Sul modulo delle derivazioni integrabili in caratteristica positiva (*) (**).

SILVIA MOLINELLI (Genova)

Summary. – *There are some inequalities concerning the module of derivations of a local ring which are true in characteristic* 0 *and false in general in characteristic* $p \neq 0$ *(as it is well known); in the present paper we prove that such inequalities in char.* p *are true for the module of integrable derivations. Moreover we give some sufficient conditions for an associated prime ideal to be differentiable in char.* p.

Introduzione.

In caratteristica positiva l'A-modulo delle derivazioni Der (A) di un anello A non soddisfa a parecchie buone proprietà valide invece in caratteristica zero. Però il suo sottomodulo I Der (A) costituito dalle derivazioni integrabili ha proprietà migliori analoghe al caso della caratteristica zero; in questo lavoro ne esaminiamo alcune.

Nel n. 1, con la prop. 1.1, dimostriamo che, se $(A, \mathfrak{m})$ è locale e se esistono n derivazioni integrabili $D_1, \ldots, D_n$ di A (con $n = \dim A$) e un sistema di parametri $\{x_1, \ldots, x_n\}$ tali che det $\|D_i x_j\|$ è invertibile, allora per ogni elemento y di $\mathfrak{m}$ esiste un intero $m \geqslant 0$ tale che: $y^{p^m} \in (x_1^{p^m}, \ldots, x_n^{p^m})$. Da questa proposizione segue la diseguaglianza: $\operatorname{rank} J(\mathfrak{m}, I \operatorname{Der}(A))(\mathfrak{m}) \leqslant \dim A$ che è stata provata con tecniche diverse anche da Y. ISHIBASHI e H. MATSUMURA (indipendentemente da noi).

In caratteristica 0 è poi noto che il rango dell'A-modulo $\operatorname{Der}_k(A)$ (dove k è sottocorpo di A sul quale $A/\mathfrak{m}$ è algebrico) non supera la dimensione di A (cfr. [5] quando A è integro e [6] in generale), mentre in caratteristica $p > 0$ questo risultato non è più vero. Però, se sostituiamo $\operatorname{Der}_k(A)$ con $I \operatorname{Der}_k(A)$, è vera ancora la diseguaglianza: $\operatorname{rank} I \operatorname{Der}_k(A) \leqslant \dim A$ (teor. 2.2), quando k sia un corpo dei coefficienti di $\hat{A}$; nel caso in cui A sia integro, la precedente disuguaglianza è stata provata indipendentemente anche da H. Matsumura (con altre tecniche).

Nel n. 3 diamo infine delle condizioni sufficienti per un ideale $P \in \operatorname{Ass}(A)$ affinchè sia Der (A)-differenziabile poichè in caratteristica p, a differenza della caratteristica zero, un primo $P \in \operatorname{Ass}(A)$ non è in generale differenziabile.

Tutti gli anelli che consideriamo sono commutativi con identità e noetheriani.

(*) Entrata in Redazione il 5 ottobre 1977.
(**) Lavoro eseguito nell'ambito della sezione no. 3 del G.N.S.A.G.A. del C.N.R.

Ringrazio il Prof. H. MATSUMURA dal quale ho appreso le proprietà fondamentali delle derivazioni integrabili e con cui ho avuto utili discussioni epistolari sul presente lavoro e il Prof. P. VALABREGA con il quale ho avuto utili colloqui sugli argomenti di questo lavoro.

1. – Sia A un anello e sia Der (A) l'A-modulo delle sue derivazioni. In caratteristica $p > 0$, fra tutte le derivazioni hanno particolare interesse quelle integrabili.

Premettiamo alla loro definizione che si dice differenziazione (di Hasse-Schmidt) $\boldsymbol{D}$ di A una successione $\boldsymbol{D} = \{D_0 = 1, D_1, D_2, \ldots, D_n, \ldots\}$ di omomorfismi additivi $D_i\colon A \to A$ tali che $D_n(ab) = \sum_{i+j=n} D_i(a) D_j(b)$. Allora diciamo che una derivazione D è *integrabile* se esiste una differenziazione $\boldsymbol{D} = \{1, D_1, D_2, \ldots, D_n, \ldots\}$ detta «integrale di D» con $D_1 = D$. Ad ogni differenziazione si può associare un omomorfismo di anelli $E\colon A \to A[\![t]\!]$ così definito: $E(a) = \sum_{n\geq 0} D_n(a) t^n$ associato alla differenziazione $\boldsymbol{D} = \{1, D_1, D_2, \ldots, D_n, \ldots\}$. Il suddetto omomorfismo E si può estendere ad un automorfismo E^* di $A[\![t]\!]$ detto *mappa di Taylor associata a* $\boldsymbol{D}$, ponendo $E^*\left(\sum_{i\geq 0} a_i t^i\right) = \sum_{i\geq 0} E(a_i) t^i$; si ha: $\pi \cdot E^* = \pi$ dove π è la proiezione canonica $A[\![t]\!] \to A$ ed inoltre $E^*(t) = t$.

Si può provare che esiste una corrispondenza biunivoca fra l'insieme $\mathfrak{E}$ degli automorfismi di $A[\![t]\!]$ tali che si abbia $\pi \cdot E^* = \pi$ e per i quali t resta invariato, e l'insieme delle differenziazioni $\boldsymbol{D}$ di A.

L'insieme $\mathfrak{E}$ si può dotare di una struttura, con l'operazione di composizione di automorfismi e con il prodotto λE^* così definito:

$$(\lambda E^*)\left(\sum_{i\geq 0} a_i t^i\right) = \sum_{i\geq 0}\left(\sum_{i\geq 0} D_n(a_i) t^n \lambda^n\right) t^i ;$$

ne risulta sull'insieme delle derivazioni integrabili una struttura di sottomodulo di Der (A), che indichiamo con I Der (A).

Se A contiene $\mathbb{Q}$, ogni derivazione è integrabile ed ha fra i suoi integrali la differenzazione:

$$\boldsymbol{D} = \left\{1, D, \frac{D^2}{2!}, \ldots, \frac{D^n}{n!}, \ldots\right\}.$$

In caratteristica p, invece, I Der (A) è in generale un sottomodulo proprio di Der (A).

PROPOSIZIONE 1.1. – *Sia* $(A, \mathfrak{m})$ *un anello locale di caratteristica* $p > 0$. *Se esistono* $\delta_1, \ldots, \delta_n \in I$ Der (A) *e* $\{x_1, \ldots, x_n\}$ *sistema di parametri tali che* det $\|\delta_i x_j\| \notin \mathfrak{m}$, *allora per ogni* $y \in \mathfrak{m}$ *esiste un intero* $m_0 \geq 0$ *tale che per ogni* $m \geq m_0$ *si ha:*

$$y^{p^m} \in (x_1^{p^m}, \ldots, x_n^{p^m}) .$$

DIM. – Poichè $\det \|\delta_i x_j\|$ è un elemento invertibile di A, esistono $\lambda_{ij} \in A$ $(i, j = 1, \ldots, n)$ soluzioni dei sistemi

$$S_j\colon \sum_{i=1}^{n} \lambda_{ij}\delta_i x_h = \delta_{jh} \quad (h = 1, \ldots, n); \qquad \text{con } \delta_{jh} = 0 \text{ se } j \neq h, \quad 1 \text{ se } j = h.$$

Se poniamo $d_j = \sum_{i=1}^{n} \lambda_{ij}\delta_i$ $(j = 1, \ldots, n)$, si ha $d_j x_h = \delta_{jh}$ con $d_j \in I\,\mathrm{Der}(A)$.

Poichè $\{x_1, \ldots, x_n\}$ è un sistema di parametri, $\forall y \in \mathfrak{m}$, $\exists m_0 \geqslant 0$ tale che

$$y^{p^{m_0}} \in (x_1, \ldots, x_n)\,.$$

Vogliamo provare per induzione su λ, che

(1) $$y^{p^{m_0}} \in (x_1^{p^\lambda}, \ldots, x_n^{p^\lambda}) \quad \text{per ogni } \lambda \text{ tale che } 0 \leqslant \lambda \leqslant m_0\,.$$

Sia allora $0 \leqslant \lambda \leqslant m_0 - 1$; è sufficiente provare che, per ogni μ intero $\geqslant 1$ e $\leqslant np$ vale l'implicazione:

(2) $$y^{p^{m_0}} \in (x_1^{p^\lambda}, \ldots, x_n^{p^\lambda}) \Rightarrow y^{p^{m_0}} \in (x_1^{p^\lambda}, \ldots, x_n^{p^\lambda})^\mu + (x_1^{p^{\lambda+1}}, \ldots, x_n^{p^{\lambda+1}})$$

da cui segue

$$y^{p^{m_0}} \in (x_1^{p^{\lambda+1}}, \ldots, x_n^{p^{\lambda+1}})\,,$$

in quanto si ha:

$$\big((x_1^{p^\lambda}, \ldots, x_n^{p^\lambda})^{np} + (x_1^{p^{\lambda+1}}, \ldots, x_n^{p^{\lambda+1}})\big) = (x_1^{p^{\lambda+1}}, \ldots, x_n^{p^{\lambda+1}})\,.$$

L'implicazione (2) è banalmente vera per $\mu = 1$.

Ragioniamo per induzione su μ; resta allora da provare che, se μ è un intero $\geqslant 1$ e $< np$ si ha:

(3) $$y^{p^{m_0}} \in (x_1^{p^\lambda}, \ldots, x_n^{p^\lambda})^\mu + (x_1^{p^{\lambda+1}}, \ldots, x_n^{p^{\lambda+1}}) \Rightarrow y^{p^{m_0}} \in (x_1^{p^\lambda}, \ldots, x_n^{p^\lambda})^{\mu+1} + (x_1^{p^{\lambda+1}}, \ldots, x_n^{p^{\lambda+1}})\,.$$

Per semplicità poniamo: $\mathfrak{a}_\mu = (x_1^{p^\lambda}, \ldots, x_n^{p^\lambda})^\mu$ e $\mathfrak{b} = (x_1^{p^{\lambda+1}}, \ldots, x_n^{p^{\lambda+1}})$.

Sia $y^{p^{m_0}} \in \mathfrak{a}_\mu + \mathfrak{b}$. Si può scrivere:

(4) $$y^{p^{m_0}} = \alpha + \beta$$

con

(5) $$\alpha = \sum_{\substack{s_1 + \ldots + s_n = \mu \\ s_i < p}} x_1^{p^\lambda s_1} \ldots x_n^{p^\lambda s_n} a_{s_1 \ldots s_n} \in \mathfrak{a}_\mu \qquad (a_{s_1 \ldots s_n} \in A)$$

e

(6) $$\beta = x_1^{p^{\lambda+1}} \cdot a_1 + \ldots + x_n^{p^{\lambda+1}} \cdot a_n \qquad (a_1, \ldots, a_n \in A).$$

1° *Passo.* Fissiamo una n-upla $(S_1, \ldots, S_n)$ scelta così:

$$S_1 = \max\{s_1/a_{s_1 \ldots s_n} \neq 0\}$$
$$S_2 = \max\{s_2/a_{S_1 s_2 \ldots s_n} \neq 0\}$$
$$\vdots$$
$$S_n = \max\{s_n/a_{S_1 \ldots S_{n-1} s_n} \neq 0\}$$

Per la (5) si ha: $S_1 + \ldots + S_n = \mu$ e $S_i < p$ per $i = 1, \ldots, n$.

Consideriamo ora le derivazioni integrabili $d_1, \ldots, d_n$, tali che $d_i x_j = \delta_{ij}$, alle quali sono associate delle differenziazioni:

$$\boldsymbol{d}_1 = \{1, d_1^1, d_1^{(2)}, \ldots, d_1^{(i)}, \ldots\}$$
$$\vdots$$
$$\boldsymbol{d}_n = \{1, d_n, d_1^{(2)}, \ldots, d_n^{(i)}, \ldots\}$$

e i corrispondenti omomorfismi di anelli $E_i\colon A \to A[\![t]\!]$.

Sia $\delta\colon A \to A$ l'omomorfismo additivo così ottenuto:

$$\delta = \underbrace{d_n^{(p^\lambda)} \circ \ldots \circ d_n^{(p^\lambda)}}_{S_n \text{ volte}} \circ \ldots \circ \underbrace{d_1^{(p^\lambda)} \circ \ldots \circ d_1^{(p^\lambda)}}_{S_1 \text{ volte}}$$

Proviamo che:

(7) $$\delta(\alpha) = S_1! \ldots S_n!\, a_{S_1 \ldots S_n} + \gamma_1 \qquad \text{con } \gamma_1 \in \mathfrak{a}_1$$

(8) $$\delta(\beta) \in \mathfrak{b}$$

(9) $$\delta(y^{p^{m_0}}) = 0\,.$$

Applicando E_1 ad α si ottiene:

$$E_1(\alpha) = \sum_{\substack{s_1 + \ldots + s_n = \mu \\ s_i < p}} [E_1(x_1)]^{p^\lambda s_1} \ldots [E_1(x_n)]^{p^\lambda s_n} \cdot [E_1(a_{s_1 \ldots s_n})]$$

da cui

$$d_1^{(p^\lambda)}(\alpha) = \sum_{\substack{s_1 + \ldots + s_n = \mu \\ s_i < p}} s_1 x_1^{p^\lambda (s_1 - 1)} \ldots x_n^{p^\lambda s_n} a_{s_1 \ldots s_n} + \sum_{\substack{s_1 + \ldots + s_n = \mu \\ s_i < p}} x_1^{p^\lambda s_1} \ldots x_n^{p^\lambda s_n} \cdot d_1^{(p^\lambda)}(a_{s_1 \ldots s_n})\,.$$

Applicando E_1 in tutto S_1 volte si ottiene:

$$\underbrace{d_1^{(p^\lambda)} \cdot \ldots \cdot d_1^{(p^\lambda)}}_{S_1 \text{ volte}}(\alpha) = \alpha_{S_1!} + \gamma_{\mu - S_1 + 1}$$

con

$$\alpha_{S_1!} = \sum_{\substack{s_2 + \ldots + s_n = \mu - S_1 \\ s_i < p}} S_1!\, x_2^{p^\lambda s_2} \ldots x_n^{p^\lambda s_n} a_{S_1 \ldots s_n} \in \mathfrak{a}_{\mu - S_1} \qquad \text{e} \qquad \gamma_{\mu - S_1 + 1} \in \mathfrak{a}_{\mu - S_1 + 1}\,.$$

In modo analogo, applicando S_2 volte E_2, si ottiene:

$$\underbrace{d_2^{(p^\lambda)}\circ\ldots\circ d_2^{(p^\lambda)}}_{S_2\text{ volte}}\circ\underbrace{d_1^{(p^\lambda)}\circ\ldots\circ d_1^{(p^\lambda)}}_{S_1\text{ volte}}(\alpha) = \alpha_{S_1!S_2!} + \gamma_{\mu-S_1-S_2+1}$$

con

$$\alpha_{S_1!S_2!} = \sum_{s_3+\ldots+s_n=\mu-S_1-S_2} S_1!S_2!x_3^{p^\lambda s_3}\ldots x_n^{p^\lambda s_n} a_{S_1S_2s_3\ldots s_n} \in \mathfrak{a}_{\mu-S_1-S_2} \quad \text{e} \quad \gamma_{\mu-S_1-S_2+1} \in \mathfrak{a}_{\mu-S_1-S_2+1}$$

e quindi, applicando S_i volte E_i per ogni $i = 1, \ldots, n$, si ottiene:

$$\delta(\alpha) = \alpha_{S_1!\ldots S_n!} + \gamma_1$$

con

$$\alpha_{S_1!\ldots S_n!} = S_1!\ldots S_n!a_{S_1\ldots S_n} \quad \text{e} \quad \gamma_1 \in \mathfrak{a}_1 .$$

Si è così provata la (7).

Per la (8) basta osservare che, per ogni elemento $\beta = x_1^{p^{\lambda+1}}\cdot a_1 + \ldots + x_n^{p^{\lambda+1}}\cdot a_n \in \mathfrak{a}_1$ applicando $E_i (1 \leqslant i \leqslant n)$, si ottiene

$$E_i(\beta) = [x_1^{p^{\lambda+1}} + t^{p^{\lambda+1}}g_1(t)][a_1 + tb_1(t)] + \ldots + [x_n^{p^{\lambda+1}} + t^{p^{\lambda+1}}g_n(t)][a_n + tb_n(t)]$$

con $g_1(t), \ldots, g_n(t), b_1(t), \ldots, b_n(t) \in A[\![t]\!]$ da cui $d_i^{(p^\lambda)}(\beta) \in \mathfrak{b}$ per ogni i, $1 \leqslant i \leqslant n$, quindi si avrà anche $\delta(\beta) \in \mathfrak{b}$.

Proviamo la (9). Si ha:

$$E_1(y^{p^{m_0}}) = [E_1(y)]^{p^{m_0}} = y^{p^{m_0}} + t^{p^{m_0}}l(t) \qquad \text{con } l(t) \in A[\![t]\!]$$

e quindi, poichè $0 \leqslant \lambda < m_0$, si ha:

$$d_1^{(p^\lambda)}(y^{p^{m_0}}) = 0 \quad \text{e} \quad \delta(y^{p^{m_0}}) = 0 .$$

Dalle (4), (7), (8), (9) segue allora:

$$S_1!\ldots S_n!a_{S_1\ldots S_n} \in \mathfrak{a}_1 + \mathfrak{b}$$

da cui: essendo $S_i < p$:

$$a_{S_1\ldots S_n} \in \mathfrak{a}_1 + \mathfrak{b} .$$

Quindi si può scrivere:

$$y^{p^{m_0}} = \alpha' + \beta' + \gamma'_{\mu+1}$$

con

$$\alpha' = \alpha - x_1^{p^\lambda S_1} \ldots x_n^{p^\lambda S_n} a_{S_1 \ldots S_n} \in \mathfrak{a}_\mu, \qquad \beta' \in \mathfrak{b} \qquad \text{e} \qquad \gamma'_{\mu+1} \in \mathfrak{a}'_{\mu+1}.$$

2° *Passo.* Fra tutte le n-uple $(s_1, \ldots, s_n)$ che compaiono in α' (e pertanto diverse dalla $(S_1, \ldots, S_n)$ scelta precedentemente), scegliamo ora $(S'_1, \ldots, S'_n)$ con le stesse modalità di $(S_1, \ldots, S_n)$.

Sia

$$\delta' = \underbrace{d_n^{(p^\lambda)} \circ \ldots \circ d_n^{(p^\lambda)}}_{S'_n \text{ volte}} \circ \ldots \circ \underbrace{d_1^{(p^\lambda)} \circ \ldots \circ d_1^{(p^\lambda)}}_{S'_1 \text{ volte}}.$$

Si può provare, in modo analogo al 1° Passo, che:

$$\delta'(\alpha') = S'_1! \ldots S'_n! \, a_{S'_1! \ldots S'_n!} + \gamma'_1 \qquad \text{con } \gamma'_1 \in \mathfrak{a}_1$$

$$\delta'(\beta') \in \mathfrak{b}$$

$$\delta'(\gamma'_{\mu+1}) = 0$$

da cui $a_{S'_1 \ldots S'_n} \in \mathfrak{a}_1 + \mathfrak{b}$.

3° *Passo.* In modo analogo al 1° Passo e al 2° Passo, si fissano tutte le possibli n-uple $(s_1, \ldots, s_n)$ che compaiono nella sommatoria (5) e si prova che $a_{s_1 \ldots s_n} \in \mathfrak{a}_1 + \mathfrak{b}$ per ogni n-upla $(s_1, \ldots, s_n)$, da cui

$$y^{p^{m_0}} \in \mathfrak{a}_{\mu+1} + \mathfrak{b}.$$

Si è così provata l'implicazione (3) e quindi la (1).

In particolare risulta:

$$y^{p^{m_0}} = x_1^{p^{m_0}} \cdot a_1 + \ldots + x_n^{p^{m_0}} \cdot a_n \qquad (a_1, \ldots, a_n \in A). \tag{10}$$

Per ogni $m > m_0$, elevando poi entrambi i membri delle (10) a p^{m-m_0} si ottiene:

$$y^{p^m} = x_1^{p^m} (a_1)^{p^{m-m_0}} + \ldots + x_n^{p^m} (a_n)^{p^{m-m_0}}$$

da cui la tesi. c.v.d.

ESEMPIO 1.2. – Sia K un corpo di caratteristica $p > 0$ e sia

$$A = K[\![X, Y]\!]/(X^p - Y^{p^2}) = K[\![x, y]\!].$$

Allora $\dim A = 1$, $\{x\}$ è un sistema di parametri e $\{y\}$ è un altro sistema di parametri di A.

Poichè si ha: $y^{p^2} \notin (x^{p^2})$, per la prop. 1.1 la derivazione D di A indotta da $\partial/\partial X$ non è integrabile.

In questo caso il fatto che D non sia integrabile si può vedere anche con calcoli diretti. Infatti, se lo fosse, esisterebbe un omomorfismo di anelli $E\colon A \to A[\![t]\!]$ tale che $E(x) = x + t + t^2 D_2(x) + \ldots$ e $E(y) = y + t^2 D_2(y) + \ldots$. Allora si avrebbe

$$E(x^p - y^{p^2}) = x^p + t^p + t^{2p}(D_2 x)^p + \ldots - (y^{p^2} + t^{2p^2}(D_2 y)^{p^2} + \ldots) = t^p + \ldots \neq 0\,.$$

Si può vedere invece che la derivazione d di A indotta da $\partial/\partial Y$ è integrabile; infatti ad essa si può associare la mappa di Taylor così definita:

$$E^*(x) = x + t^p\,, \qquad E^*(y) = y + t\,, \qquad E^*(c) = c \qquad \text{per ogni } c \in K.$$

Per la prop. 1.1 si deve avere $x^{p^{m_0}} \in (y^{p^{m_0}})$, e in effetti ciò è vero per $m_0 = 1$.

Sia $(A, \mathfrak{m})$ un anello locale e $J(\mathfrak{m}, I\operatorname{Der}(A))(\mathfrak{m})$ la matrice definita in [4], § 2.

COROLLARIO 1.3. – *Sia $(A, \mathfrak{m})$ un anello locale di caratteristica $p > 0$. Allora si ha:* $\operatorname{rank} J(\mathfrak{m}, I\operatorname{Der}(A))(\mathfrak{m}) \leqslant \dim A$.

DIM. – Supponiamo che sia $\operatorname{rank} J(\mathfrak{m}, I\operatorname{Der}(A))(\mathfrak{m}) > \dim A$. Allora per [5] lemma 2.1 A non è regolare. Siano $n = \dim A$ e $\{y_1, \ldots, y_\nu\}$ una base minimale di generatori di $\mathfrak{m}$ con $\nu > n$. Esistono allora $\delta_1, \ldots, \delta_{n+1} \in I\operatorname{Der}(A)$ tali che

$$M = \begin{vmatrix} \delta_1 y_{i_1} & \cdots & \delta_1 y_{i_{n+1}} \\ \vdots & & \vdots \\ \delta_{n+1} y_{i_1} & \cdots & \delta_{n+1} y_{i_{n+1}} \end{vmatrix} \notin \mathfrak{m}$$

Possiamo supporre che M sia del tipo:

$$M = \begin{vmatrix} \delta_1 x_1 & \cdots & \delta_1 x_n & \delta_1 y \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \delta_{n+1} x_1 & \cdots & \delta_{n+1} x_n & \delta_{n+1} y \end{vmatrix} \notin \mathfrak{m}$$

con $\{x_1, \ldots, x_n\}$ sistema di parametri di A tale che $x_j = y_{i_j} \bmod \mathfrak{m}^2$ per $j = 1, \ldots, n$ e $y = y_{i_{n+1}}$.

Siano allora $\lambda_{ij} \in A$ $(i, j = 1, \dots, n+1)$ le soluzioni dei seguenti sistemi:

$$S_j: \begin{cases} \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_{ij} (\delta_i x_h) = \delta_{jh} & (h = 1, \dots, n) \\ \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_{ij} (\delta_i y) = 0 \end{cases}$$

e

$$S_{n+1}: \begin{cases} \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_{in+1} (\delta_i x_h) = 0 & (h = 1, \dots, n) \\ \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_{in+1} (\delta_i y) = 1 \end{cases}$$

Ponendo $d_j = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_{ij} \delta_i$ con $j = 1, \dots, n+1$, si ha allora: $d_j x_h = \delta_{jh}$ per $j, h = 1, \dots, n$ e $d_i y = 0$, mentre:

$$d_{n+1} x_h = 0 \quad \text{e} \quad d_{n+1} y = 1 \,. \tag{11}$$

Inoltre $d_1, \dots, d_{n+1} \in I \operatorname{Der}(A)$.

Dalla prop. 1.1 segue la relazione:

$$y^{p^{m_0}} = x_1^{p^{m_0}} a_1 + \dots + x_1^{p^{m_0}} a_n \qquad \text{con } a_1, \dots, a_n \in A \text{ e } m_0 \geqslant 0. \tag{12}$$

Applicando alla (12) un omomorfismo E_{n+1} associato a d_{n+1} si ottiene:

$$[E_{n+1}(y)]^{p^{m_0}} = [E_{n+1}(x_1)]^{p^{m_0}} [E(a_1)] + \dots + [E_{n+1}(x_n)]^{p^m} [E(a_n)]$$

da cui, tenendo conto anche della (11):

$$1 \in (x_1^{p^{m_0}}, \dots, x_n^{p^{m_0}})$$

il che è assurdo. È assurdo quindi supporre

$$\operatorname{rank} J(\mathfrak{m}, I \operatorname{Der}(A))(\mathfrak{m}) > \dim A \,. \qquad \text{c.v.d.}$$

OSSERVAZIONE. – In caratteristica zero, LIMPAN ha dimostrato il seguente risultato.

Sia A un anello contenente un corpo di caratteristica zero, e sia $\mathfrak{m}$ un ideale di A tale che A sia uno spazio di Hausdorff completo per la topologia $\mathfrak{m}$-adica.

Supponiamo che esistano delle derivazioni $d_1, \dots, d_s$ di A e degli elementi $x_1, \dots, x_s$ di $\mathfrak{m}$ tali che det $\|d_i x_j\|$ sia invertibile. Allora esiste un sottoanello B di A tale che:

1) $x_1, \dots, x_s$ sono analiticamente indipendenti su B.

2) $A = B[\![x_1, \dots, x_s]\!]$.

(Cfr. [2]).

Y. ISHIBASHI e H. MATSUMURA hanno dimostrato che questo risultato vale anche in caratteristica $p > 0$ purchè siano $d_1, \ldots, d_s \in I \operatorname{Der}(A)$ (cfr. [1]). Essi provano così, con tecniche diverse dalle nostre e indipendentemente da noi, il cor. 1.3.

2. – Sia $(A, \mathfrak{m})$ un anello locale di caratteristica $p > 0$. Se K è un corpo contenuto in A, diciamo che una K-derivazione D di A è *K-integrabile* se esiste una differenziazione $\boldsymbol{D} = \{1, D, D_2, \ldots, D_i, \ldots\}$ con $D_i\colon A \to A$ omomorfismi additivi e tali che $D_i c = 0$, per ogni $c \in K$.

Sia $\hat{A}$ il completamento $\mathfrak{m}$-adico di A e sia K un corpo dei coefficienti di $\hat{A}$ (cfr. [3], pag. 197).

Allora ogni derivazione D di A si può estendere ad una derivazione $\hat{D}$ di $\hat{A}$ che può essere o non essere K-integrabile. Consideriamo allora il seguente sottomodulo di $\operatorname{Der}_K(A)$:

$$I \operatorname{Der}_K(A) = \{D \in \operatorname{Der}_K(A) / \hat{D} \text{ è } K\text{-integrabile}\}\,.$$

In questo numero diamo una limitazione superiore al rango di $I \operatorname{Der}_K(A)$, che vale anche quando A non è integro. A tal fine dobbiamo premettere una definizione di rango di un A-modulo M finitamente generato nel caso in cui A non è necessariamente integro (cfr. [6]).

DEFINIZIONE 2.1. – *Diciamo rango di un A-modulo M finitamente generato il massimo numero di elementi linearmente indipendenti di M.*

Se M è un sottomodulo di un A-modulo libero A^ν e se $a_1 = (a_{11}, \ldots, a_{1\nu}), \ldots a_s = (a_{s1}, \ldots, a_{s\nu})$ sono elementi di M, si può considerare la matrice $B = \|a_{ij}\|$ associata ad $a_1, \ldots, a_s$. Sia allora I_s l'ideale generato da tutti i minori di ordine s di B. Per il corollario 2.5 di [6] (oppure per il Lemma a pag. 889 di [2]), $a_1, \ldots, a_s$ sono linearmente indipendenti su A se e soltanto se $\operatorname{Ann}(I_s) = 0$.

TEOREMA 2.2. – *Siano $(A, \mathfrak{m})$ un anello locale di caratteristica $p > 0$, $\hat{A}$ il suo completamento e k un corpo dei coefficienti di $\hat{A}$. Allora si ha:*

$$\operatorname{rank} I \operatorname{Der}_k(A) \leqslant \dim A/P$$

per ogni $P \in \operatorname{Ass}(A)$.

DIM. – Sia $P \in \operatorname{Ass}(A)$.

1° *Passo.* Proviamo che si ha: $\operatorname{rank} I \operatorname{Der}_k(A) \leqslant \operatorname{rank} I \operatorname{Der}_k(A/P)$. Sia $\{y_1, \ldots, y_\nu\}$ una base minimale di generatori di $\mathfrak{m}$.

Poichè, per ogni $D \in I\ \mathrm{Der}_k(A)$, D induce unaderivazione $\bar{D} \in I\ \mathrm{Der}_k(A/P)$ (cfr. [4], cor. 10′, pag. 28), esiste il seguente diagramma commutativo ([6], prop. 1.3):

$$\begin{array}{ccc} I\ \mathrm{Der}_k(A) & \overset{\psi}{\hookrightarrow} & A^{\nu} \\ \downarrow{\scriptstyle p} & & \downarrow{\scriptstyle q} \\ I\ \mathrm{Der}_k(A/P) & \overset{\bar{\psi}}{\hookrightarrow} & (A/P)^{\nu} \end{array} \tag{13}$$

con $\psi(D) = (Dy_1, \ldots, Dy_\nu)$ e $\bar{\psi}(\bar{D}) = (\bar{D}\bar{y}_1, \ldots, \bar{D}\bar{y}_\nu)$. Sia rank $I\ \mathrm{Der}_k(A/P) = s$.

Prese comunque $D_1, \ldots, D_{s+1} \in I\ \mathrm{Der}_k(A)$, allora $\bar{\psi}(\bar{D}_1), \ldots, \bar{\psi}(\bar{D}_{s+1})$ saranno linearmente dipendenti su A/P e quindi, se B è la matrice $\|D_i y_j\|$ e $\bar{B}$ è la matrice $\|\bar{D}_i \bar{y}_j\|$, si avrà $\bar{M}_{s+1} = \bar{0}$ per ogni minore $\bar{M}_{s+1}$ di ordine $s+1$ della matrice $\bar{B}$. Per la commutatività del diagramma (13) si ha allora $M_{s+1} \in P$ per ogni minore M_{s+1} di ordine $s+1$ di B e quindi $D_1, \ldots, D_{s+1}$ sono linearmente dipendenti su A ([2], pag. 889).

2° *Passo.* Per provare la diseguaglianza: rank $I\ \mathrm{Der}_k(A/P) \leqslant \dim(A/P)$ ci si riconduce a dimostrare il seguente

COROLLARIO 2.3. – *Siano $(A, \mathfrak{m})$ un dominio locale di caratteristica $p > 0$, $\hat{A}$ il suo completamento e k un corpo dei coefficienti di $\hat{A}$. Allora si ha:*

$$\operatorname{rank} I\ \mathrm{Der}_k(A) \leqslant \dim A\ .$$

DIM. – Sia $\{y_1, \ldots, y_\nu\}$ una base minimale di generatori di $\mathfrak{m}$ e sia $\psi: I\ \mathrm{Der}_k(A) \hookrightarrow A^\nu$ l'applicazione così definita: $\psi(D) = (Dy_1, \ldots, Dy_\nu)$. Se rank $I\ \mathrm{Der}_k(A) \geqslant \dim A = n$, esistono $D_1, \ldots, D_n \in I\ \mathrm{Der}_k(A)$ tali che $\psi(D_1), \ldots, \psi(D_n)$ sono linearmente indipendenti su A e quindi tali che:

$$\det \|D_h y_{i_j}\|_{h,j=1,\ldots,n} \in \mathfrak{m}^\lambda - \mathfrak{m}^{\lambda+1}$$

per un intero $\lambda \geqslant 0$. Sia allora $\{x_1, \ldots, x_n\}$ un sistema di parametri tale chè $x_j = y_{ij}$ mod $\mathfrak{m}^{\lambda+2}$.

Si avrà:

$$\det \|D_h x_j\| = \det \|D_h y_{i_j}\| + N \neq 0 \qquad \text{con } N \in \mathfrak{m}^{1+\lambda}.$$

Allora, se $\varphi: I\ \mathrm{Der}_k(A) \to A^n$ è l'omomorfismo di A-moduli così definito: $\varphi(D) = (Dx_1, \ldots, Dx_n)$ proviamo che φ è iniettivo.

Se φ non fosse iniettivo esisterebbe una $D \in I\ \mathrm{Der}_k(A)$ tale che $Dx_1 = \ldots = Dx_n = 0$ e $Dy_i \neq 0$ per un i, $1 \leqslant i \leqslant \nu$. Poichè $\hat{A}$ è intero sul sottoanello $B = k[\![x_1, \ldots, x_n]\!]$ (cfr. [3], pag. 212, cor. 2), esiste un polinomio $f(T)$ a coefficienti in B tale che $f(y_i) = 0$.

Sia $f(T)$ un polinomio di grado minimo r tale che $f(y_i) = 0$.

Proviamo allora che si avrebbe

$$r \in \bigcap_{\lambda \in \mathbb{N}} p^{\lambda}\mathbb{Z} \tag{14}$$

da cui $r = 0$; il che è assurdo.

Per dimostrare la (14), proviamo per induzione su λ le seguenti proprietà P_λ, per ogni $\lambda \geqslant 0$: «esiste un polinomio $g_\lambda(T)$ di grado r tale che $g_\lambda(y_i) = 0$ e $g_\lambda(T) \in k[\![x_1^{p^\lambda}, \ldots, x_n^{p^\lambda}]\!]\,[T^{p^\lambda}]$».

Poichè vale P_0, proviamo l'implicazione:

$$P_\lambda \Rightarrow P_{\lambda+1} \qquad \text{per } \lambda \geqslant 0. \tag{15}$$

Sia $g_\lambda(T) = b_0 + b_{p^\lambda} T^{p^\lambda} + \ldots + b_{p^\lambda q} T^{p^\lambda q}$ con $p^\lambda q = r$, $b_j \in k[\![x_1^{p^\lambda}, \ldots, x_n^{p^\lambda}]\!]$.

Sia E un omomorfismo associato alla derivazione $\hat{D}$ (estenzione di D ad $\hat{A}$) e sia $\boldsymbol{D} = \{1, \hat{D}, D^{(2)}, \ldots, D^{(i)} \ldots\}$ la differenziazione definita da E.

Con semplici calcoli si può vedere, applicando E che $D^{(i)}(b_j) = 0$ per $i = 1, \ldots, p^\lambda$ e $j = 0, p^\lambda, \ldots, p^\lambda q$, e $D^{(p^\lambda)}(y_i^{p^\lambda s}) = s y_i^{p^\lambda(s-1)}(Dy_i)^{p^\lambda}$ per $s = 1, \ldots, q$.

Quindi si ha:

$$D^{(p^\lambda)} g_\lambda(y_i) = b_{p^\lambda}(Dy_i)^{p^\lambda} + \ldots + q b_{p^\lambda q} y_i^{p^\lambda(q-1)}(Dy_i)^{p^\lambda} = 0$$

da cui: $b_{p^\lambda} + \ldots + q b_{p^\lambda q} y_i^{p^\lambda(q-1)} = 0$.

Poichè $p^\lambda(q-1) < r$, deve essere: $s b_{p^\lambda s} = 0$ per $s = 1, \ldots, q$, e quindi $g_\lambda(T) \in k[\![x_1^{p^\lambda}, \ldots, x_n^{p^\lambda}]\!]\,[T^{p^{\lambda+1}}]$.

Consideriamo ora n omomorfismi $E_1, \ldots, E_n$ e le associate differenziazioni:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{D}_1 &= \{1, \hat{D}_1, \ldots, D_1^{(i)}, \ldots\} \\ \boldsymbol{D}_n &= \{1, \hat{D}_n, \ldots, D_n^{(i)}, \ldots\} \text{ associate a } \hat{D}_1, \ldots, \hat{D}_n\,. \end{aligned}$$

Applicando E_1 si vede che:

$$D_1^{(p^\lambda)}(y_i^{p^{\lambda+1}s}) = 0 \qquad \text{per ogni } s \geqslant 1$$

mentre per

$$b_j = \sum_{s_1+\ldots+s_n=0}^{\infty} x_1^{p^\lambda s_1} \ldots x_n^{p^\lambda s_n} c^j_{s_1\ldots s_n} \in k[\![x_1^{p^\lambda}, \ldots, x_n^{p^\lambda}]\!] \qquad (c^j_{s_1\ldots s_n} \in k)$$

con $j = 0, \ldots, r$ si ha:

$$D_1^{(p^\lambda)}(b_j) = \beta_1^j (D_1 x_1)^{p^\lambda} + \ldots + \beta_n^j (D_1 x_n)^{p^\lambda}$$

con

$$\beta_1^j = \sum_{s_1+\ldots+s_n=0}^{\infty} s_1 x_1^{p^\lambda(s_1-1)} \ldots x_n^{p^\lambda s_n} c^j_{s_1\ldots s_n}$$
$$\vdots$$
$$\beta_n^j = \sum_{s_1+\ldots+s_n=0}^{\infty} s_n x_1^{p^\lambda s_1} \ldots x_n^{p^\lambda(s_n-1)} c^j_{s_1\ldots s_n}.$$

Allora si ottiene:

$$D_1^{(p^\lambda)}[g_\lambda(y_i)] = [\beta_1^0(D_1x_1)^{p^\lambda} + \ldots + \beta_n^0(D_1x_n)^{p^\lambda}] + \ldots$$
$$\ldots + y_i^r[\beta_1^r(D_1x_1)^{p^\lambda} + \ldots + \beta_n^r(D_1x_n)^{p^\lambda}] = 0$$

da cui:

$$(D_1x_1)^{p^\lambda}[\beta_1^0 + \ldots + y_i^r\beta_1^r] + \ldots + (D_1x_p)^{p^\lambda}[\beta_n^0 + \ldots + y_i^r\beta_n^r] = 0.$$

Applicando a $g_\lambda(y_i)$ anche $E_2, \ldots, E_n$, si ha così il sistema

$$\begin{cases} (D_1x_1)^{p^\lambda}[\beta_1^0 + \ldots + y_i^r\beta_1^r] + \ldots + (D_1x_n)^{p^\lambda}[\beta_n^0 + \ldots + y_i^r\beta_n^r] = 0 \\ \vdots \\ (D_nx_1)^{p^\lambda}[\beta_1^0 + \ldots + y_i^r\beta_1^r] + \ldots + (D_nx_n)^{p^\lambda}[\beta_n^0 + \ldots + y_i^r\beta_n^r] = 0 \end{cases}$$

con $\det \|D_ix_1\| \neq 0$, da cui:

$$\beta_1^0 + \ldots + y_i^r\beta_1^r = 0, \ldots, \beta_n^0 + \ldots + y_i^r\beta_n^r = 0. \tag{16}$$

Ripetendo al massimo $n(p-1)$ volte il ragionamento, sostituendo ogni volta a $g_\lambda(y)$ un nuovo polinomio ottenuto dalle (16), si può ottenere un'equazione del tipo:

$$b_0' + \ldots + y_i^r b_r' = 0 \quad \text{con } b_0', \ldots, b_r' \in K[\![x_1^{p^{\lambda+1}}, \ldots, x_n^{p^{\lambda+1}}]\!].$$

Si è così provata l'implicazione (15) e quindi la (14).

Ne segue che φ è iniettiva e quindi se rank I $\mathrm{Der}_k(A) \geqslant n$, si ha necessariamente rank I $\mathrm{Der}_k(A) = n$. c.v.d.

COROLLARIO 2.4. – *Siano* $(A, \mathfrak{m})$ *un anello locale di caratteristica* $p > 0$, $\hat{A}$ *il suo completamento e* k *un corpo dei coefficienti di* $\hat{A}$, *Allora si ha*:

$$\operatorname{rank} I\,\mathrm{Der}_k(A) \leqslant \dim \hat{A}/\hat{P}$$

per ogni $\hat{P} \in \mathrm{Ass}(\hat{A})$.

Dim. – La tesi segue dal teor. 2.2, osservando che

$$\operatorname{rank} I \operatorname{Der}_k(A) \leqslant \operatorname{rank} I \operatorname{Der}_k(\hat{A}) \leqslant \operatorname{rank} I \operatorname{Der}_k(\hat{A}/\hat{P}) \leqslant \dim \hat{A}/\hat{P},$$

per ogni $\hat{P} \in \operatorname{Ass}(\hat{A})$.

Osservazione. – H. Matsumura (lettera privata) ha provato il risultato del cor. 2.4, quando A è un dominio, ma la nostra dimostrazione, oltre a valere per A qualsiasi, è indipendente dalla sua.

3. – Sia P un primo associato all'ideale (O) di un anello A e sia D una derivazione di A. È noto che, se D è integrabile, P è D-differenziabile, cioè si ha $DP \subset P$ e quindi D induce una derivazione $\bar{D}$ di A/P; ma in generale (in caratteristica p) questo risultato è falso se D non è integrabile, anche se D soddisfa ad ipotesi molto forti.

Ad esempio se $(A, \mathfrak{m})$ è un dominio locale, $\hat{A}$ è il suo completamento, D è una derivazione di A e $\hat{D}$ è l'estensione di D ad una derivazione di $\hat{A}$, non è detto che ogni primo associato all'ideale (O) di $\hat{A}$ sia $\hat{D}$-differenziabile.

L'anello $A = R[C]$ con R e C come nell'es. 3.2, pag. 206 di [7] ne costituisce un esempio.

Infatti l'unico primo $\hat{P} \in \operatorname{Ass}(\hat{A})$ è $\hat{P} = (x - c)$ e, se D è derivazione di A indotta dalla derivazione $\partial/\partial X$ di $R[X]$, si ha $\hat{D}(x-c) = 1 \notin \hat{P}$, quindi $\hat{P}$ non è $\hat{D}$-differenziabile.

Abbiamo trovato più in generale delle condizioni sufficienti per l'ideale P affinchè P sia differenziabile, cioè si abbia $DP \subset P$ per ogni derivazione $D \in \operatorname{Der}(A)$.

Sia A un anello di caratteristica $p > 0$, sia $P = (x_1, \ldots, x_n)$ un primo di $\operatorname{Ass}(A)$ e sia

$$(O) = Q \cap Q_1' \cap \ldots \cap Q_r' \cap Q_1'' \cap \ldots \cap Q_s'' \tag{17}$$

una decomposizione primaria dell'ideale (O) di A, con $\sqrt{Q} = P$, $\sqrt{Q_i'} \not\subset P$, $\sqrt{Q_j''} \subsetneq P$ per $i = 1, \ldots, r$, $j = 1, \ldots, s$.

Per ogni x_i, $i = 1, \ldots, n$, chiamiamo $\lambda(x_i)$ il minimo intero > 0 tale che $x_i^{\lambda(x_i)} \in Q$.

Proposizione 3.1. – *Siano A e P come sopra.*

Se esiste una decomposizione primaria di (O) *del tipo* (17) *soddisfacente le seguenti condizioni*:

1) $\lambda(x_i) \notin p\mathbb{Z}$ per $i = 1, \ldots, n$,

2) $[(Q_1'' \cap \ldots \cap Q_s'') : (x_i^{\lambda(x_i)})] \not\subset [Q : (x_i^{\lambda(x_i)-1})]$ per $i = 1, \ldots, n$.

allora l'ideale P è differenziabile.

DIM. – Sia D una derivazione di A. Basta provare che $Dx_h \in P$ per ogni $h = 1, \ldots, n$. Sia h tale che $1 \leqslant h \leqslant n$; scegliamo degli elementi $y_i \in Q_i'$ tali che $y_i \notin P$ $(i = 1, \ldots, r)$ e un elemento

$$z \in [(Q_1'' \ldots Q_s''): (x_h^{\lambda(x_h)})] \qquad \text{tale che } z \notin [Q: (x_h^{\lambda(x_h)-1})] .$$

Poniamo $u = x_h^{\lambda(x_h)} \cdot z \cdot y_1 \ldots y_r$ con

$$u \in Q \cap Q_1' \cap \ldots \cap Q_r' \cap Q_1'' \cap \ldots \cap Q_s'' = (O) .$$

Si avrà allora

$$Du = \lambda(x_h) x_h^{\lambda(x_h)-1} \cdot z \cdot y_{11} \ldots y_r Dx_h + x_h^{\lambda(x_h)} D(z \cdot y_1 \ldots y_r) = 0$$

da cui:

$$\lambda(x_h) x_h^{\lambda(x_h)-1} \cdot z \cdot y_1 \ldots y_r \cdot Dx_h \in Q . \tag{18}$$

Poichè $\lambda(x_h) \notin p\mathbb{Z}$, $x_h^{\lambda(x_h)-1} \cdot z \notin Q$ e $y_1 \ldots, y_r \notin P$, dalla (18) segue $Dx_h \in P$.

PROPOSIZIONE 3.2. – *Siano A e P come sopra. Se esiste una decomposizione primaria di (O), del tipo (17), soddisfacente le seguenti condizioni:*

1) $\lambda(x_i) \notin p\mathbb{Z}$ *per* $i = 1, \ldots, n$,

2) P *è minimale,*

allora l'ideale P è differenziabile.

DIM. – La dimostrazione è uguale a quella della prop. 3.1 in cui si ponga $z = 1$.

BIBLIOGRAFIA

[1] Y. ISHIBASHI, *A note on a Lemma of Zariski*, submitted to J. London Math. Soc.
[2] J. LIPMAN, *Free derivation modules on algebraic varieties* ,Amer. J. Math., **87** (1965), pp. 874-898.
[3] H. MATSUMURA, *Commutative Algebra*, Benjamin Inc., New York, 1970.
[4] H. MATSUMURA, *Criteri Jacobiani*. Seminario scritto da G. Beccari e C. Massaza. Quaderni dei Gruppi di Ricerca Matematica del C.N.R., Ist. Mat. Politecnico, Torino (1975).
[5] H. MATSUMURA, *Formal power series over polynomial rings*, I. Number theory, Alg. Geom. and Comm. Alg. Kinokuniya, Tokyo (1974).
[6] S. MOLINELLI, *Sul rango del modulo delle derivazioni di un anello non integro*, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, Serie II, **25** (1976), pp. 31-42.
[7] M. NAGATA, *Local rings*, Interscience Publishers, New York (1962).