Un teorema di esistenza per controlli ottimi di sistemi definiti da equazioni integrali di Urysohn (*) (**).

MARIA LUISA BENNATI (Genova)

Summary. — *In this paper an existence theorem is proved for optimal control problems described by Urysohn systems, with pointwise constraints on controls and states. An example of application of the existence theorem is given.*

1. — Introduzione.

Questo lavoro è dedicato allo studio di problemi di controllo ottimo per sistemi di equazioni di Urysohn. Il risultato ottenuto è un teorema di esistenza per problemi di ottimizzazione del tipo di Lagrange. Il teorema dimostrato generalizza risultati noti sull'argomento (v. [1] e [2]).

In [1] sono provati teoremi di esistenza per sistemi di controllo del tipo di Urysohn in cui l'equazione di stato è in forma meno generale di quella considerata nel presente lavoro e così in [2] dove il sistema di controllo è descritto da un'equazione integrale nonlineare di Volterra. Il risultato provato è un caso concreto rispetto a [3], ove l'equazione di stato è un'equazione integrale astratta. È dato un esempio di applicazione del teorema di esistenza.

2. — Notazioni.

Sia Ω un sottoinsieme (non vuoto), misurabile secondo Lebesgue e di misura finita dello spazio $\mathbf{R}^r$, con $r \geq 1$. La variabile stato x è un elemento di $\mathbf{R}^n$; il vettore controllo u è in $\mathbf{R}^m$.

Per ogni t in Ω sia $A(t)$ un sottoinsieme non vuoto, chiuso dello spazio $\mathbf{R}^n$ e sia A l'insieme di tutte le coppie (t, x) con $t \in \Omega, x \in A(t)$. Per ogni $(t, x) \in A$, sia $U(t, x)$ un sottoinsieme non vuoto dello spazio $\mathbf{R}^m$. Sia M l'insieme degli elementi (t, x, u) con $(t, x) \in A$ e $u \in U(t, x)$. Sono date le funzioni h, g definite su $\Omega^2 \times \mathbf{R}^n$ a valori rispettivamente in $\mathbf{R}^n$ e matrici $n \times n$; f, f_0 definite su $\Omega \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m$ a valori in $\mathbf{R}^n$ e $\mathbf{R}$ rispettivamente. Sia φ definita da Ω in $\mathbf{R}^n$.

(*) Entrata in Redazione il 15 marzo 1978.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito della mia attività di ricerca come borsista C.N.R., presso l'Università di Genova.

Per ogni $(t, x) \in A$ sia $Q(t, x)$ un sottoinsieme dello spazio $\mathbf{R}^{v+1}$, $v \geq 1$. Si dice che gli insiemi $Q(t, x)$ verificano la proprietà di Cesari in A , se per ogni $(t_0, x_0) \in A$ si ha:

$$Q(t_0, x_0) = \bigcap_{\delta > 0} \overline{\bigcup_{|x - x_0| < \delta} Q(t_0, x)}.$$

Una funzione reale $(y, z) \mapsto f(y, z)$ è di Carathéodory in $B \times C$ se $f(y, \cdot)$ è continua in C per q.o. $y \in B$ e se $f(\cdot, z)$ è misurabile in B per ogni $z \in C$.

L^p è l'usuale spazio di Lebesgue ($1 \leq p \leq \infty$) a valori vettoriali individuati dal contesto. Se $1 < p < \infty$, p' ne è il coniugato di Lebesgue. Le successioni estratte sono indicate con la stessa notazione della successione originale.

Un operatore di Urysohn $w \mapsto \int_{\Omega} A(\cdot, s, w(s)) ds$, (essendo $\text{mis}(\Omega) < \infty$), si dice « regolare in L^p » ($1 \leq p \leq \infty$) se applica L^p in sé e se $\int_{\Omega} |A(\cdot, s, w(\cdot, s))| ds \in L^p$ per ogni w misurabile in Ω^2 tale che $|w(t, s)| \leq w_0(s)$ q.o. in Ω^2 , con $w_0 \in L^p$ (v. [5]).

DEFINIZIONE. — (x, u) è una coppia ammissibile se: $x: \Omega \mapsto \mathbf{R}^n$ sta in L^p , $u: \Omega \mapsto \mathbf{R}^m$ è misurabile e valgono:

- (i) $x(t) \in A(t)$ q.o. in Ω .
- (ii) $x(t) = \varphi(t) + \int_{\Omega} [h(t, s, x(s)) + g(t, s, x(s)) f(s, x(s), u(s))] ds$ q.o. in Ω .
- (iii) $u(t) \in U(t, x(t))$ q.o. in Ω .
- (iv) $f_0(\cdot, x(\cdot), u(\cdot)) \in L^1(\Omega)$.

Sia $\mathcal{A}$ l'insieme delle coppie ammissibili. Il problema è determinare una coppia $(x, u) \in \mathcal{A}$ che minimizzi il funzionale:

$$I(x, u) = \int_{\Omega} f_0(t, x(t), u(t)) dt.$$

IPOTESI:

- (1) Per ogni $t \in \Omega$, $A(t)$ è chiuso; M è chiuso.
- (2) $\varphi \in L^p$, h, g sono di Carathéodory in $\Omega^2 \times \mathbf{R}^n$; f è di Carathéodory in $\Omega \times [\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m]$; f_0 è integranda normale in $\Omega \times [\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m]$ (v. [4]).
- (3) $f_0(t, x, u) \geq f_1(t, x)$ q.o. $t \in \Omega$, $x \in A(t)$, $u \in U(t, x)$, con

$$\lim_{\|x\|_{L^p} \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_1(t, x(t)) dt = +\infty \quad x(t) \in A(t) \text{ q.o. in } \Omega$$

- (4) $x \mapsto \int_{\Omega} h(\cdot, s, x(s)) ds$ è un operatore di Urysohn regolare da L^p in L^p e

$$\limsup_{\text{mis } D \rightarrow 0} \left\{ \left\| \int_D h(\cdot, s, x(s)) ds \right\|_{L^p} : \|x\|_{L^p} \leq 1 \right\} = 0.$$

(5) $|g(t, s, x)| \leq \alpha(t)$ con $\alpha \in L^p$ per q.o. $t \in \Omega$, q.o. $s \in \Omega$, $\forall x \in \mathbf{R}^n$.

(6) $|f(t, x, u)|^p \leq a(t) + b f_0(t, x, u)$, ove $a \in L^1$, $b > 0$ q.o. $t \in \Omega$, $x \in A(t)$, $u \in U(t, x)$.

(7) $Q(t, x) = \{(\eta, \xi) : \eta \geq f_0(t, x, u), \xi = f(t, x, u), u \in U(t, x)\}$ ha la proprietà di Cesari in A .

Sono date condizioni sufficienti per l'esistenza di controlli ottimi per il problema di ottimizzazione enunciato e si ha il seguente:

TEOREMA. — Se sono verificate le ipotesi da (1) a (7), se $1 < p < \infty$ e se la classe $\mathcal{A}$ delle coppie ammissibili è non vuota, allora esiste una coppia ottimale.

DIMOSTRAZIONE:

1° *passo*: esistenza di una successione minimizzante $\{(x_k, u_k)\}_{k \in \mathbf{N}}$ in $\mathcal{A}$ tale che

$$\{x_k\}_{k \in \mathbf{N}} \text{ è relativamente compatto in } L^p.$$

Sia $\mu = \inf \{I(x, u) : (x, u) \in \mathcal{A}\}$. Poiché $\mathcal{A}$ è non vuoto per ipotesi e per la (6) f_0 è inferiormente limitata da funzione sommabile, μ è reale. Esiste, dunque, una successione $(x_k, u_k) \in \mathcal{A}$ minimizzante per cui:

$$(8) I(x_k, u_k) = \int_{\Omega} f_0(t, x_k(t), u_k(t)) dt \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \mu, \text{ e}$$

$$(9) x_k(t) = \varphi(t) + \int_{\Omega} [h(t, s, x_k(s)) + g(t, s, x_k(s)) f(s, x_k(s), u_k(s))] ds \text{ q.o. in } \Omega. \text{ Dalla}$$

(3) segue che $\sup_k \|x_k\|_{L^p} < +\infty$.

Dalla (4) segue che è applicabile il teorema 4, pp. 541 di [5], per cui $\int_{\Omega} h(\cdot, s, x_k(s)) ds$ è relativamente compatto in L^p .

Analizziamo $t \mapsto \int_{\Omega} g(t, s, x_k(s)) f(s, x_k(s), u_k(s)) ds$. A tale scopo conviene definire il seguente operatore di Urysohn: se $x \in L^p$ e $y \in L^q$, $q = \min(p, p')$, consideriamo:

$$(10) \quad (x, y) \mapsto \int_{\Omega} g(\cdot, s, x(s)) y(s) ds, \quad \text{da } L^q \text{ in } L^p.$$

L'ipotesi (5) ci assicura che (10) è regolare da L^q in L^p e tale che

$$(11) \quad \lim_{\substack{D \rightarrow 0 \\ \sup_{\|x, y\|_{L^q} \leq 1}} \left\| \int_D g(t, s, x(s)) y(s) ds \right\|_{L^p} = 0.$$

Proviamo questa affermazione. Ovviamente (10) ha valori in L^p .

Per ogni coppia di funzioni misurabili in Ω^2 , $(v(t, s), w(t, s))$ tali che

$$|(v(t, s), w(t, s))| = |v(t, s)| + |w(t, s)| \leq v_0(s), \quad \text{con } v_0 \in L^q,$$

si ha:

$$\int_{\Omega} |g(t, s, v(t, s)) w(t, s)| ds \in L^p.$$

Infatti:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left(\int_{\Omega} |g(t, s, v(t, s)) w(t, s)| ds \right)^p dt &\leq \int_{\Omega} \left(\int_{\Omega} \alpha(t) v_0(s) ds \right)^p dt = \\ &= \int_{\Omega} \alpha^p(t) dt \left(\int_{\Omega} v_0(s) ds \right)^p \leq \|\alpha\|_{L^p(\text{mis } \Omega)}^{p/q} \|v_0\|_{L^q}^p < +\infty \end{aligned}$$

e ciò prova la regolarità. Inoltre

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left| \int_D g(t, s, x(s)) y(s) ds \right|^p dt &\leq \int_{\Omega} \left(\int_D \alpha(t) |y(s)| ds \right)^p dt = \\ &= \int_{\Omega} \alpha^p(t) dt \left(\int_D |y(s)| ds \right)^p \leq \|\alpha\|_{L^p(\text{mis } D)}^{p/q} \left(\int_D |y(s)|^q ds \right)^{p/q} \leq \|\alpha\|_{L^p(\text{mis } D)}^{p/q} \|y\|_{L^q}^p. \end{aligned}$$

Si ottiene che (11) è vera. Per il teorema 4 di [5], (10) è completamente continuo da L^q in L^p . Essendo x_k limitata in L^p e $y_k(s) = f(s, x_k(s), u_k(s))$ limitata in $L^{\dot{p}}$ per la (6) e per la (8), (x_k, y_k) è limitata in L^q ; ne segue che $t \rightarrow \int_{\Omega} g(t, s, x_k(s)) f(s, x_k(s), u_k(s)) ds$ è relativamente compatto in L^p .

È provato che $\{x_k\}_{k \in N}$ è relativamente compatto in L^p e l'esistenza di una funzione x in L^p tale che per un'estratta $x_k \rightarrow x$ in L^p e per un'ulteriore estratta $x_k(t) \rightarrow x(t)$ q.o. in Ω .

Per la (i) $x_k(t) \in A(t)$ q.o. in Ω e per la (1) $x(t) \in A(t)$ q.o. in Ω . La funzione x verifica (i). Per la (6) e la (8) $\sup_k \|y_k\|_{L^{\dot{p}}} < +\infty$. Per un'estratta $y_k \rightarrow y$ in $L^{\dot{p}}$.

2° passo: esistenza di una funzione λ integrabile in Ω tale che

$$(\lambda(t), y(t)) \in Q(t, x(t)) \text{ q.o. in } \Omega \text{ e } \int_{\Omega} \lambda(t) dt \leq \mu.$$

Da $y_k \rightarrow y$ in $L^{\dot{p}}$, per il teorema di Mazur, esiste una successione di combinazioni convesse di y_k che converge a y fortemente in $L^{\dot{p}}$.

Per ogni intero j , ci sono un intero n_j e un insieme di interi $i = 1, 2, \dots, r = r(j)$, un insieme di numeri $a_{1j}, \dots, a_{rj}$, tali che

$$a_{ij} \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, r, \quad \sum_{i=1}^r a_{ij} = 1, \quad n_{j+1} > n_j + r(j),$$

e se

$$s_j = \sum_{i=1}^r a_{ij} y_{n_j+i}, \text{ allora } s_j \rightarrow y \text{ in } L^{\dot{p}}. \text{ Per un'estratta}$$

$$(12) \quad s_j(t) \rightarrow y(t) \quad \text{q.o. in } \Omega.$$

Corrispondentemente a questa successione definiamo con gli stessi a_{ij} e indici n_j la successione:

$$\lambda_j(t) = \sum_{i=1}^r a_{ij} f_0(t, x_{n_j+i}(t), u_{n_j+i}(t)) \quad \text{in } \Omega,$$

e

$$(13) \quad \lambda(t) = \min_j \lim \lambda_j(t), \quad t \in \Omega.$$

Per la (6) λ è inferiormente limitata da funzione sommabile.

Inoltre applicando il lemma di Fatou si ha:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \lambda(t) dt &= \int_{\Omega} \min_j \lim \lambda_j(t) dt \leq \min_j \lim \int_{\Omega} \lambda_j(t) dt = \\ &= \min_j \lim \int_{\Omega} \sum_{i=1}^r a_{ij} f_0(t, x_{n_j+i}(t), u_{n_j+i}(t)) dt = \\ &= \min_j \lim \sum_{i=1}^r a_{ij} \int_{\Omega} f_0(t, x_{n_j+i}(t), u_{n_j+i}(t)) dt = \mu, \end{aligned}$$

per il teorema di Cesaro sul limite di una successione di combinazioni convesse, dato che

$$\int_{\Omega} f_0(t, x_{n_j+i}(t), u_{n_j+i}(t)) dt = I(x_{n_j+i}, u_{n_j+i}) \xrightarrow{j \rightarrow \infty} \mu.$$

$\lambda(t)$ è finito q.o. in Ω , perché $\lambda \in L^1(\Omega)$, in quanto $\int_{\Omega} \lambda(t) dt \leq \mu$. Inoltre $(x_k, u_k) \in \mathcal{A}$, per cui:

$$(14) \quad (f_0(t, x_{n_j+i}(t), u_{n_j+i}(t)), f(t, x_{n_j+i}(t), u_{n_j+i}(t))) \in Q(t, x_{n_j+i}(t))$$

per q.o. $t \in \Omega$. È stato provato che:

$$(15) \quad x_{n_j+i}(t) \xrightarrow{j \rightarrow \infty} x(t) \quad \text{q.o. in } \Omega.$$

Fissiamo t per cui sono verificate (12), (13), (14) e (15).

Per ogni $\delta > 0$ esiste j_0 (dipendente da δ e t) tale che se $j > j_0$, $i = 1, 2, \dots, r(j)$, $|x_{n_j+i}(t) - x(t)| < \delta$, da cui

$$(f_0(t, x_{n_j+i}(t), u_{n_j+i}(t)), f(t, x_{n_j+i}(t), u_{n_j+i}(t))) \in \bigcup_{|x - x(t)| < \delta} Q(t, x)$$

se $j > j_0$, $i = 1, 2, \dots, r(j)$ e $(\lambda_j(t), s_j(t)) \in \text{co} \bigcup_{|x - x(t)| < \delta} Q(t, x)$, $j > j_0$.

Passando al limite su j , $(\lambda(t), y(t)) \in \overline{\text{co}} \bigcup_{|x - x(t)| < \delta} Q(t, x)$.

Per l'arbitrarietà di δ $(\lambda(t), y(t)) \in \bigcap_{\delta > 0} \overline{\bigcup_{|x-x(t)| < \delta} Q(t, x)}$ e per la (7) $(\lambda(t), y(t)) \in Q(t, x(t))$ e ciò vale q.o. in Ω per l'arbitrarietà di t .

Per la definizione dell'insieme $Q(t, x(t))$ risulta: $\lambda(t) \geq f_0(t, x(t), u)$, $y(t) = f(t, x(t), u)$ per qualche $u \in U(t, x(t))$ q.o. in Ω .

3° passo: esistenza di una funzione u misurabile in Ω tale che:

$$u(t) \in U(t, x(t)), y(t) = f(t, x(t), u(t)), \lambda(t) \geq f_0(t, x(t), u(t)), \text{ q.o. in } \Omega.$$

Si sfrutta un teorema di selezione misurabile. Per ogni $t \in \Omega$ la multiapplicazione $U(t, \cdot)$ che ad ogni $x \in A(t)$ associa l'insieme $U(t, x)$, ha grafico chiuso, ove

$$\text{gph } U(t, \cdot) = \{(x, y) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m : x \in A(t), y \in U(t, x)\}.$$

Infatti se $(x_k, y_k) \in \text{gph } U(t, \cdot)$, $x_k \rightarrow x$, $y_k \rightarrow y$, $x_k \in A(t)$, $y_k \in U(t, x_k)$, per la (1) si ha che $x \in A(t)$ e $y \in U(t, x)$ e quindi $(x, y) \in \text{gph } U(t, \cdot)$.

Inoltre la multiapplicazione G che ad ogni $t \in \Omega$ associa $\text{gph } U(t, \cdot)$ ha valori chiusi ed è misurabile. Infatti,

$$\begin{aligned} \text{gph } G &= \{(t, w) \in \Omega \times [\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m] : t \in \Omega, w \in \text{gph } U(t, \cdot)\} = \\ &= \{(t, x, y) : t \in \Omega, x \in A(t), y \in U(t, x)\} = M \end{aligned}$$

è chiuso, per cui, per il teorema 1E pp. 164 di [6], G è misurabile. $x(t)$ (la funzione ottenuta come limite della successione minimizzante) è misurabile.

Allora per il teorema 1N pp. 171 di [6], la multiapplicazione $U(t, x(t))$ è misurabile (e a valori chiusi). Usando il teorema 2J pp. 178 di [6] la multiapplicazione:

$$\Gamma(t) = \{u \in U(t, x(t)) : \lambda(t) \geq f_0(t, x(t), u), y(t) = f(t, x(t), u)\}$$

ammette selezioni misurabili, e quindi esiste $u : \Omega \rightarrow \mathbf{R}^m$ misurabile tale che per q.o. $t \in \Omega$, $u(t) \in U(t, x(t))$, $\lambda(t) \geq f_0(t, x(t), u(t))$, $y(t) = f(t, x(t), u(t))$, e ciò conclude il 3° passo.

La funzione misurabile u verifica (iii). Poiché f_0 è inferiormente limitata da funzione sommabile per la (6) e $f_0(t, x(t), u(t)) \leq \lambda(t)$ q.o. in Ω , con $\int_{\Omega} \lambda(t) dt \leq \mu$, risulta $f_0(\cdot, x(\cdot), u(\cdot)) \in L^1$; è verificata (iv) e

$$(16) \quad \int_{\Omega} f_0(t, x(t), u(t)) dt \leq \mu = \inf \{I(x, u) : (x, u) \in \mathcal{A}\}.$$

4° passo: esistenza di una coppia (x, u) ottimale.

Se si verifica che vale (ii), allora (x, u) è coppia ammissibile e poiché vale (16), (x, u) è ottimale.

$$(17) \quad x_k(t) \rightarrow x(t) \quad \text{q.o. in } \Omega.$$

$\int_{\Omega} h(\cdot, s, x(s)) \, ds$ è un operatore di Urysohn regolare da L^p in L^p per l'ipotesi (4) e per il teorema 3, pp. 541 di [5] è continuo da L^p in L^p , per cui, avendosi $x_k \rightarrow x$ in L^p , risulta:

$$\int_{\Omega} h(\cdot, s, x_k(s)) \, ds \rightarrow \int_{\Omega} h(\cdot, s, x(s)) \, ds$$

in L^p e per un'estratta

$$(18) \quad \int_{\Omega} h(t, s, x_k(s)) \, ds \rightarrow \int_{\Omega} h(t, s, x(s)) \, ds \quad \text{q.o. in } \Omega.$$

Per la (5) q.o. in Ω l'operatore di Niemytskij $x \rightarrow g(t, \cdot, x(\cdot))$ è continuo da L^p in L^p (v. [7]), e pertanto $g(t, \cdot, x_k(\cdot)) \rightarrow g(t, \cdot, x(\cdot))$ in L^p per q.o. $t \in \Omega$. Poiché $f(\cdot, x_k(\cdot), u_k(\cdot)) \rightarrow f(\cdot, x(\cdot), u(\cdot))$ in L^2 , per q.o. $t \in \Omega$ si ha:

$$(19) \quad \int_{\Omega} g(t, s, x_k(s)) f(s, x_k(s), u_k(s)) \, ds \rightarrow \int_{\Omega} g(t, s, x(s)) f(s, x(s), u(s)) \, ds.$$

Usando (17), (18), (19), e passando al limite su k in (9), si ottiene che (x, u) verifica (ii)

È così completamente dimostrato il teorema di esistenza enunciato.

ESEMPIO. — Sia $r = n = m = 1$. $\Omega = [0, 1]$.

Si vuole minimizzare il funzionale:

$$I(x, u) = \int_0^1 (x(t))^2 + (u(t))^2 \, dt,$$

ove $x(t)$ soddisfa la seguente equazione integrale:

$$x(t) = \frac{1}{\sqrt[3]{t}} + \int_0^1 \left\{ \frac{\sin(s^2) \sin(t^2)}{3 + \operatorname{arctg} x(s)} + \frac{\cos(sx(s))}{\sqrt[3]{1-t}} |u(s)| \right\} ds,$$

con $x \in L^2$, ($p = \dot{p} = 2$), $x(t) \in A(t)$ q.o. in $[0, 1]$, ove per ogni $t \in (0, 1]$

$$A(t) = \left[-1 - \frac{1}{t}, 1 + \frac{1}{t} \right], \quad A(0) = \mathbf{R}.$$

$$A = \{(t, x) \in [0, 1] \times \mathbf{R}: t \in [0, 1], x \in A(t)\}.$$

Per ogni $(t, x) \in A$ sia

$$U(t, x) = \{u \in \mathbf{R}: |u| \leq t + |x|\}, \quad M = \{(t, x, u): (t, x) \in A, u \in U(t, x)\}.$$

Per q.o. $t \in [0, 1]$, $u(t) \in U(t, x(t))$.

Per potere applicare il teorema di esistenza devono essere verificate le ipotesi da (1) a (7) e devono esistere delle coppie ammissibili. $A(t)$ ha valori chiusi in $[0, 1]$ e M è chiuso.

$\varphi(t) = 1/\sqrt[3]{t}$ è una funzione in L^2 . $f_0(t, x, u) = x^2 + u^2$ è continua in $[0, 1] \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ e verifica (3) con $f_1(t, x) = x^2$.

$$h(t, s, x) = \frac{\operatorname{sen}(s^2) \operatorname{sen}(t^2)}{3 + \operatorname{arctg} x} \quad \text{è continua in } [0, 1] \times [0, 1] \times \mathbf{R}.$$

Poiché $|h(t, s, x)| \leq 1$ in $[0, 1] \times [0, 1] \times \mathbf{R}$, si verifica facilmente che $x \rightarrow \int_0^1 h(\cdot, s, x(s)) ds$ è un operatore di Urysohn regolare da L^2 in L^2 e inoltre

$$\lim_{\|x\|_{L^2} \rightarrow 0} \sup \left\{ \left\| \int_D h(\cdot, s, x(s)) ds \right\|_{L^2} : \|x\|_{L^2} \leq 1 \right\} = 0,$$

per cui h verifica (4).

$g(t, s, x) = \cos(sx)/\sqrt[3]{1-t}$, è funzione di Carathéodory in $[0, 1]^2 \times \mathbf{R}$, e $|g(t, s, x)| \leq 1/\sqrt[3]{1-t}$ q.o. $t \in [0, 1]$, $\forall s \in [0, 1]$, $x \in \mathbf{R}$, e vale la (5) con $\alpha(t) = 1/\sqrt[3]{1-t} \in L^2$.

$f(t, x, u) = |u|$ è continua in $[0, 1] \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}$.

$|f(t, x, u)|^2 = |u|^2 \leq x^2 + u^2$ per ogni $t \in [0, 1]$, $x \in A(t)$, $u \in U(t, x)$ e vale (6) con $a(t) = 0$, $b = 1$.

Per ogni $(t, x) \in A$, $Q(t, x) = \{(\eta, \xi) : \eta \geq x^2 + u^2, \xi = |u|, |u| \leq t + |x|\}$ è un sottoinsieme convesso e chiuso di $\mathbf{R}^2$ e si vede facilmente che $Q(t, x)$ ha la proprietà di Cesari in A .

Sono perciò verificate le ipotesi da (1) a (7) del teorema di esistenza. La classe $\mathcal{A}$ delle coppie ammissibili è non vuota.

Scegliendo $u(t) = 0$, l'equazione di Hammerstein:

$$x(t) = \frac{1}{\sqrt[3]{t}} + \int_0^1 \frac{\operatorname{sen}(s^2) \operatorname{sen}(t^2)}{3 + \operatorname{arctg} x(s)} ds$$

ha una sola soluzione $x(t)$ per il teorema 1, pp. 126 di [8].

Inoltre

$$|x(t)| \leq \frac{1}{\sqrt[3]{t}} + 1 \quad \text{in } (0, 1], \quad \text{e} \quad x(t) \in A(t) \quad \text{in } [0, 1],$$

$$u(t) \in U(t, x(t)) \quad \text{in } [0, 1], \quad \text{e} \quad (x(t))^2 + (u(t))^2 = (x(t))^2 \leq \frac{1}{\sqrt[3]{t^2}} + 1 + \frac{2}{\sqrt[3]{t}} \in L^1.$$

La coppia (x, u) , verificando (i), (ii), (iii), (iv), è ammissibile.

Esiste, dunque, una coppia ottimale per il problema dato.

NOTE:

(a) Nel caso in cui la funzione g è indipendente da x e quindi l'equazione integrale di stato è del tipo:

$$x(t) = \varphi(t) + \int_{\Omega} [h(t, s, x(s)) + g(t, s) f(s, x(s), u(s))] ds$$

si ha un teorema di esistenza con le stesse ipotesi da (1) a (7) eccetto la (5) che viene modificata con l'ipotesi che $g \in L^p(\Omega \times \Omega)$. Nel caso in cui $h = 0$ si ha un'equazione integrale del tipo di Hammerstein.

(b) Il teorema di esistenza provato include il caso differenziale ove

$$\varphi(t) = x_0, \quad g(t, s) = \begin{cases} 1, & t_0 \leq s \leq t, \\ 0, & t < s \leq t_1 \end{cases}$$

essendo l'equazione di stato $\dot{x} = f(t, x, u)$ in $[t_0, t_1]$, $x(t_0) = x_0$, ossia

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s), u(s)) ds \quad \text{in } [t_0, t_1].$$

Ovviamente g verifica (5).

(c) Il teorema di esistenza provato è in condizioni più generali di alcuni risultati noti sull'argomento (v. [1], [2]). In [1] sono dimostrati due teoremi concernenti l'esistenza di controlli ottimi per sistemi di equazioni di Urysohn e problemi di Lagrange che si deducono come casi particolari del teorema precedente.

In un primo teorema (teorema 1-2, pp. 103 di [1]), infatti si ha un'equazione della forma

$$x(t) = \int_{\Omega} [A(t, s, x(s)) + B(t, s)] u(s) ds$$

con $x \in L^p$ ($1 \leq p < \infty$) e $u \in L^q$ ($1 < q < \infty$), e $\|u\|_L q \leq N$ ($N > 0$).

In questo caso risulta $f(t, x, u) = u$, $h = 0$ e $g(t, s, x) = A(t, s, x) + B(t, s)$; sono date condizioni sufficienti affinché l'operatore

$$(x, u) \mapsto \int_{\Omega} [A(\cdot, s, x(s)) + B(\cdot, s)] u(s) ds$$

trasformi parti limitate di $L^1 \times L^q$ in parti relativamente compatte di L^1 . Nel secondo teorema (teorema 2-2, pp. 106 di [1]), si ha il seguente sistema di equazioni integrali:

$$x(t) = \int_{\Omega} [A(t, s, x(s)) + B_1(t, s) B_2(s, u(s))] ds,$$

con $x \in L^p$ ($1 \leq p < \infty$), $u \in L^q$ ($1 \leq q < \infty$) e $\|u\|_L q \leq N$.

$A(t, s, x) = h(t, s, x)$ e si ha l'indipendenza dallo stato x dei termini $g(t, s, x) = B_1(t, s)$, $f(t, x, u) = B_2(t, u)$.

$x \mapsto \int_{\Omega} A(\cdot, s, x(s)) ds$ si suppone sempre essere un operatore di Urysohn regolare in L^p , con la condizione (4) del teorema qui provato che lo rende completamente continuo. Si suppone che esista $s > 1$ t.c.

$$\sup \left\{ \int_{\Omega} |B_2(s, u(s))|^s ds : u \in \mathcal{U} \text{ classe dei controlli ammissibili} \right\} < +\infty$$

e

$$\int_{\Omega} \left(\int_{\Omega} |B_1(t, s)|^s ds \right)^{p/s} dt < +\infty.$$

L'ipotesi (6) del teorema dimostrato assicura che la condizione su B_2 è vera con $s = \dot{p}$ ed è sufficiente sui sottoinsiemi di $\mathcal{A}$ per cui $I(x, u) < +\infty$ e la condizione su B_1 è ancora $B_1 \in L^p(\Omega \times \Omega)$. Si conclude che questo lavoro è una estensione dei risultati di [1].

In [2] è dato un teorema di esistenza per il controllo ottimo di equazioni integrali non lineari di Volterra del tipo:

$$x(t) = x(t_1) + \int_{t_1}^t [h_1(t, s, x(s)) + g_1(t, s, x(s)) f_1(t, s, u(s))] ds, \quad t_1 \leq t \leq t_2.$$

$x: [t_1, t_2] \rightarrow \mathbf{R}^n$ è continua, $u: [t_1, t_2] \rightarrow \mathbf{R}^m$ è misurabile e ci sono vincoli del tipo: $(t, x(t)) \in A \subset \mathbf{R}^{n+1}$ in $[t_1, t_2]$ e $u(t) \in U(t, x(t))$ q.o. in $[t_1, t_2]$ con $U(t, x) \subset \mathbf{R}^m$ per ogni $(t, x) \in A$.

Risulta evidentemente:

$$\begin{aligned} h(t, s, x) &= \begin{cases} h_1(t, s, x), & t_1 \leq s \leq t \\ 0, & t < s \leq t_2, \end{cases} \\ g(t, s, x) &= \begin{cases} g_1(t, s, x), & t_1 \leq s \leq t \\ 0, & t < s \leq t_2, \end{cases} \\ f(t, x, u) &= f_1(t, x, u), \quad \varphi(t) = x(t_1). \end{aligned}$$

Si vuole sempre minimizzare un funzionale della forma:

$$I(x, u) = \int_{t_1}^{t_2} f_0(t, x(t), u(t)) dt.$$

Le ipotesi di compattezza su A e di continuità su h_1 e g_1 fanno sì che ovviamente h e g verificano (4) e (5) del presente teorema. Tali condizioni sono verificate anche

quando più generalmente A è chiuso e si fanno ulteriori ipotesi di limitatezza sulla funzione g_1 e si impone che esista una funzione w monotona non decrescente, $w(0) = 0$ tale che per ogni t, t' $|h_1(t, s, x) - h_1(t', s, x)| \leq w(|t - t'|)$ e per qualche t^* $|h_1(t^*, s, x)| \leq \psi(s)$ con $\psi \in L^1$.

Le funzioni f_1, f_0 soddisfano la seguente condizione di crescita: per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una funzione ψ_ε localmente integrabile, $\psi_\varepsilon \geq 0$ tale che $\int_{\Omega} |f_1(t, x, u)| \leq \psi_\varepsilon(t) + \varepsilon f_0(t, x, u)$ in M .

Il risultato di [2] è quindi ancora un caso particolare del presente lavoro. In [3] è provato un teorema di esistenza per problemi di Lagrange in cui l'equazione di stato è un'equazione integrale astratta:

$$(20) \quad (\mathcal{L}x)(t) = \phi(t, (\mathcal{M}x)(t), \int_{\Omega} k(t, s, (\mathcal{M}x)(s)) f(s, (\mathcal{M}x)(s), u(s)) ds)$$

con $x \in S$ spazio topologico, $\mathcal{L}, \mathcal{M}$ operatori da S in L^1 , $(\mathcal{M}x)(t) \in A(t)$ e $u(t) \in U(t, (\mathcal{M}x)(t))$ q.o. in Ω . Per ogni $t \in \Omega$, $A(t) \subset \mathbf{R}^n$, e se $t \in \Omega$, $x \in A(t)$, $U(t, x) \subset \mathbf{R}^m$. Si vuole minimizzare

$$I(x, u) = \int_{\Omega} f_0(t, (\mathcal{M}x)(t), u(t)) dt.$$

ϕ è una funzione continua. L'equazione di Urysohn del presente teorema è un caso concreto in cui $(\mathcal{L}x)(t) = x(t)$, $(\mathcal{M}x)(t) = x(t)$ e il secondo membro di (20) è funzione della terza variabile, per cui $h = 0$, $g(t, s, x) = k(t, s, x)$. In [3] si assume l'insieme delle traiettorie ammissibili relativamente compatto in L^p , mentre nel teorema presente sono date condizioni sufficienti affinché ciò avvenga.

BIBLIOGRAFIA

- [1] T. ZOLEZZI, *Esistenza e condizioni necessarie per controlli ottimi di sistemi definiti da equazioni integrali*, Annali di Matematica pura ed applicata, (IV), **91** (1972), pp. 97-118.
- [2] T. S. ANGELL, *On the optimal control of systems governed by nonlinear Volterra equations*, J.O.T.A., **19** (1976), pp. 29-45.
- [3] D. E. COWLES, *An existence theorem for optimization problems involving integral equations*, SIAM J. Control, **11** (1973), pp. 595-606.
- [4] R. T. ROCKAFELLAR, *Integrals which are convex functionals*, Pacific. J. Math., **24** (1968), pp. 525-539.
- [5] P. P. ZABREIKO, *Continuity and complete continuity of Urysohn operators*, Soviet. Math. Doklady, **6** (1965), pp. 540-544.
- [6] R. T. ROCKAFELLAR, *Integral functionals, normal integrand, and measurable selections*, in *Nonlinear Operators and the Calculus of Variations*, Bruxelles, 1975.
- [7] M. A. KRASNOSEL'SKII, *Topological methods in the theory of nonlinear integral equations*, Pergamon Press, 1964.
- [8] H. BREZIS - F. E. BROWDER, *Nonlinear integral equations and systems of Hammerstein type*, Advances in Mathematics, **18** (1975), pp. 115-147.