Una generalizzazione della teoria dei modelli fisici

Nota di Giulio Supino (Bologna)

A Enrico Bompiani in occasione del suo Giubileo scientifico.

Sunto. - *Si espongono alcune osservazioni sui «modelli» e si mostra come essi possano essere eseguiti in base a trasformazioni più generali della «similitudine» (o della affinità).*

1. Nel campo delle esperienze su modelli di dimensioni ridotte, si distinguono attualmente due tipi sostanzialmente differenti: i modelli «simili» ed i modelli «analogici». I modelli simili si collegano alla teoria della similitudine meccanica che risale a Newton; la loro costruzione è suggerita dal fatto che in un punto qualunque di un sistema meccanico è verificata l'equazione $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$ e che, se si alterano le forze nel rapporto 1 a φ, le lunghezze nel rapporto 1 a λ, le masse nel rapporto 1 a μ, i tempi nel rapporto 1 a τ, l'equazione relativa ad un punto generico resta invariata ove sia dappertutto $\varphi = \frac{\mu\lambda}{\tau^2}$.

Si intende che il rapporto φ deve essere applicato tanto alle forze attive che alle reazioni, tanto alle forze esterne che alle interne ed è in queste condizioni che risiede la difficoltà di eseguire un «modello». Tuttavia, realizzazioni notevoli sono possibili in alcuni casi.

2. Di origine più recente è il modello analogico che consente di sperimentare su fenomeni differenti da quelli del prototipo, ma retti dalle stesse equazioni.

Per esempio se si indica con h il carico piezometrico in un mezzo filtrante che occupi un campo C (a tre dimensioni) e si assegna sulla superficie limite la h stessa, allora il fenomeno è conosciuto risolvendo in C l'equazione $\Delta_2 h = 0$ con le date condizioni al contorno. Se non si è in grado di risolvere il problema matematico si può costruire, in piccolo, un modello dello stesso campo C, e assegnata sul contorno la temperatura V (indipendente dal tempo) si può misurare, in qualunque punto interno interessi, il valore di V. Dopo ciò, per similitudine, si può risalire al valore della temperatura nel prototipo e, quando sul contorno si sia assegnato V uguale ad h e si tenga conto che, in C, è $\Delta_2 V = 0$, si può concludere che il valore di V nel prototipo è uguale al valore di h che si voleva determinare. Anche questa volta perciò il passaggio modello-prototipo si effettua attraverso una similitudine. (1)

3. Come il concetto informatore del modello «simile» differisce da quello del modello analogico, così è differente anche la loro portata. Ciò è già stato rilevato più volte ma conviene insistervi anche in relazione agli sviluppi che seguiranno.

Un modello analogico è in sostanza un modello di equazione. Ne segue che l'esperienza eseguita con un modello analogico è presumibilmente affetta da un doppio errore perchè le equazioni rappresentano soltanto schematicamente il fenomeno fisico. Riferendoci all'esempio del numero precedente dovremo prevedere un «errore» nella valutazione del fenomeno termico rispetto alla equazione della propagazione del calore ed un errore nel comportamento del mezzo filtrante rispetto alla equazione della filtrazione.

Diversa è la situazione col modello simile. Questo rispetto al sistema di equazioni da cui proviene, presenta, come già ho osservato (2), due vantaggi.

1) Il «modello», prima ancora di essere modello, è prototipo di se stesso, cioè dà direttamente la visione del fenomeno in esame;

2) Il «modello» ha lo stesso significato rispetto a tutti i sistemi di equazioni che ammettono la stessa trasformazione modello-originale.

Così se noi pensiamo di costruire il modello simile di una trave servendoci della teoria della resistenza dei materiali, constateremo facilmente che esso è modello anche per la teoria matematica della elasticità e per almeno due teorie differenti delle deformazioni finite. Ed un modello plastico è modello per le due teorie conosciute della plasticità.

Non si può quindi escludere che un modello che rispetti la similitudine per una teoria nota sia modello anche per una teoria più perfetta ancora da formulare. È questa osservazione che ci fa ritenere, con qualche fondamento, che l'esperienza su un modello simile dia qualche cosa di più che non l'integrazione delle equazioni già assegnate per il fenomeno in esame.

Si deve anche aggiungere una nuova osservazione.

3) Supponiamo che le forze agenti sul prototipo non siano riprodotte esattamente nel modello. Tale inesattezza si ripercuoterà nelle accelerazioni. nelle velocità e quindi nella posizione istantanea dei singoli punti, ma il

---

(1) Ci si può domandare quale sia il vantaggio di eseguire una esperienza di carattere termico invece di utilizzare direttamente la filtrazione. Ma, in base alla legge di HENRY, l'acqua libera aria quando aumenta la temperatura. Pertanto se il modello filtrante non ha la stessa temieratura dell'acqua (e ciò accade usualmente perchè l'acqua è a temperatura inferiore a quella mantenuta nei laboratori sperimentali) durante il processo di filtrazione si liberano bolle d'aria che ostruiscono i pori capillari alterando completamente il processo.

(2) - Si veda G. SUPINO - Rend. Lincei 1947 e Conferenze della Università di Bari 1958.

moto, pur essendo alterato, resterà sempre un moto effettivo nel modello e quindi *possibile* nel prototipo; di più, se la approssimazione con cui sono riprodotte le forze è sufficiente, anche l'approssimazione del moto sarà normalmente soddisfacente. È questa osservazione che giustifica, mi sembra, la validità di risultati ottenuti con *similitudini parziali* che non si sanno generalmente giustificare.

Comunque quello che interessa mettere in luce è che il moto rilevato nel modello è un moto fisicamente possibile del prototipo (e non soltanto un moto possibile per le equazioni differenziali che reggono il fenomeno). Il che evidentemente non accade quando il modello abbia carattere analogico.

4. Tutti i modelli finora considerati rispettano la similitudine geometrica. Si è ricorsi in qualche caso ad una riduzione della scala delle altezze diversa da quella delle lunghezze (cioè ad una affinità) ma raramente e soltanto con pochi accenni ci si è riferiti a trasformazioni più generali.

Eppure si possono suggerire (ed è questo lo scopo principale della presente nota) modelli che non rispettino nè la similitudine nè l'affinità geometrica, ma che soddisfino ad una condizione più generale: cioè diano sperimentalmente la soluzione di una equazione dalla quale si può risalire alla equazione che si vuole risolvere per mezzo di una trasformazione nota.

In questo ordine di idee è possibile procedere in due modi differenti:

I) Da una soluzione determinata sperimentalmente nel campo C e relativa ad una teoria T si vuole dedurre con una opportuna trasformazione la soluzione in un campo C' relativamente alla stessa teoria T. Allora la trasformazione che fa passare da C a C' deve lasciare invariate le equazioni che reggono T. Per esempio se è assegnata sul contorno di C la temperatura V indipendente dal tempo e si sostituisce a C un campo C' ottenuto per rappresentazione conforme di C su C', la temperatura determinata in un punto P di C è uguale alla temperatura del punto corrispondente P' di C'.

II) Da una solnzione sperimentale nel campo C relativamente ad una teoria T si vuol dedurre, con opportuna trasformazione, la soluzione in un campo C' di altra teoria T'. Allora la trasformazione che fa passare da C a C' deve mutare le equazioni di T in equazioni di T'.

Un caso particolare si ha quando le stesse equazioni valgono per T e per T' come per es. accade per il deflusso del liquido viscoso in un tubo cilindrico e la torsione in un cilindro che abbia la stessa sezione retta del tubo. Allora la trasformazione deve lasciare invariata la equazione comune (come nel caso precedente).

5. I modelli del tipo I si collegano con i modelli simili, quelli del tipo II con i modelli analogici. Su questi non sembra vi sia nulla di particolare da osservare, perchè i modelli di equazioni restano tali quando su di essi si

operi con una conveniente trasformazione analitica. Qualche rilievo si deve invece aggiungere sui modelli del tipo I e ciò faremo discutendo per questi le osservazioni svolte al n. 3.

Passiamo attraverso una trasformazione di coordinate dal modello in C al prototipo in C'. Secondo la prima osservazione del n. 3 il modello simile è esso stesso un prototipo nel senso che dà direttamente la visione del fenomeno fisico in esame. Ciò resta vero anche per il modello in C, ma perde di significato nei confronti di C' (salvo per qualche caratteristica differenziale del moto che eventualmente possa essere messa in luce e che risulti indipendente dalla forma del contorno di C).

Si è anche osservato che il modello resta tale rispetto a tutti i sistemi di equazioni che ammettono la stessa trasformazione modello-prototipo. L'affermazione resta vera anche questa volta, ma poichè la trasformazione è diversa dalla similitudine essa risulta meno facilmente applicabile. Tuttavia un esempio può essere portato in questo campo: la inversione è infatti una trasformazione che soddisfa alla rappresentazione conforme (cioè è invariante rispetto al $\Delta_2 \chi = 0$) e conserva pure il $\Delta_2 \Delta_2 \chi = 0$. Anche questa volta dunque non si può escludere che il modello del tipo I possa dare qualcosa di più, in campo fisico, che non un semplice modello di equazione.

Infine, se prendiamo in esame la terza osservazione, dobbiamo rilevare che il moto nel modello è ancora un moto fisicamente possibile, ma che questa volta la sua validità fisica nel prototipo è condizionata dalla trasformazione. Così la trasformazione conforme è valida per il moto irrotazionale di un liquido perfetto; se il liquido non è perfetto e il moto nel modello non è esattamente irrotazionale, la trasformazione conforme altera certo i risultati nel passaggio modello prototipo, ma qualche cosa di fisicamente effettivo e di più aderente al fatto fisico di una semplice trasformazione analogica continua a sussistere: per esempio il fatto sperimentalmente accertato che il liquido aderisce alla parete non è compatibile con la teoria dei liquidi perfetti eppure continua a sussistere con la trasformazione conforme prospettata.

6. Le considerazioni precedenti trovano applicazione nel campo della elasticità piana, quando si consideri la trasformazione per inversione.

Vediamone le particolarità.

Siano x, y le antiche variabili. Le nuove, x', y', siano legate a quelle dalle relazioni

$$x' = \frac{k^2 x}{r^2}\,, \quad y' = \frac{k^2 y}{r^2} \qquad (r^2 = x^2 + y^2) \tag{1}$$

L'equazione $\Delta_2 \Delta_2 \chi = 0$ in coordinate polari diviene

$$\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}\right)\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \chi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \chi}{\partial \theta^2}\right) \tag{2}$$

e col cambiamento di variabili (1) (essendo $r'^2 = \frac{k^4}{r^2}$)

si ottiene

$$\frac{r'^6}{k^8}\left[\frac{1}{r'}\frac{\partial}{\partial r'}\left(r'\frac{\partial}{\partial r'}\right)+\frac{1}{r'^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta'^2}\right]\left[\frac{1}{r'}\frac{\partial}{\partial r'}\left(r'\frac{\partial r'^2\chi}{\partial r'}\right)+\frac{1}{r'^2}\frac{\partial^2 r'^2\chi}{\partial\theta'^2}\right]=0$$

Se ne deduce che quando χ è espressa nelle variabili x', y' allora $r'^2\chi$ soddisfa al $\Delta_2\Delta_2\,(r'^2\chi)=0$. Le componenti di tensione dedotte da $r'^2\chi$ (3) sono:

$$\sigma_{r'} = \frac{1}{r'^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta'^2}(r'^2\chi) + \frac{1}{r'}\frac{\partial(r'^2\chi)}{\partial r'};$$

$$\sigma_{\theta'} = \frac{\partial^2}{\partial r'^2}(r'^2\chi);$$

$$\tau_{r'\theta'} = -\frac{\partial}{\partial r'}\frac{1}{r'}\frac{\partial}{\partial\theta'}(r'^2\chi)$$

dove $\theta = \theta'$. Si può scrivere

$$\sigma_{r'} = r^2\sigma_r + 2\left(\chi - r\frac{\partial\chi}{\partial r}\right).$$

$$\sigma_{\theta'} = r^2\sigma_\theta + 2\left(\chi - r\frac{\partial\chi}{\partial r}\right).$$

$$\tau_{r'\theta'} = -r^2\tau_{r\theta}$$

dove σ_r, σ_θ e $\tau_{r\theta}$ sono le componenti dipendenti dalla χ espressa per mezzo delle variabili r. θ.

Perciò lo stress nel sistema $r'\theta'$ differisce da quello nel sistema r, θ per il fattore r^2, per il cambiamento del segno nella τ e per l'aggiunta delle tensioni normali $2\left(\chi - r\frac{\partial\chi}{dx}\right)$. E in conseguenza un contorno libero da forze viene trasformato in un contorno soggetto a sole forze normali. Di più queste forze sono costanti perchè sul contorno originale si ha

$$\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial\chi}{\partial x}\right)=0 \qquad \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial\chi}{\partial y}\right)=0 \tag{3}$$

(3) Si veda T. LEVI CIVITA - *Atti dell'Istituto Veneto di Scienze Lettere e Arti* - T. 56 (1897 - 1898) p. 1399 - 1410 e, per quello che si riferisce alle relazioni tra le σ, J. MICHELL, *London Math. Soc. Proc.* Vol. 34 (1902) p. 134.

e perchè, derivando rispetto ad s la $\chi - r\frac{\partial \chi}{\partial r}$, si ottiene

$$\frac{\partial}{\partial s}\left(\chi - x\frac{\partial \chi}{\partial x} - y\frac{\partial \chi}{\partial y}\right) = \frac{\partial \chi}{\partial s} - \frac{\partial \chi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} - \frac{\partial \chi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}$$

$$- x\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial \chi}{dx}\right) - y\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial \chi}{\partial y}\right) = 0$$

per le (3) c. d. d.

Le caratteristiche di questa trasformazione suggeriscono la possibilità di varie esperienze su modello. In particolare se su una corona circolare si è sperimentato (per es. con metodo fotoelastico):

a) Col contorno esterno soggetto a sole forze normali e contorno interno scarico;

b) Col contorno esterno scarico e contorno interno soggetto a forze normali;

c) Col contorno esterno soggetto a due forze concentrate eguali ed opposte e contorno interno scarico,

è possibile, combinando i risultati sperimentali ottenuti nei tre casi, di determinare nel contorno trasformato la sollecitazione prodotta da soli carichi concentrati. Non è dunque necessario ricorrere ad esperienze sul contorno trasformato e ciò rappresenta un notevole vantaggio tutte quelle volte che la trasformazione porti a contorni che si estendono a notevole distanza dall'origine. In particolare se la trasformazione riduce uno dei cerchi ad una retta in modo che dalla corona circolare si passa ad una struttura che può essere assimilata ad un «ponte a paretina».

7. L'esempio precedente mostra la possibilità di sperimentare utilizzando trasformazioni più generali della similitudine. Si deve tuttavia rilevare che queste trasformazioni più generali non possono essere adottate se non si sono scritte prima le equazioni del fenomeno in esame.

L'elenco di tutte e sole le grandezze dimensionate che intervengono nel fenomeno, sufficiente per applicare il teorema *Pi* nel caso di trasformazioni simili, non serve nel caso presente, nel quale il teorema *Pi* perde una notevole parte del suo valore.

Precisiamo questa osservazione su un esempio. Si consideri il moto di liquido perfetto uscente da una luce. Esso dipende da g, dalle velocità locali, dalle dimensioni della luce e dal carico H. Avendo scelto una velocità caratteristica V e una lunghezza caratteristica l, la portata Q della luce sarà esprimibile con la relazione

$$\frac{Q}{Vl^2} = f\left(g,\ V.\ l;\ \frac{u}{V},\ \frac{v}{V},\ \frac{w}{V},\ \frac{l_1}{l},\ \frac{H}{l}\right);$$

potremo cioè scrivere

$$Q = V\ l^3 \psi\left(\frac{V^2}{gl};\ \frac{u}{V},\ \frac{v}{V},\ \frac{w}{V} \cdots \frac{l'}{l},\ \frac{H}{l}\right)$$

dove $\frac{u}{V}, \frac{v}{V}, \frac{w}{V}$ sono variabili da punto a punto e si possono perciò indicare con $\mathfrak{F}\left(\frac{u}{V}, \frac{v}{V}, \frac{w}{V}\right)$ essendo $\mathfrak{F}$ simbolo di un funzionale di elementi puri mentre $\frac{l'}{l}$ e $\frac{H}{l}$ sono due parametri puri che definiscono la dimensione della luce ed il carico.

Se dal prototipo si passa ad un modello simile allora, assicuratisi che è costante $F = \frac{V^2}{gl}$ non si ha più alcuna preoccupazione; è chiaro che essendo il moto nel modello simile a quello del prototipo la $\mathfrak{F}$ resta la stessa in ogni punto e cosi pure restano invariati i parametri puri $\frac{l}{l}, \frac{H}{l}$. Perciò si scrive abitualmente $Q = Vl^3\psi(F)$. Ma se si rinuncia alla trasformazione simile si dovrebbe scrivere

$$Q = Vl^3\psi\left(F,\ \mathfrak{F}(u,\ v,\ w),\ \frac{l'}{l},\ \frac{H}{l}\right)$$

e la invarianza della $\mathfrak{F}$ non può essere affermata se non si conoscono le equazioni che determinano il fenomeno.

9. Un' ultima osservazione prima di concludere.

Consideriamo un prototipo ed insieme tutti i modelli che da esso si possono ricavare. Poichè il prototipo è modello di se stesso così si può più brevemente dichiarare che si prendono in esame tutti i possibili modelli di uno stesso fenomeno. Possiamo allora affermare che

1) Se con una trasformazione (che possiamo indicare con A) si passa da M ad M_1 e con la trasformazione B si passa da M_1 ad M_2 allora $A.B = C$ fa passare direttamente da M a M_2;

2) Se le operazioni A e B sono «affinità» o «similitudini» allora è $AB = BA$ (cioè vale la proprietà commutativa). E la stessa proprietà vale se

una almeno delle trasformazioni è una similitudine o una affinità. Nel caso generale le trasformazioni commutabili tra loro rappresentano però eccezioni. Normalmente se $AB = C$ è $BA = D$ con $D \neq C$.

3) Poichè oltre alle proprietà precedenti sono soddisfatte le leggi dell'uguaglianza ed inoltre, date le trasformazioni A e B si può affermare che esistono due elementi C e D non necessariamente distinti e tali che $AC = B$, $DA = B$, così segue che le trasformazioni di un modello formano un gruppo di infiniti elementi.

4) Infine se si considera la A come una operazione ed è $AM_1 = M_2$ si osservi che, scomponendo M_1 in due parti α e β, si deve necessariamente ottenere

$$A\alpha_1 = \alpha_2 \qquad A\beta_1 = \beta_2 \qquad \text{con } \alpha_2 + \beta_2 = M_2$$

Si ha perciò $A(\alpha_1 + \beta_1) = A\alpha_1 + A\beta_1$.

cioè le operazioni A sono operazioni distributive. E poichè il passaggio da un modello ad un altro ha carattere biunivoco così tali operazioni sono anche *non* degeneri.