Sull'omotopia uniforme (*) (**).

DAVIDE CARLO DEMARIA - RODOLFO TALAMO (Torino)

Summary. — *Following in the classical theory's footsteps, it is possible to construct a « rational homotopy theory ». To this purpose, we take all the uniform maps $f: I_q^n \rightarrow S$ (where I_q is the closed unit interval of the rational line equipped with the standard metric uniformity) as paths of a uniform space S . This brings us to the definition of the rational homotopy groups $Q_n(S, U_q, x)$ and enables us to consider the related exact sequences. All these objects are uniform invariants. The main problem which arises now is to find a suitable space S^* in order that its classical homotopy groups $\Pi_n(S^*, x)$ are isomorphic to the classical ones of S . We are able to reach an answer to this question if S is a metrizable uniform space. Since considering the completion $\hat{S}$ of S serves no useful purpose (as it is shown by a simple example), we prove that the required space is the « rational path completion » S^* of S , with $S \subseteq S^* \subseteq \hat{S}$. We finally recall that the rational uniform homotopy is a special case of regular homotopy, which has been defined and widely investigated in [1].*

Introduzione.

Siano S uno spazio uniforme separato ⁽¹⁾ ed I_q l'intervallo chiuso unitario della retta razionale dotato dell'uniformità metrica standard. Possiamo considerare l'insieme $U_q(S) \subseteq C(S)$ di tutti i cammini uniformemente continui di S , vale a dire tutte le funzioni uniformemente continue $f: I_q^n \rightarrow S$, per $n \geq 0$. Siccome la famiglia $U_q(S)$ è regolare nel senso di [1], dati un sottospazio $X \subseteq S$ ed un punto $x \in S$, si possono costruire i gruppi di omotopia (razionale) uniforme $Q_n(S, U_q, x)$ e $Q_n(X, U_q, x)$, i gruppi relativi $Q_n(S, U_q, X, U_q, x)$ e la successione esatta di omotopia uniforme, che sono invarianti uniformi.

Poichè le funzioni di $U_q(S)$ si estendono naturalmente al completamento $\hat{S}$ di S , sorge spontaneo il problema di confrontare tra loro i gruppi $Q_n(S, U_q, x)$ e $\Pi_n(\hat{S}, x)$. Tali gruppi non sono in generale isomorfi, come mostriamo con l'esempio 1. Se però consideriamo un opportuno sottospazio S^* di S , cioè il suo « *completamento per cammini razionali* », siamo in grado di provare che tali isomorfismi sussistono nell'ipotesi che S sia uno spazio uniforme metrizzabile.

Indicata con $E(S^*)$ la famiglia delle estensioni dei cammini razionali di $U_q(S)$ che è, con opportune modifiche, una famiglia regolare, osserviamo innanzitutto che i gruppi di omotopia $Q_n(S, U_q, x)$ e $Q_n(S^*, E, x)$ sono isomorfi.

(*) Entrata in Redazione il 5 gennaio 1978.

(**) Lavoro svolto nell'ambito del gruppo GNSAGA del CNR.

⁽¹⁾ Per semplicità ci limiteremo a considerare spazi uniformi separati anche se i risultati sono facilmente estendibili al caso in cui S non è separato.

Considerata poi la successione esatta di omotopia razionale

$$\begin{aligned} \dots \rightarrow Q_{n+1}(S^*, \mathbb{C}, S^*, E, x) \xrightarrow{\delta_n} Q_n(S^*, E, x) \xrightarrow{i_n} Q_n(S^*, \mathbb{C}, x) \xrightarrow{j_n} \\ \xrightarrow{j_n} Q_n(S^*, \mathbb{C}, S^*, E, x) \rightarrow \dots \rightarrow Q_1(S^*, \mathbb{C}, S^*, E, x) \xrightarrow{\delta_1} Q_0(S^*, E, x) \xrightarrow{i_0} Q_0(S^*, \mathbb{C}, x) \end{aligned}$$

dimostriamo che i gruppi $Q_n(S^*, \mathbb{C}, S^*, E, x)$, per $n > 1$, sono nulli e che l'insieme $Q_1(S^*, \mathbb{C}, S^*, E, x)$ si riduce alla classe nulla. Da tale risultato segue l'isomorfismo fra i gruppi $Q_n(S^*, E, x)$ e $Q_n(S^*, \mathbb{C}, x)$, e poichè per definizione i gruppi $H_n(S^*, x)$ coincidono con i gruppi $Q_n(S^*, \mathbb{C}, x)$ si ricava l'asserto.

Un analogo risultato è ottenuto per i gruppi di omotopia uniforme relativi ad un sottospazio X di S .

Diamo infine due esempi: il primo mostra che i gruppi d'omotopia razionale di S non sono in generale isomorfi a quelli classici del completamento $\hat{S}$ di S ; nel secondo si fa vedere che, se S non è uno spazio metrico, i successivi « completamenti per cammini razionali » S^* e S^{**} in generale differiscono.

1. — Diamo innanzitutto alcune notazioni fondamentali e ricordiamo alcune definizioni.

Siano Q l'insieme dei razionali, $I = [0, 1]$ l'intervallo reale unitario, dotato della uniformità metrica standard, ed I^n l' n -cubo con l'uniformità prodotto. Indichiamo poi con I_Q^n il sottospazio uniforme $I^n \cap Q^n$. Dovendo in seguito considerare le facce di I^n o di I_Q^n , riferiamo I^n ed I_Q^n ad un insieme $(t_1, \dots, t_n)$ di coordinate e denotiamo con

$$I_{(t_1=k_{i_1}, \dots, t_r=k_{i_r})}, \quad 0 \leq k_{i_j} \leq 1, \quad 1 \leq r \leq n, \quad 1 \leq i_j \leq n$$

il sottinsieme di I^n oppure di I_Q^n che è formato dalle n -ple $(t_1, \dots, t_n)$ tali che $t_{i_j} = k_{i_j}$.

In particolare, assegnando alle k_{i_j} i valori 0 e 1 si ottengono, al variare di r e degli indici i_j , tutte le facce di I^n di dimensione inferiore a n .

DEFINIZIONE 1. — Sia $(S, \mathcal{U})$ uno spazio uniforme separato, x un punto di S , X un sottospazio non vuoto di S . Diciamo *cammino razionale uniforme n -dimensionale* ($n \geq 0$) ogni funzione $f: I_Q^n \rightarrow S$ uniformemente continua rispetto alle uniformità sopra citate. Diciamo poi *cappio* (assoluto) di punto base $x \in S$ ogni cammino che applichi in x il contorno di I_Q^n ; *cappio relativo* a X di punto base $x \in X$ ogni cammino f per il quale si abbia $f(I_{t_n=0}) = X$ e che applichi tutte le altre facce in x .

DEFINIZIONE 2. — Se f e g sono due cappi assoluti di dimensione n e di punto base x , diciamo *omotopia* fra f e g ogni funzione uniformemente continua $F: I_Q^{n+1} \rightarrow S$ tale che:

- i) F ristretta a $I_{t_{n+1}=0}$ coincide con f ,
- ii) F ristretta a $I_{t_{n+1}=1}$ coincide con g ,
- iii) F applica in x il resto del contorno.

Se f e g sono due cappi relativi al sottospazio X e di punto base x , diciamo *omotopia fra i cappi relativi* f e g di punto base x una funzione $F : I_Q^{n+1} \rightarrow S$ uniformemente continua che goda delle seguenti proprietà:

- i) F ristretta a $I_{t_{n+1}=0}$ coincide con f ,
- ii) F ristretta a $I_{t_{n+1}=1}$ coincide con g ,
- iii) $F(I_{t_n=0})$ è contenuta in X ,
- iv) F applica in x il resto del contorno.

Procedendo come nel caso reale classico si possono costruire i gruppi di omotopia (razionale) uniforme, la successione esatta d'omotopia, ecc., che risultano ovviamente essere invarianti uniformi ⁽²⁾.

OSSEVAZIONE. — In modo perfettamente analogo a quanto è stato fatto nel caso razionale, vengono definiti i cammini, i cappi, i cappi relativi e le omotopie reali. Anche senza menzionarlo specificamente, si intenderanno sempre reali le omotopie uniformi associate a cammini reali e razionali quelle associate a cammini razionali.

2. — LEMMA 1 (*Costruzione della funzione φ*). — *Nell'intervallo chiuso I della retta reale dotato dell'uniformità standard, consideriamo i sottospazi T e D formati rispettivamente dai numeri triadici e diadici. Allora esiste una funzione $\varphi: T \rightarrow D$ suriettiva e uniformemente continua tale che, per ogni $x \in D$, $x \neq 0 \neq 1$, $\varphi^{-1}(x)$ sia un segmento chiuso di T . Inoltre, detta $\bar{\varphi}$ la sua estensione, $\bar{\varphi}(I_Q) \subseteq I_Q$.*

DIMOSTR. — Conveniamo di esprimere i numeri di I mediante scrittura triadica oppure diadica, considerando diadiche le espressioni soprallineate. Escludiamo inoltre tutte le scritture triadiche (diadiche) contenenti soltanto la cifra 2 (la cifra 1) infinitamente ripetuta a partire da una certa cifra. Sia $0, a_1 a_2 \dots a_n \dots$ un punto di $]0, 1[$ espresso mediante scrittura triadica illimitata

Definiamo la $\bar{\varphi}: I \rightarrow I$ ponendo:

$$\bar{\varphi}(0, a_1 a_2 \dots a_n \dots) = 0, \overline{b_1 b_2 \dots b_n \dots},$$

ove:

- i) se esiste una prima cifra $a_k = 1$,

$$b_i = \begin{cases} a_i/2, & \text{se } i < k \\ 1, & \text{se } i = k \\ 0, & \text{se } i > k \end{cases}$$

- ii) se $a_i \neq 1$ per ogni $i \in N$, $b_i = a_i/2$ per ogni indice i .

⁽²⁾ Il richiedere la semplice continuità dei cammini razionali in luogo della loro continuità uniforme porta a gruppi di omotopia tutti nulli.

Poniamo inoltre $\bar{\varphi}(0) = 0$ e $\bar{\varphi}(1) = 1$.

La funzione $\bar{\varphi}$ è una funzione non decrescente di I in I e gode delle seguenti proprietà:

i) $\bar{\varphi}(T) = D$. Infatti i numeri triadici (diadici) sono caratterizzati dall'avere soltanto un numero finito di cifre significative nella rappresentazione triadica (diadica) e quindi, per la nostra definizione della $\bar{\varphi}$, si ha che $\bar{\varphi}(T) \subseteq D$.

ii) Se $x \in D$, con $x = 0, \overline{b_1 b_2 \dots b_{n-1}} 1$, abbiamo che $\bar{\varphi}^{-1}(x)$ è l'intervallo $[0, a_1 a_2 \dots a_{n-1} 1, 0, a_1 a_2 \dots a_{n-1} 2]$, ove $a_i = 2b_i$, $1 \leq i \leq n-1$.

iii) $\bar{\varphi}$ è uniformemente continua. Poichè $\bar{\varphi}$ è non decrescente e la sua immagine è densa in I per i), $\bar{\varphi}$ è continua su I e pertanto è uniformemente continua.

iv) $\bar{\varphi}(I_Q) \subseteq I_Q$. Ciò segue immediatamente dal fatto che la legge che definisce la $\bar{\varphi}$ conserva la periodicità della scrittura, e quindi trasforma razionali in razionali.

Posto poi $\varphi: T \rightarrow D$ uguale alla restrizione di $\bar{\varphi}$ a T , otteniamo che la φ soddisfa a tutte le condizioni richieste.

LEMMA 2. — *Siano A e B due sottinsiemi densi e numerabili di I contenenti 0 e 1. Allora esiste un omeomorfismo $\sigma: I \rightarrow I$ tale che $\sigma(A) = B$.*

DIMOSTR. — Infatti, costruita una similitudine diretta o inversa $\tau: A \rightarrow B$, essa si può estendere ad un omeomorfismo σ cfr. [3].

LEMMA 3. — *Ogni cammino j dell'intervallo I avente 0 e 1 come punti iniziale e finale è omotopo all'identità, cioè esiste un'omotopia conservante il punto iniziale ed il punto finale fra j e i .*

DIMOSTR. — Infatti, in uno spazio connesso per cammini, l'insieme delle classi di omotopia dei cammini aventi lo stesso punto iniziale e lo stesso punto finale è biettiva al primo gruppo di omotopia dello spazio. Si osservi inoltre che I ha nullo il primo gruppo di omotopia (vedi [2]).

COROLLARIO 4. — *Ogni cammino uniformemente continuo j_q di I_Q avente 0 e 1 come punti iniziale e finale è omotopo all'identità i_q di I_Q mediante un'omotopia razionale.*

DIMOSTR. — La prima parte è analoga a quella del lemma 3. Sia ora j_q un cammino nelle condizioni dell'enunciato, che possiamo supporre avere come punto base 0. Se t è un parametro razionale, con $0 \leq t \leq 1$, la funzione $F_q = t \cdot j_q$ fornisce l'omotopia razionale cercata.

DEFINIZIONE 3. — Indichiamo con T^* il seguente sottinsieme di T : $T^* = \{x = 0, a_1 a_2 \dots a_m \text{ dove almeno una delle prime } m-1 \text{ cifre significative è uguale a } 1\}$.

In altre parole, T^* si può considerare come l'insieme dei triadici che non sono estremi di intervalli del tipo considerato nel Lemma 1.

LEMMA 5 (*costruzione della funzione ψ*). — Esiste una similitudine ψ fra I_Q e T^* .

DIMOSTR. — Per il Lemma 2, è sufficiente porre $A = I_Q$ e $B = T^*$.

3. — Dato ora uno spazio uniforme separato S , costruiamo il « *completamento* » per cammini razionali S^* di S . Dalla costruzione risulterà pure $S \subseteq S^* \subseteq \bar{S}$, ove $\bar{S}$ è il completamento di S .

DEFINIZIONE 4. — Diciamo *completamento per cammini razionali dello spazio uniforme S* , indicandolo S^* , l'unione delle immagini delle estensioni dei cammini razionali unidimensionali di S . In simboli, detti $f: I_Q \rightarrow S$ il generico cammino razionale unidimensionale di S ed $\bar{f}: I \rightarrow \bar{S}$ la sua estensione, risulta $S^* = \cup \bar{f}(I)$.

Indichiamo con S'^* l'insieme di tutti i punti x di $\bar{S}$ che si possono congiungere a S con cammini razionali, cioè per cui esiste una funzione uniformemente continua $f_x: I_Q \rightarrow S \cup \{x\}$ che applica 0 in x e tutto il resto di I_Q in S . Si ha la seguente

PROPRIETÀ 6. — S^* coincide con S'^* .

DIMOSTR. — Osserviamo innanzitutto che, in base alle nostre definizioni, si ha $S \subseteq S^* \subseteq \bar{S}$ e $S \subseteq S'^* \subseteq \bar{S}$. Infatti, fra i cammini razionali che consideriamo su S rientrano anche quelli costanti.

Dimostriamo che $S^* \subseteq S'^*$. Sia $x \in S^*$. Allora, per definizione di S^* , $x = \bar{f}_i(\lambda)$, con $0 < \lambda < 1$, ed $f_i: I_Q \rightarrow S$, cammino di S . Sia poi τ una similitudine fra I_Q e $[\lambda, 1] \cap [Q \cup \lambda]$ esistente perchè sono entrambi sottinsiemi densi e numerabili di intervalli e sono entrambi dotati di primo ed ultimo elemento. Ponendo $f_x = f_i \circ \tau$, otteniamo che $f_x(0) = x$, $f_x: I_Q \rightarrow S \cup \{x\}$, poichè si ha $\tau([0, 1]_Q) \subseteq Q$ ed il codominio di f_x è S . Quindi $x \in S'^*$.

Sia ora $x \in S'^*$. Allora per ipotesi esiste una $f_x: I_Q \rightarrow S \cup \{x\}$ con $f_x(0) = x$ ed $f_x(I_Q - 0) \subseteq S$. Detto z un qualsiasi irrazionale compreso fra 0 e 1, sia τ' una similitudine inversa fra $([0, z] \cap (Q \cup z))$ e l'insieme I_Q e σ' una similitudine diretta fra $([z, 1] \cap (Q \cup z))$ e I_Q . La funzione $f: I_Q \rightarrow S$ definita da:

$$f(y) = \begin{cases} (f_x \circ \tau')(y), & \text{se } y < z \\ (f_x \circ \sigma')(y), & \text{se } y > z \end{cases}$$

è tale che $\bar{f}(z) = x$, e pertanto soddisfa alla nostra definizione. Allora $S^* = S'^*$.

PROPRIETÀ 7. — S^* è l'unione delle immagini delle estensioni di tutti i cammini razionali di S .

DIMOSTR. — Sia $y = \bar{f}(x_1, \dots, x_n)$, con $x_i \in \mathbf{R}$. Dobbiamo dimostrare che esiste un cammino che unisce y a S . Per ogni indice j , con $1 \leq j \leq n$, sia $\{r_{nj}\}$ una successione non decrescente di razionali tendente a x_j . Sia poi L_m il segmento di I^n che unisce $\{r_{m,1}, r_{m,2}, \dots, r_{m,n}\}$ con $\{r_{m+1,1}, r_{m+1,2}, \dots, r_{m+1,n}\}$. In tal modo formiamo un arco semi-aperto di I^n avente come origine 0 e come estremo $(x_1, \dots, x_n)$. Tale arco è omeomorfo ad un intervallo $[0, 1[$ e contiene ovviamente per costruzione un insieme denso e numerabile $\{z_n\}$ a coordinate tutte razionali. Procedendo in modo analogo a quanto fatto nella Proprietà 6, si costruisce il cammino cercato.

4. — Dimostriamo ora il nostro teorema fondamentale, cioè che ogni cammino reale di S^* con estremi in S è omotopo all'estensione di un cammino razionale di S (in un'omotopia che preciseremo in seguito), esaminando dapprima il caso unidimensionale.

TEOREMA 8. — *Sia S uno spazio uniforme metrizzabile. Dato un cammino reale $f: I \rightarrow S^*$ tale che $f(0) = x_1, f(1) = x_2$ appartengano a S , esiste un cammino razionale (uniforme) $k: I_0 \rightarrow S$ la cui estensione $\bar{k}$ a I è omotopa a f nell'omotopia che conserva il punto iniziale e quello finale.*

DIMOSTR. — a) *Costruzione della funzione k .*

Prendiamo in esame l'insieme $f(D)$. Dato il diadico $p/2^n$, con p dispari, consideriamo il punto $x = f(p/2^n)$ e sia U_x il disco aperto di centro x e raggio 2^{-n} . Se $x \notin S$, per la Prop. 6, esisterà un cammino razionale f_x congiungente x a S . Se $x \in S$, si sceglie invece f_x uguale al cammino costante con immagine x . Per la continuità di f_x , esisterà un $r_x \in Q$ tale che $f_x([0, r_x]) \subseteq U_x$, e cambiando la parametrizzazione di f_x si può supporre che $f_x[0, 1]$ è contenuto in U_x .

Consideriamo poi l'intervallo $I_{i,n} = [s, s'] = \varphi^{-1}(p/2^n)$ (cfr. Lemma 1), con s, s' appartenenti a T e definiamo la seguente funzione, ovviamente continua:

$$h_x: [s, s'] \rightarrow [0, 1]$$

$$h_x(y) = \begin{cases} 1 - \left[\frac{2}{s' - s} \left(\frac{s + s'}{2} - y \right) \right], & s \leq y \leq \frac{s + s'}{2} \\ 1 - \left[\frac{2}{s - s'} \left(\frac{s + s'}{2} - y \right) \right], & \frac{s + s'}{2} \leq y \leq s'. \end{cases}$$

In questo modo abbiamo congiunto razionalmente ogni punto di $f(D)$ con S restando in un intorno opportunamente piccolo del punto.

Consideriamo poi una successione di « modificazioni » $\{h_n\}$ mediante la funzione φ che avevamo costruito nel Lemma 1.

Posto $g = h_0 = f \circ \varphi$, definiamo h_n : Per ogni $m \leq n$, sia $r_{1,m}, r_{2,m}, \dots, r_{2^{m-1},m}$ l'insieme dei numeri diadici del tipo $p/2^m$, con p dispari, $0 < r_{i,m} < 1$ e con $i = 1, 2, \dots, 2^{m-1}$. Per ogni m , risultano determinati 2^{m-1} intervalli $I_{i,m}$ tali che $\varphi(I_{i,m}) = r_{i,m}$.

Definiamo allora la funzione $h_n: T \rightarrow S^*$, ponendo

$$h_n(x) = \begin{cases} (f \circ \varphi)(x), & x \notin \bigcup_{m \leq n} I_{j,m}, j \leq 2^{m-1}, \\ (f_{r_i,m} \circ h_{r_i,m})(x), & x \in \bigcup_{m \leq n} I_{j,m}, j \leq 2^{m-1}. \end{cases}$$

Le h_n sono uniformemente continue poichè si possono ottenere incollando un numero finito di funzioni estendibili con continuità a sottospazi compatti di $[0, 1]$.

Per dimostrare che la successione $\{h_n\}$ converge uniformemente alla funzione limite $h: T \rightarrow S^*$, osserviamo che $h(x) = h_n(x)$, se $\varphi(x) = p/2^n$, con p dispari.

Fissato un $\varepsilon > 0$ e determinato un n_0 per cui sia $2^{-n_0} < \varepsilon$, proviamo che si ha $d(h(x), \psi_n(x)) < \varepsilon$, $\forall x \in T$, $\forall n > n_0$. Infatti, posto $\varphi(x) = q/2^r$, se $r \leq n$, $h(x) = \psi_r(x) = \psi_n(x)$, poichè $\bigcup_{m \leq r} I_{j,m} \subseteq \bigcup_{m \leq n} I_{j,m}$, e la proprietà è verificata. Invece, se $r > n$, osserviamo che:

$$d(h(x), \psi_n(x)) \leq d\left(h(x), f\left(\frac{q}{2^r}\right)\right) + d\left(f\left(\frac{q}{2^r}\right), \psi_n(x)\right).$$

Per costruzione abbiamo allora che il primo termine del secondo membro è minore di 2^{-r} , che è a sua volta minore di $2^{-n_0} < \varepsilon$, essendo $r > n > n_0$. Invece il secondo termine è nullo perchè da $r > n$ segue $x \notin \bigcup_{m \leq n} I_{j,m}$, vale a dire $\psi_n(x) = f(\varphi(x)) = f(q/2^r)$. Pertanto dall'uniforme convergenza della successione $\{h_n\}$ si trae la continuità uniforme di h .

Inoltre, poichè $h(T^*)$ è contenuto in S , considerata a norma della Prop. 4 una similitudine ψ fra I_q e T^* , risulta infine che $k = h \circ \psi$ è una funzione fra I_q e S .

b) f è omotopa a $\bar{k}$.

Dobbiamo ora dimostrare che il cammino iniziale f è omotopo a $\bar{k}: I \rightarrow S^*$, cioè all'estensione della k . Otteniamo tale omotopia dimostrando successivamente che $f \sim \bar{g} = f \circ \bar{\varphi}$, $\bar{g} \sim \bar{h}$ e $\bar{h} \sim \bar{k}$, ove si sono soprallineate le estensioni.

i) $f \sim \bar{g}$.

Siccome l'estensione $\bar{\varphi}$ della φ è un cammino soddisfacente alle condizioni del Lemma 3, si ha $i \sim \bar{\varphi}$. Componendo con f , otteniamo $f \circ i \sim f \circ \bar{\varphi}$, vale a dire $f \sim \bar{g}$.

ii) $\bar{g} \sim \bar{h}$.

Per ogni numero reale t , con $0 < t < 1$, e per ogni $x = f(p/2^n)$, consideriamo la funzione $h_x^t(y)$ definita da:

$$h_x^t(y) = \begin{cases} t \left\{ 1 - \left[\frac{2}{s' - s} \left(\frac{s + s'}{2} - y \right) \right] \right\}, & s \leq y \leq \frac{s + s'}{2} \\ t \left\{ 1 - \left[\frac{2}{s - s'} \left(\frac{s + s'}{2} - y \right) \right] \right\}, & \frac{s + s'}{2} \leq y \leq s' \end{cases}$$

Costruiamo poi l'omotopia $F: I \times I \rightarrow S^*$, ponendo $F(t, u) = (f_{r_{i,m}} \circ h_{r_{i,m}}^t)(u)$, con $(t, u) \in T \times T$ e $r_{i,m} = \varphi(u)$.

Analogamente a quanto fatto in precedenza per la h , si prova che F è uniformemente continua ed estendibile quindi a $I \times I$. L'estensione è allora un'omotopia fra i cammini unidimensionali $\bar{g}$ e $\bar{h}$ conservanti i punti iniziale e finale, in quanto per $t = 0$ si ottiene la $\bar{g}$ e per $t = 1$ la $\bar{h}$.

iii) $\bar{h} \sim \bar{k}$.

Sia ψ la similitudine fra I_Q e T^* considerata alla fine di *a*) e $\tilde{\psi}$ la sua estensione a tutto I . Da $i \sim \tilde{\psi}$ (Lemma 3), si trae $\bar{h} \circ i \sim \bar{h} \circ \tilde{\psi} = \bar{k}$, cioè $\bar{h} \sim \bar{k}$.

Il teorema risulta allora dimostrato nel caso unidimensionale.

5. - Prima di completare la dimostrazione del nostro risultato fondamentale estendendola al caso n -dimensionale (con $n > 1$), è necessario introdurre il concetto di **-omotopia* fra cammini n -dimensionali di S^* per mezzo della seguente

DEFINIZIONE 5. - Sia f un cammino n -dimensionale di S^* , cioè sia $f: I^n \rightarrow S^*$ una funzione continua. Supponiamo inoltre che le restrizioni di f alle facce $n-1$ dimensionali del contorno si possano ottenere come estensioni di cammini razionali di S . Diciamo che f è **-omotopo a $\bar{k}$* (estensione di un cammino razionale di S), se esiste una funzione continua $F: I^{n+1} \rightarrow S^*$ soddisfacente alle seguenti condizioni:

- i) la restrizione di F alla faccia $I_{t_{n+1}=0}$ coincide con f ;
- ii) la restrizione di F alla faccia $I_{t_{n+1}=0}$ coincide con $\bar{k}$;
- iii) data comunque una faccia $I_{(t_1=k_{i_1}, \dots, t_r=k_{i_r})}$ con $k_{i_j} = 0, 1, i_j \leq n, r \leq n$, si deve avere:

$$F(I_{(t_1=k_{i_1}, \dots, t_{n+1}=0)}) = F(I_{(t_1=k_{i_1}, \dots, t_{n+1}=\lambda)})$$

per ogni λ , con $0 \leq \lambda \leq 1$.

OSSERVAZIONE. - Notiamo che, se $n = 1$, la **-omotopia* coincide con l'omotopia che conserva il punto iniziale e finale.

TEOREMA 8'. - Sia S uno spazio uniforme metrizzabile ed $f: I^n \rightarrow S^*$ un cammino di S^* tale che la restrizione di f ad ogni faccia $n-1$ dimensionale sia un'estensione di cammini razionali di S . Allora esiste un cammino razionale uniforme $k: I_Q^n \rightarrow S$ tale che $f \sim \bar{k}$ nella **-omotopia*.

DIMOSTR. - *a) Costruzione della funzione k .*

Poniamo $g = f \circ \varphi^n$, dove $\varphi^n: T^n \rightarrow D^n$ è definita da $\varphi^n(t_1, t_2, \dots, t_n) = (\varphi(t_1), \varphi(t_2), \dots, \varphi(t_n))$. Sia $d = (z_1, \dots, z_n)$ una ennupla di razionali diadici appartenenti all'in-

terno di I^n . Se $z \notin S$, detto 2^m il massimo dei denominatori delle frazioni irriducibili rappresentanti $z_1, \dots, z_n$, come nella Prop. 6 e nel Teorema 8, esisterà un cammino f_z tale che $f_z([0, 1]) \subseteq U_z$ dove il raggio del disco aperto di U_z è uguale a 2^{-m} , mentre se $z \in S$ diciamo f_z il cammino costante.

Indichiamo con P_z il rettangoloide $\varphi^{-1}(z_1) \times \varphi^{-1}(z_2) \times \dots \times \varphi^{-1}(z_n)$ di I_T^n e diciamo c_z il suo centro e B_z il suo contorno. Considerando P_z come cono di vertice c_z , possiamo costruire una funzione h che modifichi il cammino $g = f \circ \varphi^n$. Infatti, ogni $w \in T^n \cap P_z$ si può scrivere nella forma $w = \lambda c_z + (1 - \lambda)b$, ove $b \in B_z$ e $\lambda \in T$, e si può allora porre $h(w) = f_z(\lambda)$. In modo analogo al caso unidimensionale si prova che h è uniformemente continua. Posto infine $\psi^n(t_1, \dots, t_n) = (\psi(t_1), \dots, \psi(t_n))$ per ogni $(t_1, \dots, t_n) \in I_Q^n$, abbiamo $k = h \circ \psi^n$, $k: I_Q^n \rightarrow S$.

b) f è omotopa a $\bar{k}$.

Come abbiamo fatto in precedenza per il caso unidimensionale, dimostriamo che f è omotopa a $\bar{k}$ mediante una catena di omotopie, indicando con soprallineature le estensioni.

i) $f \sim \bar{g} = f \circ \bar{\varphi}^n$.

Facciamo innanzitutto vedere che i_n è omotopa a $\bar{\varphi}^n$, dove con i_n indichiamo l'identità in I^n . Se $G(x_1, x_2)$ è un'omotopia fra i e $\bar{\varphi}$, allora la $F_{n+1}: I^{n+1} \rightarrow I^n$, definita da:

$$F_{n+1}(t_1, t_2, \dots, t_{n+1}) = (G(t_1, t_{n+1}), G(t_2, t_{n+1}), \dots, G(t_n, t_{n+1}))$$

è una *-omotopia fra i_n e $\bar{\varphi}^n$.

Si ha allora $\bar{\varphi}^n \sim i_n$, quindi $f \circ \bar{\varphi}^n = \bar{g} \sim f$.

ii) $\bar{g} \sim \bar{h}$.

Designiamo innanzitutto con $h^t: I_{t_{n+1}=t}^{n+1} \rightarrow S^*$ la funzione definita da $h^t(w) = f_z(\lambda t)$, dove z e λ individuano w come nel paragrafo precedente. La funzione $G_n: I_T^{n+1} \rightarrow S^*$ risulta così costruita:

$$G_n(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) = h^{x_{n+1}}(w),$$

con $(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) \in I^{n+1}$ e $w = (x_1, \dots, x_n)$. La G_n è chiaramente uniformemente continua e quindi estendibile a I^n . Per costruzione, essa risulta essere una *-omotopia e collegare $\bar{g}$ ad $\bar{h}$.

iii) $\bar{h} \sim \bar{k}$. Sia $\bar{\varphi}^n$ l'isomorfismo uniforme di cui sopra. Siccome $i_n \sim \bar{\varphi}^n$, si ottiene (come in i)), $\bar{h} \circ i_n \sim \bar{h} \circ \bar{\varphi}^n$. Ma $\bar{h} \circ \bar{\varphi}^n = \bar{k}$, cioè $\bar{h} \sim \bar{k}$ ed il teorema è completamente dimostrato.

6. — Indichiamo ora per comodità con $U_q(S)$ la famiglia di tutti i cammini (razionali) uniformemente continui di uno spazio uniforme assegnato S . Tale famiglia è regolare nel senso di [1]. Se X è un sottospazio di S e $x \in S$, si possono quindi costruire i gruppi assoluti di omotopia razionale uniforme $Q_n(S, U_q, x)$ e $Q_n(X, U_q, x)$ nonchè quelli relativi $Q_n(S, U_q, X, U_q, x)$ e la successione esatta di omotopia uniforme, che sono invarianti uniformi. Nell'insieme dei cammini di S^* , $C(S^*)$, consideriamo ora la famiglia $E(S^*)$ formata dalle estensioni dei cammini razionali di $U_q(S)$. Si può verificare che $E(S^*)$ è una famiglia regolare qualora:

- i) si modifichi la condizione degli 0-cammini nel modo seguente:
ogni 0-cammino avente come immagine un punto $x \in S$ è regolare,
- ii) si definiscano le condizioni della somma e del trapezio in modo da far intervenire soltanto parametri razionali (cfr. [1]).

Si possono allora ricavare i gruppi di omotopia regolare e le corrispondenti successioni esatte relativamente alle famiglie regolari $C(S^*)$ ed $E(S^*)$. Si ha allora la

PROPRIETÀ 9. — *I gruppi di omotopia $Q_n(S, U_q, x)$ e $Q_n(S^*, E, x)$ sono tra loro isomorfi.*

DIMOSTR. — Se $n > 0$, vi è una corrispondenza biunivoca fra i cammini razionali, elementi di $U_q(S)$, e le loro estensioni, che sono elementi di $E(S^*)$. Notiamo inoltre che, associando ad ogni componente connessa per cammini razionali uniformi di S il suo completamento per cammini razionali, si ottiene l'isomorfismo fra $Q_0(S, U_q, x)$ e $Q_0(S^*, E, x)$.

TEOREMA 10. — *Sia S uno spazio uniforme metrizzabile. I gruppi di omotopia relativi $Q_n(S^*, C, S^*, E, x)$ sono tutti nulli, per $n \geq 1$.*

DIMOSTR. — Sia $f \in C(S^*)$ un cappio relativo n -dimensionale di punto base $x \in S$. Poichè esso soddisfa alle condizioni dei Teorr. 7 e 8, per gli stessi teoremi esiste un cammino n -dimensionale $\bar{k} \in E(S^*)$, $*$ -omotopo a f . Osserviamo che dalla stessa costruzione di $\bar{k}$ segue che $\bar{k}$ è un cappio relativo n -dimensionale di punto base x .

Verifichiamo infine che la $*$ -omotopia considerata è un'omotopia relativa. Detta F tale omotopia, occorre dimostrare che la restrizione di F ai punti della faccia $I_{t_n=0}$ aventi coordinate tutte razionali ha l'immagine contenuta in S .

L'omotopia F fra f e $\bar{k}$ è ottenuta mediante il prodotto delle tre omotopie i), ii) e iii) considerate nella parte b) del Teorema 8. Poichè la φ^n applica ennuple razionali in ennuple razionali e l'omotopia che lega questa funzione all'identità in I_0^n è razionale (cfr. Lemma 1, parte iii) e corollario al Lemma 3 nella parte i)), la F soddisfa alla proprietà richiesta in quanto la restrizione di f a $I_{t_n=0}$ ha l'immagine in S . Analogo ragionamento può esser fatto per quanto concerne la parte iii) (omotopia fra $\bar{h}$ e $\bar{k}$), mentre per la parte ii) (omotopia fra $\bar{g}$ e $\bar{h}$) è sufficiente osservare che non ven-

gono modificate le immagini dei punti di I_q^n appartenenti ad S in quanto, per costruzione, i cammini f_z associati a punti $z \in S$ vengono scelti costanti e coincidenti con z .

Poichè $\bar{k}$ è estensione di un cammino razionale uniforme di S , $\bar{k} \in E(S^*)$. Considerando poi il cammino H_{n+1} definito da:

$$H_{n+1}(t_1, \dots, t_{n+1}) = \bar{k}(t_1, \dots, t_{n-1}, \sup(t_n, t_{n+1})),$$

che è regolare per la cond. 6 di [1], otteniamo che $\bar{k}$ è omotopo a 0, vale a dire $\bar{k}$ appartiene alla classe nulla di $Q_n(S^*, C, S^*, E, x)$.

PROPRIETÀ 11. — *Se S è uno spazio uniforme metrizzabile, allora i gruppi di omotopia $Q_n(S^*, C, x)$ e $Q_n(S^*, E, x)$ sono tra loro isomorfi.*

DIMOSTR. — Consideriamo la successione esatta di omotopia regolare:

$$\begin{aligned} \dots Q_{n+1}(S^*, C, S^*, E, x) \rightarrow Q_n(S^*, E, x) \xrightarrow{j_n} Q_n(S^*, C, x) \rightarrow Q_n(S^*, C, S^*, E, x) \rightarrow \\ \dots \rightarrow Q_1(S^*, C, S^*, E, x) \rightarrow Q_0(S^*, E, x) \xrightarrow{i_0} Q_0(S^*, C, x). \end{aligned}$$

Se $n > 0$, per il teorema precedente i gruppi di omotopia relativa $Q_n(S^*, C, S^*, E, x)$ sono tutti nulli: da ciò segue l'asserto relativamente ai gruppi $Q_n(S^*, E, x)$ e $Q_n(S^*, C, x)$, con $n > 0$.

L'esattezza della successione sopra considerata garantisce inoltre l'iniettività di j_0 . Per verificare la sua suriettività, è sufficiente osservare che, date le componenti X e X^* , e due punti $y \in X$ e $z \in X^*$, per definizione essi si possono connettere mediante un cammino di E . Questo prova che gli insiemi $Q_0(S^*, E, x)$ e $Q_0(S^*, C, x)$ sono biiettivi.

Il teorema risulta allora dimostrato per ogni n .

Osservando che per definizione i gruppi $\Pi_n(S^*, x)$ coincidono con i gruppi $Q_n(S^*, C, x)$ (cfr. [1]), possiamo allora ottenere il conclusivo

TEOREMA 12. — *Siano S uno spazio uniforme metrizzabile, x un suo punto ed S^* il suo completamento per cammini razionali. Allora i gruppi di omotopia uniforme $Q_n(S, U_q, x)$ e quelli classici $\Pi_n(S^*, x)$ sono tra loro isomorfi.*

DIMOSTR. — Segue dai Teorr. 9-10-11 e dalla nostra precedente osservazione.

Un analogo risultato si può dimostrare riguardo ai gruppi di omotopia relativi ad un sottospazio X di S . Si ha il

TEOREMA 13. — *Sia S uno spazio uniforme metrizzabile, X un suo sottospazio e x un punto di X ; i gruppi di omotopia uniforme $Q_n(S, U_q, X, U_q, x)$ e quelli classici $\Pi_n(S^*, X^*, x)$ sono tra loro isomorfi, se $n \geq 1$.*

DIMOSTR. — Consideriamo le due successioni esatte [2] di omotopia regolare rela-

tive alle tre famiglie $C(S^*) \supseteq E(S^*) \supseteq E(X^*)$ ed alle tre famiglie $C(S^*) \supseteq C(X^*) \supseteq E(X^*)$. Esse sono rispettivamente:

$$\dots Q_{n+1}(S^*, C, S^*, E) \rightarrow Q_n(S^*, E, X^*, E) \rightarrow Q_n(S^*, C, X^*, E) \rightarrow Q_n(S^*, C, S^*, E) \rightarrow \dots, \quad (n \geq 1);$$

$$\dots Q_n(S^*, C, X^*, E) \rightarrow Q_n(S^*, C, X^*, C) \rightarrow Q_{n-1}(X^*, C, X^*, E) \rightarrow \dots, \quad (n > 1).$$

Dalla nullità dei primi e quarti membri delle successioni (Teor. 10) seguono gli isomorfismi:

$$Q_n(S^*, E, X^*, E) \simeq Q_n(S^*, C, X^*, E), \quad (n \geq 1),$$

$$Q_n(S^*, C, X^*, E) \simeq Q_n(S^*, C, X^*, C), \quad (n > 1).$$

Osserviamo inoltre che $Q_1(S^*, C, X^*, E, x) \simeq Q_1(S^*, C, X^*, C, x)$ in quanto i cammini unidimensionali relativi di punto base $x \in S$ coincidono. Essendo allora $Q_n(S^*, E, X^*, E) \simeq Q_n(S^*, C, X^*, C)$, si ottiene:

$$Q_n(S^*, E, X^*, E) \simeq Q_n(S^*, C, X^*, C) = H_n(S^*, X^*, x).$$

Per l'analoga della Prop. 9, applicata ai gruppi di omotopia relativa, si ha $Q_n(S^*, E, X^*, E) \simeq Q_n(S, U_q, X, U_q, x)$, cioè l'asserto.

7. - Dato uno spazio uniforme S , abbiamo considerato il suo completamento per cammini razionali S^* . Tale operazione di passaggio a S^* si può reiterare, e si possono quindi considerare i successivi spazi S^*, S^{**} , ecc. che risultano tutti contenuti nel completamento $\bar{S}$ di S . Nel caso che S sia uno spazio metrizzabile, tale operazione di completamento per cammini razionali risulta essere idempotente. Si ha cioè la

PROPRIETÀ 14. - *Sia S uno spazio uniforme metrizzabile. Allora $S^* = S^{**}$.*

DIMOSTR. - L'inclusione $S^* \subseteq S^{**}$ è ovvia. Dato ora un cammino razionale uniforme di S^* , $f: I_q \rightarrow S^*$, dobbiamo dimostrare che $\bar{f}(I) \subseteq S^*$, dove $\bar{f}$ è l'estensione di f . Sia α un irrazionale in I , ed $\{r_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ una successione crescente di razionali positivi tendente ad α . Sia poi $r'_0 = 0$ ed $r'_i = (r_{i+1} + r_i)/2$, con $i \in \mathbb{N}^*$. Siccome $f(r_i) = x_i \in S$, è possibile costruire una successione $\{f_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ di cammini, $f_i: [r'_i, r'_{i+1}]_q \rightarrow S \cup \{x_{i+1}\}$ tale che $f_i(r_{i+1}) = x_{i+1}$, $\text{diam}(f_i[r'_i, r'_{i+1}]) < 2^{-i}$, e l'immagine dell'intervallo privato del punto r_i è contenuta in S (cfr. definizione di S e prop. 5). Definiamo ora $g: [0, \alpha] \cup \alpha \rightarrow S^{**}$, ponendo $g(x) = f_i(x)$, $g(\alpha) = f(\alpha)$. Dalla uniforme continuità dei cammini considerati segue l'uniforme continuità della g . Considerando ora una similitudine χ fra I_q e $[0, \alpha] - \{r_i\}$ otteniamo che $g' = g \circ \chi$ è un cammino razionale di S di estremo $f(\alpha)$, che risulta quindi appartenere a S^* .

8. - Esempi.

ESEMPIO 1. - Riferito il piano reale ad una coppia di coordinate cartesiane x e y , diciamo A il grafo della funzione $y = \sin 1/X$, con $x \in]0, 1[$, B il segmento chiuso di estremi $p = (0, 1)$ e $q = (0, -1)$ e C un arco aperto di estremi p e q , passante per $r = (1, \sin 1)$ e disgiunto da $A \cup B$. Posto $S = A \cup C$, otteniamo $S^* = S \cup \{p, q\}$ ed $\hat{S} = S \cup B$, e quindi ricaviamo:

i) $Q_1(S, U_Q, r) = \Pi_1(S^*, r) = 0$, poichè S^* è omeomorfo all'unione di tre segmenti (di cui due chiusi ed uno semichiuso), aventi un estremo in comune.

ii) $\Pi_1(\hat{S}, r) \approx Z$, poichè $\hat{S}$ è omeomorfo ad una circonferenza a cui si incolli in un suo punto un segmento semichiuso.

ESEMPIO 2. - Siano Q l'insieme dei numeri razionali, R_i ($i \in Q$) una copia della retta reale dotata dell'uniformità metrica standard e s'introduca nel prodotto $P = \prod_{i \in Q} R_i$ l'uniformità indotta dalla *box-uniformity*. In P consideriamo poi il sotto-spazio uniforme T , così costruito:

$$T = \{ \{x_i\}_{i \in Q} \in P \mid x_2 = p \in I_Q, x_i = 0 \text{ se } i \neq 2 \neq p \text{ e } x_p \in]0, 1[\}.$$

Per ogni punto $y^{(p)}$ di coordinate $x_2 = p, x_p = 1$ e $x_i = 0$ se $i \neq 2, i \neq p$, sia poi $L^{(p)}$ il segmento che lo congiunge al punto di P definito da $x_{-1} = 1, x_i = 0$ per $i \neq -1$. Poniamo infine:

$$L = \bigcup_{p \in I_Q} L^{(p)}, \quad S = T \cup L.$$

È chiaro innanzitutto che i punti del tipo $\{x_i\}_{i \in Q}$, con $x_2 = p \in I_Q$ e $x_i = 0$ se $i \neq 2$ appartengono a S^* perchè sono uniti a S dai cammini razionali $f^{(p)}$ definiti nel modo seguente:

$$f^{(p)}(r) = \{x_i\}, \quad \text{ove} \quad x_i = \begin{cases} 0, & i \neq 2, i \neq p, \\ p, & i = 2, \\ r, & i = p. \end{cases}$$

I suddetti punti si ottengono infatti come immagini di 0 rispetto agli $f^{(p)}$.

Consideriamo ora il cammino $f^*: I_Q \rightarrow S^*$ definito da:

$$f^*(r) = \{x_i\}, \quad \text{ove} \quad x_i = \begin{cases} 0, & i \neq 2, \\ r, & i = 2. \end{cases}$$

Ovviamente l'estensione di f^* a I ha come immagine l'insieme degli $\{x_i\}$ così definiti:

$$x_i = \begin{cases} 0, & \text{se } i \neq 2, \\ \alpha, & \text{se } i = 2, \end{cases} \quad \text{ove } 0 \leq \alpha \leq 1.$$

Da ciò segue che i punti $x^* = \{x_i\}_{i \in Q}$ ove $x_i = 0$ se $i \neq 2$ e $x_2^* = \alpha^* \in I - Q$, appartengono a S^{**} . Scelto un x^* , dimostriamo per assurdo che $x^* \notin S^*$. Se x^* appartiene a S^* , esiste un cammino razionale $g: I_Q \rightarrow S$ con $\bar{g}(\lambda) = x^*$, e λ irrazionale in $[0, 1]$. Posto $K = \bar{g}(I) \cap T$, poichè $\bar{g}(I)$ è compatto e T è chiuso in S , K è pure compatto.

Siano $\{\lambda^{(n)}\}_{n \in N}$ una successione crescente di razionali in I_Q convergente a λ e $\{y_i^{(n)}\} = \{g(\lambda^{(n)})\}$ la successione delle immagini, tendente a x^* per la continuità di g . Notiamo che la successione $\{y_2^{(n)}\}$ formata dalle coordinate di indice 2 di $\{y_i^{(n)}\}$, tende a $x_2^* = \alpha$ e contiene una sottosuccessione $\{r_s\}_{s \in N}$ formata da elementi tutti distinti. Diciamo Π_{r_s} la proiezione definita da $\Pi_{r_s}(\{x_i\}) = x_{r_s}$.

Costruiamo ora un ricoprimento aperto minimale F non finito di K . Per ogni $n \in N$, siano:

- i) A_{r_s} , un aperto di I_{r_s} tale che $\Pi_{r_s}(K) \not\subset A_{r_s}$ e $\{0\} \in A_{r_s}$;
- ii) $F_{r_s} = I_2 \times I_{r_s} \times \Pi A_{r_m} \times \Pi I_i$, ove $m \neq s$ e $i \in Q - \{r_s\}$.

È chiaro che la famiglia $F = \{F_{r_s}\}$ costituisce un ricoprimento aperto di K . Esso è minimale poichè, detti $r_{i,1}, \dots, r_{i,k}$ gli indici relativi ad una qualsiasi sottofamiglia finita, il punto $p = \{p_i\}$ tale che $p_{r_{i,k+1}} \notin A_{r_{i,k+1}}$ è tale da non appartenere a $F_{r_{i,1}} \cup \dots \cup F_{r_{i,k}}$.

L'esistenza del ricoprimento aperto minimale infinito F va contro la compattezza dello spazio K ; di conseguenza abbiamo dimostrato per assurdo che il punto $x^* \in S^{**}$ non appartiene ad S^* , vale a dire che $S^{**} \neq S^*$.

BIBLIOGRAFIA

- [1] D. C. DEMARIA - P. M. GANDINI, *Su una generalizzazione della teoria dell'omotopia*, Rend. Sem. Mat. Univ. Polit. Torino, **34** (1975-76), pp. 289-325.
- [2] P. M. GANDINI, *Sulle triplete regolari*, in corso di pubblicazione sugli Atti dell'Accademia di Scienze, Lettere e Arti di Palermo.
- [3] H. J. KOWALSKY, *Topological spaces*, Academic Press, 1965.