Ulteriori contributi allo studio dei problemi ellittici in un angolo.

ANTONIO AVANTAGGIATI - MARIO TROISI (Bari) (*) (**)

Summary. — In [2] and [3] elliptic boundary value problems in a plane sector were investigated within certain Sobolev weight spaces W_{s_1, s_2}^r and W_{s_1, s_2}^{*r} (see [1]), with the exception of some well-defined values of $s_1 - r + 1$ and $s_2 - r + 1$. This paper is concerned with such boundary value problems when $s_1 - r + 1$ or $s_2 - r + 1$ are exceptional values.

Sia A l'angolo aperto di R^2 con vertice nell'origine e delimitato dalle due semirette σ_1 e σ_2 di anomalie θ_1 e θ_2 rispettivamente, dove $-\pi/2 < \theta_1 < \theta_2 < 3\pi/2$.

Assegniamo in A un operatore differenziale lineare $A = A(x, \partial)$ di ordine $2m$, propriamente ellittico in $\bar{A}$ e all'infinito, ed assegniamo, per $k = 1, 2$, un sistema $\{B_{jk}\}_{j=1}^m = \{B_{jk}(x, \partial)\}_{j=1}^m$ di m operatori differenziali lineari di frontiera su σ_k , con B_{jk} di ordine m_{jk} , soddisfacenti la condizione complementare rispetto ad A su $\bar{\sigma}_k$ e all'infinito.

In [2] e [3] abbiamo studiato il problema

$$(1) \quad \begin{aligned} Au &= f \quad \text{in } A, \\ B_{jk}u &= g_{jk} \quad \text{su } \sigma_k, \quad j = 1, \dots, m, \quad k = 1, 2, \end{aligned}$$

cercando la soluzione in certi spazi di Sobolev con doppio peso, denotati con $W_{s_1, s_2}^r(A)$ e $W_{s_1, s_2}^{*r}(A)$ (r reale $\geq 2m$ e $> \sup_{j,k} m_{jk} + \frac{1}{2}$, s_1, s_2 reali e $s_1 \leq s_2$), preliminarmente studiati in [1], dove i pesi hanno il ruolo di prescrivere il comportamento della soluzione e delle sue derivate nel vertice dell'angolo e all'infinito.

Abbiamo provato che, sotto opportune ipotesi sui coefficienti di A e B_{jk} , esistono due sottoinsiemi Σ_1 e Σ_2 di R , discreti e numerabili, tali che se $s_i - r + 1 \notin \Sigma_i$, $i = 1, 2$, l'operatore

$$\mathcal{A}_{r, s_1, s_2}: u \rightarrow (Au, \{B_{jk}u|_{\sigma_k}\}),$$

definito in $W_{s_1, s_2}^r(A)$ ed a valori in $E_{r, s_1, s_2}(A) = W_{s_1, s_2}^{r-2m}(A) \times \prod_{j=1}^m \prod_{k=1}^2 W_{s_1, s_2}^{r-m_{jk}-\frac{1}{2}}(\sigma_k)$, è un operatore a indice, cioè ha nucleo di dimensione finita ed ha immagine chiusa e di codimensione finita. Inoltre i numeri $\dim \text{Ker}(\mathcal{A}_{r, s_1, s_2})$, $\text{codim Im}(\mathcal{A}_{r, s_1, s_2})$ e indice

(*) Entrata in Redazione il 20 giugno 1973.

(**) Lavoro eseguito con contributo del C.N.R. nell'ambito del Gruppo Nazionale per l'Analisi Funzionale e le sue Applicazioni.

$(\mathcal{A}_{r,s_1,s_2})$ risultano costanti al variare di r, s_1, s_2 in modo che $s_i - r + 1, i = 1, 2$, appartenga ad un intervallo disgiunto da Σ_i .

Ricordiamo anche che $\Sigma_i, i = 1, 2$, è la proiezione su R dell'insieme degli zeri di una funzione intera $g_i(z)$ nel piano complesso, e precisamente della *funzione discriminante* (cfr. il n. 4 di [2]) associata a $(A'(x^i, \partial), \{B'_{jk}(x^i, \partial)\})$, dove $x^1 = 0, x^2 = \infty$ e l'apice sta a denotare la parte principale degli operatori.

Abbiamo poi provato che, sotto ulteriori ipotesi sui coefficienti di A e B_{jk} e se i dati f e g_{jk} soddisfano un numero finito (eventualmente nullo) di condizioni di compatibilità nell'origine, il problema (1) con $u \in W_{s_1,s_2}^{*r}(A)$ è equivalente (in un senso precisato al n. 6 di [3]) al problema (1) con $u \in W_{s_1,s_2}^r(A)$ e con altri termini noti opportunamente collegati a f e g_{jk} .

Ci proponiamo ora, in questa Nota, di studiare i problemi sopra considerati nel caso in cui uno dei due numeri $s_1 - r + 1$ e $s_2 - r + 1$ sia un valore eccezionale escluso dalla trattazione di [2] e [3], cioè nel caso in cui

$$(s_1 - r + 1, s_2 - r + 1) \notin (R \setminus \Sigma_1) \times (R \setminus \Sigma_2).$$

Siccome, per quanto sopra accennato, lo studio del problema (1) con $u \in W_{s_1,s_2}^{*r}(A)$ si può ricondurre allo studio del problema (1) con $u \in W_{s_1,s_2}^r(A)$, ci limiteremo a considerare soltanto quest'ultimo.

Nel caso in cui A e B_{jk} siano operatori omogenei ed a coefficienti costanti, indicheremo con $g = \det. G$ la *funzione discriminante* associata a $(A, \{B_{jk}\})$ e con Σ_g l'insieme $\Sigma_1 = \Sigma_2$ costituito dalle parti reali degli zeri di g .

Dimosteremo i seguenti teoremi:

TEOREMA I ⁽¹⁾. — *Supponiamo che gli operatori A, B_{jk} siano omogenei ed a coefficienti costanti ed assegniamo due numeri reali a, b tali che $a < s_1 - r + 1 \leq s_2 - r + 1 < b$ e $]a, b[\cap \Sigma_g = [s_1 - r + 1, s_2 - r + 1] \cap \Sigma_g$. Allora per ogni $u \in W_{s_1,s_2}^r(A)$ e tale che ⁽²⁾*

$$\mathcal{A}_{r,s_1,s_2} u \in F_{a+2m}^{b+2m}(A_0) \times \prod_{j=1}^m \prod_{k=1}^2 F_{a+m_{jk}}^{b+m_{jk}}(\sigma_k) \text{ si ha } u \in F_a^b(A_0).$$

TEOREMA II. — *Se A, B_{jk} sono operatori omogenei ed a coefficienti costanti e se uno dei due numeri $s_1 - r + 1$ e $s_2 - r + 1$ appartiene a Σ_g e non è zero reale di g appartenente all'insieme $\{-2m + 2, \dots, 0\}$ ⁽³⁾, allora $\mathcal{A}_{r,s_1,s_2}$ ha immagine non chiusa in $E_{r,s_1,s_2}(A)$.*

⁽¹⁾ Osserviamo che, quando entrambi i numeri $s_1 - r + 1$ e $s_2 - r + 1$ non appartengono a Σ_g , la tesi di questo teorema è un'ovvia conseguenza della prop. 4.8 e del teorema 1.1 di [2]. Perciò dovremo dimostrare il teorema solo nel caso in cui uno almeno dei due numeri $s_1 - r + 1$ e $s_2 - r + 1$ appartenga a Σ_g .

⁽²⁾ Per tutte le notazioni che in questo lavoro adoperiamo senza definizione rinviamo a [1] e [2].

⁽³⁾ I valori di $\{-2m + 2, \dots, 0\}$ che sono zeri di g possono far eccezione, nel senso che vi sono problemi per i quali $\mathcal{A}_{r,s_1,s_2}$ ha immagine chiusa anche se uno dei due numeri $s_1 - r + 1$ e $s_2 - r + 1$ è uno zero di g appartenente all'insieme $\{-2m + 2, \dots, 0\}$. Tale è, ad es., il caso del problema di Dirichlet per l'operatore di Laplace (cfr. l'esempio 1 al n. 8 di [3]).

TEOREMA III. — *Supponiamo che gli operatori A, B_{jk} abbiano coefficienti variabili soddisfacenti le ipotesi del teorema 1.1 di [3] e che, per un $i \in \{1, 2\}$, $s_i - r + 1$ appartenga a Σ_i e non sia uno zero reale di g_i appartenente all'insieme $\{-2m + 2, \dots, 0\}$.*

Allora la (1.14) di [3] non può sussistere con $\varepsilon > 0$, per cui o il nucleo di $\mathcal{A}_{r, s_1, s_2}$ non ha dimensione finita oppure l'immagine di $\mathcal{A}_{r, s_1, s_2}$ non è chiusa in $E_{r, s_1, s_2}(A)$.

Le dimostrazioni dei teoremi I e II saranno date al n. 1 e la dimostrazione del teorema III sarà data al n. 3. Nel corso di tali dimostrazioni ci riferiremo a [1], [2] e [3] sia per le notazioni sia per le tecniche usate.

Le considerazioni tenute al n. 1 ci danno inoltre la possibilità di provare il seguente teorema, non contenuto nei risultati di [1], [2] e [3]:

TEOREMA IV. — *Supponiamo che gli operatori A, B_{jk} siano omogenei ed a coefficienti costanti, che risulti $s_1 < s_2$ ⁽⁴⁾, $s_i - r + 1 \notin \Sigma_i$ per $i = 1, 2$ e che ogni zero che la funzione discriminante g ha nella striscia $\sigma(s_1 - r + 1, s_2 - r + 1)$ non appartenga all'insieme $\{-2m + 2, \dots, 0\}$ ⁽⁵⁾.*

Allora l'indice di $\mathcal{A}_{r, s_1, s_2}$ è uguale all'opposto del numero degli zeri che g ha nella striscia $\sigma(s_1 - r + 1, s_2 - r + 1)$ ciascuno contato tante volte quanto il suo ordine di molteplicità.

La dimostrazione di questo teorema sarà data al n. 2.

1. — Dimostrazione dei teoremi I e II.

Nel corso di queste dimostrazioni faremo frequentemente riferimento a [2], e per uniformarci alla trattazione di tale lavoro converremo di denotare con $L = L(\partial)$ e $P_{jk} = P_{jk}(\partial)$ gli operatori omogenei ed a coefficienti costanti A e B_{jk} rispettivamente. $\mathcal{A}_{r, s_1, s_2}$ denoterà allora l'operatore definito dalla (1.4) di [2].

Per semplicità, ci limiteremo a dimostrare i teoremi I e II mettendoci nelle seguenti condizioni:

α) la funzione g ha una sola radice z_1 avente parte reale uguale a $s_1 - r + 1$, e tale radice è semplice;

β) risulta $[s_1 - r + 1, s_2 - r + 1] \cap \Sigma_g = \{s_1 - r + 1\}$.

Apparirà poi evidente quali siano le modifiche da apportare ai ragionamenti che terremo per ottenere le dimostrazioni nel caso generale, ove nel caso del teorema II si tenga anche conto del lemma 2.1.

⁽⁴⁾ Teniamo presente (cfr. il teorema 1.1 di [2]) che se $s_1 \leq s_2$ e $[s_1 - r + 1, s_2 - r + 1] \cap \Sigma_g = \emptyset$, allora $\mathcal{A}_{r, s_1, s_2}$ è un isomorfismo algebrico e topologico surgettivo.

⁽⁵⁾ Come nel caso del teorema II, va anche qui rilevato che gli zeri di g appartenenti all'insieme $\{-2m + 2, \dots, 0\}$ possono far eccezione (cfr. ancora l'esempio 1 del n. 8 di [3] relativo al problema di Dirichlet per l'operatore di Laplace).

Fissiamo allora i numeri reali a, b, s_1^0 in modo che

$$(1.1) \quad \begin{aligned} s_1^0 < s_1, \quad [s_1^0 - r + 1, s_2 - r + 1] \cap \Sigma_g = \{s_1 - r + 1\}, \\]a, b[\cap \Sigma_g = \{s_1 - r + 1\}, \quad]a, b[\supset [s_1^0 - r + 1, s_2 - r + 1]. \end{aligned}$$

Poniamo quindi $\mathfrak{F} = F_{a+2m}^{b+2m}(\mathcal{A}_0) \times \prod_{j=1}^m \prod_{k=1}^2 F_{a+m_{jk}}^{b+m_{jk}}(\sigma_k)$, dove $\mathcal{A}_0 = \bar{\mathcal{A}} \setminus \{0\}$, e ricordiamo che per il modo in cui sono stati fissati a e b si ha

$$(1.2) \quad F_a^b(\mathcal{A}_0) \subset W_{s_1, s_2}^r(\mathcal{A}) \subset W_{s_1, s_2}^r(\mathcal{A}), \quad \mathfrak{F} \subset E_{r, s_1^0, s_2}(\mathcal{A}) \subset E_{r, s_1, s_2}(\mathcal{A}).$$

Indichiamo inoltre con $\mathcal{A}(F_a^b(\mathcal{A}_0))$ l'immagine della restrizione di $\mathcal{A}_{r, s_1, s_2}$ al sotto-spazio $F_a^b(\mathcal{A}_0)$.

Si riconosce facilmente, tenuto conto della densità di $F_a^b(\mathcal{A}_0)$ in $W_{s_1, s_2}^r(\mathcal{A})$ e in $W_{s_1, s_2}^r(\mathcal{A})$, che $\mathfrak{F}$ è denso in $E_{r, s_1^0, s_2}(\mathcal{A})$ e in $E_{r, s_1, s_2}(\mathcal{A})$ e che $\mathcal{A}(F_a^b(\mathcal{A}_0))$ è denso in $\text{Im}(\mathcal{A}_{r, s_1, s_2})$.

Per ogni $f \in F_{a+2m}^{b+2m}(\mathcal{A}_0)$, indicheremo con $\chi(f)$ una particolare soluzione dell'equazione $L(\partial)u = f$ appartenente allo spazio $F_a^b(\mathcal{A})$, ad esempio quella costruita col procedimento indicato al n. 3 di [2].

Inoltre per ogni $(f, \{f_{jk}\}) \in \mathfrak{F}$ porremo $\tilde{Y}(z) = (\tilde{\varphi}_{11}(z + m_{11}), \dots, \tilde{\varphi}_{m2}(z + m_{m2}))$, dove (*)

$$(1.3) \quad \varphi_{jk} = f_{jk} - P_{jk}(\partial)\chi(f)|_{\sigma_k}.$$

DIMOSTRAZIONE del teorema I. - Assegniamo u tale che

$$u \in W_{s_1, s_2}^r(\mathcal{A}), \quad \mathcal{A}u = (f, \{f_{jk}\}) \in \mathfrak{F}.$$

Poichè $F_a^b(\mathcal{A}_0)$ è denso in $W_{s_1, s_2}^r(\mathcal{A})$, è lecito costruire una successione $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ di elementi di $F_a^b(\mathcal{A}_0)$ tale che

$$u_n \rightarrow u \text{ in } W_{s_1, s_2}^r(\mathcal{A}) \quad \text{e} \quad \mathcal{A}u_n = (f_n, \{f_{jkn}\}) \rightarrow (f, \{f_{jk}\}) \text{ in } E_{r, s_1, s_2}(\mathcal{A}).$$

Ponendo

$$\begin{aligned} \varphi_{jkn} &= f_{jkn} - P_{jk}(\partial)\chi(f_n)|_{\sigma_k}, \\ \tilde{Y}_n(z) &= (\tilde{\varphi}_{11n}(z + m_{11}), \dots, \tilde{\varphi}_{m2n}(z + m_{m2})), \end{aligned}$$

(*) Ricordiamo (cfr. il n. 7 di [1]) che per ogni funzione φ definita su σ_k si è convenuto di porre $\varphi_k(\varrho) = \varphi(\varrho \cos \theta_k, \varrho \sin \theta_k)$ per $k = 1, 2$. Nel seguito, per comodità, identificheremo φ con φ_k .

per la prop. 4.1 di [2] si ha

$$u_n(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\xi-i\infty}^{\xi+i\infty} \frac{1}{g(z)} w(z, x_1, x_2) \cdot G^*(z) \cdot \tilde{\Psi}_n(z) dz + \chi(f_n)$$

per ogni $(x_1, x_2) \in A_0$ e per ogni $\xi \in]a, b[$.

Ponendo ancora

$$v_n = u_n - \chi(f_n), \quad v = u - \chi(f),$$

dal corollario 3.1 e dalla (5.1) di [2] si ricava

$$v_n \rightarrow v \quad \text{in} \quad W_{s_1, s_2}^r(A)$$

e d'altra parte

$$\tilde{v}_{n,\pi}(z, \theta) = \frac{1}{g(z)} w(z, \cos \theta, \sin \theta) \cdot G^*(z) \cdot \tilde{\Psi}_n(z) \quad \forall z \in \sigma(a, b).$$

Perciò, tenendo presenti le (3.9) e (3.12) di [2], si deduce che per quasi tutti i punti $(\eta, \theta) \in R \times]\theta_1, \theta_2[$ si ha

$$\begin{aligned} \tilde{v}_n(s_1 - r + 1 + i\eta, \theta) &= \\ &= \frac{1}{g(s_1 - r + 1 + i\eta)} \cdot w(s_1 - r + 1 + i\eta, \cos \theta, \sin \theta) \cdot G^*(s_1 - r + 1 + i\eta) \cdot \tilde{\Psi}(s_1 - r + 1 + i\eta) \end{aligned}$$

e che $(1 + \eta^2)^{r/2} \tilde{v}_n(s_1 - r + 1 + i\eta, \theta)$ è di quadrato sommabile in $R \times]\theta_1, \theta_2[$. Dal teorema di Fubini segue allora che, per quasi tutti i punti $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$, $(1 + \eta^2)^{r/2} \cdot \tilde{v}_n(s_1 - r + 1 + i\eta, \theta)$, come funzione di η , è di quadrato sommabile. Tenendo presente che $g(z)$ è infinitesima di ordine uno per $z \rightarrow z_1$, si deduce che per quasi tutti i punti $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$ deve risultare

$$w(z_1, \cos \theta, \sin \theta) \cdot G^*(z_1) \cdot \tilde{\Psi}(z_1) = 0.$$

Ciò implica, per continuità, che in corrispondenza della radice z_1 sono verificate le condizioni (4.36) della prop. 4.8 di [2], da cui si deduce quindi la tesi.

Alla dimostrazione del teorema II premettiamo alcune considerazioni ed alcuni lemmi.

Mantenendo le posizioni e le ipotesi fatte all'inizio di questo numero, supponiamo in più che $z_1 \notin \{-2m + 2, \dots, 0\}$. Allora dalla dimostrazione della prop. 4.8 di [2] si deduce che perchè esista una soluzione $u \in F_a^b(A_0)$ dell'equazione $Au = (f, \{f_{jk}\})$, con $(f, \{f_{jk}\}) \in \mathfrak{F}$, è necessario e sufficiente che risulti

$$(1.4) \quad G^*(z_1) \cdot \tilde{\Psi}(z_1) = 0.$$

LEMMA 1.1. — Se z_1 è radice semplice della funzione discriminante g , la matrice $G(z_1)$ ha caratteristica uguale a $2m-1$.

Infatti, teniamo presente che ogni elemento della matrice $G(z)$ è una funzione olomorfa in tutto il piano complesso. Posto

$$g_{ij}^{kh}(z) = \sum_{r=0}^{\infty} (g_{ij}^{kh})^{(r)}(z_1) \frac{(z-z_1)^r}{r!},$$

si riconosce con ovvie considerazioni che, se la caratteristica della matrice $G(z_1)$ fosse inferiore a $2m-1$, il determinante della matrice $G(z)$ sarebbe divisibile per $(z-z_1)$ -almeno. Ciò prova l'asserto.

LEMMA 1.2. — Se z_1 è radice semplice della funzione discriminante g , esistono $2m$ costanti $c_{11}, \dots, c_{m2}$, non tutte nulle, tali che le $2m$ condizioni scalari cui si riconduce la (1.4) sono verificate se e soltanto se

$$(1.5) \quad \sum_{k=1}^2 \sum_{j=1}^m c_{jk} \int_0^{+\infty} \varphi_{jk}(t) t^{z_1+m_{jk}-1} dt = 0.$$

Indichiamo con $g_{ij}^{*hk}(z)$ il complemento algebrico di $g_{ji}^{kh}(z)$ nella matrice $G(z)$. Dal lemma 1.1 segue che esistono $i \in \{1, \dots, m\}$ e $h \in \{1, 2\}$ per cui non tutti i numeri $g_{i1}^{*h1}(z_1), \dots, g_{im}^{*h2}(z_1)$ sono nulli. Se ne deduce che

$$(1.6) \quad \sum_{h=1}^2 \sum_{j=1}^m g_{ij}^{*hk}(z_1) \tilde{\Psi}_{jk}(z_1) = 0$$

esprime la condizione necessaria e sufficiente perchè il sistema di equazioni lineari

$$(1.7) \quad \sum_{h=1}^2 \sum_{l=1}^m g_{jl}^{kh}(z_1) \gamma_{lh} = \tilde{\Psi}_{jk}(z_1), \quad j=1, \dots, m, \quad k=1, 2,$$

nelle incognite $\gamma_{11}, \dots, \gamma_{m2}$ abbia soluzione.

D'altra parte il sistema (1.7) è compatibile se e solo se è verificata la (1.4), e perciò la (1.4) è equivalente alla (1.6). Esplicitando quest'ultima attraverso le trasformate di Mellin $\tilde{\varphi}_{jk}(z+m_{jk})$ si trova la (1.5) con $c_{jk} = g_{ij}^{*hk}(z_1)$ per $j=1, \dots, m$ e $k=1, 2$.

OSSERVAZIONE 1.1. — Rileviamo che mentre il funzionale definito in $\mathfrak{F}$ dal primo membro della (1.5) e dalla (1.3) si prolunga per continuità a tutto $E_{r, s_1, s_2}^0(A)$, per il fatto che $s_1^0 - r + 1 < \operatorname{Re} z_1 < s_2 - r + 1$, conformemente a quanto abbiamo stabilito con i lemmi 6.1 e 6.2 di [2], tale funzionale non ha alcun prolungamento continuo a $E_{r, s_1, s_2}(A)$. Ciò si riconosce facilmente osservando che se $(\varphi_{jk, n})_{n \in \mathbb{N}}$ converge a φ_{jk}

in $W_{s_1, s_2}^{r-m_{jk}-\frac{1}{2}}(\sigma_k)$, la successione di integrali

$$\int_0^{+\infty} \varphi_{jk,n}(t) t^{s_1-r+m_{jk}+i\eta} dt$$

può addirittura non convergere, per il fatto che $\varphi_{jk}(t) t^{s_1-r+m_{jk}+i\eta}$ può non essere sommabile in un intorno destro dell'origine.

LEMMA 1.3. — *Siano: B_1 e B_2 due spazi di Banach, B_1 immerso in B_2 algebricamente e topologicamente, B_1 denso in B_2 ; $w_1, \dots, w_m \in B_1'$ ($=$ duale forte di B_1) linearmente indipendenti e tali che w_j , per $j = 1, \dots, m$, non abbia prolungamento continuo a B_2 . Posto*

$$N_m = \{x \in B_1 | \langle x, w_j \rangle = 0 \text{ per } j = 1, \dots, m\},$$

si ha che N_m è denso in B_2 .

Si ragiona per induzione. Fissato N_1 , si consideri $x_1 \in B_1$ tale che $\langle x_1, w_1 \rangle = 1$. Si ha allora

$$B_1 = N_1 \oplus M_1 \quad \text{con} \quad M_1 = \{cx_1\}_{c \in K},$$

essendo K il campo degli scalari relativo agli spazi vettoriali B_1 e B_2 . Proviamo che N_1 è denso in B_2 . Ragioniamo per assurdo. Se N_1 non fosse denso in B_2 la chiusura $\bar{N}_1$ di N_1 in B_2 sarebbe un sottospazio proprio di B_2 . Sia allora Φ un funzionale lineare, continuo e non nullo su B_2 tale che

$$\langle x, \Phi \rangle = 0 \quad \forall x \in \bar{N}_1.$$

Posto per ogni $x \in B_1$

$$x = x' + \langle x, w_1 \rangle x_1,$$

si ha $x' \in N_1$ e conseguentemente $\langle x', \Phi \rangle = 0$. Perciò

$$\langle x, \Phi \rangle = \langle x, w_1 \rangle \cdot \langle x_1, \Phi \rangle \quad \forall x \in B_1.$$

Non può essere $\langle x_1, \Phi \rangle = 0$ perchè altrimenti Φ sarebbe identicamente nullo su B_1 , ed essendo Φ continuo in B_2 e B_1 denso in B_2 risulterebbe Φ identicamente nullo su B_2 , contrariamente alla condizione imposta a Φ . Se ne deduce allora che $w_1 = (\langle x_1, \Phi \rangle)^{-1} \Phi$ su B_1 . Ciò però è in contrasto con l'ipotesi, perchè implica che w_1 si può prolungare per continuità a tutto B_2 . L'assurdo cui siamo pervenuti prova l'asserto nel caso $m = 1$.

Supponiamo d'aver dimostrato il teorema per $m = k$. Introduciamo in B_1 $k + 1$ elementi $x_1, \dots, x_{k+1}$ in modo che

$$\langle x_j, w_l \rangle = \delta_{jl} \quad \text{per} \quad j, l = 1, \dots, k + 1.$$

Considerato il sottospazio vettoriale di B_1

$$M_k = \{c_1 x_1 + \dots + c_k x_k\}_{(c_1, \dots, c_k) \in K^k},$$

risulta

$$B_1 = N_k \oplus M_k$$

e, per il ragionamento di induzione che stiamo facendo, N_k è denso in B_2 . Per costruzione risulta $x_{k+1} \in N_k$ e perciò anche $M'_{k+1} = \{c x_{k+1}\}_{c \in K}$ è un sottospazio di N_k e risulta pertanto

$$N_k = N_{k+1} \oplus M'_{k+1}.$$

Se N_{k+1} non fosse denso in B_2 , esisterebbe un funzionale Φ lineare, continuo e non nullo su B_2 tale che $\langle x, \Phi \rangle = 0$ per ogni $x \in \bar{N}_{k+1}$.

Allora posto

$$x = x' + \langle x, w_{k+1} \rangle x_{k+1} \quad \forall x \in N_k,$$

si avrebbe

$$\langle x, \Phi \rangle = \langle x, w_{k+1} \rangle \cdot \langle x_{k+1}, \Phi \rangle \quad \forall x \in N_k.$$

Se fosse $\langle x_{k+1}, \Phi \rangle = 0$, Φ sarebbe identicamente nullo su N_k e, poichè N_k è denso in B_2 , sarebbe Φ identicamente nullo su B_2 , contrariamente alla costruzione adottata per Φ . Perciò $\langle x_{k+1}, \Phi \rangle \neq 0$. Se ne deduce

$$\langle x, w_{k+1} \rangle = (\langle x_{k+1}, \Phi \rangle)^{-1} \langle x, \Phi \rangle \quad \forall x \in N_k.$$

Essendo Φ continuo in B_2 , ciò implica che w_{k+1} può essere prolungato in un funzionale continuo su B_2 , contrariamente all'ipotesi fatta. L'assurdo cui siamo pervenuti prova che N_{k+1} è denso in B_2 e perciò si ha la tesi.

DIMOSTRAZIONE del teorema II. - Consideriamo il funzionale Φ definito in $E_{r, s_1^0, s_2}(\mathcal{A})$ dal primo membro della (1.5), cioè

$$\Phi: E_{r, s_1^0, s_2}(\mathcal{A}) \ni (f, \{f_{jk}\}) \rightarrow \sum_{k=1}^2 \sum_{j=1}^m c_{jk} \int_0^{+\infty} (f_{jk} - P_{jk}(\partial) \chi(f)|_{\sigma_k})(t) t^{s_1-r+m_{jk}+i\eta} dt \in C.$$

Per quanto abbiamo sopra osservato (cfr. l'osservazione 1.1) Φ non ha prolungamento continuo ad $E_{r, s_1, s_2}(\mathcal{A})$, perciò, per il lemma 1.3, il sottospazio

$$\mathcal{N}_\Phi = \{(f, \{f_{jk}\}) \in E_{r, s_1^0, s_2}(\mathcal{A}) \mid \Phi(f, \{f_{jk}\}) = 0\}$$

è denso in $E_{r, s_1, s_2}(\mathcal{A})$.

D'altra parte dal lemma 1.2 e da quanto si è detto a proposito della (1.4) si deduce $\mathcal{A}(F_a^b(\mathcal{A}_0)) \subset \mathcal{N}_\Phi$ e, per le costruzioni fatte ed il teorema 1.1 di [2], si ha anche $\mathcal{N}_\Phi = \text{Im}(\mathcal{A}_{r,s_1,s_2})$ e quindi risulta

$$(1.8) \quad \mathcal{A}(F_a^b(\mathcal{A}_0)) \subset \mathcal{N}_\Phi = \text{Im}(\mathcal{A}_{r,s_1,s_2}) \subset \text{Im}(\mathcal{A}_{r,s_1,s_2}).$$

Poichè $F_a^b(\mathcal{A}_0)$ è denso in $W_{s_1,s_2}^r(\mathcal{A})$, la chiusura di $\mathcal{A}(F_a^b(\mathcal{A}_0))$ in $E_{r,s_1,s_2}(\mathcal{A})$ contiene $\text{Im}(\mathcal{A}_{r,s_1,s_2})$. Se, per assurdo, supponiamo che $\text{Im}(\mathcal{A}_{r,s_1,s_2})$ è chiusa in $E_{r,s_1,s_2}(\mathcal{A})$, per il fatto che $\mathcal{N}_\Phi$ è denso in $E_{r,s_1,s_2}(\mathcal{A})$ si dovrà avere da (1.8)

$$(1.9) \quad \overline{\mathcal{A}(F_a^b(\mathcal{A}_0))} = \text{Im}(\mathcal{A}_{r,s_1,s_2}) = E_{r,s_1,s_2}(\mathcal{A}).$$

D'altra parte esiste certamente $(f, \{f_{jk}\}) \in \mathfrak{F}$ tale che

$$(1.10) \quad \Phi(f, \{f_{jk}\}) \neq 0.$$

Poichè vale la (1.2), dalla (1.9) si deduce anche $(f, \{f_{jk}\}) \in \text{Im}(\mathcal{A}_{r,s_1,s_2})$ e perciò

$$\exists u \in W_{s_1,s_2}^r(\mathcal{A}) \ni Au = (f, \{f_{jk}\}).$$

Ma allora dal teorema I segue $u \in F_a^b(\mathcal{A}_0)$ e quindi $\Phi(f, \{f_{jk}\}) = 0$, in contrasto con la (1.10); ciò prova l'asserto.

2. – Dimostrazione del teorema IV.

Premettiamo alcune considerazioni ed alcuni lemmi.

Ricordiamo (cfr. il teorema 1.1 di [2]) che le condizioni di compatibilità per l'equazione $\mathcal{A}_{r,s_1,s_2}u = (f, \{f_{jk}\})$ sono determinate dalle radici z_j della funzione discriminante g associata a $(L, \{P_{jk}\})$, che appartengono alla striscia $\sigma(s_1 - r + 1, s_2 - r + 1)$. Scriveremo ora tali condizioni sotto la forma

$$(2.1) \quad (F_{jl} \circ \Psi)(f, \{f_{jk}\}) = 0, \quad l = 1, \dots, n_j, \quad j = 1, \dots, \nu,$$

conformemente alle notazioni che abbiamo introdotto a proposito del lemma 6.2 di [2]. Perciò ν rappresenta il numero delle radici distinte che g ha in $\sigma(s_1 - r + 1, s_2 - r + 1)$ e n_j il massimo numero di condizioni portate dalla radice z_j .

LEMMA 2.1. – *Se z_q e z_j sono due radici distinte di g appartenenti a $\sigma(s_1 - r + 1, s_2 - r + 1)$, ogni funzionale $F_{q1} \circ \Psi$ è linearmente indipendente dall'insieme di funzionali $F_{j1} \circ \Psi, \dots, F_{jn_j} \circ \Psi$.*

Tenendo presente la forma che assumono i funzionali F_{j_l} (cfr. l.c.), indichiamo con p_{j_l} dei polinomi generici; si riconosce facilmente che, per provare il lemma, basta dimostrare che ogni funzione del tipo $t^{s_q} p_{q_l}(\log t)$, per $t \in R_+$ e p_{q_l} polinomio non nullo, è linearmente indipendente da un insieme di funzioni del tipo $t^{s_j} p_{j_l}(\log t)$, ..., $t^{s_j} p_{j_n}(\log t)$. Tale affermazione si stabilisce facilmente sfruttando la condizione $s_j \neq s_q$.

Indichiamo ora con $L_\varepsilon(\partial)$ l'operatore differenziale definito dalla (5.28) di [2]; ricordiamo che $L_\varepsilon(\zeta, 1)$ ha tutte le radici semplici, per ε positivo ma abbastanza piccolo, denotate con $\beta_{j,k,\varepsilon}$, definite dalla (5.27) di [2], continue per $\varepsilon \rightarrow 0^+$ e tali che $\beta_{j,k,0} = \beta_{j,k}$. Sia inoltre g_ε la funzione discriminante associata a $(L_\varepsilon, \{P_{j_k}\})$ ed $\mathcal{A}_{r,s_1,s_2}^\varepsilon$ l'applicazione così definita:

$$\mathcal{A}_{r,s_1,s_2}^\varepsilon: W_{s_1,s_2}^r(A) \ni u \rightarrow (L_\varepsilon(\partial)u, P_{11}(\partial)u|_{\sigma_1}, \dots, P_{m_2}(\partial)u|_{\sigma_2}) \in E_{r,s_1,s_2}(A).$$

LEMMA 2.2. — Se $s_1 < s_2$ e $s_i - r + 1 \notin \Sigma_\sigma$ per $i = 1, 2$, è possibile fissare $\varepsilon_0 \in R_+$ in modo che per ogni $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ risulti:

- a) $\mathcal{A}_{r,s_1,s_2}^\varepsilon$ è un operatore ad indice;
- b) $g_\varepsilon(z)$ e $g(z)$ hanno in $\sigma(s_1 - r + 1, s_2 - r + 1)$ lo stesso numero di zeri ⁽⁷⁾;
- c) $\text{indice}(\mathcal{A}_{r,s_1,s_2}^\varepsilon) = \text{indice}(\mathcal{A}_{r,s_1,s_2})$.

Osserviamo che $L_\varepsilon(\partial)$ ha i coefficienti che sono funzioni continue di ε e che $L_0(\partial)$ coincide con $L(\partial)$. Le proposizioni 4.6 e 4.7 ed il teorema 1.1 di [2] consentono di provare direttamente che esiste $\varepsilon'_0 \in R_+$ in modo che per ogni $\varepsilon \in [0, \varepsilon'_0]$ sono vere a) e b).

Poichè la citata continuità dei coefficienti di $L_\varepsilon(\partial)$ implica che $\mathcal{A}_{r,s_1,s_2}^\varepsilon$ converge in norma ad $\mathcal{A}_{r,s_1,s_2}$ per $\varepsilon \rightarrow 0^+$, per il teorema 2.2 di [4] è possibile fissare un numero reale positivo $\varepsilon_0 \leq \varepsilon'_0$ in modo che sussista la c) per ogni $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$. Ciò prova completamente l'asserto.

Supponiamo ora che le radici del polinomio $L(\zeta, 1)$ siano tutte semplici. Mettiamo in evidenza la dipendenza della funzione discriminante g dalle radici di $L(\zeta, 1)$ scrivendo anche

$$g(z) = g(z; \beta_{11}, \dots, \beta_{m_2}).$$

Poichè g dipende analiticamente dalle radici, almeno finchè queste conservano parte immaginaria diversa da zero, ha significato considerare la funzione

$$(2.2) \quad \gamma(z, \lambda) = g(z; \lambda, \beta_{21}, \dots, \beta_{m_2}), \quad \text{per } z \in C \text{ e } \text{Im } \lambda > 0.$$

Si può interpretare $\gamma(z, \lambda)$ come funzione discriminante associata a $(L^\lambda, \{P_{j_k}\})$, ove $L^\lambda(\zeta, 1)$ denota il polinomio che si ottiene da $L(\zeta, 1)$ sostituendo la radice β_{11} con λ , ossia $L^\lambda(\zeta, 1) = (\zeta - \lambda)L(\zeta, 1)(\zeta - \beta_{11})^{-1}$.

⁽⁷⁾ Si intende che ogni zero è contato tante volte quanto il suo ordine di molteplicità.

Evidentemente i coefficienti di $L^\lambda(\zeta, 1)$ sono funzioni continue di λ e $L^{\beta_{11}}(\zeta, 1) = L(\zeta, 1)$. Fissati $\alpha \in C$ e $\delta \in R_+$, denotiamo con $C_{\alpha, \delta}$ il cerchio del piano complesso col centro in α e raggio δ , ossia $C_{\alpha, \delta} = \{z \in C \mid |z - \alpha| \leq \delta\}$. Fissiamo $\delta_0 \in R_+$ in modo che C_{β_{11}, δ_0} sia contenuto nel semipiano $\text{Im } z > 0$ e non ci siano in esso altri zeri di $L(\zeta, 1)$ fuorchè β_{11} . Per ogni $\lambda_1 \in C_{\beta_{11}, \delta_0}$ poniamo

$$(2.3) \quad g_\varepsilon^{\lambda_1}(z) = \gamma(z; \beta_{11} + \varepsilon(\lambda_1 - \beta_{11})), \quad L_\varepsilon^{\lambda_1} = L^{\beta_{11} + \varepsilon(\lambda_1 - \beta_{11})}, \quad \varepsilon \in [0, 1].$$

Evidentemente i coefficienti di $L_\varepsilon^{\lambda_1}$ sono funzioni continue di ε , $L_0^{\lambda_1} = L$ e $g_\varepsilon^{\lambda_1}(z)$ è la funzione discriminante associata a $(L_\varepsilon^{\lambda_1}, \{P_{jk}\})$.

LEMMA 2.3. — *Se $s_1 < s_2$ e $s_i - r + 1 \notin \Sigma_\sigma$ per $i = 1, 2$, è possibile fissare $\lambda_1 \in C_{\beta_{11}, \delta_0}$ ed $\varepsilon_0 \in R_+$ in modo che per ogni $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0]$ risulti*

a₁) $g_\varepsilon^{\lambda_1}(z)$ e $g(z)$ hanno in $\sigma(s_1 - r + 1, s_2 - r + 1)$ lo stesso numero di zeri e $g_\varepsilon^{\lambda_1}(z)$, come $g(z)$, non si annulla sui lati di $\sigma(s_1 - r + 1, s_2 - r + 1)$.

a₂) Gli zeri che $g_\varepsilon^{\lambda_1}(z)$ ha in $\sigma(s_1 - r + 1, s_2 - r + 1)$ sono tutti semplici.

Indichiamo con $z_1, \dots, z_\nu$ gli zeri distinti che $g(z)$ ha nella striscia $\sigma(s_1 - r + 1, s_2 - r + 1)$ e denotiamo con p_j l'ordine di molteplicità di z_j . Fissiamo un numero reale positivo ϱ_0 in modo che i cerchi C_{z_j, ϱ_0} siano a due a due disgiunti e tutti contenuti in $\sigma(s_1 - r + 1, s_2 - r + 1)$. Osserviamo ora che, per la funzione olomorfa $\gamma(z, \lambda)$ delle due variabili complesse z in C e λ nel semipiano $\text{Im } \lambda > 0$, è verificata la proprietà: $\gamma(z, \beta_{11})$ ha nel punto $z = z_j$ uno zero di ordine di molteplicità p_j per ogni $j \in \{1, \dots, \nu\}$. Per un noto teorema di Weierstrass, per ogni $j \in \{1, \dots, \nu\}$, è possibile fissare due numeri reali positivi $\varrho_j (\leq \varrho_0)$, $\delta_j (\leq \delta_0)$ ed un polinomio

$$(2.4) \quad F_j(z, \lambda) = z^{p_j} + \alpha_{j1}(\lambda)z^{p_j-1} + \dots + \alpha_{jp_j}(\lambda)$$

in modo che, comunque si fissi $\lambda' \in C_{\beta_{11}, \delta_j}$, il polinomio in z $F_j(z, \lambda')$ ha p_j zeri appartenenti al cerchio C_{z_j, ϱ_j} , i quali sono gli unici zeri che la funzione in z $\gamma(z, \lambda')$ ha nel cerchio C_{z_j, ϱ_j} ; inoltre le funzioni $\alpha_{j1}(\lambda), \dots, \alpha_{jp_j}(\lambda)$ sono olomorfe in C_{β_{11}, δ_j} .

Sia allora $\Delta_j(\lambda)$ il risultante associato a $F_j(z, \lambda)$ e $\partial_z F_j(z, \lambda)$, come polinomi in z . Poichè $\Delta_j(\lambda)$ è una funzione olomorfa in C_{β_{11}, δ_j} e non identicamente nulla, è possibile fissare un numero reale positivo $\delta \leq \min\{\delta_1, \dots, \delta_\nu\}$ in modo che ciascuna funzione $\Delta_j(\lambda)$ non abbia alcuno zero in $C_{\beta_{11}, \delta}$.

Ciò comporta che, per ogni $\lambda \in C_{\beta_{11}, \delta}$, $F_j(z, \lambda)$ ha i p_j zeri, già appartenenti a C_{z_j, ϱ_j} , a due a due distinti.

Fissiamo $\lambda_1 \in C_{\beta_{11}, \delta}$ ed osserviamo che per ogni $\varepsilon \in [0, 1]$ si ha $\beta_{11} + \varepsilon(\lambda_1 - \beta_{11}) \in C_{\beta_{11}, \delta}$. Se ne deduce che la funzione $g_\varepsilon^{\lambda_1}(z)$ per ogni $\varepsilon \in [0, 1]$ ha nella striscia $\sigma(s_1 - r + 1, s_2 - r + 1)$ p_1 zeri semplici in C_{z_1, ϱ_1} , p_2 zeri semplici in C_{z_2, ϱ_2} , ..., p_ν zeri semplici in C_{z_ν, ϱ_ν} . La tesi si deduce allora facilmente dalle proposizioni 4.6 e 4.7 di [2].

DIMOSTRAZIONE del teorema IV. – Intanto, in conseguenza del lemma 2.2, per provare l'asserto basta mettersi nel caso in cui tutte le radici del polinomio $L(\zeta, 1)$ siano semplici. D'altra parte il lemma 1.2 ed il lemma 2.1 provano che l'asserto è vero se la funzione discriminante ha nella striscia $\sigma(s_1 - r + 1, s_2 - r + 1)$ soltanto zeri semplici. Consideriamo allora l'applicazione $\mathcal{A}_{r, s_1, s_2}^{\lambda_1, \varepsilon}$ così definita:

$$\mathcal{A}_{r, s_1, s_2}^{\lambda_1, \varepsilon} : W_{s_1, s_2}^r(A) \ni u \rightarrow (L_\varepsilon^{\lambda_1}(\partial)u, P_{11}(\partial)u|_{\sigma_1}, \dots, P_{m_2}(\partial)u|_{\sigma_2}) \in E_{r, s_1, s_2}(A),$$

essendo $L_\varepsilon^{\lambda_1}(\partial)$ l'operatore sopra definito (cfr. la (2.3)). Si riconosce facilmente che $\mathcal{A}_{r, s_1, s_2}^{\lambda_1, \varepsilon}$ per $\varepsilon \rightarrow 0^+$ converge in norma a $\mathcal{A}_{r, s_1, s_2}^{\lambda_1}$. Perciò, ancora per il teorema 2.2 di [4], è possibile determinare un $\varepsilon_1 \in]0, \varepsilon_0]$ tale che $\mathcal{A}_{r, s_1, s_2}^{\lambda_1, \varepsilon_1}$ sia un operatore ad indice e $\text{indice}(\mathcal{A}_{r, s_1, s_2}^{\lambda_1, \varepsilon_1}) = \text{indice}(\mathcal{A}_{r, s_1, s_2}^{\lambda_1})$, dove ε_0 è il numero definito nel lemma 2.3. Da quest'ultimo lemma e da quanto è stato già osservato a proposito del caso in cui le radici della funzione discriminante sono semplici, segue evidentemente la tesi.

La formula dell'indicatore logaritmico consente di dare una espressione analitica per l'indice dell'operatore $\mathcal{A}_{r, s_1, s_2}$ nel caso in cui $s_i - r + 1 \notin \Sigma_g$ ($i = 1, 2$). Posto infatti $I_{r, s_1, s_2}(\eta_0) = [s_1 - r + 1, s_2 - r + 1] \times [-\eta_0, \eta_0]$, consideriamo $\eta_0 \in \mathbb{R}_+$ in modo che tutti gli zeri che g ha in $\sigma(s_1 - r + 1, s_2 - r + 1)$ siano interni a $I_{r, s_1, s_2}(\eta_0)$. Dal teorema IV si deduce allora

$$\text{indice}(\mathcal{A}_{r, s_1, s_2}) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{+\partial I_{r, s_1, s_2}(\eta_0)} \frac{g'(z)}{g(z)} dz = -\lim_{\eta_0 \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{+\partial I_{r, s_1, s_2}(\eta_0)} \frac{g'(z)}{g(z)} dz.$$

3. – Dimostrazione del teorema III.

Riprendendo alcune notazioni e posizioni del n. 2 di [3], consideriamo un ricoprimento di $\bar{A}$ mediante un numero finito di sottoinsiemi aperti $\mathcal{O}_1, \dots, \mathcal{O}_\nu$ di $\mathbb{R}^2$, con la condizione che $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_3, \dots, \mathcal{O}_\nu$ siano limitati e l'origine appartenga soltanto a $\mathcal{O}_1$, e assegniamo una partizione dell'unità in $C^\infty(\bar{A})$, subordinata a tale ricoprimento, mediante le funzioni $\zeta_1, \dots, \zeta_\nu$ tali che

$$\begin{aligned} \zeta_i &\in C^\infty(\mathbb{R}^2), \quad \text{supp } \zeta_i \subset \mathcal{O}_i, \\ \zeta_i(x) &\geq 0, \quad \sum_{i=1}^{\nu} \zeta_i(x) = 1 \quad \forall x \in \bar{A}. \end{aligned}$$

Inoltre fissiamo dei punti $x^1, \dots, x^\nu$, con $x^1 = 0$, $x^2 = \infty$ e $x^i \in \mathcal{O}_i \cap A$ per $i = 3, \dots, \nu$, e poniamo

$$A'_i = A'(x^i, \partial), \quad B'_{jk} = B'_{jk}(x^i, \partial), \quad i = 1, \dots, \nu,$$

dove $A'(x, \partial)$ e $B'_{jk}(x, \partial)$ denotano le parti principali di $A(x, \partial)$ e $B_{jk}(x, \partial)$ rispettivamente.

Poniamo ancora, per ogni $i \in \{1, \dots, v\}$,

$$\Psi_i(v) = \|(A' - A'_i)v\|_{W_{s_1, s_2}^{r-2m}(A)} + \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^2 \|(B'_{jk} - B'_{ijk})v\|_{W_{s_1, s_2}^{r-m_{jk}-\frac{1}{2}(\sigma_k)}}.$$

Per la (2.2) di [3] si ha che, fissato un numero reale $\eta > 0$, è possibile scegliere v e gli aperti $\mathcal{O}_1, \dots, \mathcal{O}_v$ in modo che si abbia

$$(3.1) \quad \Psi_i(\zeta_i u) \leq \eta \|\zeta_i u\|_{W_{s_1, s_2}^r(A)} \quad \forall u \in W_{s_1, s_2}^r(A), \quad i = 1, \dots, v.$$

Passando ora alla dimostrazione del teorema III, supponiamo per assurdo che, per un $i \in \{1, 2\}$, $s_i - r + 1$ appartenga a Σ_i e non sia uno zero reale di g_i appartenente a $\{-2m + 2, \dots, 0\}$ e che la (1.14) di [3] sia vera con $\varepsilon > 0$.

Assegnata allora $u \in \mathcal{D}(\bar{A} \setminus \{0\})$ e posto

$$\mathcal{A}u = (Au, \{B_{jk}u|_{\sigma_k}\}), \quad \mathcal{A}^i u = (A'_i u, \{B'_{ijk}u|_{\sigma_k}\}) \quad \text{e} \quad u_i = \zeta_i u,$$

si ha per ogni $i \in \{1, \dots, v\}$ ⁽⁸⁾

$$(3.2) \quad \begin{aligned} \|u_i\|_{W_{s_1, s_2}^r(A)} &\leq c_1(\|\mathcal{A}u_i\|_{\mathcal{E}_{r, s_1, s_2}(A)} + \|u_i\|_{L_{(s_1+s_2)/2-r, -(s_2-s_1)/2+\varepsilon}^2(A)}) \leq \\ &\leq c_1(\|\mathcal{A}^i u_i\|_{\mathcal{E}_{r, s_1, s_2}(A)} + \Psi_i(u_i) + \|A'' u_i\|_{W_{s_1, s_2}^{r-2m}(A)} + \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^2 \|B''_{jk}\|_{W_{s_1, s_2}^{r-m_{jk}-\frac{1}{2}(\sigma_k)}} + \\ &\quad + \|u_i\|_{L_{(s_1+s_2)/2-r, -(s_2-s_1)/2+\varepsilon}^2(A)}), \end{aligned}$$

dove si è posto

$$A'' = A - A', \quad B''_{jk} = B_{jk} - B'_{jk}.$$

Da tale relazione, dalle (2.7)-(2.13) di [3] e dalla (3.1) scritte per η sufficientemente piccolo si deduce la limitazione

$$(3.3) \quad \|u_i\|_{W_{s_1, s_2}^r(A)} \leq c_2(\|\mathcal{A}^i u_i\|_{\mathcal{E}_{r, s_1, s_2}(A)} + \|u_i\|_{L_{(s_1+s_2)/2-r, -(s_2-s_1)/2+\varepsilon}^2(A)}), \quad i = 1, \dots, v.$$

Mostriamo inoltre che, fissato $t_2 \geq s_1$ e tale che $t_2 - r + 1 \notin \Sigma_1$, si ha per ogni $i \in \{1, \dots, v\}$

$$(3.4) \quad \|u_i\|_{W_{s_1, t_2}^r(A)} \leq c_3(\|\mathcal{A}^1 u_i\|_{\mathcal{E}_{r, s_1, t_2}(A)} + \|u_i\|_{L_{(s_1+t_2)/2-r, -(t_2-s_1)/2+\varepsilon}^2(A)}).$$

⁽⁸⁾ Nel corso di questa dimostrazione denoteremo con $c_1, \dots, c_6$ delle costanti indipendenti da u .

Infatti, tale relazione per $i = 1$ segue dalla (3.3) e dal teorema 8.4 di [1], mentre per $i = 2, \dots, \nu$ segue dal teorema 1.1 di [3] e ancora dal teorema 8.4 di [1].

In modo analogo si prova che, fissato $t_1 \leq s_2$ e tale che $t_1 - r + 1 \notin \Sigma_2$, si ha per ogni $i \in \{1, \dots, \nu\}$

$$(3.5) \quad \|u_i\|_{W_{t_1, s_2}^r(A)} \leq c_4 (\|\mathcal{A}^2 u_i\|_{E_{r, t_1, s_2}(A)} + \|u_i\|_{L_{(t_1 + s_2)/2 - r, -(s_2 - t_1)/2 + \varepsilon}^2(A)}).$$

Con ragionamenti analoghi a quelli tenuti in [3] per dedurre dalla (2.14) la (1.14), si deduce ora dalla (3.4) la limitazione

$$(3.6) \quad \|u\|_{W_{s_1, s_2}^r(A)} \leq c_5 (\|\mathcal{A}^1 u\|_{E_{r, s_1, t_2}(A)} + \|u\|_{L_{(s_1 + t_2)/2 - r, -(t_2 - s_1)/2 + \varepsilon}^2(A)}).$$

per ogni $u \in \mathcal{D}(\bar{A} \setminus \{0\})$ e quindi anche per ogni $u \in W_{s_1, t_2}^r(A)$.

Analogamente dalla (3.5) si deduce la limitazione

$$(3.7) \quad \|u\|_{W_{t_1, s_2}^r(A)} \leq c_6 (\|\mathcal{A}^2 u\|_{E_{r, t_1, s_2}(A)} + \|u\|_{L_{(t_1 + s_2)/2 - r, -(s_2 - t_1)/2 + \varepsilon}^2(A)})$$

per ogni $u \in W_{t_1, s_2}^r(A)$.

Teniamo ora presente (cfr. il teorema 8.7 di [1]) che, se $\varepsilon > 0$, qualunque siano i numeri reali r, s_1, s_2 , con $r \geq 1$ e $s_1 \leq s_2$, l'iniezione

$$(3.8) \quad W_{s_1, s_2}^r(A) \hookrightarrow L_{(s_1 + s_2)/2 - r, -(s_2 - s_1)/2 + \varepsilon}^2(A)$$

è compatta.

Pertanto, per un noto risultato dovuto a J. PEETRE (cfr. il lemma 3 al n. 8 di [5]), si ha che la (3.6) implica che l'operatore $u \rightarrow \mathcal{A}^1 u$, definito in $W_{s_1, t_2}^r(A)$ ed a valori in $E_{r, s_1, t_2}(A)$, ha immagine chiusa; e ciò, se $s_1 - r + 1$ appartiene a Σ_1 e non è zero reale di g_1 appartenente a $\{-2m + 2, \dots, 0\}$, contrastata con il teorema II.

Analogamente si ha che la (3.7) implica che l'operatore $u \rightarrow \mathcal{A}^2 u$, definito in $W_{t_1, s_2}^r(A)$ ed a valori in $E_{r, t_1, s_2}(A)$, ha immagine chiusa; e ciò, se $s_2 - r + 1$ appartiene a Σ_2 e non è zero reale di g_2 appartenente a $\{-2m + 2, \dots, 0\}$, contrastata con il teorema II.

Resta così provato che la (1.14) di [3] non può sussistere con $\varepsilon > 0$, quando uno dei due numeri $s_1 - r + 1$ e $s_2 - r + 1$ soddisfa le suddette condizioni, e quindi, per la compattezza dell'iniezione (3.8) e per il citato lemma 3 di [5], si ha allora che o il nucleo di A_{r, s_1, s_2} non ha dimensione finita oppure l'immagine di $\mathcal{A}_{r, s_1, s_2}$ non è chiusa. Si ha perciò la tesi.

BIBLIOGRAFIA

- [1] A. AVANTAGGIATI - M. TROISI, *Spazi di Sobolev con peso e problemi ellittici in un angolo, I*, Ann. di Mat. pura e appl., **95** (1973), pp. 361-408.
 - [2] A. AVANTAGGIATI - M. TROISI, *Spazi di Sobolev con peso e problemi ellittici in un angolo, II*, Ann. di mat. pura e appl., **97** (1973), pp. 207-252.
 - [3] A. AVANTAGGIATI - M. TROISI, *Spazi di Sobolev con peso e problemi ellittici in un angolo, III*, Ann. di Mat. pura e appl. **99** (1974), pp. 1-51.
 - [4] I. C. GOHBERG - M. G. KREĬN, *The basic propositions on defect numbers, root numbers and indices of linear operators* (in russo), Uspehi Mat. Nauk, **12** (1957), pp. 43-118; trad. inglese: Amer. Math. Soc. Transl., ser. 2, **13** (1960), pp. 185-264.
 - [5] J. PEETRE, *Another approach to elliptic boundary problems*, Comm. Pure Appl. Math., **14** (1961), pp. 711-731.
-