfrak{D}'(\Omega) =$ dual de $\mathfrak{D}(\Omega)$, espace des distribution sur Ω).

4.2. Le problème est maintenant: a) *de choisir* L dans (4.1); b) d'*interpreter* (4.1), une fois L choisi.

C'est dans l'interprétation de (4.1) que seront essentiallement utilisées les hypothèses d'*analyticité des coefficients* (cf. note [9] et [10]).

Pour le choix de L, il convient d'introduire d'abord de nouveaux espaces fonctionnels sur Ω : $\Xi(\Omega)$, $\Xi'(\Omega)$; c'est l'objet du N^0 suivant.

5. Espaces $\Xi(\Omega)$, $\Xi'(\Omega)$.

5.1. Espace $\Xi(\Omega)$–. On désigne par ρ une fonction continue dans $\bar{\Omega}$, telle que $\rho(x) = d(x, \Gamma)$ (distance de x à Γ) si $d(x, \Gamma) \leq \rho_0$, ρ_0 assez petit, et $\rho(x) = \rho_0$ si $d(x, \Gamma) > \rho_0$.

Ceci posé, *on désigne par* $\Xi(\Omega)$ *l'espace des fonctions* u *telles que*

$$\rho^{|\alpha|} D^\alpha u \in L^2(\Omega) \text{ pour tout } \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n), \tag{5.1}$$

α_i entier ≥ 0.

Cet espace est formé de fonctions indéfiniment différentiables dans Ω; c'est un espace de Frechet pour la famille de normes

$$\| \rho^{|\alpha|} D^\alpha u \|_{L^2(\Omega)}.$$

Naturellement:

$$\mathfrak{D}(\bar{\Omega}) \subset \Xi(\Omega), \text{ injection continue.}$$

Vérifions le

Lemme 5.1 – *L'espace* $\mathfrak{D}(\Omega)$ *est dense dans* $\Xi(\Omega)$.

---

(11) En effet pour toute partie non vide P d'un espace localement convexe separé E l'ensemble bipolaire P^{00} est identique au plus petit ensemble convexe cerclé et fermé pour la topologie faible, qui contient P (cf. par ex. [6] Prop. 1 pag. 64.)

DÉMONSTRATION - Soit δ_ε une suite de fonctions de $\mathfrak{D}(\Omega)$, $\varepsilon \to 0$, telles que

$$\delta_\varepsilon(x) = 1 \quad \text{si} \quad d(x, \Gamma) \geq 2\varepsilon,$$

$$\delta_\varepsilon(x) = 0 \quad \text{si} \quad d(x, \Gamma) \leq \varepsilon,$$

$| d(x, \Gamma)^{|\alpha|} D^\alpha \delta_\varepsilon(x) | \leq c^\alpha$ (constante dépendant de α), pour tout α.

Une telle suite existe.

Soit maintenant $u \in \Xi(\Omega)$; alors $\delta_\varepsilon u \in \mathfrak{D}(\Omega)$ et le lemme sera démontré si l'on vérifie que

$$\delta_\varepsilon u \to u \quad \text{dans} \quad \Xi(\Omega) \text{ lorsque } \varepsilon \to 0. \tag{5.2}$$

Pour cela, il faut montrer que $\rho^{|\alpha|} D^\alpha (\delta_\varepsilon u) \to \rho^{|\alpha|} D^\alpha u$ dans $L^2(\Omega)$; or $\delta^\varepsilon \rho^{|\alpha|} D^\alpha u \to \rho^{|\alpha|} D^\alpha u$ dans $L^2(\Omega)$; il suffit donc de montrer que

$$\rho^{|\alpha|}(D^\beta\delta_\varepsilon)(D^\gamma u) \to 0 \text{ dans } L^2(\Omega),\ |\beta| \geq 1, |\beta| + |\gamma| = |\alpha|, \text{ lorsque } \varepsilon \to 0. \tag{5.3}$$

On $\rho^{|\alpha|}(D^\beta\delta_\varepsilon)(D^\gamma u)$ est nulle si $d(x, \Gamma) \geq 2\varepsilon$ (car $|\beta| \geq 1$), de sorte que, d'après le théorème de LEBESGUE, on a (5.3) en notant que

$$|\rho^{|\alpha|}(D^\beta\delta_\varepsilon)(D^\gamma u)| = | [\rho^{|\beta|}(D^\beta\delta_\varepsilon)][\rho^{|\gamma} D^\gamma u \ | \leq c_\beta | \rho^{|\gamma|} D^\gamma u | \in L^2(\Omega).$$

Le lemme est démontré.

5.2. ESPACE $\Xi'(\Omega)$. - Grâce au Lemme 5.1, *l'espace* $\Xi'(\Omega)$ dual de $\Xi(\Omega)$, s'indentifie à un sous espace de $\mathfrak{D}'(\Omega)$. Toute forme linéaire $u \to M(u)$ continue sur $\Xi(\Omega)$ peut s'écrire:

$$M(u) = \sum_{\text{finie}} \int_\Omega g_\alpha \rho^{|\alpha|} D^\alpha u \, dx, \qquad g_\alpha \in L^2(\Omega),$$

d'où la

PROPOSITION 5.1. - *L'espace* $\Xi'(\Omega)$ *est formé des distributions* f *pouvant se représenter (de façon non unique) sous la forme*

$$f = \sum_{\text{finie}} D^\alpha(\rho^{|\alpha|} f_\alpha), \qquad f_\alpha \in L^2(\Omega) \tag{5.4}$$

(on a posé: $f_\alpha = (-1)^{|\alpha|} g_\alpha$).

On peut alors démontrer ausssi la

PROPOSITION 5.2. - *L'espace* $\Xi(\Omega)$ *est réflexif.*

DÉMONSTRATION - En fait il suffit de montrer que chaque partie bornée et faiblement fermée de $\Xi(\Omega)$ est faiblement compacte (cf. [6] pag. 79); or si $\{u_i\}$ est une suite bornée dans $\Xi(\Omega)$ il existe M_α tel que

$$\| \rho^{|\alpha|} u_i \|_{L^2(\Omega)} \leq M_\alpha \qquad \text{pour tout i.}$$

Alors en utilisant le procédé « diagonal » on peut extraire de $\{u_i\}$ une sous-suite $\{u_\nu\}$ telle que $\rho^{|\alpha|} D^\alpha u_\nu$ converge faiblement dans $L^2(\Omega)$, pour tout α fixé, vers une fonction ψ_α dépendant de α. Mais alors, puisque u_ν converge faiblement vers une fonction u au sens de $L^2(\Omega)$, $\rho^{|\alpha|} D^\alpha u_\nu$ converge faiblement vers $\rho^{|\alpha|} D^\alpha u$ au sens de $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Si f est une distribution de $\Xi'(\Omega)$ il résulte de la Proposition 5.1 que $f = \sum_{|\alpha| \leq l} D^\alpha(\rho^{|\alpha|} f_\alpha)$, $f_\alpha \in L^2(\Omega)$ et donc

$$< f, u_\nu > = \sum_{|\alpha| \leq l} < D^\alpha(\rho^{|\alpha|} f_\alpha), u_\nu > = \sum_{|\alpha| \leq l} (-1)^{|\alpha|} < f_\alpha, \rho^{|\alpha|} D^\alpha u_\nu >$$

et l'on a donc

$$\lim_{\nu \to \infty} < f, u_\nu > = \sum_{|\alpha| \leq l} (-1)^{|\alpha|} < f_\alpha, \rho^\alpha D^\alpha u >$$

c'est à dire u_ν converge faiblement dans $\Xi(\Omega)$; c. q. f. d.

6. Choix de la forme L.

6. 1. Notons d'abord la

PROPOSITION 6. 1. - *Pour* $v \in \mathcal{F}_{A^*, B^*}$, *on a :* $C_j^* v \in \mathcal{H}(\Gamma)$, *l'application* $v \to C_j^* v$ *étant linéaire continue.*

DÉMONSTRATION.

Si $v \in \mathcal{F}_{A^*, B^*}$, alors, par définition, $A^* v$ est nulle dans un voisinage de Γ et $B_j^* v = 0$ sur Γ, $j = 0, 1, \dots, m-1$. Du théorème de MORREY-NIRENBERG [16] pour le cas du problème du Dirichlet, étendu aux autres conditions aux limites dans [15] ([12]), il résulte que v est *analytique* dans un voisinage de Γ, donc $C_j^* v \in \mathcal{H}(\Gamma)$.

Les espaces $\mathfrak{F}_{A^*, B^*}$ et $\mathcal{H}(\Gamma)$ sont du type $(\mathfrak{L}\mathfrak{F})$ au sens de [8]; le théoréme du graphe fermé est applicable (cf. [8], Théorème B, p.17); or l'application $v \to C_j^* v$ est *par exemple* continue de $\mathfrak{F}_{A^*, B^*}$ dans $C^0(\Gamma)$, donc continue de $\mathfrak{F}_{A^*, B^*}$ dans $\mathcal{H}(\Gamma)$, d'après le théorème du graphe fermé.

COROLLAIRE 6. 1. - *Si les g_j, $j = 0, 1, \dots, m-1$, sont données dans $\mathcal{H}'(\Gamma)$, la forme anti-linéaire*

$$v \to L_1(v) = \sum_{j=0}^{m-1} < g_j, \overline{C_j^* v} > \tag{6.1}$$

(les crochets désignant la dualité entre $\mathcal{H}'(\Gamma)$ et $\mathcal{H}(\Gamma)$) *est continue sur* $\mathfrak{F}_{A^*, B^*}$.

6.2. - Comme $\mathfrak{F}_{A^*, B^*} \subset \Xi(\Omega)$, (définition de $\Xi(\Omega)$ au N° 5), avec injection continue, on a:

(6.2) *Si f est donné dans $\Xi'(\Omega)$, la forme anti-linéaire*

$$v \to L_2(v) = < f, \bar{v} >$$

est continue sur $\mathfrak{F}_{A^*, B^*}$, le crochet désignant la dualité entre $\Xi'(\Omega)$ et $\Xi(\Omega)$.

Nous prenons maintenant, avec les notations de (6.1) et (6.2):

$$L(v) = L_1(v) + L_2(v). \tag{6.3}$$

Si l'on fait l'hypothèse:

$$< f, \bar{v} > + \sum_{j=0}^{m-1} < g_j, \overline{C_j^* v} > = 0 \quad \text{pour tout } v \in N^*, \tag{6.4}$$

([12]) Signalons que le raisonnement de MORREY - NIRENBERG, dans la généralisation donnée dans [15], n. 13, est valable dans la seule hypothèse 13. I de [15] et que celle ci peut elle même être généralisée, comme on voit facilement, de la façon suivante (on utilise les notations de [15])

$$d^2_{0, R_0}(\varphi_{r,h} u) \leq c_2 \{ \| A'(\varphi_{r,h} u) \|^2_{0, \omega R_0} + \Sigma \| L_i (\varphi_{r,h} u) \|^2_{i+\frac{1}{2}, \pi_0} +$$

$$+ \| \varphi_{r,h} u \|^2_{0, \omega R_0} \}$$

Or cette majoration est valable dans nos hypotèses pour A et les opérateurs $L_i = B_i$ (cf. [1] et [20]).

alors (6.3) définit une forme anti-linéaire continue sur $\mathcal{F}_{A^*, B^*}/_{N^*}$ (si $v^{\cdot} \in \mathcal{F}_{A^*, B^*}/_{N^*}$, $v \in v^{\cdot}$, $L(v^{\cdot}) = L(v)$).

En combinant les remarques précédentes au Théorème 4.1, on a le:

Théorème 6.1. – *On suppose que* ($\mathcal{E}$), ($\mathcal{N}$), ($\mathcal{R}$), ($\mathcal{A}1$) et ($\mathcal{A}2$) *ont lieu. Soient f donnée dans* $\Xi'(\Omega)$, g_j *données dans* $\mathcal{H}'(\Gamma)$, $j = 0, 1, \dots, m-1$, *avec* (6.4). *Il existe alors un élément* $u^{\cdot}$ *de* $\mathcal{D}'(\Omega)/N$ *et un seul tel que*

$$< u^{\cdot}, \overline{A^* v^{\cdot}} > = < f, \bar{v} > + \sum_{j=0}^{m-1} < g_j, \overline{C_j^* v} > \tag{6.5}$$

pour tout $v^{\cdot} \in \mathcal{F}_{A^*, B^*}/_{N^*}$ (*v quelconque dans* $v^{\cdot}$). *En outre l'application* $\{f, g_0, \dots, g_{m-1}\} \to u$ *est linéaire et continue du sous espace fermé de* $\Xi'(\Omega) \times (\mathcal{H}'(\Gamma))^m$ *formé des éléments satisfaisant à* (6.4) *dans* $\mathcal{D}'(\Omega)/_N$.

Remarque 6.1.

Le problème résolu dans (6.5) est d'autant plus général que f est pris dans un espace «plus grand», donc que $\Xi(\Omega)$ est «plus petit». Le choix de $\Xi(\Omega)$ fait ci dessus n'est sûrement pas le choix optimum (à supposer qu'un tel choix optimum existe) puisque $\Xi(\Omega)$ *ne dépend pas* de A^* et des conditions aux limites «$B_j^* v = 0$». Plus généralement *on peut prendre comme espace* $\Xi(\Omega)$ *un espace normal quelconque de distributions dans* Ω *tel que*

$$\mathcal{F}_{A^*, B^*} \subset \Xi(\Omega)$$

avec *injection continue.* Le choix que nous avons fait de $\Xi(\Omega)$ simplifie les N° suivants.

6.3. – Le problème qui nous reste à résoudre est maintenant l'interprétation de (6.5). Il nous faut pour cela obtenir de nouveaux théorèmes de traces; cela sera fait au N° 8, les résultats préliminaires pour cela étant donnés au N° suivant.

7. – Lemmes préliminaires pour la définition des traces.

Dans l'interprétation de (6.5) on sera amené à considérer l'*espace* D_A *des* $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ telles que $Au \in \Xi'(\Omega)$. On munit cet espace de la topologie localement convexe la moins fine rendant continues les applications $u \to u$ et $u \to Au$ de D_A dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ et $\Xi'(\Omega)$ respectivement. On a le:

LEMME 7.1. - *Sous les hypothèses* ($\mathcal{E}$) *et* ($\mathcal{A}1$), *l'espace* $\mathfrak{D}(\overline{\Omega})$ *est dense dans* D_A.

DÉMONSTRATION.

Soit $u \to M(u)$ une forme anti-linéaire continue sur D_A. Alors $M(u)$ est de la forme (noter que $\Xi(\Omega)$ est réflexif)

$$M(u) = < f, \bar{u} > + < g, \overline{Au} >, \quad f \in \mathfrak{D}(\Omega),\ g \in \Xi(\Omega). \tag{7.1}$$

Supposons que $M(\varphi) = 0$ pour tout $\varphi \in \mathfrak{D}(\overline{\Omega})$; nous voulons montrer que dans ces conditions $M(u) = 0$ pour tout $u \in D_A$.

Or, si $\varphi \in \mathfrak{D}(\overline{\Omega})$, il existe $\Phi \in \mathfrak{D}(R^n)$, telle que $\Phi = \varphi$ sur Ω. Soient par ailleurs $\tilde{f}$ et $\tilde{g}$ les prolongements de f et g à R^n par 0 hors de Ω, et $\mathcal{A}$ le prolongement de A, à coefficients analytiques dans R^n, $\mathcal{A}$ vérifiant ($\mathcal{E}$) dans un voisinage $\mathcal{O}$ de $\overline{\Omega}$.

Alors

$$M(\varphi) = < \tilde{f}, \overline{\Phi} > + < \tilde{g}, \overline{\mathcal{A}\Phi} > = 0,$$

donc

$$< \mathcal{A}^* \tilde{g} + \tilde{f}, \overline{\Phi} > = 0 \qquad (\mathcal{A}^* \text{ adjoint formel de } \mathcal{A})$$

et ceci pour tout $\Phi \in \mathfrak{D}(R^n)$; donc

$$\mathcal{A}^* \tilde{g} = - \tilde{f} \qquad \text{dans } R^n. \tag{7.2}$$

Alors, d'après l'hypoellipticité de $\mathcal{A}^*$ dans $\mathcal{O}$, $\tilde{g}$ est indéfiniment différentiable dans $\mathcal{O}$; et comme $\tilde{f}$ est analytique (puisque nulle !) dans $\complement k$, k compact de Ω, $\tilde{g}$ est également, d'après (7.2), analytique dans $\mathcal{O} \cap \complement k$; comme $\tilde{g}$ est nulle dans $\mathcal{O} - \Omega$, on a: $\tilde{g} = 0$ dans $\complement k$, *donc* $g \in \mathfrak{D}(\Omega)$. En outre, par restriction de (7.2) à Ω:

$$A^* g = - f \qquad \text{dans } \Omega. \tag{7.3}$$

Mais alors, dans (7.1), $< g, \overline{Au} > = < A^*g, \bar{u} >$ car $g \in \mathfrak{D}(\Omega)$, et

$$M(u) = < f + A^*g, \bar{u} > \text{(dualité entre } \mathfrak{D}(\Omega) \text{ et } \mathfrak{D}'(\Omega));$$

d'après (7.3), on a donc $M(u) = 0$, ce qui achève la démonstration du Lemme.

LEMME 7.2. - *On suppose que* $(\mathcal{E})$, $(\mathcal{N})$, $(\mathcal{A}1)$, $(\mathcal{A}2)$, *ont lieu; soit* M *une constante* > 0 *fixée; on considère l'espace* $\mathcal{H}_{M,0}(\Gamma)$ *introduit au* N° 1, *point* 1.1. *Soient* φ_j, $j = 0, 1, \dots, m-1$, *données dans* $\mathcal{H}_{M,0}(\Gamma)$. *Il existe alors* $v \in \mathcal{F}_{A^*, B^*}$, *tel que*

$$C_j^* v = \varphi_j, \qquad j = 0, \dots, m-1.$$

On peut choisir v *de façon que l'application*

$$\vec{\varphi} = \{\varphi_0, \dots, \varphi_{M-1}\} \to v = v(\vec{\varphi}) \tag{7.4}$$

soit linéaire et continue de $(\mathcal{H}_{M,0}(\Gamma))^m$ *dans* $\mathcal{F}_{A^*, B^*}$. (La fonction v dépend aussi de M, mais M est fixé dans cet énoncé; on aurait un énoncé analogue avec $\mathcal{H}_{M,2}(\Gamma)$ au lieu de $\mathcal{H}_{M,0}(\Gamma)$).

DÉMONSTRATION.

1) Il faut construire v telle que $v \in \mathcal{D}(\bar{\Omega})$, avec

$$\begin{cases} B_j^* v = 0 & \text{sur } \Gamma, \quad j = 0, \dots, m-1 \\ C_j^* v = \varphi_j & \text{sur } \Gamma, \quad j = 0, \dots, m-1 \end{cases} \tag{7.5}$$

et $A^* v \in \mathcal{D}(\Omega)$.

D'après un Lemme de ARONSZAJN-MILGRAM [2] (le système $\{B_j^*, C_j^*\}$ étant un système de DIRICHLET), les conditions (7.5) sont équivalentes aux conditions suivantes:

$$\gamma_j v = \psi_j \text{ sur } \Gamma, \qquad j = 0, 1, \dots, 2m-1, \tag{7 6}$$

où

$$\gamma_j = \text{dérivée normale d'ordre } j,$$

et où les ψ_j sont des fonctions convenables; il existe un nombre N tel que si $\varphi_j \in \mathcal{H}_{M,0}(\Gamma)$ alors $\psi_j \in \mathcal{H}_{N,0}(\Gamma)$.

2) Considérons maintenant *le problème de Cauchy:*

$$\begin{cases} A^* u = 0 & \text{dans un voisinage de } \Gamma, \\ \gamma_j u = \psi_j & \text{sur } \Gamma, \ j = 0, 1, \dots, 2m-1. \end{cases} \tag{7.7}$$

D'après le théoreme de *Cauchy-Kovalewska*, et Γ étant compacte (et tous les coefficients analytiques) le problème (7.7) admet une solution unique dans un voisinage *fixé* de Γ (ce voisinage dépendant de N, i. e. de M, mais *non* du choix des φ_j pourvu que $\varphi_j \in \mathcal{H}_{M,0}(\Gamma)$) ([13]). Donc si l'on désigne par I_ρ l'ensemble des points de Ω tels que $d(x, \Gamma) < \rho$, ρ assez petit, on voit qu'il existe $\rho(M)$ tel que (7.7) admette une solution unique dans $I_{\rho(M)}$.

Soit alors α une fonction de $\mathfrak{D}(\bar{\Omega})$, telle que $\alpha = 0$ dans $\bar{\Omega} - I_\rho(M)$ et $\alpha(x) = 1$ dans $I_{\rho(M)/2}$; une telle α existe évidemment.

Posons enfin :

$$v = \begin{cases} \alpha u & \text{dans } I_{\rho(M)},\ u \text{ solution de (7.7)} \\ 0 & \text{dans } \Omega - I_{\rho(M)}. \end{cases} \tag{7.8}$$

Alors (on a fait ce qu'il fallait pour ça !), (7.6) a lieu, donc (7.5) a lieu.

Enfin $v \in \mathfrak{D}(\bar{\Omega})$ et $A^* v = \alpha A^* u = 0$ dans $I_{\rho(M)/2}$ donc $A^* v \in \mathfrak{D}(\Omega)$.

On a donc défini une application linéaire de $(\mathcal{H}_{M,0}(\Gamma))^m$ dans $\mathcal{F}_{A^*, B^*}$ dont il reste seulement à montrer la continuité.

3) Mais les espaces $(\mathcal{H}_{M,0}(\Gamma))^m$ et $\mathcal{F}_{A^*, B^*}$ étant en particulier des espaces $(\mathfrak{L}\mathcal{F})$ ($(\mathcal{H}_{M,0}(\Gamma))^m$ est même un espace de BANACH !), on peut leur appliquer le théorème du graphe fermé – Mais, du théorème de CAUCHY-KOVALEWSKA résulte la continuité de l'application :

$$\{\psi_j \mid j = 0, \dots, 2m-1\} \to u = \text{solution de (7.7)}$$

de $(\mathcal{H}_{N,0}(\Gamma))^{2m}$ dans $C^0(\bar{I}_{\rho(M)})$ (espace des fonctions continues dans $\bar{I}_{\rho(M)}$), d'où aussitôt le résultat.

([13]) Il est, peut être, utile de signaler de quelle façon on applique le théorème de CAUCHY - KOWALEWSKA: les fonctions de $\mathcal{H}_M, 0\,(\Gamma)$ vérifient, après application des homéomorphismes θ_i (cf. n. 1, Prop. 1.1), les conditions habituelles portant sur toutes les derivées,

$$\left| \frac{\partial^k f(y)}{\partial y_1^{k_1} \dots \partial y_{n-1}^{k_{n-1}}} \right| \le k_1! \dots k_n!\ \tilde{L}\, \tilde{M}^k,\ y \in S^{n-1},$$

avec une valeur de la constante $\tilde{M}$ dépendant de M (ceci d'après le thèoréme de KOTAKE-NARASINHAM [9]); on peut appliquer alors le théorème de CAUCHY-KOVALEWSKA dans la situation classique, après avoir utilisé un système de "cartes locales" d'un voisinage de Γ dans R^n, lié de façon évidente aux systèmes de coordonnées locales sur Γ.

8. - Un théorème de traces.

Nous allons dans ce N° démontrer le théorème de traces suivant:

THÉORÈME 8.1. - *On suppose que l'on a* $(\mathcal{E})$, $(\mathcal{N})$, $(\mathcal{A}1)$, $(\mathcal{A}2)$. *L'application*

$$u \to Bu = \{B_0 u, B_1 u, \dots, B_{M-1} u\} \tag{8.1}$$

de $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$ *dans* $(\mathcal{D}(\Gamma))^m$ ($\mathcal{D}(\Gamma)$ est l'espace des fonctions indéfiniment différentiables sur Γ) *se prolonge par continuité en une application linéaire continue, encore notée* $u \to Bu$, *de* D_A *dans* $(\mathcal{H}'(\Gamma))^m$.

En outre, pour $u \in D_A$ *et* $v \in \mathcal{F}_{A^*, B^*}$ *on a la formule de Green:*

$$< Au, \bar{v} > - < u, \overline{A^* v} > = - \sum_{j=0}^{m-1} < B_j u, \overline{C_j^* u} > \tag{8.2}$$

(où le premier crochet du premier membre désigne la dualité entre $\Xi'(\Omega)$ et $\Xi(\Omega)$, car $v \in \mathcal{F}_{A^*, B^*} \subset \Xi(\Omega)$; où le deuxième crochet désigne la dualité entre $\mathcal{D}'(\Omega)$ et $\mathcal{D}(\Omega)$, et où les crochets du 2ème membre désignent la dualité entre $\mathcal{H}'(\Gamma)$ et $\mathcal{H}(\Gamma)$).

DÉMONSTRATION.

1) Soit u donné dans D_A. Soit $\vec{\varphi} = \{\varphi_0, \dots, \varphi_{m-1}\}$ donné dans $(\mathcal{H}(\Gamma))^m$. Alors $\vec{\varphi} \in (\mathcal{H}_{M,0}(\Gamma))^m$ pour un M convenable; nous choisissons $v = v(\vec{\varphi})$ comme au Lemme 7.2, et nous introduisons

$$Y(v(\vec{\varphi})) = < u, \overline{A^* v(\vec{\varphi})} > - < Au, \overline{v(\vec{\varphi})} > , \tag{8.3}$$

le premier crochet désignant la dualité entre $\mathcal{D}'(\Omega)$ et $\mathcal{D}(\Omega)$, le deuxième entre $\Xi'(\Omega)$ et $\Xi(\Omega)$.

Vérifions que $Y(v(\vec{\varphi}))$ *ne dépend que de* $\vec{\varphi}$. Soit en effet w une autre fonction de $\mathcal{F}_{A^*, B^*}$ satisfaisant à $C^*_j w = \varphi_j$, $0 \leq j \leq m-1$; alors $\chi = v - w$ satisfait à $B_j^* \chi = 0$, $C_j^* \chi = 0$, $0 \leq j \leq m-1$, donc, d'après le Lemme de ARONSZAJN - MILGRAM, à $\gamma_j \chi = 0$, $0 \leq j \leq 2m-1$, et comme $A^* \chi \in \mathcal{D}(\Omega)$, il résulte, d'après l'unicité du problème de CAUCHY (7.7), que $\chi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Mais alors

$$< u, \overline{A^* v} - \overline{A^* w} > = < Au, \bar{\chi} > , \text{ donc } Y(v) = Y(w).$$

On peut donc poser:

$$Y(v(\vec{\varphi})) = Z(\vec{\varphi}). \tag{8.4}$$

2) La forme $\vec{\varphi} \to Z(\vec{\varphi})$ est *linéaire* sur $(\mathcal{H}(\Gamma))^m$; vérifions par exemple que $Z(\vec{\varphi}_1 + \vec{\varphi}_2) = Z(\vec{\varphi}_1) + Z(\vec{\varphi}_2)$; l'on peut trouver M tel que $\vec{\varphi}_1, \vec{\varphi}_2 \in (\mathcal{H}_{M,0}(\Gamma))^m$, et on utilise alors (8.3) pour la définition de $Y(ou\, Z)$; alors la linéarité résulte de la linéarité de l'application (7.4).

Montrons maintenant que $\vec{\varphi} \to Z(\vec{\varphi})$ est *continue* sur $(\mathcal{H}(\Gamma))^m$. Il suffit (cf. [23]) de vérifier que $\vec{\varphi} \to Z(\vec{\varphi})$ est continue sur $(\mathcal{H}_{M,0}(\Gamma))^m$, M fixé. On définit alors $Z(\varphi) = Y(v(\varphi))$ par (8.3) et la continuité résulte alors du Lemme 7.2.

3) Par conséquent, on a:

$$Z(\vec{\varphi}) = \sum_{j=0}^{m-1} < \tau_j u, \bar{\varphi}_j >, \qquad \tau_j u \in \mathcal{H}'(\Gamma), \tag{8.5}$$

et l'application

$$u \to \tau u = \{\tau_0 u, \ldots, \tau_{m-1} u\} \tag{8.6}$$

est linéaire de D_A dans $(\mathcal{H}'(\Gamma))^m$.

Montrons maintenant la *continuité de l'application* (8.6). Il suffit montrer que, étant donné un borné $\mathcal{B}$ de $(\mathcal{H}(\Gamma))^m$; il existe un voisinage de 0 dans D_A, soit $\mathcal{V}$, tel que

$$| < \tau u, \overline{\vec{\varphi}} > | = \Big| \sum_{j=0}^{m-1} < \tau_j u, \bar{\varphi}_j > \Big| \leq 1 \qquad \text{pour tout } u \in \mathcal{V},\ \vec{\varphi} \in B$$

Mais $\mathcal{B}$ est nécessairement un borné de $(\mathcal{H}_{M,0}(\Gamma))^m$ pour un M convenable; choisissons $v(\vec{\varphi})$ pour cet M comme au Lemme 7.2; alors

$$< \tau u, \overline{\vec{\varphi}} > = < u, \overline{A^* v(\vec{\varphi})} > - < Au, \overline{v(\vec{\varphi})} >$$

et $v(\vec{\varphi})$ demeure dans un borné de $\mathcal{F}_{A^*, B^*}$, donc de $\mathcal{F}^{\alpha}_{A^*, B^*}$ α fixé, et donc, en particulier, $v(\vec{\varphi})$ demeure dans un borné $\mathcal{B}_1$ de $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$ et $A^* v(\vec{\varphi})$ dans un borné $\mathcal{B}_2$ de $\mathcal{D}(\Omega)$; notons que $\mathcal{B}_1$ est borné dans $\Xi(\Omega)$; X^0 désignant le polaire de X, on peut alors prendre

$$\mathcal{V} = \{u \mid u \in \tfrac{1}{2}\mathcal{B}_2^0,\ Au \in \tfrac{1}{2}\mathcal{B}_1^0 \subset \Xi'(\Omega)\}.$$

Le résultat suit.

4) Prenant maintenant $u \in \mathcal{D}(\bar{\Omega})$ et utilisant la formule de GREEN, on voit tout de suite que $\tau u = Bu$, ce qui démontre la première partie du Théorème.

En outre on a obtenu

$$< u, \overline{A^* v(\vec{\varphi})} > - < A u, \overline{v(\vec{\varphi})} > = \sum_{j=0}^{m-1} < B_j u, \bar{\varphi}_j >$$

mais $\varphi_j = C_j^* \overrightarrow{v(\varphi)}$ et posant $\overrightarrow{v(\varphi)} = v$, on obtient donc (8.2), ce qui achève la démonstration du Théorème.

9. Problèmes aux limites non homogènes.

Revenons maintenant à l'équation (6.5). Soit $u^{\cdot} \in \mathfrak{D}'(\Omega)/_N$ satisfaisant à (5.5); prenons $v \in \mathfrak{D}(\Omega)$ et soit $v^{\cdot}$ la classe définie par v dans $\mathcal{F}_{A^*, B^*}/_{N^*}$. Alors (6.5) donne

$$< u, \overline{A^* v} > = < f, \bar{v} > , \; u \in u^{\cdot} ,$$

donc

$$< A u - f, \bar{v} > = 0$$

donc

$$A \; u = f. \tag{9.1}$$

Par conséquent, u étant quelconque dans $u^{\cdot}$, $u \in \mathfrak{D}'(\Omega)$ et $Au = f \in \Xi'(\Omega)$; donc $u \in D_A$. Mais alors la formule de GREEN (8.2) est valable. Donc

$$< Au, \bar{v} > = < f, \bar{v} > = < u, \overline{A^* v} > - \sum_{j=0}^{m-1} < B_j u, \overline{C_j^* v} >$$

de sorte que, en comparant avec (6.5), on a:

$$\sum_{j=0}^{m-1} < g_j - B_j u, \overline{C_j^* v} > = 0 \tag{9.2}$$

pour tout $v \in v^{\cdot}$, $v^{\cdot} \in \mathcal{F}_{A^*, B^*}/_{N^*}$. Mais d'après le Lemme 7.2, (9.2) équivaut à

$$\sum_{j=0}^{m-1} < g_j - B_j u, \bar{\varphi}_j > = 0 \qquad \text{pour tout } \varphi_j \in \mathcal{H}(\Gamma)$$

donc

$$B_j \; u = g_j \tag{9,3}$$

Donc, *si l'on désigne par* $\{\Xi'(\Omega) \times (\mathcal{H}'(\Gamma))^m ; N^*, CN^*\}$ *l'espace des* $\{f, g_0, \dots, g_{m-1}\}$, $f \in \Xi'(\Omega)$, $g_j \in \mathcal{H}'(\Gamma)$. *tels que* (6.4) *ait lieu,* on a le

THÉORÈME 9.1. - *On suppose que* $(\mathcal{E})$, $(\mathcal{N})$, $(\mathcal{R})$, $(\mathcal{A}1)$ *et* $(\mathcal{A}2)$ *ont lieu;*

l' application

$$u\cdot \longrightarrow \{ Au,\ B_0u, \dots ,\ B_{m-1}u \}$$

est un isomorphisme de D_A/N *sur* $\{ \Xi'(\Omega) \times (\mathcal{H}'(\Gamma))^m ;\ N^*,\ CN^* \}$.

Autrement dit, pour $f \in \Xi'(\Omega)$, $g_j \in \mathcal{H}'(\Gamma)$, avec (6.4), il existe un élément u de D_A, unique modulo N, tel que l'on ait (9.1) et (9.2); en outre $u\cdot$ dépend continûment de f et g_j. Pour le problème (2.2) on a donc encore le théorème de l'alternative sous sa forme habituelle, même dans ces espaces très généraux.

BIBLIOGRAPHIE

[1] S. AGMON - A. DOUGLIS - L. NIRENBERG, *Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions*, « Comm. pure applied. math. », 12 (1959), 623-727.

[2] N. ARONSZAJN - A. N. MILGRAM, *Differential operators on Riemannian manifolds*, « Rend. Circ. Mat. Palermo », 2 (1952), 1-61.

[3] F. E. BROWDER, *Estimates and existence theorems for elliptic boundary value problems*, « Proc. Nat. Acad. Sc. U. S. A. », 45 (1959), 365-372.

[4] G. CIMMINO, *Su alcuni esempi notevoli di dualità fra spazi lineari topologici* », à paraitre aux Rend. Sem. Mat. Fis. Milano, (1962).

[5] G. DE RHAM, *Variétés différentiables*, « Hermann, Paris, » 1955.

[6] J. DIEUDONNÉ - L. SCHWARTZ, *La dualité dans les espaces* ($\mathfrak{F}$) *et* ($L\mathfrak{F}$), « Annales Institut Fourier », t. 1 (1950), 61-101.

[7] I. M. GELFAND - G. E. SCHILOV, *Fonctions généralisées (distributions), (en russe)*, «vol. 1,..., IV, Moscou », 1958.

[8] A. GROTHENDIECK, *Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires*, « Memoirs of the Amer. Math. Soc », N° 16, 1955.

[9] T. KOTAKE - M. S. NARASINHAM, *Fractional powers af a linear elliptic operator*, « Bull. Soc. Math. France », t. 90 (1962) 449-471.

[10] G. KÖTHE, *Die Stufenraume, eine einfache Klasse linearer vollkommener Räumen*, « Math. Zeitsch. », t. 51 (948), 317-345.

[11] G. KÖTHE, *Die Randverteillungen analytischer funktionen*, « Math. Zeitsch. », t. 57 (1957-58), 13-33.

[12] G. KÖTHE, *Topologische lineare Räume*, « Springer, Berlin », 1960.

[13] J. L. LIONS - E. MAGENES, *Problèmes aux limites non homogènes*. (I)...(VI); (I), (III); (IV), (V). « Annali Scuola Norm. Sup. Pisa », t. XIV (1960), 259-308; t. XV (1961), 39-101, 311-326; t. XVI (1962), 1-44; (II), Annales Institut Fourier, t. 11 (1961), 137-178; (VI) Journal d'Analyse Mathématique, XI (1963) 165-188.

[14] J. L. LIONS - E. MAGENES, *Remarques sur les problèmes aux limites linéaires elliptiques*, « Rend. Acc. Lincei », t. XXXII (1962), 873-883.

[15] E. MAGENES - G. STAMPACCHIA, *I problemi al contorno per le equazioni differenziali di tipo ellittico*, « Annali Scuola Norm. Sup. Pisa », vol. XII, (1958), 247-358.

[16] C. B. MORREY - L. NIRENBERG, *On the analyticity of the solutions of linear elliptic systems of partial differential equations*, « Comm. Pure Applied Math. » 10 (1957), 271-290.

[17] E. NELSON, *Analytic vectors*, « Annals of Math. », t. 70 (1959), 572-615.

[18] C. ROUMIEU, *Sur quelques extensions de la notion de distribution*, « Annales Scient. Ec. Norm. Sup. », t. 77 (1960), 47-121.
[19] C. ROUMIEU, *Ultra-distributions définies sur R^n et sur certaines classes de variétés différentiables*, « Journal d'Analyse Math. vol. X », (1962, 63), 153-192.
[20] M. SCHECHTER, *General boundary value problems for elliptic partial differential equations*, « Comm. pure applied math. », 12 (1959), 457-486.
[21] L. SCHWARTZ, *Théorie des distributions, I et II*. « Hermann Paris », 1950-1951.
[22] H. G. TILLMANN, *Randverteilungen analytischer Funktionen und distributionen*, « Math. Zeitsch », 59 (1953), 61-83.
[23] N. BOURBAKI, *Espaces vectoriels topologiques*. « chap. I et II, Hermann, Paris », 1953.
[24] I. SEBASTIAO e SILVA, *Su certe classi di spazi localmente convessi importanti per le applicazioni*, « Rend. di Mat. », s. IV, XIV, (1955), 388-410.

INDEX DES NOTATIONS PRINCIPALES

Si $\Delta =$ opérateur de LAPLACE BELTRAMI sur Γ, on définit

$$\mathcal{H}_{M,0}(\Gamma) = \{f \mid \sup_k \frac{1}{(2k)!\, M^k} \| \Delta^k f \|_{C^0(\Gamma)} = \| f \|_{\mathcal{H}_{M,0}(\Gamma)} < \infty\},$$

$\mathcal{H}(\Gamma) =$ limite inductive des $\mathcal{H}_{M,0}(\Gamma)$:

$\mathcal{H}'(\Gamma) =$ dual fort de $\mathcal{H}(\Gamma)$ (fonctionnelles analytiques sur Γ).

$\mathfrak{D}(\Omega)$ (resp. $\mathfrak{D}(\overline{\Omega})$) = fonctions indéfiniment différentiables dans Ω (resp. $\overline{\Omega}$) à support compact dans Ω (resp. quelconque dans $\overline{\Omega}$), topologie de limite inductive de L. SCHWARTZ (resp. d'espace de Fréchet).

$$\mathcal{F}_{A^*, B^*} = \{ u \mid u \in \mathfrak{D}(\Omega),\ A^* u \in \mathfrak{D}(\Omega),\ B_j^* u = 0 \text{ sur } \Gamma,\ j = 0, \dots, m-1 \},$$

topologie de limite inductive des $\mathcal{F}^{\alpha}_{A^*, B^*}$ (cf. p. 11).

$\Xi(\Omega) = \{u \mid \rho^{|\alpha|} D^\alpha u \in L^2(\Omega)$ pour tout $\alpha\}$, topologie naturelle d'espace de Fréchet, $\rho =$ fonction équivalente à le distance au bord de Ω (cf. p. 12); $\Xi'(\Omega) =$ dual fort de $\Xi(\Omega)$.

$D_A = \{u \mid u \in \mathfrak{D}'(\Omega),\ Au \in \Xi'(\Omega)\}$, topologie la moins fine rendant continues les applications $u \to u$, $u \to Au$. de $D_A \to \mathfrak{D}'(\Omega)$ et $D_A \to \Xi'(\Omega)$.