Sur les surfaces W applicables sur des surfaces de révolution.

Par O. PYLARINOS (à Thessaloniki, Grèce)

Résumé. - Est donné dans l'introduction.

Introduction. - Les surfaces de l'espace ordinaire applicables sur des surfaces de révolution peuvent être rangées en deux catégories: d'une part les surfaces dont les géodésiques ayant pour images les méridiens des surfaces de révolution, sur lesquelles elles sont applicables, sont les positions diverses d'une courbe gauche-invariable de forme-la même pour chacune de ces surfaces et qui, par suite, sont engendrées par les positions diverses des courbes gauches qui se meuvent de manière que les trajectoires de leurs points soient en même temps les trajectoires orthogonales de leurs positions; d'autre part les surfaces qui ne jouissent pas de cette propriété. Les surfaces de la première catégorie sont, en outre, des surfaces W , les courbures totale K et moyenne H d'une telle surface étant des fonctions de l'arc de sa courbe génératrice ⁽¹⁾. Dans la présente étude dont l'objet principal est la recherche des surfaces réelles W à courbure totale non constante applicables sur des surfaces de révolution, nous appelons, pour abréger, *surfaces* W_r : les surfaces W applicables sur des surfaces de révolution, — *géodésiques* (m) d'une telle surface: les géodésiques de cette surface ayant pour images les méridiens de la surface de révolution sur laquelle elle est applicable; — *courbes* r_1 : les courbes gauches qui peuvent se mouvoir de manière que les trajectoires de leurs points se confondent avec les trajectoires orthogonales de leurs positions, — *surfaces* W_{r_1} : les surfaces engendrées par les positions diverses des courbes r_1 lorsqu'elles se meuvent de la manière ci-dessus et *surfaces* W_{r_2} : toutes les surfaces W_r qui ne sont pas des surfaces W_{r_1} .

Dans la première partie, nous montrons que la recherche des surfaces W_{r_1} dont les deux courbures K , H sont liées par une relation donnée, peut

⁽¹⁾ O. PYLARINOS, Sur certains réseaux de courbes tracées sur une surface, "Bull. Sc. Math.", 84, 1960, p. 131.

être ramenée à l'intégration d'un système de deux équations différentielles ordinaires auxquelles doivent satisfaire la courbure et la torsion de la courbe génératrice r_1 d'une telle surface, considérées comme fonctions de l'arc de cette courbe; l'une d'elles exprime la condition nécessaire et suffisante afin qu'une courbe gauche soit une courbe r_1 et l'autre provient de la relation donnée entre K, H . Il en résulte qu'il y a toujours, en général, des surfaces W_{r_1} dont les courbures K, H sont liées par une relation donnée, choisie au hasard, tandis *qu'il n'en est pas de même pour les surfaces W_{r_2}* . Cette constatation remarquable est une conséquence du fait que les deux courbures K, H de toutes les surfaces W_{r_2} à courbure totale non constante sont des fonctions d'une variable, convenablement choisie, vérifiant deux équations différentielles ordinaires d'une forme parfaitement déterminée.

Dans la seconde partie, nous montrons que *toutes les surfaces réelles W_{r_2} à courbure totale non constante sont isothermiques* et nous donnons ensuite les deux équations différentielles ordinaires auxquelles doivent satisfaire la courbure et la torsion de la courbe génératrice r_1 d'une surface W_{r_1} , considérées comme fonctions de l'arc de cette courbe, afin que la surface soit isothermique.

Enfin, dans la troisième partie, nous donnons une condition nécessaire, afin qu'il y ait des surfaces W_{r_2} dont les courbures K, H vérifient une équation algébrique à coefficients constants et nous montrons, ensuite, que la courbure et la torsion des géodésiques (m) d'une surface W_{r_2} dont la courbure totale est une fonction algébrique de sa courbure moyenne, vérifient également une équation algébrique dont les coefficients sont constants le long de chacune de ces courbes.

I

1. Soit S une surface réelle de l'espace ordinaire dépourvue de points singuliers et applicable sur une surface de révolution.

Les géodésiques (m) de S et leurs trajectoires orthogonales forment comme l'on sait un réseau isotherme. Par suite, si l'on rapporte S aux paramètres isothermes ω, ω' qui correspondent à ce réseau, son élément linéaire sera de la forme

$$(1.1) \quad ds^2 = \lambda'^2(\omega) \{d\omega^2 + d\omega'^2\},$$

lorsque, en outre, les courbes $\omega' = \text{const.}$ sont les géodésiques (m) de la surface.

L'élément linéaire (1.1) de S , si on la rapporte aux paramètres-

isothermes aussi — u, v liés avec ω, ω' par les relations

$$(1.2) \quad \omega = u + v, \quad \omega' = u - v,$$

prend — on le voit aussitôt — la forme

$$(1.3) \quad ds^2 = \lambda^2(\omega) \{ du^2 + dv^2 \},$$

où

$$(1.4) \quad \lambda^2(\omega) = \lambda^2(u + v) = 2\lambda'^2(\omega)$$

est une fonction de $\omega = u + v$ vérifiant avec les coefficients $L(u, v)$, $M(u, v)$, $N(u, v)$ de la seconde forme fondamentale de S l'équation de GAUSS et les deux équations de CODAZZI. Ces équations, grâce à (1,4), affectent la forme

$$(1.5) \quad LN - M^2 = -\lambda^2 \frac{d^2 \log \lambda^2}{d\omega^2} = \lambda^4 K.$$

$$(1.6) \quad \frac{\partial L}{\partial v} - \frac{\partial M}{\partial u} = H \frac{d\lambda^2}{d\omega}, \quad \frac{\partial M}{\partial v} - \frac{\partial N}{\partial u} = -H \frac{d\lambda^2}{d\omega}^{(2)},$$

où

$$(1.7) \quad K = \frac{LN - M^2}{\lambda^4}, \quad H = \frac{L + N}{2\lambda^2}$$

sont respectivement la courbure totale et la courbure moyenne de S , dont la première — d'après (1,5) — est une fonction de la seule variable $\omega = u + v$:

$$(1.8) \quad K = K(\omega).$$

Supposons maintenant que S soit une surface réelle W , dont les courbures K, H sont liées par la relation

$$(1.9) \quad F(K, H) = 0$$

qui ne se réduit pas à $K = \text{const.}$

Dans ce cas, la courbure moyenne H de S sera aussi, d'après (1,8) et (1,9), une fonction de la seule variable $\omega = u + v$:

$$(1.10) \quad H = H(\omega)$$

⁽²⁾ Voir par ex. V. UND K. KOMMERELL, *Theorie der Raumkurven und krummen Flächen*, Vol. II, p. 17, Berlin 1931.

et l'équation (1.5), si on y remplace N par sa valeur tirée de la seconde relation (1.7), peut s'écrire sous la forme

$$(1.11) \quad \{L - H\lambda^2\}^2 + M^2 = A(\omega),$$

où

$$(1.12) \quad A(\omega) \equiv H^2\lambda^4 + \lambda^2 \frac{d^2 \log \lambda^2}{d\omega^2} = \lambda^4 \{H^2 - K\} \neq 0,$$

puisque S est une surface à courbure totale non constante.

Si, en outre, on pose

$$(1.13) \quad L = H\lambda^2 + \Lambda,$$

de la seconde formule (1.7) il vient

$$(1.14) \quad N = H\lambda^2 - \Lambda;$$

ainsi l'équation (1.11), qui est équivalente à l'équation (1.5), et les équations (1.6) peuvent se mettre sous la forme

$$(1.15) \quad M^2 + \Lambda^2 = A(\omega),$$

$$(1.16) \quad \frac{\partial M}{\partial u} - \frac{\partial \Lambda}{\partial v} = \tau, \quad \frac{\partial M}{\partial v} + \frac{\partial \Lambda}{\partial u} = \tau$$

avec

$$(1.17) \quad \tau \equiv \lambda^2 \frac{dH}{d\omega} = \tau(\omega).$$

Les équations (1.16), si l'on y pose

$$(1.18) \quad M = \sqrt{A} \cos \varphi, \quad \Lambda = \sqrt{A} \sin \varphi$$

et qu'on tienne compte que A est, d'après (1.12), une fonction de la seule variable $\omega = u + v$, deviennent

$$T \equiv \frac{d\sqrt{A}}{d\omega} \cos \varphi - \sqrt{A} \sin \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial u} - \frac{d\sqrt{A}}{d\omega} \sin \varphi - \sqrt{A} \cos \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial v} - \tau = 0$$

$$V \equiv \frac{d\sqrt{A}}{d\omega} \cos \varphi - \sqrt{A} \sin \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial v} + \frac{d\sqrt{A}}{d\omega} \sin \varphi + \sqrt{A} \cos \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial u} - \tau = 0.$$

Le système de ces équations est évidemment équivalent au système des équations

$$(1.19) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{T+V}{\sqrt{A}} = 2 \frac{d \log \sqrt{A}}{d\omega} \cos \varphi - \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial u} + \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right\} \sin \varphi + \\ \quad + \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial u} - \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right\} \cos \varphi - 2 \frac{\tau}{\sqrt{A}} = 0 \\ \\ \frac{T-V}{\sqrt{A}} = -2 \frac{d \log \sqrt{A}}{d\omega} \sin \varphi - \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial u} + \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right\} \cos \varphi - \\ \quad - \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial u} - \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right\} \sin \varphi = 0 \end{array} \right.$$

qui sont linéaires par rapport à

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u} + \frac{\partial \varphi}{\partial v}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial u} - \frac{\partial \varphi}{\partial v}$$

à coefficients dont le déterminant est égal à 1. Il en résulte que l'angle φ , qui figure dans les formules (1.18), doit être une fonction des u, v satisfaisant aux équations aux dérivées partielles

$$(1.20) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial u} + \frac{\partial \varphi}{\partial v} = -2 \frac{\tau}{\sqrt{A}} \sin \varphi, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial u} - \frac{\partial \varphi}{\partial v} = -2 \frac{d \log \sqrt{A}}{d\omega} + 2 \frac{\tau}{\sqrt{A}} \cos \varphi$$

qu'on obtient en résolvant le système (1.19), ou finalement aux équations

$$(1.21) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \varphi}{\partial u} = -\frac{d \log \sqrt{A}}{d\omega} + \frac{\tau}{\sqrt{A}} \{ \cos \varphi - \sin \varphi \}, \\ \\ \frac{\partial \varphi}{\partial v} = \frac{d \log \sqrt{A}}{d\omega} - \frac{\tau}{\sqrt{A}} \{ \cos \varphi + \sin \varphi \} \end{array} \right.$$

dont la condition d'intégrabilité-on le voit aisément-est

$$(1.22) \quad \frac{d^2 \log \sqrt{A}}{d\omega^2} - \frac{\tau^2}{A} + \left\{ \frac{\tau}{\sqrt{A}} \frac{d \log \sqrt{A}}{d\omega} - \frac{d}{d\omega} \left(\frac{\tau}{\sqrt{A}} \right) \right\} \cos \varphi = 0.$$

L'équation (1.22) dont le premier membre est une fonction linéaire de $\cos \varphi$ à coefficients qui — d'après (1.12) et (1.17) — sont des fonctions

de la seule variable ω , doit être vérifiée par toute solution $\varphi(u, v)$ du système des équations (1.21). Aussi, à moins que les coefficients de $\cos \varphi$ dans l'équation (1.22) ne soient identiquement nuls, l'angle φ doit-il être une fonction de la seule variable $\omega = u + v$.

S'il en est ainsi, les coefficients L, M, N seront aussi, grâce aux (1.13), (1.16) et (1.18), des fonctions de la seule variable ω . On en déduit qu'il en est de même pour la courbure κ et la torsion σ des géodésiques $\omega' = u - v = \text{const.}$, c.-à-d. des géodésiques (m) de S . On a, en effet, $\kappa = |\kappa_n|$, $\sigma = \sigma_g$ où κ_n, σ_g sont respectivement la courbure normale et la torsion géodésique, qui — d'après des formules connues, compte tenu que pour ces courbes on a $\frac{dv}{du} = 1$ — sont

$$(1.23) \quad \kappa_n = \frac{L + 2M + N}{2\lambda^2}, \quad \sigma_g = \frac{L - N}{2\lambda^2}.$$

On aura ainsi $\kappa = \kappa(\omega)$, $\sigma = \sigma(\omega)$, ce qui montre que les géodésiques (m) de S admettent la même courbure et la même torsion en leurs points situés sur chacune de leurs trajectoires orthogonales $\omega = u + v = \text{const.}$ Mais la correspondance entre les géodésiques (m) , qu'on obtient en faisant correspondre leurs points situés sur chacune de leurs trajectoires orthogonales, est une correspondance avec égalité des arcs homologues. Par suite, ces courbes sont nécessairement les positions diverses d'une courbe — invariable de forme — qui se meut de manière que les trajectoires de ses point coïncident avec les trajectoires orthogonales de ses positions, et S est nécessairement une surface W_{r_1} .

D'autre part, si S est une surface W_{r_1} , les géodésiques (m) : $\omega' = u - v = \text{const.}$, de cette surface sont les positions diverses de sa courbe génératrice r_1 ⁽³⁾; aussi admettent-elles la même courbure et la même torsion en leurs points situés sur chacune de leurs trajectoires $\omega = u + v = \text{const.}$ Il en résulte que la courbure normale κ_n et la torsion géodésique σ_g de ces géodésiques sont des fonctions de la seule variable ω . En tenant compte de ce fait, on déduit des (1.5) et (1.22) que les coefficients L, M, N sont aussi des fonctions de ω et, de là, qu'il en est de même — grâce aux (1.10), (1.12), (1.13) et (1.18) — pour l'angle φ . Donc l'angle φ , qui figure dans les formules (1.18), n'est une fonction de la seule variable $\omega = u + v$ que dans le cas où S est une surface W_{r_1} .

2. Si S est une surface W_{r_1} dont les courbures K, H sont liées par

⁽³⁾ O. PYLARINOS, loc. cit. 1) p. 135.

la relation (1.9), les équations (1.16) deviennent

$$(2.1) \quad \frac{dM}{d\omega} - \frac{d\Lambda}{d\omega} = \tau, \quad \frac{dM}{d\omega} + \frac{dA}{d\omega} = \tau,$$

les coefficients L, M, N, λ ainsi que les courbures K, H de S étant, d'après ce qui est exposé au paragraphe 1, des fonctions de la seule variable ω .

On aura donc, grâce aux (2.1),

$$(2.2) \quad \frac{dM}{d\omega} = \tau, \quad \frac{d\Lambda}{d\omega} = 0$$

et, en ayant égard à la dernière de ces équations, on tire des (1.13) et (1.14)

$$(2.3) \quad L = H\lambda^2 + a, \quad N = H\lambda^2 - a,$$

où a est une constante et H, λ sont des fonctions de ω vérifiant avec M les équations différentielles

$$(2.4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{dM}{d\omega} = \lambda^2 \frac{dH}{d\omega}, \quad \lambda^2 \frac{d^2 \log \lambda^2}{d\omega^2} = a^2 + M^2 - H^2 \lambda^4, \\ F\left(-\frac{1}{\lambda^2} \frac{d^2 \log \lambda^2}{d\omega^2}, H\right) = 0, \end{array} \right.$$

auxquelles on parvient en remplaçant τ dans la première équation (2.2) par sa valeur (1.17), L, N dans l'équation (1.5) par leurs valeurs (2.3) et K dans l'équation (1.9) par sa valeur tirée de (1.5).

D'autre part, à chaque système de fonctions $M(\omega), H(\omega), \lambda(\omega)$, satisfaisant aux trois équations différentielles (2.4) pour une valeur donnée de la constante a on peut faire correspondre en faisant usage des (2.3), deux fonctions $L(\omega), N(\omega)$ telles que les fonctions $\lambda(\omega), L(\omega), N(\omega)$, si l'on pose $\omega = u + v$, vérifient l'équation de GAUSS (1.5) et les équations de CODAZZI (1.6) et, par conséquent, une surface — déterminée à un déplacement près — rapportée à deux paramètres isothermes u, v . Cette surface est une surface W_{r_1} — les courbes $u - v = \text{const.}$ étant les positions diverses de sa courbe génératrice r_1 — dont les courbures K, H sont liées par la relation qu'on obtient en remplaçant $-\frac{1}{\lambda^2} \frac{d^2 \log \lambda^2}{d\omega^2}$ dans la troisième équation (2.4) par K .

La recherche des surfaces W_{r_1} dont les courbures K, H sont liées par la relation donnée (1.9), peut donc être ramenée à l'intégration du système des équations différentielles (2.4), dans lesquelles a est une constante.

3. En outre, si S est une surface W_{r_1} dont les courbures K, H sont liées par la relation (1.9), les expressions (1.23) de la courbure normale κ_n et de la torsion géodésique σ_g de ses géodésiques (m) : $\omega' = u - v = \text{const.}$, c-à-d. des positions diverses de sa courbe génératrice r_1 , affectent — grâce aux (2.3) — la forme

$$(3.1) \quad \kappa_n = H + \frac{M}{\lambda^2}, \quad \sigma_g = \frac{a}{\lambda^2},$$

où a est une constante et H, M, λ sont des fonctions de $\omega = u + v$ vérifiant les équations différentielles (2.4) pour la même valeur de a .

Or on peut choisir comme direction positive de la normale à S en un point arbitraire P de cette surface la direction positive de la normale principale en P de la courbe génératrice r_1 de S , qui passe par ce point. On aura ainsi $\kappa_n = \kappa$, $\sigma_g = \sigma$, où κ, σ sont la courbure et la torsion de la courbe r_1 et la première équation (2.4), si on y remplace M, λ^2 par leurs valeurs tirées des (3.1) et qu'on tienne compte que l'arc u_1 de la courbe r_1 est — on le reconnaît aussitôt à l'aide des (1.1), (1.2) et (1.3) — une fonction de $\omega = u + v$, devient

$$(3.2) \quad \frac{d}{du_1} \left(\frac{\kappa - H}{\sigma} \right) = \frac{1}{\sigma} \frac{dH}{du_1}.$$

Par ailleurs, on a pour la courbure totale K et la courbure moyenne H de S les formules

$$(3.3) \quad K = -\sqrt{\sigma} \frac{d^2}{du_1^2} \frac{1}{\sqrt{\sigma}}, \quad H = \frac{1}{2} \left\{ \kappa + \frac{\sigma^2}{\kappa} - \frac{\sqrt{\sigma}}{\kappa} \frac{d^2}{du_1^2} \frac{1}{\sqrt{\sigma}} \right\}^{(4)}$$

et en remplaçant H dans l'équation (3.2) par sa valeur (3.3), on parvient — on le voit sans peine — à l'équation

$$(3.4) \quad \left\{ \kappa + \frac{\sigma^2}{\kappa} - \frac{\sqrt{\sigma}}{\kappa} \frac{d^2}{du_1^2} \frac{1}{\sqrt{\sigma}} \right\} \frac{d}{du_1} \frac{1}{\sqrt{\sigma}} = \sqrt{\sigma} \frac{d}{du_1} \left\{ \frac{\sigma - \frac{1}{\sqrt{\sigma}} \frac{d^2}{du_1^2} \frac{1}{\sqrt{\sigma}}}{\kappa} \right\}$$

(4) O. PYLARINOS loc. cit. 1. p. 131.

qui exprime la condition nécessaire et suffisante afin qu'une courbe gauche soit une courbe r_1 ⁽⁵⁾.

Donc, la courbure κ et la torsion σ de la courbe génératrice r_1 de S doivent être des fonctions de l'arc u_1 de cette courbe satisfaisant à l'équation (3.4) ainsi qu'à l'équation

$$(3.5) \quad F\left(-V\bar{\sigma} \frac{d^2}{du_1^2} \frac{1}{V\bar{\sigma}}, \frac{1}{2} \left\{ \kappa + \frac{\sigma^2}{\kappa} - \frac{V\bar{\sigma}}{\kappa} \frac{d^2}{du_1^2} \frac{1}{V\bar{\sigma}} \right\}\right) = 0$$

qu'on obtient en éliminant K, H entre (1.9) et (2.3).

D'autre part, à chaque solution $\kappa(u_1), \sigma(u_1)$ du système des équations (3.4) et (3.5) on peut faire correspondre une courbe r_1 déterminée à un déplacement près. Les positions diverses de cette courbe, lorsqu'elle se meut de manière que les trajectoires de ses points coïncident avec les trajectoires orthogonales de ses positions, engendrent une surface déterminée également à un déplacement près.

Si on la rapporte, en effet, au réseau orthogonal (u_1, v_1) dont les courbes $u_1 = \text{const.}$ sont les trajectoires orthogonales des positions diverses de la courbe r_1 , u_1 étant l'arc de cette courbe, et qu'on choisisse convenablement le paramètre v_1 , les coefficients des deux formes fondamentales de cette surface sont des fonctions déterminées des $\kappa(u_1), \sigma(u_1)$ et de leurs dérivées par rapport à u_1 ⁽⁶⁾.

Les deux courbures K, H de cette surface sont les fonctions (3.3) des $\kappa(u_1), \sigma(u_1)$ et de leurs dérivées par rapport à u_1 et, par suite, elles vérifient la relation donnée (1.9). On peut donc énoncer le

THÉOREME A. — *La recherche des surfaces W_{r_1} dont les deux courbures K, H sont liées par une relation donnée: $F(K, H) = 0$, se ramène à l'intégration du système de l'équation (3.4) et de l'équation qu'on obtient de la relation donnée entre K, H en y remplaçant K, H par leurs expressions (3.3) en fonction des κ, σ et de leurs dérivées par rapport à u_1 .*

Il en résulte qu'il y a toujours, en général, des surfaces W_{r_1} dont les courbures K, H sont liées par une relation donnée, choisie au hasard.

4. Si la surface considérée S est une surface W_{r_2} à courbure totale non constante, l'angle φ qui figure dans les formules (1.18) et qui doit être une

⁽⁵⁾ O. PYLARINOS loc. cit. 1) p. 136.

⁽⁶⁾ O. PYLARINOS, Sur les surfaces à courbure moyenne constante applicables sur des surfaces de révolution; Ann. di Mat. pura ed appl. (IV), Vol. LIX (1962), p. 337.

fonction des u, v vérifiant les deux équations aux dérivées partielles (1.21) — d'après ce qui est exposé dans le paragraphe 1 — n'est pas une fonction de la seule variable $\omega = u + v$. Aussi les coefficients de l'équation linéaire (1.22) par rapport à $\cos \varphi$, qui constitue la condition d'intégrabilité des équations (1.21), doivent-ils s'annuler identiquement.

On aura, donc,

$$(4.1) \quad \frac{\tau}{\sqrt{A}} \frac{d \log \sqrt{A}}{d\omega} - \frac{d}{d\omega} \frac{\tau}{\sqrt{A}} = 0, \quad \frac{d^2 \log \lambda^2}{d\omega^2} = \frac{\tau^2}{A}.$$

Il en résulte que les courbures K, H de S et le coefficient λ de son élément linéaire (1.3) sont nécessairement des fonctions de ω satisfaisant aux trois équations différentielles

$$(4.2) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{d^2 \log \lambda^2}{d\omega^2} &= \lambda^2 K, \quad \frac{d}{d\omega} \log (\lambda^2 \sqrt{H^2 - K}) = \frac{d}{d\omega} \log \frac{\frac{dH}{d\omega}}{\sqrt{H^2 - K}}, \\ \frac{d^2}{d\omega^2} \log (\lambda^2 \sqrt{H^2 - K}) &= \frac{\left(\frac{dH}{d\omega}\right)^2}{H^2 - K} \end{aligned} \right.$$

dont la première est l'équation (1.5) de GAUSS et les deux dernières proviennent des équations (4.1) en y remplaçant A, τ par leurs valeurs (1.12) et (1.17).

Or, en éliminant λ^2 entre les équations (4.2), on parvient sans difficulté à deux équations différentielles:

$$(4.3) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{d}{d\omega} \log \left\{ \frac{\sqrt{H^2 - K}}{K} \frac{d^2 \log \sqrt{H^2 - K}}{d\omega^2} - \frac{\left(\frac{dH}{d\omega}\right)^2}{K \sqrt{H^2 - K}} \right\} &= \frac{d}{d\omega} \log \left\{ \frac{\frac{dH}{d\omega}}{\sqrt{H^2 - K}} \right\} \\ \frac{d^2}{d\omega^2} \log \left\{ \frac{\frac{dH}{d\omega}}{\sqrt{H^2 - K}} \right\} &= \frac{\left(\frac{dH}{d\omega}\right)^2}{H^2 - K}, \end{aligned} \right.$$

d'une forme parfaitement déterminée, auxquelles doivent satisfaire les courbures K, H d'une surface W_r à courbure totale non constante, considérées comme fonctions de la variable $\omega = u + v$, où u, v sont des paramètres isothermes, tels que les courbes $u - v = \text{const.}$ soient les géodésiques (m) de la surface.

Il en résulte qu'il n'y a pas, en général, de surfaces W_{r_2} dont les courbures K, H vérifient une équation donnée: $F(K, H) = 0$, choisie au hasard. Il faut, en effet, pour qu'il y ait de telles surfaces, que l'équation donnée soit compatible avec les deux équations différentielles (4,3).

Il est à noter que la première équation (4,1), en intégrant, conduit à

$$(4.4) \quad \frac{\tau}{A} = c,$$

où c est une constante qui — d'après (1.17) — ne s'annule que dans le cas où S est une surface à courbure moyenne constante, tandis que la seconde équation (4.1), si l'on y remplace τ par sa valeur (4.4), devient

$$(4.5) \quad \frac{d^2 \log \sqrt{A}}{d\omega^2} = c^2 A.$$

5. Si S est une surface W_{r_2} à courbure moyenne constante, d'après la remarque précédente, on aura

$$(5.1) \quad c = 0$$

et l'équation (4,5) devient $\frac{d^2 \log \sqrt{A}}{d\omega^2} = 0$; ce qui montre que, dans ce cas, $\sqrt{A}$ doit être une fonction de $\omega = u + v$ de la forme

$$(5.2) \quad \sqrt{A} = c_2 e^{c_1 \omega}$$

où c_1, c_2 sont des constantes $\neq 0$. En effet, la constante c_2 — d'après (1.12) — est nécessairement $\neq 0$. En outre — grâce aux (4.4), (4.5) et (5.1) — les deux équations (1.21) deviennent

$$(5.3) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial u} = -c_1, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial v} = c_1$$

et si $c_1 = 0$, l'angle φ est indépendant des u, v et S est nécessairement — d'après ce qui est exposé dans le paragraphe 1 — une surface W_{r_1} . On aura, donc, $c_1 \neq 0$ et l'angle φ — comme il résulte des (5.3) — sera une fonction de la seule variable $\omega' = u - v$ de la forme

$$(5.4) \quad \varphi = -c_1 \omega' + c'_1,$$

où c'_1 est aussi une constante.

Si l'on porte maintenant les valeurs (5.2) et (5.4) des $\sqrt{A}$ et φ dans les formules (1.18) et qu'on tienne compte des (1.13), (1.14), on trouve pour les coefficients L, M, N , les expressions

$$(5.5) \quad \begin{cases} L = H_1 \lambda^2 + c_2 e^{c_1 \omega} \sin(c'_1 - c_1 \omega'), & M = c_2 e^{c_1 \omega} \cos(c'_1 - c_1 \omega'), \\ N = H_1 \lambda^2 - c_2 e^{c_1 \omega} \sin(c'_1 - c_1 \omega'), \end{cases}$$

dans lesquelles H_1 est la courbure moyenne constante de S et λ est une fonction de ω vérifiant l'équation différentielle

$$(5.6) \quad \lambda^2 \frac{d^2 \log \lambda^2}{d\omega^2} + H_1 \lambda^4 = c_2^2 e^{2c_1 \omega}$$

qu'on obtient de l'équation (1.5) en y remplaçant H par la constante H_1 et A par sa valeur (5.2).

D'autre part, à chaque solution $\lambda(\omega)$ de l'équation (5.6) pour quatre valeurs données des constantes H_1, c'_1, c_1, c_2 , dont celles des deux dernières sont $\neq 0$, on peut faire correspondre, à l'aide des (5.5), trois fonctions $L(\omega, \omega'), M(\omega, \omega'), N(\omega, \omega')$ qui, si l'on pose $\omega = u + v, \omega' = u - v$, vérifient avec $\lambda(\omega)$ les équations (1.5) et (1.6) et par conséquent, une surface — déterminée à un déplacement près — rapportée à deux paramètres isothermes u, v . Cette surface est une surface W_{r_1} à courbure moyenne égale à la constante donnée H_1 , dont les géodésiques (m) sont les courbes $\omega' = u - v = \text{const.}$

Donc, la recherche des surfaces réelles W_{r_2} à courbure moyenne constante se ramène à l'intégration de l'équation différentielle (5.6) dans laquelle H_1, c_1, c_2 sont des constantes dont les deux dernières sont $\neq 0$ ⁽⁷⁾.

6. Supposons maintenant que S soit une surface réelle W_{r_2} à courbures totale et moyenne non constantes.

Dans ce cas, les deux équations aux dérivées partielles (1,20), auxquelles l'angle φ doit satisfaire affectent — grâce à (4.4) — la forme

$$(6.1) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial u} + \frac{\partial \varphi}{\partial v} + 2c\sqrt{A} \sin \varphi = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial u} - \frac{\partial \varphi}{\partial v} + 2 \frac{d \log \sqrt{A}}{d\omega} - 2c\sqrt{A} \cos \varphi = 0,$$

la constante c qui y figure étant — d'après ce qui est exposé dans le paragraphe 1 — $\neq 0$.

(7) O. PYLARINOS, loc. cit. (6), p. 337.

Si l'on pose

$$(6.2) \quad z = \log tg \frac{\varphi}{2},$$

la première équation (6.1) prend la forme

$$(6.3) \quad \frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v} + 2c\sqrt{A} = 0.$$

Or, toute solution $z(u, v)$ de l'équation (6.3) est, comme l'on sait, définie par une équation $\psi(u, v, z) = 0$ dont le premier membre est une solution de l'équation homogène

$$(6.4) \quad \frac{\partial \psi}{\partial u} + \frac{\partial \psi}{\partial v} - 2c\sqrt{A} \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0.$$

On voit aussitôt, compte tenu que A est une fonction ($\neq 0$) de la seule variable $\omega = u + v$, que les deux fonctions des u, v, z : $\omega' = u - v, z + cF(\omega)$, où $F(\omega)$ est une fonction primitive de $\sqrt{A}(\omega)$, sont des intégrales indépendantes du système différentiel

$$du = dv = \frac{dz}{-2c\sqrt{A}}$$

associé à l'équation homogène (6.4). Aussi z doit-elle être une fonction des u, v définie par une équation de la forme $\psi(u - v, z + cF(\omega)) = 0$. Elle sera donc une fonction des $\omega = u + v, \omega' = u - v$ de la forme

$$(6.5) \quad z = -c \int d\omega \sqrt{A(\omega)} + f(\omega'),$$

où

$$(6.6) \quad \int d\omega \sqrt{A(\omega)} = F(\omega) + a \equiv F(\omega) + \text{const.}$$

Par suite, l'angle φ — d'après (6.2) et (6.5) — doit être une fonction des ω, ω' définie par l'équation

$$(6.7) \quad tg \frac{\varphi}{2} = e^{f(\omega') - c \int d\omega \sqrt{A(\omega)}}$$

Mais φ doit, en outre, vérifier la seconde équation (6.1) qui — grâce à (6.2) — peut s'écrire sous la forme

$$(6.8) \quad \left\{ \frac{\partial z}{\partial u} - \frac{\partial z}{\partial v} \right\} \sin \varphi + 2 \frac{d \log \sqrt{A}}{d\omega} - 2c\sqrt{A} \cos \varphi = 0,$$

ou, si l'on y porte la valeur (6.5) de z et qu'on tienne compte que — d'après (6.7) — on a

$$(6.9) \quad \sin \varphi = \frac{2e^{f(\omega') + c \int d\omega \sqrt{A}}}{e^{2f(\omega')} + e^{2c \int d\omega \sqrt{A}}}, \quad \cos \varphi = \frac{e^{2c \int d\omega \sqrt{A}} - e^{2f(\omega')}}{e^{2f(\omega')} + e^{2c \int d\omega \sqrt{A}}},$$

sous la forme finale

$$(6.10) \quad 2e^{f(\omega')} \frac{df}{d\omega'} + e^{2f(\omega')} F_1(\omega) + F_2(\omega) = 0$$

avec

$$(6.11) \quad \left\{ \begin{array}{l} F_1(\omega) \equiv \left\{ \frac{d \log \sqrt{A}}{d\omega} + c\sqrt{A} \right\} e^{-c \int d\omega \sqrt{A}} \\ F_2(\omega) \equiv \left\{ \frac{d \log \sqrt{A}}{d\omega} - c\sqrt{A} \right\} e^{c \int d\omega \sqrt{A}}. \end{array} \right.$$

Mais on a, en dérivant $F_1(\omega)$, $F_2(\omega)$ par rapport à ω ,

$$(6.12) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{dF_1}{d\omega} = \left\{ \frac{d^2 \log \sqrt{A}}{d\omega^2} - c^2 A \right\} e^{-c \int d\omega \sqrt{A}} \equiv 0, \\ \frac{dF_2}{d\omega} = \left\{ \frac{d^2 \log \sqrt{A}}{d\omega^2} - c^2 A \right\} e^{c \int d\omega \sqrt{A}} \equiv 0 \end{array} \right.$$

la fonction $A(\omega)$ étant une solution de l'équation (4.5).

On aura donc

$$(6.13) \quad \left\{ \begin{array}{l} F_1(\omega) \equiv \left\{ \frac{d \log \sqrt{A}}{d\omega} + c\sqrt{A} \right\} e^{-c \int d\omega \sqrt{A}} = c_1 \\ F_2(\omega) \equiv \left\{ \frac{d \log \sqrt{A}}{d\omega} - c\sqrt{A} \right\} e^{c \int d\omega \sqrt{A}} = c_2 \end{array} \right.$$

et l'équation (6.10), grâce aux (6.12), devient

$$(6.14) \quad 2e^f \frac{df}{d\omega'} = -c_1 e^{2f} - c_2.$$

Il en résulte que $f(\omega')$ doit vérifier l'équation différentielle (6.14) dans laquelle c_1, c_2 sont des constantes, *dont l'une au moins est $\neq 0$* , la surface S étant une surface W_{r_2} . En effet, si $c_1 = c_2 = 0$, on aura, d'après (6.14), $f = \text{const.}$ et de là, en ayant égard à (6.7), $\varphi = \varphi(\omega) = \varphi(u + v)$.

Mais, l'angle φ — nous l'avons déjà reconnu dans le paragraphe 1 — n'est une fonction de la seule variable $\omega = u + v$ que dans le cas où S est une surface W_{r_1} .

On voit aussitôt, en ayant égard aux (6.12), que toute fonction $A(\omega)$ vérifiant les équations (6.13) pour trois valeurs données des constantes c_1, c_2, c est nécessairement une solution de l'équation différentielle (4.5) pour la même valeur de la constante c .

D'autre part, l'élimination de $e^{\int d\omega \sqrt{A}}$ entre les deux équations (6.13) donne

$$(6.15) \quad \left\{ \frac{d \log \sqrt{A}}{d\omega} \right\}^2 - c^2 A = c_1 c_2 \equiv c'$$

et on reconnaît aisément que toute solution $A(\omega)$ de l'équation (6.15) est une solution de l'équation (4.5) pour la même valeur de la constante c .

Or, si l'on considère trois constantes c_1, c_2, c dont les deux premières ne s'annulent pas simultanément et une solution $A(\omega)$ de l'équation (6.15) pour la valeur $c_1 c_2$ de c' , on peut déterminer une fonction primitive de $\sqrt{A}$ telle que les valeurs constantes des deux fonctions (6.13): $F_1(\omega), F_2(\omega)$, soient égales à c_1, c_2 . Alors l'angle φ , défini comme fonction des $\omega = u + v$, $\omega' = u - v$ par l'équation (6.7) dans laquelle $\int d\omega \sqrt{A}$ est la fonction primitive déjà déterminée de $\sqrt{A}(\omega)$ et $f(\omega')$ est une solution de l'équation différentielle (6.14) pour les valeurs considérées des c_1, c_2 , vérifie les équations (6.1) et, par conséquent, les équations (1.20), si l'on y pose $\tau = cA$.

En outre, si l'on tient compte des (1.12) et (1.17), on peut écrire les équations (1.5) et (4.4) sous la forme

$$(6.16) \quad \frac{dH}{d\omega} = c \frac{A}{\lambda^2}, \quad \frac{d^2 \log \lambda^2}{d\omega^2} = \frac{A}{\lambda^2} - \lambda^2 H^2.$$

Or, si les quatre fonctions $f(\omega')$ et $A(\omega)$, $H(\omega)$, $\lambda(\omega)$ vérifient respectivement l'équation (6.14) et les équations (6.15), (6.16) pour trois valeurs données des constantes c_1 , c_2 , c dont les deux premières ne s'annulent pas simultanément, on reconnaît aisément que les fonctions

$$(6.17) \quad \begin{aligned} E &= G = \lambda^2(\omega), \quad F \equiv 0; \\ L &= H\lambda^2 + \sqrt{A} \sin \varphi, \quad M = \sqrt{A} \cos \varphi, \quad N = H\lambda^2 - \sqrt{A} \sin \varphi, \end{aligned}$$

où $\cos \varphi$, $\sin \varphi$ sont les fonctions (6.9) de la solution considérée $f(\omega')$ de l'équation (6.14) et de la fonction primitive de $\sqrt{A}(\omega)$ qui correspond aux valeurs données des c_1 , c_2 , vérifient, si l'on pose $\omega = u + v$, $\omega' = u - v$, les équations (1.5) de GAUSS et (1.6) de CODAZZI. Il en résulte qu'on peut faire correspondre à ces quatre fonctions une surface — déterminée à un déplacement près — rapportée à deux paramètres isothermes u, v : la surface dont les deux formes fondamentales admettent pour coefficients les fonctions (6.17) des ω , ω' . Cette surface est une surface W_{r_2} dont les géodésiques (m) sont les courbes $u - v = \text{const.}$

On peut donc énoncer le

THÉORÈME B. — *La recherche des surfaces réelles W_{r_2} à courbures totale et moyenne non constantes se ramène à l'intégration de l'équation (6.14) et du système des équations (6.15), (6.16) dans lesquelles c , c_1 , c_2 sont des constantes dont la première et l'une au moins des deux dernières sont $\neq 0$.*

7. Les formules (1.23) pour la courbure normale κ_n et la torsion géodésique σ_g des géodésiques (m) de la surface W_{r_2} qui correspond à une solution $f(\omega') - A(\omega)$, $H(\omega)$, $\lambda(\omega)$ de l'équation (6.14) et du système des équations (6.15), (6.16), affectent — grâce aux (6.17) — la forme

$$(7.1) \quad \kappa_n = H + \frac{\sqrt{A}}{\lambda^2} \cos \varphi, \quad \sigma_g = \frac{\sqrt{A}}{\lambda^2} \sin \varphi,$$

ou bien, si l'on y porte les valeurs (6.9) des $\cos \varphi$, $\sin \varphi$, la forme

$$(7.2) \quad \kappa_n = H + \frac{\sqrt{A}}{\lambda^2} \frac{e^{2c} \int d\omega \sqrt{A} - e^{2f}}{e^{2c} \int d\omega \sqrt{A} + e^{2f}}, \quad \sigma_g = 2 \frac{\sqrt{A}}{\lambda^2} \frac{ef + c \int d\omega \sqrt{A}}{e^{2c} \int d\omega \sqrt{A} + e^{2f}}.$$

Ces formules, à l'aide des (6.13) dans lesquelles l'une au moins des

constantes c_1, c_2 est $\neq 0$, deviennent, dans le cas où l'on a $c_1 \neq 0$.

$$(7.3) \quad \left\{ \begin{aligned} x_n &= H + \frac{\sqrt{A}}{\lambda^2} \frac{\left\{ \frac{d \log \sqrt{A}}{d\omega} + c\sqrt{A} \right\}^2 - c_1^2 e^{2f}}{\left\{ \frac{d \log \sqrt{A}}{d\omega} + c\sqrt{A} \right\}^2 + c_1^2 e^{2f}}, \\ \sigma_g &= 2c_1 \frac{\sqrt{A}}{\lambda^2} \frac{\left\{ \frac{d \log \sqrt{A}}{d\omega} + c\sqrt{A} \right\} e^f}{\left\{ \frac{d \log \sqrt{A}}{d\omega} + \sqrt{A} \right\}^2 + c_1^2 e^{2f}} \end{aligned} \right.$$

et, dans le cas où l'on a $c_1 = 0, c_2 \neq 0$,

$$(7.4) \quad \left\{ \begin{aligned} x_n &= H + \frac{\sqrt{A}}{\lambda^2} \frac{c_2^2 - e^{2f} \left\{ \frac{d \log \sqrt{A}}{d\omega} - c\sqrt{A} \right\}^2}{c_2^2 + e^{2f} \left\{ \frac{d \log \sqrt{A}}{d\omega} - c\sqrt{A} \right\}^2}, \\ \sigma_g &= 2c_2 \frac{\sqrt{A}}{\lambda^2} \frac{\left\{ \frac{d \log \sqrt{A}}{d\omega} - c\sqrt{A} \right\} e^f}{c_2^2 + e^{2f} \left\{ \frac{d \log \sqrt{A}}{d\omega} - c\sqrt{A} \right\}^2}. \end{aligned} \right.$$

Mais la dérivée $\frac{d \log \sqrt{A}}{d\omega}$ est, d'après (6.15), une fonction algébrique de A .

Or, en éliminant cette dérivée entre l'équation (6.15) et chacune des (7.3) et (7.4), suivant que c_1 est $\neq$ ou $= 0$ et en tenant compte de la valeur (1.12) de A , on obtient deux équations algébriques à coefficients constants auxquelles doivent satisfaire H, K, λ^2, e^f et x_n, σ_g :

$$(7.5) \quad R'(x_n, H, K, \lambda^2, e^f) = 0, \quad R'(\sigma_g, H, K, \lambda^2, e^f) = 0.$$

Donc, la courbure $\kappa = |x_n|$ et la torsion $\sigma = \sigma_g$ des géodésiques (m) de la surface W_{r_2} qui correspond à une solution:

$$f(\omega); H(\omega), \lambda(\omega), A(\omega) (\equiv \lambda^4(H^2 - K),$$

de l'équation (6.13) et du système des équations (6.15), (6.16), sont des fonctions algébriques des K, H, λ^2 et e^f .

II

8. Considérons maintenant de nouveau une surface réelle S applicable sur une surface de révolution à courbures totale et moyenne non constantes. et supposons d'abord qu'elle soit une surface W_{r_2} .

Dans ce cas, les coefficients des deux formes fondamentales de S , rapportée aux paramètres isothermes u, v considérés au paragraphe 1, sont des fonctions des $\omega = u + v$, $\omega' = u - v$ de la forme (6.17).

Or, les valeurs du rapport $\frac{dv}{du}$, qui correspondent aux directions principales en un point arbitraire de S sont les racines — comme l'on sait — de l'équation

$$(8.1) \quad (GM - FN)\left(\frac{dv}{du}\right)^2 + (GL - EN)\frac{dv}{du} + FL - EM = 0$$

qui, en y remplaçant $E, F, G - L, M, N$ par leurs valeurs (6.17), devient

$$(8.2) \quad \cos \varphi \left(\frac{dv}{du}\right)^2 + 2 \sin \varphi \frac{dv}{du} - \cos \varphi = 0.$$

Donc, les équations différentielles des deux systèmes des lignes de courbure de S sont

$$\frac{dv}{du} = -\frac{\sin \varphi - 1}{\cos \varphi}, \quad \frac{dv}{du} = -\frac{\sin \varphi + 1}{\cos \varphi}.$$

Ces équations, si l'on y porte les valeurs (6.9) des $\cos \varphi, \sin \varphi$ et que l'on pose

$$(8.3) \quad P(\omega') \equiv e^{f(\omega')} \quad Q(\omega) \equiv e^c \int d\omega \sqrt{(\omega)},$$

affectent la forme

$$\frac{dv}{du} = \frac{Q(\omega) - P(\omega')}{Q(\omega) + P(\omega')}, \quad \frac{dv}{du} = -\frac{Q(\omega) + P(\omega')}{Q(\omega) - P(\omega')},$$

ou bien, si l'on tient compte qu'on a $\omega = u + v$, $\omega' = u - v$,

$$(8.4) \quad \frac{d\omega}{Q(\omega)} - \frac{d\omega'}{P(\omega')} = 0, \quad d\omega Q(\omega) + d\omega' P(\omega') = 0;$$

ce qui montre que l'intégration des équations différentielles des lignes de courbure de S se ramène à des quadratures.

On a ainsi une démonstration du théorème de S. LIE pour les surfaces W ⁽⁸⁾ dans le cas particulier des surfaces W_{r_2} .

En outre, si l'on rapporte S au réseau (u', v') de ses lignes de courbure comme lignes coordonnées, en posant

$$(8.5) \quad u' = \int \frac{d\omega}{Q(\omega)} - \int \frac{d\omega'}{P(\omega')}, \quad v' = \int d\omega Q(\omega) + \int d\omega' P(\omega')$$

et qu'on tienne compte que — grâce aux (8.5) — on a

$$(8.6) \quad \frac{D(u', v')}{D(\omega, \omega')} = \frac{P^2(\omega') + Q^2(\omega)}{P(\omega') Q(\omega)} \neq 0$$

et

$$(8.7) \quad d\omega = \frac{Q}{P^2 + Q^2} \{P^2 du' + dv'\}, \quad d\omega' = \frac{P}{P^2 + Q^2} \{-Q^2 du' + dv'\},$$

on trouve pour l'élément linéaire (1,1) de S rapportée aux paramètres u', v' l'expression

$$(8.8) \quad ds^2 = \frac{\lambda'^2(\omega)}{P^2 + Q^2} \{P^2 Q^2 du'^2 + dv'^2\}.$$

Il est à noter que les fonctions (8.3): P, Q , des ω' et ω vérifient respectivement — on le reconnaît sans peine en ayant égard au fait que, dans le cas envisagé, les fonctions $f(\omega'), A(\omega)$ sont des solutions des équations différentielles (6.14) et (6.15) — les équations différentielles

$$(8.9) \quad \frac{dP}{d\omega'} = -\frac{c_1 P^2 + c_2}{2}, \quad \frac{dQ}{d\omega} = \frac{c_1 Q^2 - c_2}{2}$$

dans lesquelles l'une au moins des constantes c_1, c_2 — nous l'avons déjà reconnu dans le paragraphe 5 — est $\neq 0$.

⁽⁸⁾ G. DARBOUX, *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, Vol. III, p. 359, Paris 1894.

Une conséquence de ce fait est que les intégrales $\int P(\omega')d\omega'$, $\int \frac{d\omega'}{P(\omega')}$ sont des fonctions de P , tandis que les intégrales $\int Q(\omega)d\omega$, $\int \frac{d\omega}{Q(\omega)}$ sont des fonctions de Q .

Pour trouver ces fonctions il faut distinguer trois cas, suivant que l'on a $c_1 \neq 0$, $c_2 \neq 0 - c_1 = 0$, $c_2 \neq 0$ et $c_1 \neq 0$, $c_2 = 0$, l'une au moins des constantes c_1 , c_2 étant $\neq 0$.

a) Soit $c_1 \neq 0$, $c_2 \neq 0$.

Dans ce cas, en ayant égard aux (8.9), on a

$$(8.10) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int P d\omega' = - \int \frac{2P dP}{c_1 P^2 + c_2} = \frac{1}{c_1} \log \frac{a}{c_1 P^2 + c_2}, \\ \int \frac{d\omega'}{P} = - \int \frac{2dP}{P(c_1 P^2 + c_2)} = \frac{1}{c_2} \log \frac{c_1 P^2 + c_2}{b P^2} \end{array} \right.$$

et

$$(8.11) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int Q d\omega = \int \frac{2Q dQ}{c_1 Q^2 - c_2} = \frac{1}{c_1} \log \frac{c_1 Q^2 - c_2}{a'}, \\ \int \frac{d\omega}{Q} = \int \frac{2dQ}{Q(c_1 Q^2 - c_2)} = \frac{1}{c_2} \log \frac{c_2 - c_1 Q^2}{b' Q^2} \end{array} \right.$$

où a , $a' - b$, b' sont des constantes $\neq 0$.

b) Soit $c_1 = 0$, $c_2 \neq 0$.

Dans ce cas, les équations (8.9) deviennent

$$(8.12) \quad \frac{dP}{d\omega'} = - \frac{c_2}{2}, \quad \frac{dQ}{d\omega} = - \frac{c_2}{2}$$

et, par suite, on a

$$(8.13) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int P d\omega' = - \frac{2}{c_2} \int P dP = - \frac{P^2}{c_2} + a, \\ \int \frac{d\omega'}{P} = - \frac{2}{c_2} \int \frac{dP}{P} = \frac{1}{c_2} \log \frac{b}{P^2} \end{array} \right.$$

et

$$(8.14) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int Q d\omega = -\frac{2}{c_2} \int Q dQ = -\frac{Q^2}{c_2} + a', \\ \int \frac{d\omega}{Q} = -\frac{2}{c_2} \int \frac{dQ}{Q} = \frac{1}{c_2} \log \frac{b'}{Q^2} \end{array} \right.$$

où $a, a' - b, b'$ sont des constantes dont les deux dernières sont $\neq 0$.

c) *Soit enfin* $c_1 \neq 0, c_2 = 0$.

Les équations (8.9) affectent, dans ce cas, la forme

$$(8.15) \quad \frac{dP}{d\omega'} = -\frac{c_1 P^2}{2}, \quad \frac{dQ}{d\omega} = \frac{c_1 Q^2}{2}$$

et on a

$$(8.16) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int P d\omega' = -\frac{2}{c_1} \int \frac{dP}{P} = \frac{1}{c_1} \log \frac{a}{P^2}, \\ \int \frac{d\omega'}{P} = -\frac{2}{c_1} \int \frac{dP}{P^3} = \frac{1}{c_1 P^2} + b \end{array} \right.$$

et

$$(8.17) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int Q d\omega = \frac{2}{c_1} \int \frac{dQ}{Q} = \frac{1}{c_1} \log \frac{Q^2}{a'}, \\ \int \frac{d\omega}{Q} = \frac{2}{c_1} \int \frac{dQ}{Q^3} = -\frac{1}{c_1 Q^2} + b', \end{array} \right.$$

où $a, a' - b, b'$ sont des constantes dont les deux premières sont $\neq 0$.

9. Supposons de plus que S soit une surface isothermique.

Dans ce cas, d'après (8.8), on aura

$$(9.1) \quad \varepsilon P(\omega') Q(\omega) \equiv \sigma(u') \varphi(v')$$

où ε est une constante, les variables u', v' étant liées avec ω, ω' par les relations (8.5), ou bien

$$(9.2) \quad \log \varepsilon + \log P(\omega') + \log Q(\omega) \equiv \log \sigma(u') + \log \varphi(v')$$

Or, en dérivant (9.2) par rapport à ω' et à ω , compte tenu que les variables ω, ω' sont indépendantes, on aura aussi

$$\begin{aligned}\frac{1}{P} \frac{dP}{d\omega'} &\equiv \frac{1}{\sigma} \frac{d\sigma}{du'} \frac{\partial u'}{\partial \omega'} + \frac{1}{\varphi} \frac{d\varphi}{dv'} \frac{\partial v'}{\partial \omega'}, \\ \frac{1}{Q} \frac{dQ}{d\omega} &\equiv \frac{1}{\sigma} \frac{d\sigma}{du'} \frac{\partial u'}{\partial \omega} + \frac{1}{\varphi} \frac{d\varphi}{dv'} \frac{\partial v'}{\partial \omega},\end{aligned}$$

ou bien, grâce aux (8.5),

$$(9.3) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{1}{P} \frac{dP}{d\omega'} &\equiv -\frac{1}{\sigma} \frac{d\sigma}{du'} \frac{1}{P} + \frac{1}{\varphi} \frac{d\varphi}{dv'} P, \\ \frac{1}{Q} \frac{dQ}{d\omega} &\equiv \frac{1}{\sigma} \frac{d\sigma}{du'} \frac{1}{Q} + \frac{1}{\varphi} \frac{d\varphi}{dv'} Q. \end{aligned} \right.$$

En dérivant ensuite l'une des deux identités (9.3) — p.e. la première — par rapport à ω et en tenant compte que $\frac{1}{P} \frac{dP}{d\omega'}$ et P sont des fonctions de la seule variable ω' , on aura également

$$-\frac{1}{P} \frac{d}{du'} \left(\frac{1}{\sigma} \frac{d\sigma}{du'} \right) \frac{\partial u'}{\partial \omega} + P \frac{d}{dv'} \left(\frac{1}{\varphi} \frac{d\varphi}{dv'} \right) \frac{\partial v'}{\partial \omega} \equiv 0,$$

ou bien, d'après (8.5)

$$-\frac{d}{du'} \left(\frac{1}{\sigma} \frac{d\sigma}{du'} \right) \frac{1}{PQ} + \frac{d}{dv'} \left(\frac{1}{\varphi} \frac{d\varphi}{dv'} \right) PQ \equiv 0.$$

ou finalement, grâce à (9.1),

$$(9.4) \quad \frac{\varepsilon^2}{\sigma^2} \frac{d}{du'} \left(\frac{1}{\sigma} \frac{d\sigma}{du'} \right) \equiv \varphi^2 \frac{d}{dv'} \left(\frac{1}{\varphi} \frac{d\varphi}{dv'} \right).$$

Mais les deux membres de l'identité (9.4) sont respectivement des fonctions des variables u' et v' qui — d'après (8.6) — sont indépendantes. Donc, pour que l'équation (9.4) soit une identité, il faut que ses deux membres soient égaux à la même constante. Il en résulte que σ et φ sont nécessairement des fonctions des u' et v' vérifiant respectivement deux équations différentielles de la forme

$$\frac{d}{du'} \left(\frac{1}{\sigma} \frac{d\sigma}{du'} \right) = c_0 \sigma^2, \quad \frac{d}{dv'} \left(\frac{1}{\varphi} \frac{d\varphi}{dv'} \right) = \frac{c_0 \varepsilon^2}{\varphi^2} \equiv \frac{c_0'}{\varphi^2}$$

qui — on le voit aussitôt — sont équivalentes aux équations

$$(9.5) \quad \left(\frac{1}{\sigma} \frac{d\sigma}{du'} \right)^2 = c_0 \sigma^2 + c', \quad \left(\frac{1}{\varphi} \frac{d\varphi}{dv'} \right)^2 = \frac{c_0'}{\varphi^2} + c''$$

où $c_0, c_0' = \varepsilon_0^2 c_0, c', c''$ sont des constantes.

En outre, les deux identités (9.3) donnent

$$\left\{ \frac{1}{P} \frac{dP}{d\omega'} \right\}^2 + \left\{ \frac{1}{Q} \frac{dQ}{d\omega'} \right\}^2 = \left\{ \frac{1}{\sigma} \frac{d\sigma}{du'} \right\}^2 \frac{1}{P^2} + \frac{1}{Q^2} \left\{ + \left\{ \frac{1}{\varphi} \frac{d\varphi}{dv'} \right\}^2 \right\} P^2 + Q^2 \left\{ , \right.$$

ou bien, grâce aux (8.9, (9.1) et (9.5),

$$\left(\frac{c_1^2}{4} - c'' \right) P^2(\omega) Q^2(\omega') + \frac{c_2^2}{4} - c' \equiv 0.$$

On aura donc

$$(9.6) \quad c' = \frac{c_2^2}{4}, \quad c'' = \frac{c_1^2}{4}$$

les variables ω, ω' étant indépendantes.

Ainsi, les équations différentielles (9.5) auxquelles doivent satisfaire les fonctions $\sigma(u'), \varphi(v')$ affectent la forme

$$(9.7) \quad \left(\frac{1}{\sigma} \frac{d\sigma}{du'} \right)^2 = c_0 \sigma^2 + \frac{c_2^2}{4}, \quad \left(\frac{1}{\varphi} \frac{d\varphi}{dv'} \right)^2 = -\frac{c_0'}{\varphi^2} + \frac{c_1^2}{4},$$

où c_1, c_2 sont des constantes dont l'une au moins — nous l'avons reconnu dans le paragraphe 5 — est $\neq 0$, la surface S étant une surface W_{r_2} .

Il en résulte que, dans le cas où l'équation fonctionnelle (9.1) est vérifiée, $\sigma(u'), \varphi(v')$ sont de la forme

$$(9.8) \quad \sigma(u') = \frac{1}{\lambda_2 e^{-\frac{c_2}{2} u'} + \mu_2 e^{\frac{c_2}{2} u'}}, \quad \varphi(v') = \lambda_1 e^{\frac{c_1}{2} v'} + \mu_1 e^{-\frac{c_1}{2} v'},$$

où $\lambda_1, \mu_1, \lambda_2, \mu_2$ sont des constantes, si l'on a $c_1 \neq 0, c_2 \neq 0$; elles sont de la forme

$$(9.9) \quad \sigma(u') = \frac{1}{\lambda_2 e^{-\frac{c_2}{2} u'} + \mu_2 e^{\frac{c_2}{2} u'}}, \quad \varphi(v') = \lambda_1 v' + \mu_1,$$

si l'on a $c_1 = 0$, $c_2 \neq 0$ et, enfin, de la forme

$$(9.10) \quad \sigma(u') = \frac{1}{\lambda_2 u' + \mu_2}, \quad \varphi(v') = \lambda_1 e^{\frac{c_1}{2} v'} + \mu_1 e^{-\frac{c_1}{2} v'},$$

si l'on a $c_1 \neq 0$, $c_2 = 0$.

Donc, l'équation (9.1), si l'on a

A) $c_1 \neq 0$, $c_2 \neq 0$, grâce aux (8.5) et (9.8), aura la forme

$$(9.11) \quad \varepsilon PQ = \frac{\lambda_1 e^{\frac{c_1}{2}} \left\{ \int Q d\omega + P d\omega' \right\} + \mu_1 e^{-\frac{c_1}{2}} \left\{ \int Q d\omega + \int P d\omega' \right\}}{\lambda_2 e^{-\frac{c_2}{2}} \left\{ \int \frac{d\omega}{Q} - \int \frac{d\omega'}{P} \right\} + \mu_2 e^{\frac{c_2}{2}} \left\{ \int \frac{d\omega}{Q} - \int \frac{d\omega'}{P} \right\}}.$$

Mais, d'après (9.10) et (8.11), on a

$$(9.12) \quad \begin{cases} \log P = -\frac{c_1}{2} \int P d\omega' - \frac{c_2}{2} \int \frac{d\omega'}{P} + \log \sqrt{\frac{a}{b}} \\ \log Q = \frac{c_1}{2} \int Q d\omega - \frac{c_2}{2} \int \frac{d\omega}{Q} + \log \sqrt{\frac{a'}{-b'}} \end{cases}$$

et l'équation (9.11), grâce aux (9.12), devient

$$\begin{aligned} & \lambda_1 e^{\frac{c_1}{2}} \left[\int Q d\omega + \int P d\omega' \right] + \mu_1 e^{-\frac{c_1}{2}} \left[\int Q d\omega + \int P d\omega' \right] = \\ & \varepsilon \sqrt{\frac{aa'}{-bb'}} \left\{ \lambda_2 e^{-c_2 \int \frac{d\omega}{Q}} + \mu_2 e^{-c_2 \int \frac{d\omega'}{P}} \right\} e^{\frac{c_1}{2} \left[\int Q d\omega - \int P d\omega' \right]} \end{aligned}$$

ou bien

$$(9.13) \quad \begin{aligned} \lambda_1 e^{c_1 \int P d\omega'} - \mu_2 \varepsilon \sqrt{\frac{aa'}{-bb'}} e^{-c_2 \int \frac{d\omega'}{P}} = & -\mu_1 e^{-c_1 \int Q d\omega} + \\ & + \lambda_2 \varepsilon \sqrt{\frac{aa'}{-bb'}} e^{-c_2 \int \frac{d\omega}{Q}}. \end{aligned}$$

Or, pour que l'équation (9.11) soit une identité, il suffit évidemment qu'il en soit de même pour l'équation (9.13).

Il suffit donc, puisque les deux membres de l'équation (9.13) sont respectivement des fonctions des variables indépendantes ω' , ω , que ses deux membres soient égaux à la même constante. Mais l'équation (9.13), si on y

remplace les intégrales qui y figurent par leurs valeurs (8.10) et (8.11) se réduit à

$$\frac{\lambda_1 a - \mu_2 \varepsilon b \sqrt{\frac{aa'}{-bb'}} P^2}{c_2 + c_1 P^2} = \frac{-\mu_1 a' + \lambda_2 \varepsilon b' \sqrt{\frac{aa'}{-bb'}} Q^2}{c_2 - c_1 Q^2}$$

et elle est identiquement vérifiée, si l'on a

$$(9.14) \quad \frac{\lambda_1 a}{c_2} = -\varepsilon \frac{\mu_2 b}{c_1} \sqrt{\frac{aa'}{-bb'}} = -\frac{\mu_1 a'}{c_2} = -\varepsilon \frac{\lambda_2 b'}{c_1} \sqrt{\frac{aa'}{-bb'}}.$$

L'équation (9.1), si l'on a

B) $c_1 = 0$, $c_2 \neq 0$ et qu'on tienne compte des (8.5) et (9.9) devient

$$(9.15) \quad \varepsilon PQ = \frac{\lambda_1 \left[\int Q d\omega + \int P d\omega' \right] + \mu_2}{\lambda_2 e^{-\frac{c_2}{2} \left[\int \frac{d\omega}{Q} - \int \frac{d\omega'}{P} \right]} + \mu_2 e^{\frac{c_2}{2} \left[\int \frac{d\omega}{Q} - \int \frac{d\omega'}{P} \right]}}.$$

Mais, grâce aux (8.13) et (8.14), on a

$$(9.16) \quad \log Q = -\frac{c_2}{2} \int \frac{d\omega}{Q} + \log \sqrt{b'}, \quad \log P = -\frac{c_2}{2} \int \frac{d\omega'}{P} + \log \sqrt{b}$$

et l'équation (9.16), peut s'écrire sous la forme

$$\lambda_1 \left[\int Q d\omega + \int P d\omega' \right] + \mu_1 = \varepsilon \lambda_2 \sqrt{b'} e^{-c_2 \int \frac{d\omega}{Q}} + \varepsilon \mu_2 \sqrt{b} e^{-c_2 \int \frac{d\omega'}{P}}.$$

ou bien, si on y remplace les intégrales qui y figurent par leurs valeurs (8.13) et (8.14),

$$(9.17) \quad \lambda_1 \left[-\frac{Q^2}{c_2} - \frac{P^2}{c_2} + a' + a \right] + \mu_1 = \lambda_2 \varepsilon \sqrt{\frac{b}{b'}} Q^2 + \mu_2 \varepsilon \sqrt{\frac{b'}{b}} P^2.$$

Cette équation et, par conséquent, l'équation (9.15), est identiquement vérifiée, si l'on a

$$(9.18) \quad \frac{\lambda_1}{c_2} = -\lambda_2 \varepsilon \sqrt{\frac{b}{b'}}, \quad \frac{\lambda_1}{c_2} = -\mu_2 \varepsilon \sqrt{\frac{b'}{b}}, \quad \lambda_1(a + a') + \mu_1 = 0.$$

Enfin, l'équation (9.1), si l'on a

C) $c_1 \neq 0$, $c_2 = 0$, affecte, à l'aide des (8.5) et (9.10), la forme

$$(9.19) \quad \varepsilon PQ = \frac{\lambda_1 e^{\frac{c_1}{2} \left[\int Q d\omega + \int P d\omega' \right]} + \mu_1 e^{-\frac{c_1}{2} \left[\int Q d\omega + \int P d\omega' \right]}}{\lambda_2 \left[\int \frac{d\omega}{Q} - \int \frac{d\omega'}{P} \right] + \mu_2}.$$

Mais, d'après (8.16) et (8.17), on a

$$(9.20) \quad \log Q = \frac{c_1}{2} \int Q d\omega + \log V \bar{a}', \quad \log P = -\frac{c_1}{2} \int P d\omega' + \log V \bar{a}$$

et l'équation (9.19) devient

$$(9.21) \quad \varepsilon V \bar{a} \bar{a}' \left[\lambda_2 \left\{ \int \frac{d\omega}{Q} - \int \frac{d\omega'}{P} \right\} + \mu_2 \right] = \lambda_1 e^{c_1 \int P d\omega'} + \mu_1 e^{-c_1 \int Q d\omega},$$

ou bien, grâce aux (8.16) et (8.17),

$$(9.22) \quad \varepsilon V \bar{a} \bar{a}' \left[\lambda_2 \left\{ -\frac{1}{c_1 P^2} - \frac{1}{c_1 Q^2} + b' - b \right\} + \mu_2 \right] = \lambda_1 \frac{a}{P^2} + \mu_1 \frac{a'}{Q^2}.$$

Cette équation et, par suite, l'équation (9.19) est évidemment une identité, si l'on a

$$(9.23) \quad \varepsilon V \bar{a} \bar{a}' \frac{\lambda_2}{c_1} = -\lambda_1 a, \quad \varepsilon V \bar{a} \bar{a}' \frac{\lambda_2}{c_1} = -\mu_1 a', \quad \lambda_2(b' - b) + \mu_2 = 0.$$

Il en résulte qu'il est toujours possible de trouver deux fonctions $\sigma(u')$, $\varphi(v')$ telles que l'équation (9.1) soit identiquement vérifiée. En effet, l'équation (9.1) est identiquement vérifiée dans le cas où l'on a $c_1 \neq 0$, $c_2 \neq 0$, si les fonctions σ , φ sont de la forme (9.8) et qu'on détermine les rapports $\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$, $\frac{\mu_2}{\lambda_1}$, $\frac{\mu_1}{\lambda_1}$ à l'aide des (9.14), dans le cas où l'on a $c_1 = 0$, $c_2 \neq 0$, si les fonctions σ , φ sont de la forme (9.9) et qu'on détermine les rapports $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$, $\frac{\mu_1}{\lambda_2}$, $\frac{\mu_2}{\lambda_2}$ à l'aide des (9.18) et dans le cas où l'on a $c_1 \neq 0$, $c_2 = 0$, si les fonctions σ , φ sont de la forme (9.10) et qu'on détermine les rapports $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$, $\frac{\mu_1}{\lambda_2}$, $\frac{\mu_2}{\lambda_2}$ à l'aide des (9.23).

On peut donc, en ayant égard au fait que toutes les surfaces réelles à courbure moyenne constante sont isothermiques ⁽⁹⁾, formuler le

THÉORÈME C. - *Toutes les surfaces réelles W_{r_2} à courbure totale non constante sont isothermiques.*

10. Supposons en second lieu que S soit une surface W_{r_1} .

Si on rapporte S au réseau orthogonal (u_1, v_1) dont les courbes $u_1 = \text{const.}$ sont les trajectoires orthogonales des positions diverses de sa courbe génératrice r_1 , u_1 étant l'arc de cette courbe, et qu'on choisisse convenablement le paramètre v_1 , les coefficients $E_1, F_1, G_1, L_1, M_1, N_1$ des deux formes fondamentales de S prennent la forme ⁽¹⁰⁾

$$(10.1) \quad E_1 \equiv 1, \quad F_1 \equiv 0, \quad G_1 = \frac{1}{\sigma}; \quad L_1 = \kappa, \quad M_1 = \sqrt{\sigma}, \quad N_1 = \frac{\sigma}{\kappa} - \frac{1}{\kappa \sqrt{\sigma}} \frac{d^2}{du_1^2} \frac{1}{\sqrt{\sigma}},$$

où κ, σ sont la courbure et la torsion de la courbe r_1 .

Les valeurs du rapport $\frac{dv_1}{du_1}$, qui correspondent aux directions principales en un point arbitraire de S , sont les racines de l'équation

$$(10.2) \quad \left(\frac{dv_1}{du_1}\right)^2 + \sqrt{\sigma} A \frac{dv_1}{du_1} - \sigma = 0.$$

qu'on obtient en remplaçant dans (8.1) $E, F, G; L, M, N$ par leurs valeurs (10.1) et en posant

$$(10.3) \quad A \equiv \frac{\kappa}{\sigma} - \frac{\sigma}{\kappa} + \frac{1}{\kappa \sqrt{\sigma}} \frac{d^2}{du_1^2} \frac{1}{\sqrt{\sigma}}.$$

Par suite, les deux systèmes des lignes de courbure de S seront définis par les équations différentielles

$$(10.4) \quad dv_1 + (A_1 - B_1) du_1 = 0, \quad dv_1 + (A_1 + B_1) du_1 = 0,$$

où

$$(10.5) \quad A_1 = A_1(u_1) \equiv \frac{A \sqrt{\sigma}}{2}, \quad B_1 = B_1(u_1) \equiv \sqrt{A_1^2 + \sigma} = \sqrt{\frac{A^2 \sigma}{4} + \sigma},$$

⁽⁹⁾ G. DARDOUX; loc. cit., vol. II, p. 259, 1915.

⁽¹⁰⁾ O. PYLARINOS; loc. cit. (1), p. 130-136.

dont l'intégration se ramène à des quadratures. Le théorème de S. LIE, mentionné dans le paragraphe 8, pour les surfaces W est ainsi démontré dans le cas des surfaces W_{r_1} .

Or, si on rapporte maintenant S au réseau (u', v') de ses lignes de courbure en posant

$$(10.6) \quad u' = v_1 + \int (A_1 - B_1) du_1, \quad v' = v_1 + \int (A_1 + B_1) du_1,$$

on aura pour les coefficients E', F', G' de la première forme fondamentale de cette surface rapportée aux paramètres u', v' , en faisant usage des formules connues et en ayant égard aux (10.1) et (10.6), les expressions

$$(10.7) \quad E' = \frac{\sigma + (A_1 + B_1)^2}{4\sigma B_1^2}, \quad F' = 0, \quad G' = \frac{\sigma + (A_1 - B_1)^2}{4\sigma B_1^2}.$$

En outre on a, grâce aux (10.6),

$$(10.8) \quad -2B_1(u_1) du_1 = d(u' - v'),$$

ce qui montre que l'arc u_1 de la courbe génératrice r_1 de la surface est une fonction de la seule variable $u' - v'$.

Donc, si S est une surface isothermique, on aura

$$\frac{E'}{G'} = \frac{\sigma + (A_1 + B_1)^2}{\sigma + (A_1 - B_1)^2} \equiv f_1^2(u') f_2^2(v')$$

ou bien

$$(10.9) \quad \frac{B_1 + A_1}{\sqrt{\sigma}} \equiv f_1(u') f_2(v'),$$

compte tenu que, d'après (10.5), on a

$$(10.10) \quad B_1 - A_1 = \frac{\sigma}{B_1 + A_1}.$$

Mais $B_1 + A_1$ est une fonction de la seule variable u_1 qui est aussi une fonction de la seule variable $u' - v'$ satisfaisant à l'équation différentielle (10.8). Aussi $\frac{B_1 + A_1}{\sqrt{\sigma}}$ doit-il être une fonction de la différence

$u' - v'$: $F(u' - v')$, telle que l'on ait

$$F(u' - v') \equiv f_1(u') \cdot f_2(v').$$

Par conséquent $\frac{B_1 + A_1}{\sqrt{\sigma}}$ est nécessairement une fonction de la différence $u' - v'$ de la forme

$$(10.11) \quad \frac{B_1 + A_1}{\sqrt{\sigma}} = b e^{b'(u' - v')},$$

où b, b' sont des constantes dont la première — comme il résulte des (10.5) — ne s'annule que dans le cas où la courbe génératrice r_1 est plane. Mais, dans ce cas, les positions diverses de cette courbe sont en même temps des géodésiques et des lignes de courbure de la surface et la surface — étant isothermique — à moins qu'elle ne soit conique, est nécessairement une surface de révolution ⁽¹¹⁾.

Donc, si S n'est pas une surface conique ou une surface de révolution, la constante b est $\neq 0$ et de l'équation (10.1), en ayant égard aux (10.5) on tire

$$(10.12) \quad A = b e^{b'(u' - v')} - \frac{1}{b} e^{-b'(u' - v')}.$$

Or, en dérivant (10.12) par rapport à u_1 et en tenant compte des (10.5) et (10.8), on parvient à l'équation différentielle

$$(10.13) \quad \frac{1}{\sqrt{\sigma}} \frac{d}{du_1} \left(\frac{A}{2} \right) = 2b' \left(\frac{A^2}{4} + 1 \right)$$

à laquelle doit satisfaire $A(u_1)$ dans le cas où S est une surface isothermique.

Par suite, la courbure κ et la torsion σ de la courbe génératrice r_1 d'une surface W_{r_1} isothermique sont nécessairement des fonctions de son arc vérifiant d'une part l'équation différentielle (3.4) — qui exprime la condition nécessaire et suffisante afin qu'une courbe gauche soit une courbe

⁽¹¹⁾ O. PYLARINOS; loc. cit. (6), p. 329.

r_1 et d'autre part l'équation différentielle

$$(10.14) \quad \frac{d}{du_1} \left\{ \frac{\kappa}{\sigma} - \frac{\sigma}{\kappa} + \frac{1}{\kappa \sqrt{\sigma}} \frac{d^2}{du_1^2} \frac{1}{\sqrt{\sigma}} \right\} = b' \sqrt{\sigma} \left\{ \left(\frac{\kappa}{\sigma} - \frac{\sigma}{\kappa} + \frac{1}{\kappa \sqrt{\sigma}} \frac{d^2}{du_1^2} \frac{1}{\sqrt{\sigma}} \right)^2 + 4 \right\}$$

qu'on obtient de l'équation (10.13) en y remplaçant A par sa valeur (10.3).

D'autre part, une fonction $A(u_1)$ vérifiant l'équation (10.13), lorsque u_1 est une fonction de la différence $u' - v'$ satisfaisant à l'équation (10.8), est — on le reconnaît aisément — une fonction de $u' - v'$ de la forme (10.12): ce qui montre que la condition (10.9), qui est suffisante pour que la surface soit isothermique, est remplie.

Or, à chaque solution $\kappa(u_1)$, $\sigma(u_1)$ des équations différentielles (3.4) et (10.14), pour une valeur donnée de la constante b' , on peut faire correspondre une courbe r_1 déterminée à un déplacement près. Les positions diverses de cette courbe, lorsque elle se meut de manière que les trajectoires de ses points se confondent avec les trajectoires orthogonales de ses positions, engendrent une surface W_{r_1} déterminée également à un déplacement près, puisque les coefficients de ses deux formes fondamentales, par un choix convenable des paramètres, affectent la forme (10.1) et, en conséquence, ils sont des fonctions des κ , σ et de leurs dérivées par rapport à u_1 d'une forme déterminée. Cette surface — d'après ce qui est exposé ci-dessus — est isothermique. On peut donc énoncer le

THÉOREME D. — *La recherche des surfaces W_{r_1} isothermiques se ramène à l'intégration du système des équations différentielles (3.4) et (10.14) dans laquelle b' est une constante.*

III

11. Supposons enfin que la surface considérée S soit une surface W_{r_1} dont les deux courbures K , H vérifient une équation algébrique:

$$(11.1) \quad R(K, H) = 0,$$

qui ne se réduit ni à $K = \text{const.}$ ni à $H = \text{const.}$

Le coefficient λ de l'élément linéaire de S rapportée à des paramètres isothermes u, v tels que les courbes $u - v = \text{const.}$ soient ses géodésiques (m) ainsi que les courbures K, H de cette surface sont — d'après ce qui est exposé dans les paragraphes 1 et 5 — des fonctions de la seule variable

$\omega = u + v$ vérifiant les équations différentielles

$$(11.2) \quad \frac{d^2 \log \lambda}{d\omega^2} = -\frac{K\lambda^2}{2}, \quad \frac{dH}{d\omega} = c\lambda^2(H^2 - K), \quad \frac{d^2 \log A}{d\omega^2} = 2c^2 A,$$

où

$$(11.3) \quad A \equiv \lambda^4(H^2 - K) \neq 0, \quad c = \text{const.} \neq 0,$$

les courbures K , H de S étant non constantes.

La troisième équation (11.2) est — on le voit aussitôt — équivalente à l'équation

$$(11.4) \quad \left(\frac{d \log A}{d\omega} \right)^2 = 4c^2 A + c',$$

où c' est aussi une constante. L'équation (11.4), si on y remplace A par sa valeur (11.3) et qu'on tienne compte que K est une fonction de H définie par l'équation (11.1), prend, à l'aide de la seconde équation (11.2), la forme

$$(11.5) \quad 16 \left(\frac{d \log \lambda}{d\omega} \right)^2 + 8c \left(2H - \frac{dK}{dH} \right) \lambda^2 \frac{d \log \lambda}{d\omega} +$$

$$c^2 \lambda^4 \left\{ \left(2H - \frac{dK}{dH} \right)^2 - 4(H^2 - K) \right\} - c' = 0,$$

tandis que de la troisième équation (11.2), en tenant compte des (11.3) et en faisant usage des deux premières équations (11.2), on a

$$(11.6) \quad 2c \left\{ 2H - \frac{dK}{dH} \right\} \frac{d \log \lambda}{d\omega} - c^2 \lambda^2 (H^2 - K) \frac{d^2 K}{dH^2} - 2K = 0.$$

L'équation (11.6), dans le cas particulier où l'équation (11.1) est de la forme

$$(11.7) \quad H^2 - K = c_1 \equiv \text{const.} \neq 0,$$

devient

$$K = -c^2 c_1 \lambda^2,$$

ou bien, grâce à (11.7),

$$(11.8) \quad \lambda^2 = \frac{c_1 - H^2}{c^2 c_1}.$$

Or, en dérivant (11.8) par rapport à ω et en tenant compte de l'équation (11.7) et de la seconde équation (11.2), on trouve

$$(11.9) \quad \frac{d \log \lambda}{d\omega} = - \frac{H}{c_1}.$$

Par ailleurs, l'élimination de λ^2 entre les deux premières équations (11.2), compte tenu de l'équation (11.7), donne

$$\frac{d^2 \log \lambda}{d\omega^2} = - \frac{H^2 - c_1}{2cc_1} \frac{dH}{d\omega},$$

ce qui, en intégrant, conduit à

$$(11.10) \quad \frac{d \log \lambda}{d\omega} = - \frac{H^2}{6cc_1} + \frac{H}{2c} + c_2.$$

où c_2 est aussi une constante.

Mais les deux expressions (11.9) et (11.10) de la dérivée $\frac{d \log \lambda}{d\omega}$ en fonction de H ne peuvent coïncider que dans le cas où H (et, par suite, K d'après (11.7)) est constante; ce qui montre que l'équation (11.7) n'est pas compatible avec les équations (11.2) ou — ce qui revient au même — avec les équations (4.3) qui doivent être vérifiées toutes les fois que S est une surface W_{r_2} . On peut donc, en tenant compte que l'équation (11.7) est équivalente à une équation de la forme $k_1 - k_2 = \text{const.}$, où k_1, k_2 sont les courbures principales de S , énoncer le

THÉORÈME E. — *Toutes les surfaces W_r pour lesquelles la différence des courbures principales est constante ($\neq 0$), sont nécessairement des surfaces W_{r_1} .*

12. D'après le théorème E, si S est une surface W_{r_2} , l'équation algébrique (11.1) n'est pas de la forme (11.8). On aura donc $2H - \frac{dK}{dH} \neq 0$, et l'équation (11.6) montre que la dérivée $\frac{d \log \lambda}{d\omega}$ est toujours une fonction rationnelle des λ, K, H .

D'autre part, la dérivée $\frac{d \log \lambda}{d\omega}$ doit vérifier l'équation (11.5) et

l'élimination de cette dérivée entre les équations (11.5) et (11.6) donne

$$(12.1) \quad 4 \left\{ c^2 \lambda^2 (H^2 - K) \frac{d^2 K}{dH^2} + 2K \right\}^2 + 4c^2 \lambda^2 \left\{ 2H - \frac{dK}{dH} \right\}^2 \left\{ c^2 \lambda^2 (H^2 - K) \frac{d^2 K}{dH^2} + 2K \right\} +$$

$$c^4 \left\{ 2H - \frac{dK}{dH} \right\}^2 \left\{ \left(2H - \frac{dK}{dH} \right)^2 - 4(H^2 - K) \right\} \lambda^4 - c^2 c' \left(2H - \frac{dK}{dH} \right)^2 = 0.$$

Le premier membre de l'équation (12.1) est un polynôme de λ dont les coefficients sont des fonctions rationnelles des K , H , compte tenu que, dans le cas envisagé, K est une fonction de H définie par l'équation algébrique (11.1).

Le coefficient de λ^0 de ce polynôme est

$$16K^2 - c^2 c' \left\{ 2H - \frac{dK}{dH} \right\}^2$$

et, s'il on a $c' = 0$, il ne s'annule que dans le cas où $K = 0$, tandis que, si l'on a $c' \neq 0$, ce coefficient ne s'annule que dans le cas où K est une fonction de H satisfaisant à l'une des deux équations différentielles

$$(12.2) \quad \frac{dK}{dH} \pm \frac{4K}{c\sqrt{c'}} - 2H = 0$$

et, par conséquent, dans le cas où K est une fonction de H soit de la forme

$$\frac{c^2 c'}{8} \left(\frac{4H}{c\sqrt{c'}} - 1 \right) + a e^{-\frac{4H}{c\sqrt{c'}}}$$

soit de la forme

$$-\frac{c^2 c'}{8} \left(\frac{4H}{c\sqrt{c'}} + 1 \right) + a e^{\frac{4H}{c\sqrt{c'}}},$$

où a est une constante. Par suite, les fonctions algébriques $K(H)$, pour lesquelles le coefficient de λ^0 dans l'équation (12.1) s'annule identiquement, sont les solutions des équations (12.2) qui correspondent à $a = 0$. Elles sont donc des fonctions linéaires de H .

Dans ce cas on aura $\frac{dK}{dH} = \text{const.}$ et le coefficient de λ^2 dans l'équation (12.1) ne s'annule identiquement que si l'on a

$$2H - \frac{dK}{dH} = 2H - \text{const.} = 0.$$

Il en résulte que, dans le cas envisagé, les coefficients des puissances de λ dans l'équation (12.1) sont des fonctions rationnelles des K , H , qui ne s'annulent pas simultanément. On peut donc formuler le

THÉOREME F. — *Si les courbures K , H d'une surface W_{r_2} vérifient une équation algébrique à coefficients constants qui ne se réduit ni à $K = \text{const.}$ ni à $H = \text{const.}$, le coefficient λ de l'élément linéaire de cette surface, lorsque elle est rapportée à des paramètres isothermes u , v tels que les courbes $u - v = \text{const.}$ soient ses géodésiques (m), est une fonction algébrique des K , H .*

Mais, en éliminant λ^2 entre les deux premières équations (11.2), on a

$$d\left(\frac{d \log \lambda}{d\omega}\right) = -\frac{K}{2c(H^2 - K)} dH.$$

On aura donc

$$(12.3) \quad \frac{d \log \lambda}{d\omega} = -\frac{1}{2c} \int \frac{K}{H^2 - K} dH.$$

où K est la fonction algébrique de H définie par l'équation algébrique (11.1) et si l'on porte la valeur (12.3) de $\frac{d \log \lambda}{d\omega}$ dans l'équation (11.6), on trouve

$$c\lambda^2(H^2 - K) \frac{d^2 K}{dH^2} + 2K = -\left(2H - \frac{dK}{dH}\right) \int \frac{KdH}{H^2 - K};$$

ce qui montre que le coefficient λ doit être une fonction algébrique des K , H et de l'intégrale $\int \frac{KdH}{H^2 - K}$. Mais le coefficient λ est, d'après le théorème F, une fonction algébrique des K , H . Il en résulte que l'intégrale abélienne $\int \frac{KdH}{H^2 - K}$ doit être également une fonction algébrique des K , H et, par suite, — d'après le théorème d'ABEL ⁽¹²⁾ — une fonction rationnelle des K , H .

On a donc le

THÉOREME G. — *Pour qu'il y ait des surfaces W_{r_2} dont les courbures K , H vérifient une équation algébrique $R(K, H) = 0$ à coefficients constants, qui ne se réduit ni à $K = \text{const.}$ ni à $H = \text{const.}$, il faut que l'intégrale abélienne $\int \frac{KdH}{H^2 - K}$, dans laquelle K est la fonction algébrique de H définie*

⁽¹²⁾ Voir p. e. P. APPEL et E. GOURSAT, *Théorie des fonctions algébriques et de leurs intégrales*, T. 1, p. 343, Paris 1929.

par l'équation $R(K, H) = 0$, soit une fonction algébrique et, par suite, rationnelle des K, H .

13. La condition établie ci-dessus, afin qu'il y ait des surfaces W_{r_2} dont les courbures K, H sont liées par une relation algébrique donnée n'est pas suffisante. En effet, cette condition est remplie lorsque K, H sont liées par la relation (11.7), tandis que — d'après le théorème *E* — il n'y a pas de surfaces W_{r_2} dont les deux courbures soient liées par une relation de cette forme. L'équation (11.7) est un cas particulier de l'équation plus générale

$$(13.1) \quad a_1 H^2 + a_2 K = a_3,$$

où a_1, a_2, a_3 sont des constantes dont les deux premières sont $\neq 0$ et elle correspond au cas où l'on a $a_1 + a_2 = 0$.

Si $a_1 + a_2 \neq 0$, on tire de l'équation (13.1)

$$(13.2) \quad K = \frac{a_3 - a_1 H^2}{a_2}, \quad H^2 - K = \frac{(a_1 + a_2) H^2 - a_3}{a_2}$$

et — grâce aux (13.2) — on a

$$(13.3) \quad \int \frac{K dH}{H^2 - K} = \int \frac{a_3 - a_1 H^2}{(a_1 + a_2) H^2 - a_3} dH = -H \frac{a_1}{a_1 + a_2} - \\ - \frac{a_1 a_3}{a_1 + a_2} \int \frac{dH}{a_3 - (a_1 + a_2) H^2}.$$

Or, pour qu'il y ait des surfaces W_{r_2} dont les courbures K, H sont liées par la relation (13.1), il faut — d'après le théorème *G* — que l'intégrale (13.3) soit une fonction rationnelle de H . Mais, pour qu'il en soit ainsi, il faut que l'on ait $a_3 = 0$, le coefficient a_1 étant $\neq 0$.

Dans ce cas, la seconde équation (13.2) devient

$$(13.4) \quad H^2 - K = \frac{a_1 + a_2}{a_2} H^2.$$

On aura donc

$$(13.5) \quad 2H - \frac{dK}{dH} = 2H \frac{a_1 + a_2}{a_2}, \quad \frac{d^2 K}{dH^2} = -2 \frac{a_1}{a_2}$$

et l'équation (1.16), grâce aux (13.4) et (13.5), prend la forme

$$(13.6) \quad \frac{d \log \lambda}{d\omega} = -\frac{ca_1}{2a_2} H\lambda^2 - \frac{a_1}{2c(a_1+a_2)} H.$$

D'autre part, en dérivant (13.6) par rapport à ω et en tenant compte des (11.2) et (13.1), on trouve

$$(13.7) \quad \frac{d \log \lambda}{d\omega} = -\frac{c}{2} \frac{a_1+a_2}{a_2} H\lambda^2.$$

Or, en éliminant $\frac{1}{H} \frac{d \log \lambda}{d\omega}$ entre les deux équations (13.6) et (13.7), on parvient à une équation linéaire par rapport à λ dont les coefficients sont constants et $\neq 0$; ce qui montre que les deux expressions (13.6) et (13.7) de la dérivée $\frac{d \log \lambda}{d\omega}$ ne peuvent coïncider que si l'on a $\lambda = \text{const.}$ et, par suite, $K \equiv 0$. On peut donc énoncer le

THÉORÈME H. — *Toutes les surfaces W_r dont les courbures K , H sont liées par une relation de la forme $a_1 H^2 + a_2 K = a_3$, où a_1 , a_2 , a_3 sont des constantes dont les deux premières sont $\neq 0$, sont nécessairement des surfaces W_{r_1} .*

14. Si la surface considérée S est une surface W_{r_2} dont les courbures K , H sont liées par la relation algébrique (11.1) et que cette relation se réduise à $H = \text{const.}$, la courbure et la torsion des géodésiques (m) de cette surface sont liées par une relation linéaire dont les coefficients sont constants le long de chacune de ces courbes ⁽¹³⁾.

Si l'équation (11.1) ne se réduit ni à $K = \text{const.}$ ni à $H = \text{const.}$ le coefficient λ de l'élément linéaire de S , lorsqu'elle est rapportée à des paramètres isothermes u, v telles que les courbes $u - v = \text{const.}$ soient les géodésiques (m) de la surface, est — d'après le théorème F — une fonction algébrique des K, H . Il est, en effet, défini par l'équation (12.1) qui — grâce à l'équation algébrique (11.1) — prend la forme

$$(14.1) \quad R_1(\lambda, H, K) = 0,$$

où R_1 est un polynôme des λ, H, K à coefficients constants.

⁽¹³⁾ O. PYLARINOS; loc. cit. (6), p. 350.

D'autre part, la courbure normale κ_n et la torsion géodésique σ_g des géodésiques (m) de S sont des fonctions algébriques des λ, H, K et $e^{f(\omega')}$ où $\omega' = u - v$, définies par les équations algébriques à coefficients constants (7.5). Or, en éliminant λ, H, K entre les équations algébriques (11.1), (14.1) et les deux équations (7.5) on parvient à une équation

$$(14.2) \quad V(\kappa_n, \sigma_g, e') = 0$$

dont le premier membre est un polynôme des $\kappa_n, \sigma_g, e^{f(\omega')}$ à coefficient constants. Donc, le premier membre de l'équation (14.2) est un polynôme des κ_n, σ_g dont les coefficients sont constants le long de chacune des courbes $\omega' = u - v = \text{const.}$ et, en tenant compte qu'on a $\kappa = |\kappa_n|$, $\sigma = \sigma_g$ où κ, σ sont la courbure et la torsion des géodésiques (m) : $u - v = \text{const.}$ de la surface, on peut formuler le

THÉORÈME I. - *La courbure et la torsion des géodésiques (m) d'une surface W_{r_2} dont les courbures K, H vérifient une équation algébrique à coefficients constants, qui ne se réduit pas à $K = \text{const.}$, sont liées par une relation algébrique dont les coefficients sont constants le long de chacune de ces courbes. Cette relation est linéaire dans le cas des surfaces W_{r_2} à courbure moyenne constante.*