Sul gruppo concentrato di intersezioni di ipersuperficie algebriche.

Nota di CESARINA MARCHIONNA TIBILETTI (a Ferrara)

Ad Enrico Bompiani in occasione del suo Giubileo scientifico.

Sunto. - Vedi il primo capoverso del n. 1.

1. In questo lavoro si estende il concetto di «*gruppo concentrato di intersezioni*» dal caso relativo a due curve algebriche piane, già ampiamente trattato in lavori precedenti ⁽¹⁾, a quello di r ipersuperficie immerse in un S_r proiettivo complesso.

I risultati che ora indicheremo sono già stati annunciati in una recente conferenza ⁽²⁾ senza però riferire sulle relative dimostrazioni. Scopo principale di questa nota è appunto quello di esporre per disteso tali dimostrazioni che, rispetto al caso piano, talvolta sono delle immediate estensioni e talaltra sono di tipo diverso o più complicate.

2. Consideriamo r ipersuperficie algebriche $F_j = 0$ ($j = 1, \dots, r$) immerse in uno spazio proiettivo complesso S_r (con $r \geq 2$), ove sia fissato un sistema di coordinate proiettive omogenee x_h ($h = 0, \dots, r$). Supporremo *sempre* che le intersezioni di tali $F_j = 0$ siano date solo da *punti isolati*.

Variamo poi ciascuna $F_j = 0$ sostituendo rispettivamente ogni coefficiente della sua equazione con una funzione analitica di un parametro (complesso) ε , la quale, in $\varepsilon = 0$, abbia i valori del corrispondente coefficiente della $F_j = 0$ considerata. Una variazione di questo tipo verrà detta *regolare* se: 1) ipersuperficie variate hanno solo intersezioni (isolate e) *semplici* nell'intorno di $\varepsilon = 0$; 2) i coefficienti delle equazioni delle ipersuperficie variate sono delle *funzioni analitiche* (della variabile ε) *sprovviste di singolarità in $\varepsilon = 0$* .

Nella presente nota considereremo *solo* (anche quando non lo ripeteremo esplicitamente) *variazioni regolari* delle $F_j = 0$ ($j = 0, \dots, r$) del tipo ora definito.

In particolare le ipersuperficie $F_j = 0$ posseggano riunite in un certo punto P (semplice o multiplo in un modo qualsiasi sulle $F_j = 0$) *i* (e *solo i*) intersezioni.

⁽¹⁾ Cfr. [6], [7], [8].

⁽²⁾ Cfr. [9].

Sia ora $F_j^\varepsilon = 0$ l'ipersuperficie ottenuta variando la $F_j = 0$ (nel modo suddetto) e si indichino con P_k ($k=1, \dots, i$) le i intersezioni semplici delle $F_j^\varepsilon = 0$ che quando $\varepsilon \rightarrow 0$ confluiscono in P .

Infine consideriamo un sistema di i equazioni lineari indipendenti che traducono le condizioni di passaggio di una ipersuperficie algebrica (di un certo ordine abbastanza elevato) per i punti P_k ; indicheremo con il simbolo S_ε l'insieme di tutte le equazioni che risultano combinazioni lineari delle equazioni contenute nel sistema suddetto (naturalmente tale insieme può essere generato da sistemi diversi di i equazioni indipendenti).

3. Precisiamo anzitutto la natura delle suddette condizioni S_ε e poi per esse dimostriamo alcune proprietà, analoghe a quelle già dimostrate in [6] per il caso piano.

Supponiamo (e ciò non altera la natura del problema in esame) che il punto P sia l'origine O del sistema di riferimento.

Le coordinate $x_h^{(k)}$ ($h=0, \dots, r$) dei suddetti punti P_k ($k=1, \dots, i$), distinti, saranno date da serie convergenti nell'intorno di $\varepsilon = 0$ del tipo

$$(1) \quad x_h^{(k)} = \sum_{l=1}^{\infty} \alpha_{hl}^{(k)} \varepsilon^l \quad (h=0, \dots, r; k=1, \dots, i),$$

ove i coefficienti $\alpha_{hl}^{(k)}$ non dipendono da ε .

Veramente, a priori, le coordinate $x_h^{(k)}$ dei punti P_k potrebbero essere date da serie di PUISEUX in ε e cioè da serie di TAYLOR in $\varepsilon^{\frac{1}{m}}$ con $m > 1$, intero: però, se ciò accadesse, basterebbe porre ε in luogo di $\varepsilon^{\frac{1}{m}}$ (tutte le volte che si presentasse una tale eventualità).

Le (1) sono tali che posti gli $x_h^{(k)}$ in luogo di x_h nelle equazioni delle $F_j^\varepsilon = 0$ ($j=1, \dots, r$) queste risultano identicamente soddisfatte.

Imponiamo ora ad una ipersuperficie di ordine n abbastanza elevato (preciseremo poi quanto basta) di equazione

$$(2) \quad \sum a_{i_0 \dots i_r} x_0^{i_0} \dots x_r^{i_r} = 0 \quad (\text{con } i_0 + \dots + i_r = n)$$

di passare per i punti P_k .

Questo fatto importa appunto per i coefficienti $a_{i_0 \dots i_r}$ l'insieme S_ε di equazioni lineari indicate sopra. Pertanto nelle equazioni che costituiscono S_ε le incognite sono le $a_{i_0 \dots i_r}$ ed i coefficienti (delle $a_{i_0 \dots i_r}$) possono essere dati da funzioni analitiche e regolari nell'intorno di $\varepsilon = 0$.

Come è ben noto, quando n è elevato ($n > i$, per esempio) in S_ε sono

contenuti certi gruppi di i (e non più di i) equazioni fra loro indipendenti (e ciò per $\varepsilon \neq 0$ appartenente ad un intorno di $\varepsilon = 0$).

Notiamo ancora che un qualsiasi sistema lineare omogeneo di i equazioni indipendenti estratto da S_ε , ha soluzioni che (tramite i minori estratti dalla matrice dei coefficienti del sistema stesso) possono essere senz'altro rappresentate da funzioni analitiche di ε , regolari nell'intorno di $\varepsilon = 0$.

Pertanto, *un'ipersuperficie $F_\varepsilon = 0$ (di ordine n) che ha come coefficienti una di tali soluzioni di S_ε per $\varepsilon \rightarrow 0$ tende ad una ipersuperficie $F = 0$, passante per P i cui coefficienti soddisfano alle condizioni limiti (per $\varepsilon \rightarrow 0$) delle S_ε stesse, che indichiamo con S_P^i .*

Ciò posto, dimostriamo i seguenti teoremi.

TEOREMA 1. *L'insieme delle equazioni S_ε (relative al punto P) al limite, per $\varepsilon \rightarrow 0$, diventa un insieme S_P^i di equazioni lineari che contiene ancora i equazioni indipendenti ⁽³⁾.*

Le equazioni lineari (nelle $N + 1$ variabili omogenee $a_{i_0 \dots i_r}$) che costituiscono l'insieme S_ε possono essere interpretate come equazioni di iperpiani in uno spazio lineare Σ_N ad N dimensioni ove ovviamente $N > i$; chiamiamo π_ε tale insieme di iperpiani. Poichè S_ε contiene sistemi di i (e non più di i) equazioni indipendenti lo spazio comune a tutti gli iperpiani di π_ε è un Δ_ε di dimensione $N - i$.

Passiamo al limite per $\varepsilon \rightarrow 0$: il sistema π_ε tende ad un sistema π di iperpiani (anzi ogni iperpiano di π_ε ha per limite un iperpiano di π ⁽⁴⁾). A priori il sistema π ha dimensione $\mu \leq i - 1$, essendo $i - 1$ la dimensione di π_ε . Lo spazio Δ (limite di Δ_ε) che è comune a tutti gli iperpiani di π avrà dimensione $N - i + h$ con $h \geq 0$.

Supponiamo dapprima che sia $h > 0$. In tale ipotesi fissiamo i gruppi G_s ($s = 1, \dots, i$) formati ciascuno da $i - 1$ punti con coordinate che non dipendono da ε e generici nel senso che: 1) i gruppi G_s e Δ_ε definiscono rispettivamente (per $s = 1, \dots, i$) i iperpiani (di π_ε) fra loro indipendenti; 2) ogni G_s e Δ non sono contenuti in uno stesso iperpiano ⁽⁵⁾.

⁽³⁾ La dimostrazione di questo teorema è simile a quella data in [6], § 3 per l'analoga proprietà piana, però la riferiamo per disteso, per ragioni di chiarezza, data la sua importanza nello svolgimento della presente nota.

⁽⁴⁾ Notiamo che ogni iperpiano α_ε di π_ε ha per limite un iperpiano α di π in quanto i coefficienti dell'equazione di α_ε sono (nell'intorno di $\varepsilon = 0$) funzioni analitiche regolari (serie di potenze) in ε . Naturalmente se i coefficienti di tale equazione sono tutti divisibili per ε^s e non per ε^{s+1} si avrà cura di passare al limite dopo aver diviso per ε^s entrambi i membri dell'equazione di α_ε .

⁽⁵⁾ Ciò è possibile poichè qui supponiamo che Δ abbia dimensione $N - i + h$ con $h > 0$.

Per chiarezza possiamo supporre N sufficientemente alto in modo che i punti dei gruppi G_s siano dati da punti fondamentali di Σ_N , anche tutti diversi fra loro.

Consideriamo poi gli i iperpiani π_s^ε ($= 1, \dots, i$) *indipendenti* di π_ε passanti rispettivamente per i G_s . Passiamo ora al limite per $\varepsilon \rightarrow 0$; gli iperpiani π_s^ε tenderanno rispettivamente a dei piani π_s ($s = 1, \dots, i$) che passano ancora, rispettivamente, per i gruppi G_s (la cosa è particolarmente evidente se i punti dei G_s sono dati da punti fondamentali di Σ_N , come è detto sopra).

Tali iperpiani π_s passano naturalmente per Δ e quindi contro le ipotesi attuali avremmo degli iperpiani per Δ e per i G_s .

Si giunge così ad un assurdo per $h > 0$, e quindi Δ ha sempre dimensione $N - i$, il sistema limite π ha dimensione $i - 1$ ed S_P^i contiene i equazioni indipendenti. È così completamente dimostrato il teorema 1.

TEOREMA 2. *Le ipersuperficie che in P hanno un punto multiplo di ordine $\geq i$ verificano senz'altro le S_P^i limiti di un insieme S_ε , ottenuto in relazione ad una variazione regolare (del tipo sopra indicato).*

Consideriamo $i + h$ (con $h \geq 0$) iperpiani qualsiasi, distinti o coincidenti di S_r , ciascuno parallelo ad un iperpiano di riferimento, passanti tutti per i punti P_k , in modo che per ogni punto P_k ne passi qualcuno.

Supponiamo sempre che P sia l'origine O : allora per $\varepsilon \rightarrow 0$ l'insieme dei suddetti iperpiani diventa un'ipersuperficie di equazione

$$(3) \quad x_1^{h_1} x_2^{h_2} \dots x_r^{h_r} = 0$$

(ove $x_1, \dots, x_r$ sono ora le coordinate *non* omogenee in S_r), con $h_1 + h_2 + \dots + h_r = i + h$ (ed $h_i \geq 0$).

Pertanto, per le prime proprietà riferite all'inizio del presente paragrafo, le ipersuperficie aventi equazioni del tipo (3) verificano le S_P^i (in quanto ipersuperficie limiti di ipersuperficie soddisfacenti alle S_ε).

Verificano le condizioni lineari S_P^i anche le ipersuperficie di equazione

$$\Phi_{i+h}(x_1, \dots, x_r) = 0$$

ove $\Phi_{i+h}(x_1, \dots, x_r)$ è un polinomio omogeneo nelle $x_1, \dots, x_r$ di grado $i + h$ (con $h \geq 0$).

Quindi soddisfano alle S_P^i tutte le ipersuperficie di equazione

$$\Phi_i(x_1, \dots, x_r) + \Phi_{i+1}(x_1, \dots, x_r) + \dots + \Phi_{i+q}(x_1, \dots, x_r) = 0$$

cioè tutte le ipersuperficie che hanno in P un punto multiplo di ordine $\geq i$.

TEOREMA 3. *Le S_P^i sono indipendenti dal tipo di variazione (regolare) impiegato per passare dalle $F_j = 0$ a delle $F_j^\varepsilon = 0$.*

La dimostrazione si conduce come quella data in [6] per il teorema 6. Qui però si usa il teorema di NOETHER-SEVERI ⁽⁶⁾ in luogo del teorema di NOETHER relativo alle curve piane.

Inoltre serve una proposizione analoga a quella data in [6] col Teorema 2, ma in relazione ad un polinomio di più variabili invece che ad uno di due variabili ⁽⁷⁾. Anche quest'ultima proprietà si dimostra estendendo banalmente quanto è detto in [6] per i Teoremi 1 e 2.

Le proprietà ora dimostrate si riassumono nella seguente proposizione: «Siano date r ipersuperficie algebriche $F_j = 0$ ($j = 1, \dots, r$) immerse in uno spazio S_r , aventi in comune solo dei punti isolati. Ad ogni punto P , in cui siano riunite i intersezioni delle $F_j = 0$ è legato un insieme di condizioni lineari S_P^i da cui se ne possono estrarre gruppi di i e non più di i indipendenti. Queste sono limiti di condizioni di passaggio di un'ipersuperficie (di ordine n abbastanza elevato) per certi punti P_k (comuni ad r ipersuperficie $F_j^\varepsilon = 0$ ($j = 1, \dots, r$) che, quando $\varepsilon \rightarrow 0$, con una qualsiasi variazione regolare, diventano rispettivamente le $F_j = 0$: i punti P_k sono esattamente le intersezioni — semplici ed isolate — delle $F_j^\varepsilon = 0$ che cadono in P per $\varepsilon \rightarrow 0$) ».

⁽⁶⁾ Cfr. ad es. [1], pag. 311.

⁽⁷⁾ Precisamente le proposizioni cui si allude sono le seguenti, immediate estensioni (per l'enunciato e la dimostrazione) dei teoremi 1 e 2 di [6]

I) Si indichi con F un polinomio di r variabili $x_1, \dots, x_r$ e con $Fs_1, \dots, s_r$ la sua derivata di ordine $s_1 + \dots + s_r$ (ove $s_i \geq 0$) data da $\frac{\partial^{s_1 + \dots + s_r} F}{\partial x_{s_1} \dots \partial x_{s_r}}$ considerando la F stessa come derivata di ordine zero $F_0, \dots, F_0 = F$ (ovviamente, in generale un $s_i = 0$ indica che non si deriva rispetto alla variabile x_i). Si fissino in uno spazio S_r (ove $x_1, \dots, x_r$ sono le coordinate non omogenee) k punti P_j ($j = 1, \dots, k$) di coordinate $x_1^{(j)}, \dots, x_2^{(j)}, \dots, x_r^{(j)}$, si consideri in particolare uno di essi P_1 , si diano in relazione a ciascuno dei punti P_j certi numeri interi positivi n_j ($j = 1, 2, \dots, k$) e in relazione a P_1 anche r numeri interi $\sigma_1, \dots, \sigma_r$ con $\sigma_l \geq 0$ ($l = 1, \dots, r$) e $\sum_{l=1}^r \sigma_l < n_1$. Si può allora costruire un polinomio di grado abbastanza elevato che soddisfi alle seguenti condizioni: 1) in P_1 siano nulle tutte le derivate $Fs_1, \dots, s_r$ con $\sum_{l=1}^r s_l < n_1$ ad eccezione della $F_{\sigma_1, \dots, \sigma_r}$; 2) in ciascun altro punto P_j siano nulle tutte le $Fs_1, \dots, s_r$ per cui si ha rispettivamente, $\sum_{l=1}^r s_l < n_j$.

II) Assegnato un certo gruppo di punti in uno spazio S_r (ove è fissato un sistema di coordinate non omogenee $x_1, \dots, x_r$) è possibile costituire un polinomio $F(x_1, \dots, x_r)$ nelle r variabili $x_1, \dots, x_r$, di ordine abbastanza alto, tale che in ciascuno dei punti dati esso e le sue derivate (fino ad un ordine prefissato — per ciascun punto —) assumano valori assegnati.

4. Usiamo ora in S_r le coordinate *non* omogenee $x_1, x_2, \dots, x_r$. Diremo che *in un punto* P isolato comune ad r ipersuperficie $F_j = 0$ ($j = 1, \dots, r$) di S_r , *una ipersuperficie* $F = 0$ *verifica la condizione di NOETHER* quando è possibile scrivere nell'intorno di P

$$(4) \quad F = \sum_{h=1}^r A'_h F_h$$

ove le A'_h sono serie di potenze, anche solo formali ⁽⁸⁾, in r variabili, nel punto P stesso.

Si dimostra in modo del tutto analogo a quello usato in [6] per il teorema 9 il seguente teorema 4 (preliminarmente si verificano proprietà simili a quelle date dai lemmi 7 ed 8 della [6], e ciò come nella stessa [6].

TEOREMA 4. *Se una ipersuperficie* $F = 0$ *soddisfa alla condizione di NOETHER nel punto* P , *essa verifica le* S_P^i *(relative a* P *) e viceversa.*

5. Infine possiamo concludere, come nel caso piano con le seguenti proposizioni.

Siano date le suddette ipersuperficie $F_j = 0$, immerse in S_r che posseggano i intersezioni riunite in un punto P .

Diciamo che «*queste ipersuperficie* $F_j = 0$ ($j = 1, \dots, r$) *posseggono un gruppo concentrato di* i *intersezioni in* P *e che un'ipersuperficie* $F = 0$ *passa per lo stesso gruppo concentrato di intersezioni quando soddisfa alle precedenti condizioni lineari* S_P^i *(relative allo stesso punto* P *)* ».

Questo concetto di «gruppo concentrato di punti comuni alle $F_j = 0$ » è definito qui in forma astratta e la sua introduzione è giustificata, come nel caso piano ⁽⁹⁾, dal fatto che esso soddisfa alle proprietà fondamentali delle intersezioni semplici di r ipersuperficie (e ciò in accordo col principio di permanenza delle proprietà formali).

Precisamente un gruppo Γ di i intersezioni, di r ipersuperficie $F_j = 0$, concentrate in un punto P soddisfa alle seguenti quattro proprietà.

⁽⁸⁾ Si dimostra che quando vi è questa possibilità per F si può anche scrivere F in una forma del tipo (4) in cui però le A'_h sono serie di potenze convergenti nell'intorno di P .

La dimostrazione di questo fatto si ottiene estendendo in modo ovvio quella data in [6], § 6. Per tale estensione occorre però ricordare la seguente proposizione. «Date le precedenti $F_j = 0$ (nelle variabili non omogenee $x_1, \dots, x_h$), è sempre possibile trovare un polinomio $R(x_h)$ nella sola variabile x_h per cui si abbia

$$R(x_h) = \sum_{i=1}^r A_i F_i \quad (h = 1, \dots, r)$$

con A_i polinomio nelle $x_1, \dots, x_r$ ». Quest'ultimo fatto, ben noto, deriva immediatamente — per esempio — dal teorema del n. 141, a pag. 335, di F. SEVERI, *Lezioni di Analisi*, Bologna 1943, vol. 1.

⁽⁹⁾ Cfr. [6], § 7.

a) Le condizioni di passaggio per Γ sono date da equazioni lineari che risultano limiti di effettive condizioni di passaggio per punti distinti.

b) Tutte le ipersuperficie d'equazione $F = \sum_1^r A_h F_h$, ove gli A_h sono dei polinomi qualsiasi (per esempio, nelle variabili *non* omogenee $x_1, \dots, x_r$) passano per Γ .

c) L'equazione $F = 0$ di un'ipersuperficie che passa per Γ può sempre scriversi nell'intorno di P nella forma $F = \sum_1^r A'_h F_h$ ove le A'_h sono serie di potenze (di r variabili) in P .

d) Le r ipersuperficie $F_j = 0$ abbiano in comune in un punto P un gruppo concentrato Γ di i (e *solo* i) intersezioni; r altre ipersuperficie $G_j = 0$ ($j = 1, \dots, r$) passino per tale Γ ed abbiano *solo* i intersezioni riunite in P . Allora ogni altra ipersuperficie $H = 0$, che nell'intorno di P si può scrivere $H = \sum_1^r A'_h F_h = 0$ (con A'_h serie di potenze — in r variabili — in P) si può scrivere anche, nell'intorno di P , nella forma $H = \sum_1^r B'_h G_h = 0$ (con B'_h serie di potenze — in r variabili — nello stesso punto P). Cioè il gruppo Γ è caratterizzato da una qualsiasi r — pla di ipersuperficie che passano (in un modo qualunque) per Γ ed hanno raccolte in P *solo* i intersezioni.

Le proposizioni a), b), c) derivano ovviamente dai teoremi riferiti sopra.

L'ultima proprietà d) si dimostra con considerazioni diverse da quelle usate a proposito dell'analoga proposizione piana ⁽¹⁰⁾.

Riferiamo una tale dimostrazione nel seguente n. 6.

6. Diamo dunque la dimostrazione della proposizione d) del precedente n. 5. Mostriamo dapprima che è possibile scrivere $F_j = 0$ nella forma

$$F_j = \sum_1^r L'_{jh} G_h$$

nell'intorno di P , con L'_{jh} serie di potenze — del solito tipo — in P .

Per ipotesi è possibile scrivere

$$(5) \quad G_j = \sum_1^r C'_{jh} F_h$$

ove le C'_{jh} sono serie di potenze in r variabili convergenti in P ⁽¹¹⁾.

⁽¹⁰⁾ Cfr. [6], § 8.

⁽¹¹⁾ Cfr. la nota (8), relativa al n. 4.

Sia ora c_{jh} il termine noto di C_{jh} : si ha

$$G_j = \sum_1^r c_{jh} F_h + \sum_1^r D'_{jh} F_h$$

ove le D'_{jh} sono serie di potenze convergenti in P che si annullano nello stesso punto P .

Consideriamo il determinante

$$\Omega = \| c_{jh} \|$$

e mostriamo che, nelle nostre ipotesi, è $\Omega \neq 0$.

Diamo una dimostrazione per assurdo supponendo $\Omega = 0$. In tale ipotesi una riga di Ω è combinazione lineare delle altre: per esempio

$$(6) \quad c_{1h} = \sum_2^r \lambda_m c_{mh} \quad (h = 1, \dots, r)$$

Poniamo

$$(7) \quad M_j = \sum_1^r c_{jh} F_h \text{ ed } N_j = \sum_1^r D'_{jh} F_h;$$

si ha

$$G_j = M_j + N_j.$$

Ciò posto, dalle (6) si deduce

$$\begin{aligned} M_1 &= \sum_1^r c_{1h} F_h = \sum_1^r \sum_2^r \lambda_m c_{mh} F_h = \sum_2^r \lambda_m \sum_1^r c_{mh} F_h = \\ &= \sum_2^r \lambda_m M_m. \end{aligned}$$

Allora

$$(8) \quad G_1 = M_1 + N_1 = \sum_2^r \lambda_m M_m + N_1 = \sum_2^r \lambda_m G_m - \sum_2^r \lambda_m N_m + N_1$$

Ora dalle (7) si ha

$$(9) \quad N_1 - \sum_2^r \lambda_m N_m = \sum_1^r E'_h F_h$$

ove le E'_h sono serie di potenze (del solito tipo) che si annullano in P .

Infine, usando le (8) e (9), l'intersezione delle $G_i = 0$ può essere data dal sistema

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_h^r E'_h F_h = 0 \\ G_2 = 0 \\ \dots\dots\dots \\ G_r = 0 \end{array} \right.$$

Di qui si deduce, tenendo conto delle (5) e ricordando che tutte le E'_h si annullano in P , che il numero delle *intersezioni delle* $G_i = 0$ raccolte in P sono più di i .

Quindi sarà $\Omega \neq 0$ e dal sistema (5) è allora possibile ricavare delle relazioni.

$$(11) \quad F_j = \sum_h^r L'_{jh} G_h$$

in cui le L'_{jh} sono serie di potenze nell'intorno di P .

Pertanto tenendo conto dell'ipotesi

$$H = \sum_h^r A'_h F_h$$

e della (11) si ha

$$H = \sum_h^r B'_h G_h$$

(con B'_h serie di potenze — del solito tipo — in P) e ciò come volevasi dimostrare.

7. Ricordiamo ancora che B. SEGRE nell'interessante memoria [2] ⁽¹²⁾ è giunto a risultati che si collegano a quelli esposti nella presente nota.

Precisamente B. SEGRE determina con metodi diversi dai nostri (che utilizzano brillantemente la rappresentazione delle forme algebriche su una varietà di Veronese) delle condizioni locali topologico-differenziali le quali forniscono le condizioni di appartenenza di una forma ad un modulo. Queste ultime condizioni sono, press'a poco, come ha osservato lo stesso prof. SEGRE, un'estensione delle S_P^i che avevamo già introdotto in [6] a proposito delle curve piane (e che ora abbiamo determinato in relazione ad un S , qualsiasi).

⁽¹²⁾ Cfr. anche [3].

Infine osserviamo che i risultati delle note [7] e [8] relativi al teorema dell' $A\varphi + B\psi$ e all'appartenenza di polinomi a moduli di polinomi in due variabili si possono estendere al caso di polinomi di più variabili.

Alcuni enunciati di tali estensioni sono riportati in [9], cap. V; altri si possono facilmente immaginare, insieme alle dimostrazioni, che si rifanno sulla falsariga di quelle esposte in [7] ed [8]; pertanto pensiamo opportuno non dilungarci oltre su tali questioni.

Ricordiamo ancora che, sfruttando i risultati sopra citati B. SEGRE ha pure dato (in [2]) eleganti soluzioni a proposito di problemi riguardanti appartenenze di forme a certi moduli.

BIBLIOGRAFIA

- [1] E. BERTINI, *Geometria proiettiva degli iperspazi*, Principato, Messina (1923).
 - [2] B. SEGRE, *Invarianti topologico differenziali, varietà di Veronese e moduli di forme algebriche*, «Annali di Matem.» (IV) **41** (1956).
 - [3] — —, *Some properties of differentiable varieties and transformations*, etc., «Ergebnisse der Math.» u. ihrer Grenzgebiete, Neue folge, heft **13**, Springer, Berlin (1957).
 - [4] F. SEVERI, *Rappresentazione di una forma qualunque per combinazione lineare di più altre*, «Rend. Acc. Lincei» (5) **11** (1902) e Mem. scelte, I, Zuffi, Bologna (1950).
 - [5] — —, *Su alcune questioni di postulazione*, «Rend. Circ. Matem. di Palermo» **17** (1903).
 - [6] C. TIBILETTI, *Gruppo concentrato di intersezioni di due curve algebriche*, «Rend. Ist. Lombardo» **84** (1951).
 - [7] — —, *Il teorema generale dell' $A\varphi + B\psi$ dedotto da un computo di costanti*, «Rend. Ist. Lombardo», **84** (1951).
 - [8] — —, *Alcune estensioni di un teorema di Noether*, «Rend. di Matem.» e sue applicazioni **10** (1951).
 - [9] C. MARCHIONNA TIBILETTI, *Groupe concentré d'intersections de courbes et hypersurfaces algébriques. Applications*, 3^o Coll. de Géom. alg., Bruxelles (1959).
-