Sur le plongement de certaines variétés riemanniennes à deux dimensions dans l'espace euclidien à quatre dimensions (*).

Par † PAUL VINCENSINI (Marseille)

Sunto. — Poggiando su una rappresentazione delle trasformazioni puntuali del piano euclideo E^2 mediante superficie dello spazio euclideo a 4 dimensioni E_4 , il cui principio è stato esposto nella memoria [1] di questi Annali, si studia un modo particolare d'immersione di alcune varietà riemanniane a due dimensioni nell' E_4 . Il caso delle realizzazioni reali concrete di tali varietà, sia nell' E_4 o nella ipersfera unitaria dell' E_4 (nello spazio ellittico a tre dimensioni) è specialmente esaminato.

I. — Introduction.

Cet article a pour objet l'étude d'un mode particulier de plongement de certaines variétés riemanniennes à deux dimensions dans l'espace euclidien à quatre dimensions. Les variétés envisagées seront regardées comme définies par l'ensemble de deux variables (u, v) et d'une forme différentielle quadratique

$$(1) \quad ds^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2, \quad (E, F, G = \text{fonct. de } u \text{ et } v).$$

Nous dirons qu'une telle variété a été plongée dans un espace euclidien à un nombre quelconque de dimensions, si l'on a pu obtenir explicitement, dans cet espace, une surface à laquelle la métrique euclidienne de l'espace de plongement confère le ds^2 envisagé. La surface ainsi obtenue fournit alors une représentation concrète (ou une application), dans l'espace euclidien, de la variété donnée.

On connaît la difficulté du problème de la détermination des surfaces d'un espace euclidien admettant un ds^2 donné. Dans l'espace euclidien à trois dimensions ce problème dépend d'une équation de Monge-Ampère, qui n'est complètement intégrable de façon explicite que pour cinq types, d'ailleurs bien connus, de ds^2 . Dans des travaux antérieurs ([2], [3]) nous avons montré comment, la mise d'un ds^2 sous une forme déterminée (la forme (3) du n. II), permet toujours (aucune distinction entre le réel et l'imaginaire n'étant faite) d'obtenir explicitement une surface (et parfois une infinité de surfaces isométriques entre-elles) représentative du ds^2 envisagé dans l'espace euclidien E_4 à quatre dimensions.

(*) Entrata in Redazione il 17 dicembre 1977.

† Deceduto a Marseille il 9 agosto 1978. Bozze rivedute dal Comitato di Redazione.

La méthode exposée dans les travaux en question fournit, dans certains cas, un moyen de construire dans E_4 des représentations euclidiennes de variétés riemanniennes à deux dimensions non représentables explicitement dans l'espace euclidien ordinaire à trois dimensions E_3 . En outre, dans le cas où un ds^2 donné aurait une représentation concrète suivant une surface S de E_3 , la méthode offre la possibilité d'appliquer isométriquement (et parfois d'une façon continue) cette surface dans E_4 .

Dans les travaux précédents, les variables u et v intervenant dans (1) ont une signification géométrique bien déterminée (qui sera rappelée au n. III), et les ds^2 envisagés affectent des formes canoniques, dites *unifonctionnelles*, ne mettant en jeu, dans leurs coefficients, qu'une fonction des deux variables u, v et ses dérivées. Nous nous plaçons ici dans le cas général où, u et v étant quelconques, le ds^2 de la variété envisagée a la forme générale (1), pour en déduire de nouveaux cas d'application de variétés riemanniennes bidimensionnelles (et notamment de surfaces de E_3) dans E_4 .

II. — Les formules fondamentales. Rappel de résultats.

L'espace euclidien ordinaire E_3 est supposé être l'hyperplan $x_4 = 0$ de l'espace euclidien E_4 rapporté au repère orthonormé $(Ox_1x_2x_3x_4)$.

Considérons l'ensemble des ∞^4 droites de E_3 . L'une quelconque, D , de ces droites coupe respectivement les plans $x_3 = 0, x_3 = 1$ de E_3 en A et B . Soit A' la projection orthogonale de B sur le plan E_2 (Ox_1x_2). L'ensemble des couples ordonnés (A, A') de points du plan E_2 et celui des droites D de E_3 non parallèles à E_2 se correspondent biunivoquement, et si $(\xi_1, \xi_2, 0), (\eta_1, \eta_2, 1)$ sont respectivement les coordonnées des points A et B de E_3 , et par suite $(\xi_1, \xi_2), (\eta_1, \eta_2)$ celles de A et A' dans E_2 (Ox_1x_2), les équations

$$(2) \quad \begin{cases} x_1 = (\xi_1 + \xi_2 - \eta_1)/2, \\ x_2 = (\xi_1 - \xi_2 - \eta_1)/2i, \\ x_3 = (\xi_2 - \xi_1 - \eta_2)/2, \\ x_4 = (\xi_2 + \xi_1 - \eta_2)/2i, \end{cases}$$

définissent une application biunivoque de l'ensemble des couples ordonnés de points de E_2 (ou des droites D de E_3) dans E_4 , qui est précisément celle qui nous a servi dans les travaux cités et que nous adopterons dans toute la suite.

Eu égard aux applications relatives au plongement de variétés à deux dimensions dans E_4 les deux interprétations géométriques suivantes des formules (2) jouent un rôle important:

Si l'on regarde $\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2$ comme des fonctions de deux variables indépendantes u et v (lesquelles, par exemple, peuvent être ξ_1 et ξ_2), on obtient une transfor-

mation ponctuelle $\mathfrak{T}[A(\xi_1, \xi_2) \rightarrow A'(\eta_1, \eta_2)]$ dans E_2 . Le point $M(x_1, x_2, x_3, x_4)$ de E_4 défini par les formules (2) décrit alors une surface S , et l'on peut dire que ces formules appliquent (biunivoquement) l'ensemble des transformations ponctuelles de E_2 sur l'ensemble des surfaces S de E_4 .

Si $(\xi_1, \xi_2), (\eta_1, \eta_2)$ sont regardées, ainsi qu'il a été expliqué plus haut, comme définissant une droite D de E_3 , cette droite, dépendant des deux paramètres u et v , engendre une congruence de E_3 , et les formules (2) définissent alors une application des congruences rectilignes de E_3 sur les surfaces de E_4 . Et cette application peut être étendue aux complexes de E_3 ou à l'espace réglé E_3 tout entier si l'on suppose $\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2$ fonctions de 3 ou 4 paramètres arbitraires.

On vérifie aussitôt au moyen des formules (2) que dans l'application de l'espace E_3 réglé sur E_4 [1], à deux droites concourantes de E_3 correspondent biunivoquement deux points de E_4 situés sur une même droite isotrope, les développables de E_3 et les courbes isotropes de E_4 se correspondant ainsi biunivoquement.

Quant au point de vue consistant à regarder les formules (2) comme définissant une application des transformations ponctuelles $A(\xi_1, \xi_2) \rightarrow A'(\eta_1, \eta_2)$ de E_2 sur des surfaces, il conduit simplement à une forme canonique intéressante du ds^2 d'une variété riemannienne quelconque à deux dimensions. Le calcul de la distance, dans E_4 , des images M et $M + dM$ des deux points infiniment voisins $A(\xi_1, \xi_2), A'(\eta_1, \eta_2)$ et $\overline{A + dA}(\xi_1 + d\xi_1, \xi_2 + d\xi_2), \overline{A' + dA'}(\eta_1 + d\eta_1, \eta_2 + d\eta_2)$, fait au moyen des formules (2), donne

$$(3) \quad ds^2 = dM^2 = d\xi_1 d\eta_2 - d\xi_2 d\eta_1,$$

ce qui montre que ds^2 n'est autre chose que le produit extérieur des deux vecteurs infinitésimaux dA, dA' .

Lorsque $\xi_1, \dots, \eta_2$ sont des fonctions quelconques de deux paramètres u et v , et que par suite $\mathfrak{T}(A \rightarrow A')$ est la transformation ponctuelle la plus générale du plan E_2 , l'expression (3) du ds^2 fournit la forme canonique annoncée.

Notons aussi l'interprétation suivante du carré $O\bar{M}^2$ de la distance à l'origine, dans E_4 , du point M image du couple (A, A') de E_2 .

Les (2) montrent que l'on a

$$O\bar{M}^2 = \xi_1 \eta_2 - \xi_2 \eta_1,$$

et que par suite $O\bar{M}^2$ représente le produit extérieur des deux vecteurs OA, OA' , c'est-à-dire l'aire du parallélogramme construit dans le plan E_2 sur OA et OA' . D'où il résulte, en particulier, que toutes les transformations $\mathfrak{T}(A \rightarrow A')$ du plan E_2 pour lesquelles le triangle (OAA') conserve une aire constante, ont pour images des surfaces situées sur une hypersphère de E_4 centrée en O , remarque qui se révèle utile dans le problème de la recherche de variétés riemanniennes (de surfaces de E_3 notamment) susceptibles d'un plongement isométrique dans une hypersphère de E_4 auquel il a été précédemment fait allusion.

III. – Formules générales de plongement.

On obtient ces formules en exprimant l'équivalence de la forme différentielle quadratique (1) qui définit l'élément linéaire de la variété envisagée, et de la forme (3) où les quatre quantités $(\xi_1, \dots, \eta_2)$ sont des fonctions inconnues des deux variables u et v figurant dans (1). Cette équivalence se traduit, comme on le voit aussitôt, par le système

$$(4) \quad \begin{cases} \frac{\partial \xi_1}{\partial u} \frac{\partial \eta_2}{\partial u} - \frac{\partial \xi_2}{\partial u} \frac{\partial \eta_1}{\partial u} = E, \\ \frac{\partial \xi_1}{\partial v} \frac{\partial \eta_2}{\partial v} - \frac{\partial \xi_2}{\partial v} \frac{\partial \eta_1}{\partial v} = G, \\ \frac{\partial \xi_1}{\partial u} \frac{\partial \eta_2}{\partial v} + \frac{\partial \xi_1}{\partial v} \frac{\partial \eta_2}{\partial u} - \frac{\partial \xi_2}{\partial u} \frac{\partial \eta_1}{\partial v} - \frac{\partial \xi_2}{\partial v} \frac{\partial \eta_1}{\partial u} = 2F. \end{cases}$$

L'intégrabilité théorique du système (4) est assurée, ne serait-ce qu'en raison de la possibilité bien connue de plongement de la variété générale à n dimensions dans un espace euclidien à $n(n+1)/2$ dimensions au moins.

Si $[x_1(u, v), \dots, x_4(u, v)]$ définissent, dans E_4 , une surface ayant un ds^2 donné de la forme générale (1), les équations (2) font connaître les quatre fonctions $(\xi_1, \dots, \eta_2)$ des deux variables u et v vérifiant le système différentiel (4). Mais la possibilité d'obtenir *explicitement* des solutions $(\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2)$ du système (4) est liée à la forme analytique des fonctions E, F, G des variables u et v figurant dans (1), et nous nous proposons, dans ce qui suit, d'examiner un certain nombre de cas, suggérés par l'origine géométrique des quantités $(\xi_1, \dots, \eta_2)$ définies au n. II, où cette possibilité a lieu.

Supposons, comme dans les travaux cités au n. II, que les paramètres (u, v) qui interviennent dans la transformation ponctuelle $\mathcal{C}(A \rightarrow A')$ du plan E_2 soient précisément les coordonnées $[\xi_1 = u, \xi_2 = v]$ du point générique A du plan E_2 . Le système (4) associé au plongement du ds^2 (3) dans E_4 définit alors les deux fonctions inconnues $\eta_1(u, v), \eta_2(u, v)$ au moyen du nouveau système

$$(5) \quad \begin{cases} \frac{\partial \eta_2}{\partial u} = E, \\ \frac{\partial \eta_1}{\partial v} = -G, \\ \frac{\partial \eta_2}{\partial v} - \frac{\partial \eta_1}{\partial u} = 2F. \end{cases}$$

Un tel système n'est généralement pas intégrable. Son intégration exige une cer-

taine relation entre les coefficients E, F, G , que l'on obtient de la façon suivante.

Des deux premières équations (5) on déduit

$$(6) \quad \begin{cases} \eta_1 = - \int_{v_0}^v G dv + \lambda(u), \\ \eta_2 = \int_{u_0}^u E du + \mu(v); \end{cases}$$

la 3-ème équation (5) donne alors

$$(7) \quad \int_{u_0}^u \frac{\partial E}{\partial v} du + \int_{v_0}^v \frac{\partial G}{\partial u} dv - 2F = \lambda'(u) - \mu'(v),$$

et l'on doit donc avoir

$$\frac{\partial^2}{\partial u \partial v} \left[\int_{v_0}^v \frac{\partial E}{\partial v} du + \int_{u_0}^u \frac{\partial G}{\partial u} dv - 2F \right] = 0,$$

soit:

$$(8) \quad \frac{\partial^2 E}{\partial v^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial u^2} - 2 \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} = 0.$$

Réciproquement d'ailleurs, si (8) est vérifiée, le 1-er membre de (7) est de la forme $\lambda'(u) - \mu'(v)$, λ' et μ' étant des fonctions déterminées de u et v respectivement, lesquelles définissent λ et μ à des constantes additives près, qui, intervenant additivement dans les expressions (2) de (x_1, x_2, x_3, x_4) comme le montrent les expressions (6) de η_1, η_2 , n'introduisent qu'une translation dans E_4 et peuvent par suite être négligées.

Les équations (6) où λ et μ ont les valeurs trouvées définissent alors une transformation ponctuelle

$$\mathfrak{G} \left\{ A \left| \begin{array}{l} \xi_1 = u \\ \xi_2 = v \end{array} \right. \rightarrow A' \left| \begin{array}{l} \eta_1 = - \int_{v_0}^v G dv + \lambda(u) \\ \eta_2 = \int_{u_0}^u E du + \mu(v) \end{array} \right. \right\},$$

du plan E_2 , dont la surface image dans E_4 , définie par les équations (2), admettra le ds^2 (1) donné.

Les équations de cette surface sont:

$$(9) \quad \begin{cases} x_1 = \left[u + v + \int_{v_0}^v G dv - \lambda(u) \right] / 2, \\ x_2 = \left[u - v + \int_{v_0}^v G dv - \lambda(u) \right] / 2i, \\ x_3 = \left[v - u - \int_{u_0}^u E du - \mu(v) \right] / 2, \\ x_4 = \left[v + u - \int_{u_0}^u E du - \mu(v) \right] / 2i. \end{cases}$$

On peut donc énoncer le résultat suivant:

Si les coefficients E, F, G du ds^2 (1) vérifient la relation

$$\frac{\partial^2 E}{\partial v^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} = 0,$$

les variétés supports de ce ds^2 admettent un plongement explicite dans E_4 , défini par les équations (9), où les fonctions $\lambda(u)$ et $\mu(v)$ sont uniquement déterminées (à des constantes négligeables près) par le développement du premier membre de l'équation (7).

Parmi les ds^2 vérifiant (8) figurent les deux suivants

$$(10) \quad \begin{cases} ds^2 = E(du^2 + dv^2), & E = \text{fonction harmonique de } u \text{ et } v, \\ ds^2 = 2F du dv, & F = U(u) + V(v), \end{cases}$$

dont le plongement dans E_4 a fait l'objet d'une étude publiée dans la *revue de l'Université d'Istanbul* (vol. 42, 1977).

Un autre type de ds^2 vérifiant (8), et dont on peut par suite réaliser le plongement euclidien dans E_4 au moyen des formules générales (9) est le suivant:

$$(11) \quad ds^2 = [av^2 + U_1 v + U_2] du^2 + [-au^2 + V_1 u + V_2] dv^2,$$

où a est une constante arbitraire, et où $(U_1, U_2), (V_1, V_2)$ sont des couples de fonctions arbitraires de u et v respectivement.

Ici:

$$E = av^2 + U_1 v + U_2, \quad G = -au^2 + V_1 u + V_2, \quad F = 0;$$

on a donc

$$\begin{aligned} \int_{u_0}^u \frac{\partial E}{\partial v} du &= 2auv - 2au_0v + \int_{u_0}^u U_1 du, \\ \int_{v_0}^v \frac{\partial G}{\partial u} dv &= -2auv + 2av_0u + \int_{v_0}^v V_1 dv, \end{aligned}$$

et par suite

$$\int_{u_0}^u \frac{\partial E}{\partial v} du + \int_{v_0}^v \frac{\partial G}{\partial u} dv = \left(2av_0u + \int_{u_0}^u U_1 du \right) - \left(2au_0v - \int_{v_0}^v V_1 dv \right).$$

La relation (7) est bien vérifiée, $\lambda'(u)$ et $\mu'(v)$ ayant les expressions ci-dessus entre parenthèses, d'où l'on déduit

$$\begin{aligned} \lambda(u) &= av_0u^2 + \int_{u_0}^u U_1 du, \\ \mu(v) &= au_0v^2 - \int_{v_0}^v V_1 dv. \end{aligned}$$

Les expressions (6) de η_1, η_2 donnent alors pour η_1, η_2 :

$$\begin{aligned} \eta_1 &= au^2v - u \int_{v_0}^v V_1 dv - \int_{v_0}^v V_2 dv + \int_{u_0}^u U_1 du, \\ \eta_2 &= av^2u + v \int_{u_0}^u U_1 du + \int_{u_0}^u U_2 du - \int_{v_0}^v V_1 dv, \end{aligned}$$

et les équations (2) définissant les surfaces de E_4 admettant le ds^2 (11) s'écrivent:

$$(12) \quad \left\{ \begin{aligned} x_1 &= \left[u + v - au^2v + u \int_{v_0}^v V_1 dv + \int_{v_0}^v V_2 dv - \int_{u_0}^u U_1 du \right] / 2, \\ x_2 &= \left[u - v - au^2v + u \int_{v_0}^v V_1 dv + \int_{v_0}^v V_2 dv - \int_{u_0}^u U_1 du \right] / 2i, \\ x_3 &= \left[v - u - av^2u - v \int_{u_0}^u U_1 du - \int_{u_0}^u U_2 du + \int_{v_0}^v V_1 dv \right] / 2, \\ x_4 &= \left[v + u - av^2u - v \int_{u_0}^u U_1 du - \int_{u_0}^u U_2 du + \int_{v_0}^v V_1 dv \right] / 2i. \end{aligned} \right.$$

Si on laisse de côté dans les expressions de $x_1, \dots, x_4$ les constantes additives qui, comme on l'a dit, correspondent à des translations de la surface (12) dans E_4 , on constate que, pour un ds^2 donné de la forme (11), les (12) représentent une famille de surfaces isométriques dépendant de deux paramètres, lesquels sont introduits par les quadratures $\int_{u_0}^u U_1 du$ et $\int_{v_0}^v V_1 dv$.

Si $a = U_1 = V_1 = 0$, les équations (12) qui, en posant $\mathfrak{U} = \int_{u_0}^u U_2 du$, $\mathfrak{V} = \int_{v_0}^v V_2 dv$ s'écrivent

$$(13) \quad \begin{cases} x_1 = (u + v + \mathfrak{V})/2, \\ x_2 = (u - v + \mathfrak{V})/2i, \\ x_3 = (v - u - \mathfrak{U})/2, \\ x_4 = (v + u - \mathfrak{U})/2i, \end{cases}$$

définissent une application *isométrique du plan euclidien E_2 dans E_4* .

Les surfaces (13) sont des surfaces de translation, et parmi elles figurent des quadriques de E_4 . La possibilité d'appliquer isométriquement le plan euclidien sur des quadriques de E_4 a été mise en évidence pour la 1-ère fois par C. GUICHARD [4]. On voit que cette propriété s'étend, entre autres, à toute une infinité de surfaces algébriques, obtenues en prenant pour U_2 et V_2 des polynômes quelconques en u et v respectivement.

Si $a = U_1 = 0$, si l'on a en outre $U_2 = 1$, $V_1 = 2$, et si l'on pose $V_2 = 2\mathfrak{V}$, le ds^2 (11) se présente sous la forme

$$(14) \quad ds^2 = du^2 + 2(u + \mathfrak{V}) dv^2,$$

qui a fait l'objet d'études approfondies de la part de J. WEINGARTEN [5], G. DARBOUX [6], E. GOURSAT [7], E. BARONI [8], et qui, pour des particularisations bien connues de la fonction $\mathfrak{V}$ donne les cinq types de ds^2 dont toutes les surfaces représentatives dans E_3 peuvent être explicitement déterminées. Dans les travaux des auteurs cités les ds^2 de la forme (14) apparaissent à travers une étude approfondie de l'équation de Monge-Ampère dont dépend le problème général de la déformation des surfaces [9]. Nous les avons retrouvés à notre tour d'une manière nouvelle [10] à propos d'un problème concernant la déformation de certaines variétés réglées. L'étude actuelle ajoute encore à leur intérêt, en montrant notamment comment on peut obtenir explicitement, dans E_4 , sans intégration d'aucune équation différentielle, pour chaque ds^2 de la forme générale (11), une famille de ∞^1 surfaces représentatives dans E_4 .

Si $\mathfrak{V}$ est une constante, que moyennant un changement de variable sur u on peut supposer nulle, on a le ds^2

$$ds^2 = du^2 + 2u dv^2,$$

qui convient aux surfaces applicables sur les développées des surfaces minima de E_3 ; les formules (12) qui appliquent isométriquement ces surfaces dans E_4 s'écrivent

$$(12') \quad \begin{cases} x_1 = [Cu + v + 2uv]/2, \\ x_2 = [Cu - v + 2uv]/2i, \\ x_3 = [Cv - 2u + v^2]/2, \\ x_4 = [Cv + v^2]/2i, \end{cases}$$

et l'on retrouve un résultat déjà signalé dans une communication faite au *Congrès International de Nice* suivant lequel:

Les développées des surfaces minima de E_3 sont isométriquement applicables sur des quadriques de E_4 .

Notons aussi la possibilité de plongement, au moyen des formules générales (12), du ds^2 de *Liouville*

$$ds^2 = (u^2 - v^2)(du^2 + dv^2),$$

obtenu en faisant: $a = -1$, $U_1 = V_1 = 0$, $U_2 = u^2$, $V_2 = -v^2$.

Les équations (12) deviennent dans ce dernier cas

$$(12'') \quad \begin{cases} x_1 = [u + v + u^2v - v^3]/2, \\ x_2 = [u - v + u^2v - v^3]/2i, \\ x_3 = [v - u + v^2u - u^3]/2, \\ x_4 = [v + u + v^2u - u^3]/2i, \end{cases}$$

et représentent une surface cubique de l'espace à 4 dimensions.

IV. — Les ds^2 isothermiques harmoniques et leur plongement suivant des surfaces minimales du type de Riemann de E_4 .

Si l'on ne suppose pas que les variables u, v sont les coordonnées dans E_2 du 1-er point A du couple (A, A') d'image $M(x_1, x_2, x_3, x_4)$ dans E_4 , le problème du plongement du ds^2 (1) dans E_4 dépend du système général (4) du n. III. Ce système définit, au moyen des deux paramètres u et v , les différents couples de points de E_2 se correspondant dans la transformation $\mathfrak{S}[A(\xi_1, \xi_2) \rightarrow A'(\eta_1, \eta_2)]$ dont l'image dans E_4 représente le ds^2 donné. Son intégration introduira en général une fonction arbitraire des variables (u, v) , et le plongement sera défini à ce degré d'arbitraire près.

L'intégration du système (4) est en général difficile. Aussi, plutôt que d'envisager le problème d'immersion qui nous occupe sous la forme générale précédente,

porterons nous notre attention sur la recherche des ds^2 dont le plongement dans E_4 se trouve facilité par quelque particularité géométrique opportune de la transformation ponctuelle $\mathfrak{C}(A \rightarrow A')$ correspondante.

Supposons par exemple que $\mathfrak{C}$ soit une transformation *conforme directe* réelle de E_2 , ξ_1 et ξ_2 étant les coordonnées ($\xi_1 = u$, $\xi_2 = v$) du point A . On aura donc

$$(15) \quad \begin{cases} \frac{\partial \xi_1}{\partial u} = 1, & \frac{\partial \xi_1}{\partial v} = 0, \\ \frac{\partial \xi_2}{\partial u} = 0, & \frac{\partial \xi_2}{\partial v} = 1, \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{\partial \eta_1}{\partial u} = \frac{\partial \eta_2}{\partial v}, \\ \frac{\partial \eta_1}{\partial v} = -\frac{\partial \eta_2}{\partial u}; \end{cases}$$

les deux premières équations (4) montrent que

$$\frac{\partial \eta_2}{\partial u} = E, \quad \frac{\partial \eta_1}{\partial v} = -G,$$

d'où, d'après (15) $E = G$, et la 3-ème (4) donne

$$\frac{\partial \eta_1}{\partial u} - \frac{\partial \eta_2}{\partial v} = 2F = 0.$$

Il s'agit donc du plongement dans E_4 de ds^2 *isothermiques*

$$(16) \quad ds^2 = E(du^2 + dv^2).$$

Si l'on pose

$$\frac{\partial \eta_1}{\partial u} = \frac{\partial \eta_2}{\partial v} = \theta(u, v),$$

les expressions des dérivées des fonctions harmoniques conjuguées η_1, η_2 prennent les formes

$$(17) \quad \begin{cases} \frac{\partial \eta_1}{\partial u} = \theta, \\ \frac{\partial \eta_1}{\partial v} = -E, \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{\partial \eta_2}{\partial u} = E, \\ \frac{\partial \eta_2}{\partial v} = \theta, \end{cases}$$

et les conditions d'intégrabilité en η_1 et η_2 exigent comme l'on voit que $\theta + iE$ soit une fonction analytique de $u + iv$, et que par suite E soit une fonction harmonique de u, v , $-\theta$ étant une fonction harmonique conjuguée de E .

S'il en est ainsi les équations (17) donnent pour η_1 et η_2

$$(18) \quad \eta_1 = \int \theta \, du - E \, dv, \quad \eta_2 = \int E \, du + \theta \, dv.$$

Pour que le plongement du ds^2 isothermique (16) au moyen des formules (2) du n. II soit possible, il faut donc, et il suffit, que E soit une fonction harmonique quelconque des deux variables u et v . S'il en est ainsi on obtient les formules de plongement en remplaçant, dans les formules (2), ξ_1 et ξ_2 par u et v respectivement et η_1, η_2 par les expressions (18) où $-\theta$ est une fonction harmonique conjuguée de E . On trouvera ainsi pour les surfaces de plongement les équations

$$(19) \quad \begin{cases} x_1 = [u + v - \int \theta du - E dv]/2, \\ x_2 = [u - v - \int \theta du - E dv]/2i, \\ x_3 = [v - u - \int E du + \theta dv]/2, \\ x_4 = [v + u - \int E du + \theta dv]/2i. \end{cases}$$

La fonction θ , pour E fonction harmonique donnée, n'est définie qu'à une constante additive près, mais il est facile de voir que la variation de cette constante n'introduit qu'un simple déplacement euclidien de la surface (19) dans E_4 .

Si l'on fait le changement de variables ($u = (\alpha + \beta)/2$, $v = (\alpha - \beta)/2i$) on constate sans peine que les intégrales figurant dans les équations (19) sont des sommes d'une fonction de α et d'une fonction de β , et que par suite les surfaces de plongement sont des *surfaces de translation*, d'ailleurs à réseaux de translation formés de courbes de longueur nulle planes et situées dans des plans totalement isotropes.

Ces propriétés identifient les surfaces de plongement des ds^2 isothermiques (16) à coefficient harmonique avec une famille de surfaces minimales de E_4 , que nous avons étudiées antérieurement [2], [11] sous le nom de *surfaces minimales du type de Riemann*. Ces surfaces jouissent d'un certain nombre de propriétés intéressantes. Contrairement à ce qui a lieu pour les surfaces minimales générales de l'espace euclidien à trois dimensions, il est impossible de déformer isométriquement ces surfaces à l'intérieur de la famille générale des surfaces minimales de E_4 . Ce qui a été dit sur la *rigidité* de la surface définie par les équations (19) au regard de la variation de la constante arbitraire dont ces équations dépendent, s'inscrit dans le résultat général précédent.

V. — Plongements hypersphériques.

On peut imposer à la transformation ponctuelle $\mathfrak{C}(A \rightarrow A')$ de E_2 bien d'autres propriétés que la conformité directe dont il a été question au n. précédent. Nous nous bornerons ici à la considération de l'une d'entre-elles, suggérée par les remarques géométriques exposées au n. II.

On a vu que pour une transformation $\mathfrak{C}(A \rightarrow A')$ donnée dans E_2 , l'aire du parallélogramme construit sur les deux vecteurs OA, OA' représente le carré (OM^2) de la distance de l'origine O au point M de E_4 image du couple ordonné (A, A') . Les

transformations $\mathfrak{T}(A \rightarrow A')$ pour lesquelles l'aire du triangle (OAA') conserve une valeur constante ont donc pour images des surfaces situées sur une hypersphère de centre O de E_4 , et l'on obtiendra des ds^2 susceptibles de plongements hypersphériques dans E_4 au moyen des formules (2) en imposant à $\mathfrak{T}$ la condition précédente.

Un cas évident d'invariance de l'aire (OAA') est celui où les points A, A' , supposés réels, ont pour coordonnées

$$A \begin{cases} \xi_1 = u, \\ \xi_2 = v, \end{cases} \quad A' \begin{cases} \eta_1 = u, \\ \eta_2 = v + 1/u. \end{cases}$$

On a alors, dans E_4 , $OM^2 = 1$, et l'image de la transformation $\mathfrak{T}(A \rightarrow A')$ est sur l'hypersphère de rayon 1.

Dans le cas actuel on a

$$ds^2 = d\xi_1 d\eta_2 - d\xi_2 d\eta_1 = -\frac{1}{u^2} du^2,$$

c'est là le ds^2 d'un plan isotrope de E_3 , et l'on retrouve le résultat connu suivant lequel les plans isotropes de E_3 , qui sont *indéformables* dans E_3 , peuvent être appliqués isométriquement sur des surfaces hypersphériques de E_4 .

Les équations générales (2) définissant le plongement du ds^2 ci-dessus dans l'hypersphère de rayon 1 s'écrivent ici

$$x_1 = v/2, \quad x_2 = -v/2i, \quad x_3 = -\left(u + \frac{1}{u}\right)/2, \quad x_4 = \left(u - \frac{1}{u}\right)/2i.$$

Elles représentent une 2-sphère équatoriale de l'hypersphère de rayon 1, obtenue en coupant celle-ci par l'hyperplan

$$x_1 + ix_2 = 0.$$

Si l'on définit les ∞^2 triangles (OAA') par

$$\begin{aligned} \overline{OA} = u, \quad \widehat{Ox_1, OA} = v, \quad & \text{(coordonnées polaires de } A) \\ \widehat{OA, OA'} = \theta(u, v), \quad \overline{OA'} = f(u, v), \end{aligned}$$

leur équivalence (aire commune = $\frac{1}{2}$) s'exprime par $uf \sin \theta = 1$, ce qui donne pour les coordonnées des points A et A'

$$(20) \quad \begin{cases} \xi_1 = u \cos v, \\ \xi_2 = u \sin v, \end{cases} \quad \begin{cases} \eta_1 = \cos(\theta + v)/u \sin \theta, \\ \eta_2 = \sin(\theta + v)/u \cos \theta, \end{cases}$$

et pour le ds^2 de l'image hypersphérique de la transformation $\mathfrak{G}(A \rightarrow A')$ du plan E_2 :

$$ds^2 = d\xi_1 d\eta_2 - d\xi_2 d\eta_1 = -\frac{1}{u^2} du^2 - u^2 \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\text{Cotg } \theta}{u^2} \right) + \left(1 - \frac{\partial \text{Cotg } \theta}{\partial v} \right) dv^2.$$

Si l'on définit θ par la relation $\text{Cotg } \theta = Vu^2$, où V est fonction de v seulement, le ds^2 précédent affecte la forme orthogonale

$$ds^2 = -\frac{1}{u^2} du^2 + (1 - V'u^2) dv^2,$$

laquelle, restant inaltérée si l'on remplace u par ku et V par V/k^2 , convient à une famille de surfaces isométriques à un paramètre (k) de l'hypersphère de rayon 1 de E_4 , définie par les formules (2) du n. II qui, compte tenu des équations (20) s'écrivent

$$(21) \quad \begin{cases} x_1 = \left[\left(\frac{k^2 - V}{k} \right) u \cos v + \frac{k^2 u^2 + 1}{ku} \sin v \right] / 2, \\ x_2 = \left[\left(\frac{k^2 - V}{k} \right) u \cos v + \left(\frac{-k^2 u^2 + 1}{ku} \right) \sin v \right] / 2i, \\ x_3 = \left[-\left(\frac{k^2 u^2 + 1}{ku} \right) \cos v + \left(\frac{k^2 - V}{k} \right) u \sin v \right] / 2, \\ x_4 = \left[\left(\frac{k^2 u^2 - 1}{ku} \right) \cos v + \left(\frac{k^2 - V}{k} \right) u \sin v \right] / 2i. \end{cases}$$

Pour chaque choix de la fonction $V(v)$ les équations (21) définissent une famille de surfaces isométriques sur l'hypersphère de rayon 1 de E_4 .

VI. — Plongements réels. Cas de l'espace elliptique.

Les plongements de variétés à deux dimensions dans E_4 obtenus par le procédé exposé dans ce qui précède sont en général imaginaires. Les surfaces de E_4 sur lesquelles les variétés en question viennent s'appliquer isométriquement, définies par les formules générales (2), sont en effet imaginaires, et cela que la transformation ponctuelle $(\xi_1, \xi_2) \rightarrow (\eta_1, \eta_2)$ du plan E_2 relative à ces plongements soit elle-même réelle ou imaginaire. Demandons nous comment on peut obtenir les variétés donnant lieu à des plongements *réels*. Ecrivons à cet effet que l'on a

$$(22) \quad \begin{cases} \xi_1 + \xi_2 - \eta_1 = 2R, \\ \xi_1 - \xi_2 - \eta_1 = 2iS, \\ \xi_2 - \xi_1 - \eta_2 = 2T, \\ \xi_2 + \xi_1 - \eta_2 = 2iU, \end{cases}$$

R, S, T, U étant des quantités réelles, fonctions des variables réelles u, v , dont la somme des carrés représente, notons le, le carré de la distance au point O du point courant M de la surface (2) de E_4 sur laquelle a lieu le plongement de la variété envisagée:

$$(23) \quad \overline{OM}^2 = R^2 + S^2 + T^2 + U^2.$$

Les (22) donnent

$$(22') \quad \begin{cases} \xi_1 = -T + iU, \\ \xi_2 = R - iS, \\ \eta_1 = -(T + R) + i(U - S), \\ \eta_2 = (R - T) - i(U + S); \end{cases}$$

d'où l'on déduit

$$(24) \quad \begin{cases} \eta_1 = \xi_1 - \bar{\xi}_2, \\ \eta_2 = \xi_2 + \bar{\xi}_1, \end{cases}$$

$\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2$ désignant les quantités respectivement conjuguées de ξ_1 et ξ_2 .

Il suffit donc, pour obtenir des ds^2 applicables sur des surfaces de E_4 définies par les équations (2) réelles, de prendre pour ξ_1 et ξ_2 des nombres complexes quelconques dont les parties réelles et imaginaires sont fonctions des deux variables réelles u, v , et pour η_1, η_2 les quantités définies par les équations (24).

Les ds^2 en question affectent ainsi la forme

$$(25) \quad ds^2 = d\xi_1 d\eta_2 - d\xi_2 d\eta_1 = d\xi_1 d\xi_1 + d\xi_2 d\bar{\xi}_2.$$

Ainsi, par exemple, prenons

$$\xi_1 = e^{i\theta}, \quad \xi_2 = e^{i\varphi} \quad (\theta, \varphi = \text{fonctions réelles de } u \text{ et } v);$$

on aura alors

$$\eta_1 = e^{i\theta} - e^{-i\varphi}, \quad \eta_2 = e^{i\varphi} + e^{-i\theta},$$

d'où

$$ds^2 = d\theta^2 + d\varphi^2 \quad (\text{variété de courbure nulle}),$$

et par suite, d'après les formules (2), pour les surfaces représentatives de ce ds^2

dans E_4 les équations

$$(26) \quad x_1 = \cos \varphi, \quad x_2 = -\sin \varphi, \quad x_3 = -\cos \theta, \quad x_4 = \sin \theta.$$

Les formules (26) fournissent une réalisation concrète des variétés à deux dimensions de courbure nulle dans l'espace à dimensions, signalée pour la première fois W. Killing (voir E. CARTAN [12]).

Cherchons, d'une façon générale, les couples de nombres complexes (ξ_1, ξ_2) pour lesquels les ds^2 de la forme (25) sont susceptibles d'être plongés dans E_4 par application des formules (2) où η_1 et η_2 ont les expressions (24).

Remarquons que, d'après les formules (23) et (22'), on a

$$\overline{OM} = \sqrt{|\xi_1|^2 + |\xi_2|^2},$$

$|\xi_1|^2$ et $|\xi_2|^2$ étant les carrés des modules des nombres complexes ξ_1 et ξ_2 .

Si donc on prend ξ_1 et ξ_2 sous les formes

$$\xi_1 = Ae^{i\theta}, \quad \xi_2 = Be^{i\varphi},$$

où θ, φ, A, B sont des fonctions réelles des variables u, v auxquelles est rapporté le ds^2 envisagé, on devra donc avoir, pour que le plongement considéré ait lieu sur une hypersphère de centre O (et de rayon 1 par exemple) de E_4 :

$$A^2 + B^2 = 1,$$

ce qui permet de poser

$$A = \cos^2 \alpha, \quad B = \sin^2 \alpha.$$

Il faudra donc que

$$\xi_1 = \cos \alpha e^{i\theta}, \quad \xi_2 = \sin \alpha e^{i\varphi},$$

et d'après (24)

$$\eta_1 = \cos \alpha e^{i\theta} - \sin \alpha e^{-i\varphi},$$

$$\eta_2 = \sin \alpha e^{i\varphi} + \cos \alpha e^{-i\theta}$$

Le ds^2 (25) correspondant aux expressions précédentes de $(\xi_1, \xi_2), (\eta_1, \eta_2)$ se calcule sans peine. En posant $\xi_1 = u, \xi_2 = v, \alpha =$ fonction différentiable quelconque de u et v , on obtient la forme suivante:

$$(27) \quad ds^2 = d\alpha^2 + \cos^2 \alpha du^2 + \sin^2 \alpha dv^2,$$

soit

$$ds^2 = \left[\left(\frac{\partial \alpha}{\partial u} \right)^2 + \cos^2 \alpha \right] du^2 + 2 \frac{\partial \alpha}{\partial u} \frac{\partial \alpha}{\partial v} du dv + \left[\left(\frac{\partial \alpha}{\partial v} \right)^2 + \sin^2 \alpha \right] dv^2.$$

Toutes les variétés définies par (27) admettent un plongement hypersphérique réel dans E_4 , défini par les équations (2) qui s'écrivent ici:

$$(28) \quad \begin{cases} x_1 = \sin \alpha \cos v, \\ x_2 = -\sin \alpha \sin v, \\ x_3 = -\cos \alpha \cos u, \\ x_4 = \cos \alpha \sin u. \end{cases}$$

Les quatre quantités (x_1, x_2, x_3, x_4) , étant telles que $\sum_{i=1}^4 x_i^2 = 1$, peuvent être regardées comme les *coordonnées de Weierstrass d'un espace elliptique* rapporté au tétraèdre fondamental $[A_1(1, 0, 0, 0), A_2(0, 1, 0, 0), A_3(0, 0, 1, 0), A_4(0, 0, 0, 1)]$. On peut donc interpréter les équations (28) comme définissant les applications réelles des variétés dont le ds^2 a la forme (27) dans l'espace elliptique. Et l'on voit aussitôt qu'à l'exception des conoïdes droits de ce dernier espace (dont les génératrices s'appuient sur les deux axes A_1A_2 et A_3A_4 du tétraèdre fondamental) toutes les surfaces réelles de l'espace elliptique sont données par les équations (28).

REMARQUE. — Si, dans (27), on regarde α non plus comme une fonction de u et de v mais comme une nouvelle variable, on a une variété à trois dimensions, dont les équations (28) définissent une représentation concrète dans l'espace elliptique à trois dimensions, représentation qui affecte la forme d'un système triple orthogonal de cet espace, dont les trois familles de surfaces sont ($u = \text{const.}$, $v = \text{const.}$, $\alpha = \text{const.}$), et qui n'est autre que celui que L. BIANCHI [13] a placé à l'origine d'une extension à l'espace elliptique des surfaces de Péterson de l'espace euclidien ordinaire.

Les équations des surfaces fournissant cette extension, que l'on obtient en prenant pour α dans les équations (28) l'expression $\alpha = \arctg U/V$ (U et $V = \text{fonct. de } u \text{ et } v \text{ respectivement}$), sont

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{U}{\sqrt{U^2 + V^2}} \cos v, & x_2 &= -\frac{U}{\sqrt{U^2 + V^2}} \sin v, \\ x_3 &= -\frac{V}{\sqrt{U^2 + V^2}} \cos u, & x_4 &= \frac{V}{\sqrt{U^2 + V^2}} \sin u. \end{aligned}$$

Pour U (or V) = const., on a les surfaces de révolution de l'espace elliptique, et pour U et V constants la *surface doublement de rotation de Clifford* de ce même espace.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] P. VINCENSINI, *Sur une représentation quadridimensionnelle ponctuelle de l'espace réglé à trois dimensions*, Annali di matematica pura ed applicata, (IV), **70** (1965), pp. 371-398.
- [2] P. VINCENSINI, Rendiconti di Matematica, (4), **3**, Ser. VI (1970), pp. 683-713.
- [3] P. VINCENSINI, *Symposium G. Tzitzeica*, Edit. de l'Ac. de la rép. Soc. Roumaine, Bucarest, 1976.
- [4] C. GUICHARD, *Sur la déformation des surfaces*, Journal de Mathématiques pures et appliquées, 1896.
- [5] J. WEINGARTEN, Acta Mathematica, **20** (1896), pp. 159-200.
- [6] G. DAÖBOUX, Surfaces, t. IV, p. 308 et suiv.
- [7] E. GOURSAT, Annales de Toulouse, t. IV, 1891.
- [8] E. BARONI, Giornale di Matematiche, t. 28, 1890.
- [9] G. GAMBIER, Mémorial des Sciences Mathématiques, Fasc. XXVI.
- [10] P. VINCENSINI, *Recherches sur la déformation des surfaces*, Annales de l'Ecole Normale Sup., (3), **63**, fasc. 3 (1946), pp. 255-288.
- [11] P. VINCENSINI, Annali di Matematica pura ed applicata, (IV), **95** (1973), pp. 321-330.
- [12] E. CARTAN, *Leçon sur la théorie des espaces de Riemann*, 2-ème éd., Paris, Gauthier-Villars.
- [13] L. BIANCHI, *Congruenze di sfere di Ribaucour e superficie di Peterson*, Nicolò Zanichelli, Bologna, 1928.