Sur la géométrie différentielle des surfaces réglées.

OTHON PYLARINOS (à Athènes, Grèce) (*)

Resumé. - *Est donné dans l'introduction.*

La courbure normale et la torsion géodésique de la ligne de striction d'une surface réglée gauche de l'espace euclidien à trois dimensions sont des invariants métriques de la surface. Par ailleurs ces deux grandeurs sont des fonctions de la variable aux valeurs de laquelle correspondent les points de la ligne de striction; aussi sont-elles liées en général par une relation et les surfaces réglées gauches sur lesquelles ces grandeurs sont liées par des relations de la même forme ont des propriétés communes dont la recherche peut conduire à des résultats concernant la géométrie différentielle métrique des surfaces réglées, qui ne sont pas dépourvus d'intérêt.

Dans le présent article, consacré à la recherche indiquée, j'établis certains théorèmes concernant les surfaces réglées gauches, sur chacune desquelles la courbure normale et la torsion géodésique de sa ligne de striction vérifient une relation algébrique du premier ou du second degré à coefficients constants. En outre, après avoir démontré que, lorsque la courbure et la torsion géodésiques d'une trajectoire orthogonale des génératrices d'une surface réglée gauche vérifient une relation algébrique à coefficients constants, la courbure et la torsion géodésiques de toute autre trajectoire orthogonale des génératrices de la surface sont nécessairement liées par une relation algébrique à coefficients constants, je parviens à l'aide des théorèmes établis, à la détermination de certaines classes de surfaces réglées, sur lesquelles la courbure et la torsion géodésiques de chaque trajectoire orthogonale de leurs génératrices vérifient une relation algébrique du second degré au plus à coefficients qui sont constants sur elle, mais qui varient en général de l'une à l'autre de ces courbes. Je montre ainsi que la courbure et la torsion géodésiques de chaque trajectoire orthogonale des génératrices de la surface engendrée par les normales principales d'une courbe de BERTRAND ou d'une courbe de MANNHEIM ou d'une hélice cylindrique, ainsi que d'une surface

(*) Entrata in Redazione il 14 giugno 1970.

gauche à paramètre de distribution constant ou de la surface engendrée par les binormales d'une courbe gauche vérifient une relation algébrique du second degré au plus à coefficients constants sur elle; ces coefficients, si l'on excepte le cas des surfaces à paramètre de distribution constant, varient de l'une à l'autre de ces courbes.

I.

1. Considérons sur une surface réglée gauche réelle de l'espace euclidien à trois dimensions une portion R dont le paramètre de distribution est $\neq 0$ sur toutes les génératrices.

Soit

$$(1.1) \quad \bar{\rho} = \bar{\rho}(u)$$

l'équation vectorielle par rapport au système de coordonnées choisi dans l'espace de la ligne de striction C de R , lieu des points centraux des génératrices de cette surface, le paramètre u étant l'arc de C .

Si $\bar{e}(u)$, $\bar{n}(u)$, $\bar{z}(u) = \bar{e} \wedge \bar{n}$ sont les vecteurs unitaires qui déterminent les sens positifs sur la génératrice e de R issue du point courant $K(u)$ de C , de la normale centrale n de R en K et de la tangente centrale z de R en ce même point, c.à.d. de la tangente à R en K perpendiculaire à la génératrice e , on a — comme on sait (4, p. 145) — pour les dérivées des $\bar{e}$, $\bar{n}$, $\bar{z}$ par rapport à la variable u les formules

$$(1.2) \quad \dot{\bar{e}} = \kappa \bar{n}, \quad \dot{\bar{n}} = -\kappa \bar{e} + \sigma \bar{z}, \quad \dot{\bar{z}} = -\sigma \bar{n} \quad (1),$$

où

$$(1.3) \quad \kappa = \varepsilon |\dot{\bar{e}}|, \quad \sigma = \frac{(\bar{e} \wedge \dot{\bar{e}}) \times \ddot{\bar{e}}}{|\dot{\bar{e}}|^2}$$

et $\varepsilon = +1$ ou -1 suivant que le produit mixte $(\dot{\bar{\rho}} \wedge \bar{e}) \times \dot{\bar{e}}$, qui, d'après l'hypothèse faite pour le paramètre de distribution de R , est $\neq 0$ pour toutes les valeurs de u correspondant aux points de C , est $>$ ou < 0 .

Les droites e , n , z issues du point $K(u)$ de la courbe C , sur les directions desquelles les sens positifs se déterminent par les vecteurs unitaires $\bar{e}$, $\bar{n}$, $\bar{z}$

(1) Les points désignent les dérivées par rapport à la variable u . On suppose que les opérations de dérivation qui seront faites, dans ce qui suit, sont légitimes dans les intervalles considérés.

respectivement, sont les axes d'un trièdre trirectangle orienté $[K; \bar{e}, \bar{n}, \bar{z}]$; ce trièdre est appelé, dans ce qui suit, *trièdre central associé à la surface*.

Par ailleurs la dérivée $\dot{\bar{\rho}}$ au point $K(u)$ de la courbe C est un vecteur unitaire, puisque u est l'arc de C . Ce vecteur, étant parallèle à la tangente à C en K , est parallèle au plan tangent $[K; \bar{e}, \bar{z}]$ à R en ce point. On peut donc le mettre sous la forme

$$(1.4) \quad \dot{\bar{\rho}} \equiv \bar{t} = \bar{e} \cos \varphi + \bar{z} \sin \varphi,$$

où φ est l'angle orienté $(\bar{e}, \bar{t})$ sur le plan $[K; \bar{e}, \bar{z}]$.

Les trois grandeurs κ , σ , φ sont des fonctions de l'arc u de la ligne de striction C de R définies, grâce à l'hypothèse faite pour le paramètre de distribution de R , dans l'intervalle de valeurs de u correspondant aux points de la courbe C ou — ce qui revient au même — aux génératrices de R . Ces trois fonctions $\kappa(u)$, $\sigma(u)$, $\varphi(u)$, dont les valeurs sur chaque génératrice de R sont appelées par E. KRUPPA (3, p. 63), *courbure, torsion et striction de la surface* sur cette génératrice sont avec l'arc u de C des invariants métriques de R et ce sont précisément les invariants métriques de la surface, qui ont été choisis comme fondamentaux dans la géométrie différentielle métrique des surfaces réglées fondée par G. SANNIA [5] et E. KRUPPA [4].

Deux autres invariants métriques de la surface sont la courbure normale κ_n et la torsion géodésique σ_g de sa ligne de striction. Ces deux grandeurs sont des fonctions des trois invariants fondamentaux de la surface.

En effet, d'après des formules connues (3, p. 73), on a

$$(1.5) \quad \kappa_n = \kappa \cos \varphi - \sigma \sin \varphi, \quad \sigma_g = \kappa \sin \varphi + \sigma \cos \varphi.$$

REMARQUE. — La surface R coupe sous un angle droit — comme on le voit aussitôt — la surface R_n engendrée par les normales centrales de R tout le long de sa ligne de striction C qui évidemment est une trajectoire orthogonale des génératrices de R_n .

Il en résulte que la courbure normale κ_n et la torsion géodésique σ_g de la courbe C considérée comme une courbe tracée sur la surface R , sont en chaque point de C la première égale en valeur absolue à la courbure géodésique κ'_g et la seconde égale à la torsion géodésique σ'_g de C considérée comme une courbe tracée sur la surface R_n .

On aura donc en chaque point de C

$$\kappa'_g = \varepsilon' \kappa_n, \quad \sigma'_g = \sigma_g,$$

où $\varepsilon' = +1$ ou -1 et on peut choisir le sens positif sur la direction de la normale à R_n de manière que l'on ait

$$(1.6) \quad \kappa'_g = \kappa_n, \quad \sigma'_g = \sigma_g.$$

2. L'équation (1.1) de la courbe C , grâce à (1.4), peut s'écrire

$$(2.1) \quad \bar{\rho} = \int (\bar{e} \cos \varphi + \bar{z} \sin \varphi) du$$

et l'équation (vectorielle) de la surface R , si l'on choisit sur elle sa ligne de striction C comme *courbe directrice*, peut se mettre sous la forme

$$(2.2) \quad \bar{r} = \int (\bar{e} \cos \varphi + \bar{z} \sin \varphi) du + \bar{v}(u).$$

Cela posé, soit R' une surface réglée gauche coupant R sous un angle droit tout le long d'une trajectoire orthogonale C' des génératrices de R .

Si

$$\bar{\rho}' = \bar{\rho}'(u) = \bar{\rho}(u) + v'(u)\bar{e}(u)$$

est l'équation de la courbe C' , la normale à R au point courant $K'(u)$ de cette courbe est parallèle au vecteur

$$(2.3) \quad \bar{n}'(u) = \frac{\dot{\bar{\rho}}}{|\dot{\bar{\rho}}|} \wedge \bar{e} \equiv \bar{t}' \wedge \bar{e}$$

qui est un vecteur unitaire, puisque les vecteurs unitaires $\frac{\dot{\bar{\rho}}}{|\dot{\bar{\rho}}|} = \bar{t}'$, $\bar{e}$, d'après l'hypothèse faite pour la courbe C' , sont orthogonaux.

La génératrice e' de la surface R' issue du point $K'(u)$ de C' est située sur le plan $[K'; \bar{t}', \bar{n}']$ perpendiculaire en K' à la génératrice de R , issue de ce point et, par conséquent, elle est nécessairement parallèle à un vecteur unitaire de la forme

$$(2.4) \quad \bar{e}' = \bar{t}' \cos \theta + \bar{n}' \sin \theta.$$

Pour que la courbe C' soit en plus la ligne de striction de la surface R' , il faut et il suffit, comme on sait, que l'on ait en chaque point de C'

$$(2.5) \quad \bar{t}' \times \dot{\bar{e}}' = 0.$$

Mais de (2.4) on a

$$\dot{\bar{e}}' = \dot{\bar{t}}' \cos \theta + \dot{\bar{n}}' \sin \theta + \dot{\theta}(-\bar{t}' \sin \theta + \bar{n}' \cos \theta)$$

et la condition (2.5), si l'on tient compte du fait que l'on a $\bar{t}^2 \equiv 1$, $\bar{t}' \times \dot{\bar{t}} \equiv 0$ et, grâce aux hypothèses faites, $\bar{t}' \times \bar{n}' = 0$, $\sin \theta \neq 0$, devient

$$(2.6) \quad \dot{\theta} - \bar{t}' \times \dot{\bar{n}} = 0.$$

Le vecteur $\bar{e}'(u)$ (2.4) pour chaque fonction $\theta(u)$ satisfaisant à l'équation différentielle (2.6) détermine ∞^1 droites, issues des points de la courbe C' , qui engendrent une surface réglée gauche R' coupant R le long de C' sous un angle droit et admettant cette courbe comme ligne de striction.

Mais la courbe C' est une trajectoire orthogonale des génératrices de R choisie au hasard. Par ailleurs les considérations précédentes n'exigent pas que la surface réglée R soit gauche.

On peut donc énoncer le

THÉORÈME I. — *Chaque trajectoire orthogonale des génératrices d'une surface réglée est la ligne de striction de ∞^1 surfaces réglées gauches qui admettent les génératrices de la surface comme normales centrales.*

Par ailleurs l'équation vectorielle d'une surface réglée gauche R_1 représentée sur la surface gauche R définie par l'équation (2.2) de manière que les points homologues des deux surfaces admettent les mêmes coordonnées curvilignes u, v , est nécessairement — comme on sait (5; p. 45) — de la forme

$$(2.7) \quad \bar{r}_1 = \int (\bar{e} \cos \varphi + \bar{z} \sin \varphi) du + \beta \bar{n} + v_1(v)(\bar{e} \cos \omega + \bar{z} \sin \omega),$$

où

$$(2.8) \quad \beta = \text{Cte}, \quad \omega = \text{Cte} \quad (-\pi < \omega \leq \pi),$$

la fonction $v_1(v)$ étant arbitraire, lorsque, dans cette représentation, les génératrices des deux surfaces ainsi que leurs lignes de striction se correspondent, les deux surfaces ayant en outre des normales coïncidentes en chaque couple de points homologues de leurs lignes de striction.

L'équation (2.7), pour chaque système de valeurs de paramètres β, ω qui y figurent, détermine une surface réglée gauche. Cette surface, lorsque β est $\neq 0$, si $\omega = 0$ ou π , ne coïncide pas avec la surface R et les deux surfaces, étant représentées l'une sur l'autre de la manière indiquée, admettent des normales centrales coïncidentes aux points homologues de leurs lignes de striction.

Il en résulte, eu égard au fait que R est une surface réglée gauche choisie au hasard, qu'à chaque surface réglée gauche on peut faire associer ∞^2 surfaces réglées gauches dont les normales centrales coïncident avec les normales centrales de cette surface.

L'ensemble de surfaces représentées sur une surface réglée gauche de la manière indiquée est appelé, dans ce qui suit, *ensemble (N) associé à cette surface*.

L'ensemble (N) associé à la surface considérée R est défini par l'équation (2.7). Les surfaces de cet ensemble, la surface R y comprise, correspondent aux systèmes de valeurs des paramètres β , ω qui figurent dans cette équation, appartenant respectivement à l'intervalle ouvert $(-\infty, +\infty)$ et à l'intervalle supérieurement fermé $(-\pi, +\pi)$.

3. La génératrice d'une surface R_1 de l'ensemble (N) associé à la surface R , homologue de la génératrice de R issue du point courant $K(u)$ de sa ligne de striction C , est nécessairement parallèle au plan tangent à R en K et, d'après (2.8), elle est invariablement liée avec le trièdre central associé à R .

Cela étant, on peut choisir le sens positif sur la direction de cette droite de manière que les sens positifs sur la direction commune des normales coïncidentes des surfaces R , R_1 en chaque couple de points homologues de leurs lignes de striction coïncident.

On aura ainsi, en désignant par $\bar{e}_1$, $\bar{n}_1$, $\bar{z}_1$ les vecteurs unitaires qui déterminent les sens positifs sur les directions de axes du trièdre central associé à R_1 au point K_1 de sa ligne de striction C_1 homologue du point courant $K(u)$ de la ligne de striction C de R , les relations:

$$(3.1) \quad \bar{e}_1 = \bar{e} \cos \omega + \bar{z} \sin \omega, \quad \bar{n}_1 = \bar{n}, \quad \bar{z}_1 = \bar{e}_1 \wedge \bar{n}_1 = -\bar{e} \sin \omega + \bar{z} \cos \omega.$$

Par ailleurs la ligne de striction C_1 de R_1 est définie, d'après (2.7), par l'équation

$$(3.2) \quad \bar{\rho}_1 = \bar{\rho}_1(u) = \int (\bar{e} \cos \varphi + \bar{z} \sin \varphi) du + \beta \bar{n}(u),$$

où, d'après (2.8), β est une constante.

En différentiant (3.2) par rapport à u et en faisant usage des (1.2), il vient

$$(3.3) \quad \frac{d\bar{\rho}_1}{du} = \bar{e}(\cos \varphi - \beta \kappa) + \bar{z}(\sin \varphi + \beta \sigma).$$

On aura donc, en désignant par du_1 l'arc élémentaire de la courbe C_1 en son point K_1 homologue du point courant $K(u)$ de la courbe C ,

$$\left(\frac{du_1}{du}\right)^2 = \left(\frac{d\bar{\rho}_1}{du}\right)^2 = (\cos \varphi - \beta \kappa)^2 + (\sin \varphi + \beta \sigma)^2.$$

Cette relation, à l'aide des (1.5), affecte la forme

$$(3.4) \quad \left(\frac{du_1}{du}\right)^2 = 1 - 2\beta\kappa_n + \beta^2(\kappa_n^2 + \sigma_g^2) = \frac{1}{\lambda^2};$$

ce qui montre que le rapport des arcs élémentaires du_1 , du des courbes C_1 , C en leurs points homologues K_1 , K est une fonction algébrique de la courbure normale κ_n et de la torsion géodésique σ_g de la courbe C , le coefficient β , qui y figure, étant une constante égale en valeur absolue à la distance constante, d'après (2.8), des points homologues des deux courbes.

De même en différentiant la première et la troisième relation (3.1) par rapport à u et en faisant usage des (1.2), il vient

$$(3.5) \quad \dot{\bar{e}}_1 = (\kappa \cos \omega - \sigma \sin \omega)\bar{n}, \quad \dot{\bar{z}}_1 = -(\kappa \sin \omega + \sigma \cos \omega)\bar{n}.$$

Si l'on désigne maintenant par κ_1 , σ_1 , φ_1 la courbure, la torsion et la striction de la surface R_1 sur sa génératrice homologue de la génératrice courante de R et que l'on tienne compte que, d'après des formules connues (4, p. 145), on a

$$\frac{d\bar{e}_1}{du_1} = \kappa_1\bar{n}_1, \quad \frac{d\bar{z}_1}{du_1} = -\sigma_1\bar{n}_1,$$

des ces formules, à l'aide des (3.4) et (3.5), on parvient aux relations

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{e}_1}{du_1} &= \kappa_1\bar{n}_1 = (\kappa \cos \omega - \sigma \sin \omega) \frac{du}{du_1} \bar{n} = \lambda(\kappa \cos \omega - \sigma \sin \omega)\bar{n} \\ \frac{d\bar{z}_1}{du_1} &= -\sigma_1\bar{n}_1 = -(\kappa \sin \omega + \sigma \cos \omega) \frac{du}{du_1} \bar{n} = -\lambda(\kappa \sin \omega + \sigma \cos \omega)\bar{n}. \end{aligned}$$

Mais, d'après la seconde relation (3.1), on a $\bar{n} = \bar{n}_1$; on aura donc

$$(3.6) \quad \kappa_1 = \lambda(\kappa \cos \omega - \sigma \sin \omega), \quad \sigma_1 = \lambda(\kappa \sin \omega + \sigma \cos \omega).$$

En outre on a

$$\begin{aligned} \cos \varphi_1 &= \frac{d\bar{\rho}_1}{du_1} \times \bar{e}_1 = \frac{du}{du_1} \frac{d\bar{\rho}_1}{du} \times \bar{e}_1 = \lambda \frac{d\bar{\rho}_1}{du} \times \bar{e}_1 \\ \sin \varphi_1 &= \frac{d\bar{\rho}_1}{du_1} \times \bar{z}_1 = \frac{du}{du_1} \frac{d\bar{\rho}_1}{du} \times \bar{z}_1 = \lambda \frac{d\bar{\rho}_1}{du} \times \bar{z}_1, \end{aligned}$$

puisque la tangente à la courbe C_1 en son point K_1 est évidemment située sur le plan tangent $[K_1; \bar{e}_1, \bar{z}_1]$ à R_1 en ce même point.

Ces relations, si l'on y remplace $\bar{e}_1, \bar{z}_1, \frac{d\bar{\rho}_1}{du}$ par leurs valeurs (3.1) et (3.3), prennent la forme

$$(3.7) \quad \begin{cases} \cos \varphi_1 = \lambda \{ \cos \omega (\cos \varphi - \beta \kappa) + \sin \omega (\sin \varphi + \beta \sigma) \} \\ \sin \varphi_1 = \lambda \{ -\sin \omega (\cos \varphi - \beta \kappa) + \cos \omega (\sin \varphi + \beta \sigma) \}. \end{cases}$$

Enfin, si l'on tient compte du fait que la courbure normale κ_{1n} et la torsion géodésique σ_{1g} de la ligne de striction C_1 de R_1 sont liées, d'après des formules connues (3, p. 73), avec les invariants fondamentaux $\kappa_1, \sigma_1, \varphi_1$ de la surface par les relations

$$\kappa_{1n} = \kappa_1 \cos \varphi_1 - \sigma_1 \sin \varphi_1, \quad \sigma_{1g} = \kappa_1 \sin \varphi_1 + \sigma_1 \cos \varphi_1,$$

on parvient en y remplaçant κ_1, σ_1 et $\cos \varphi_1, \sin \varphi_1$ par leurs valeurs (3.6) et (3.7) et en faisant usage des (1.5), aux relations

$$\kappa_{1n} = \lambda^2 \{ \kappa_n - \beta(\kappa_n^2 + \sigma_g^2) \}, \quad \sigma_{1g} = \lambda^2 \sigma_g$$

et finalement, grâce à (3.4), aux formules

$$(3.8) \quad \kappa_{1n} = \frac{\kappa_n - \beta(\kappa_n^2 + \sigma_g^2)}{1 - 2\beta\kappa_n + \beta^2(\kappa_n^2 + \sigma_g^2)}, \quad \sigma_{1g} = \frac{\sigma_g}{1 - 2\beta\kappa_n + \beta^2(\kappa_n^2 + \sigma_g^2)}.$$

Mais, d'après la remarque finale du paragraphe 1, la courbure normale et la torsion géodésique de la ligne de striction de la surface R , ainsi que de toute autre surface R_1 de l'ensemble (N) associé à R , sont liées par les relations (1.6) avec la courbure et la torsion géodésiques de cette courbe considérée comme une courbe tracée sur la surface R_n engendrée par les normales centrales de R .

Cela étant, des deux formules (3.8), en désignant par $\kappa'_g, \kappa'_{1g}; \sigma'_g, \sigma'_{1g}$ les courbures et les torsions géodésiques des lignes de striction C, C_1 des surfaces R, R_1 , considérées comme des courbes tracées sur la surface R_n , on obtient les relations

$$(3.9) \quad \kappa'_g = \frac{\kappa'_g - \beta(\kappa_g'^2 + \sigma_g'^2)}{1 - 2\beta\kappa'_g + \beta^2(\kappa_g'^2 + \sigma_g'^2)}, \quad \sigma'_{1g} = \frac{\sigma'_g}{1 - 2\beta\kappa'_g + \beta^2(\kappa_g'^2 + \sigma_g'^2)},$$

le coefficient β qui y figure étant égal en valeur absolue à la distance constante, d'après (2.8), des deux points des courbes C, C_1 situés sur la même génératrice de la surface R .

La ligne de striction C_1 de la surface R_1 est évidemment une trajectoire orthogonale des génératrices de la surface R_n choisie au hasard et les considérations précédentes concernant la courbure et la torsion géodésiques de cette courbe tracée sur la surface R_n , jointes au théorème I, permettent d'énoncer le

THÉOREME II. — *Si l'on choisit sur une surface réglée gauche une trajectoire orthogonale de ses génératrices comme courbe directrice, on peut exprimer la courbure et la torsion géodésiques de toute autre trajectoire orthogonale des génératrices de la surface comme fonctions rationnelles de la forme (3.9) de la courbure et de la torsion géodésiques de la courbe directrice, le coefficient unique β qui figure dans ces fonctions étant une constante égale en valeur absolue à la distance constante des deux points de cette trajectoire et de la courbe directrice situés sur la même génératrice de la surface.*

Une conséquence remarquable de ce théorème est la proposition suivante:

Si la courbure et la torsion géodésiques d'une trajectoire orthogonale des génératrices d'une surface réglée gauche vérifient une relation algébrique à coefficients constants, la courbure et la torsion géodésiques de toute autre trajectoire orthogonale des génératrices de la surface vérifient également une relation algébrique à coefficients constants.

II.

4. Supposons d'abord que la surface considérée R soit une surface de BERTRAND.

Dans ce cas les points de la ligne de striction C de R correspondent aux points de la ligne de striction C_1 d'une autre surface réglée gauche R_1 de manière que les normales aux surfaces en chaque couple de points homologues de leurs lignes de striction coïncident, les deux surfaces ayant en outre des strictions égales sur leurs génératrices issues de chaque couple de points homologues de ces courbes (5, p. 45).

La surface R_1 qui évidemment est aussi une surface de BERTRAND, appartient nécessairement à l'ensemble (N) associé à R , car deux surfaces réglées gauches dont les normales centrales coïncident, appartiennent — comme on le voit aussitôt — chacune à l'ensemble (N) associé à l'autre.

Or, si β_1, ω_1 sont les valeurs des paramètres β, ω qui figurent dans l'équation (2.7) de l'ensemble (N) associé à R , auxquelles correspond la surface R_1 de cet ensemble, qui constitue avec R un couple de surfaces de BERTRAND, β_1 est nécessairement $\neq 0$ et, d'après les formules (5.7), les invariants κ, σ, φ de R sont des fonctions de l'arc u de sa ligne de striction C

vérifiant nécessairement la relation

$$(4.1) \quad \frac{\cos(\varphi - \omega_1) - \beta_1(\kappa \cos \omega_1 - \sigma \sin \omega_1)}{\sin(\varphi - \omega_1) + \beta_1(\kappa \sin \omega_1 + \sigma \cos \omega_1)} = \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi}$$

pour toutes les valeurs de u correspondant aux points de C .

La condition (4.1), qui — comme il résulte des formules (3.7) est en outre suffisante afin que la surface R soit une surface de BERTRAND, à l'aide des (1.5), affecte la forme

$$(4.2) \quad \kappa_n \sin \omega_1 + \sigma_g \cos \omega_1 = \frac{\sin \omega_1}{\beta_1}.$$

La relation (4.2), dans le cas où la ligne de striction C de R est une ligne de courbure, est vérifiée, si l'on y pose $\omega_1 = 0$ ou π , β_1 étant une constante arbitraire $\neq 0$, car, dans ce cas, on a $\sigma_g = 0$.

Alors la surface R_n , engendrée par les normales centrales de R , est une surface développable et toutes les surfaces de l'ensemble (N) associé à R , dont les génératrices homologues de chaque génératrice de R sont parallèles à cette génératrice, admettent sur ces génératrices la même que R striction. Donc, *une surface réglée gauche, dont la ligne de striction est une ligne de courbure, peut être considérée comme une surface de BERTRAND.*

Si les invariants κ , σ , φ de la surface R dont la ligne de striction n'est pas une ligne de courbure, vérifient une relation de la forme (4.1), où β_1 , $\sin \omega_1$, $\cos \omega_1$ sont des constantes dont les deux premières sont $\neq 0$, l'ensemble (N) associé à R ne contient qu'une seule surface constituant avec R un couple de surfaces de BERTRAND: La surface R_1 de cet ensemble, qui correspond aux valeurs β_1 , ω_1 des paramètres β , ω que l'équation (2.7) renferme.

La surface R_1 est également une surface de BERTRAND; par conséquent la courbure normale κ_{1n} et la torsion géodésique σ_{1g} de sa ligne de striction C_1 doivent vérifier une relation de la forme (4.2);

$$\kappa_{1n} \sin \omega' + \sigma_{1g} \cos \omega' = \frac{\sin \omega'}{\beta'},$$

où β' , ω' sont les valeurs des paramètres β , ω qui figurent dans l'équation la forme (2.7) de l'ensemble (N) associé à la surface R_1 , auxquelles correspond la surface R considérée comme une surface appartenant à cet ensemble. Mais on a, comme on le voit aussitôt, $\beta' = -\beta_1$, $\omega' = -\omega_1$. Donc κ_{1n} , σ_{1g} doivent vérifier la relation

$$(4.3) \quad \kappa_{1n} \sin \omega_1 - \sigma_{1g} \cos \omega_1 = -\frac{\sin \omega_1}{\beta_1},$$

D'après (4.2), pour que la surface considérée R soit une surface de BERTRAND, il faut que la courbure normale κ_n et la torsion géodésique σ_g de sa ligne de striction C vérifient une relation de la forme

$$(4.4) \quad A\kappa_n + B\sigma_g = C,$$

les coefficients A, B, C qui y figurent étant des constantes dont la première et la troisième sont toutes les deux soit $\neq 0$ soit $= 0$, la seconde étant, dans ce cas, $\neq 0$.

Cette condition est en outre suffisante afin que R soit une surface de BERTRAND.

En effet, si $A = C = 0, B \neq 0$, la ligne de striction de R est une ligne de courbure; par conséquent R peut être considérée comme une surface de BERTRAND.

Si $A \neq 0, C \neq 0$, en posant

$$\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \sin \omega_1, \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \cos \omega_1, \frac{A}{C} = \beta_1,$$

on peut donner à la relation (4.4) la forme (4.2) qui, étant équivalente à la relation (4.1), est suffisante pour que R soit une surface de BERTRAND.

On peut donc énoncer le

THÉOREME III. - *Afin qu'une surface réglée gauche soit une surface de BERTRAND, il faut et il suffit que la courbure normale et la torsion géodésique de sa ligne de striction vérifient une relation linéaire à coefficients constants dont le premier et le troisième sont tous les deux ou bien $\neq 0$ ou bien $= 0$, le second étant, dans ce cas, $\neq 0$.*

Il est à noter que dans le cas où la ligne de striction C d'une surface de BERTRAND R n'est pas une ligne de courbure, de la relation (4.2) à laquelle doivent satisfaire la courbure normale κ_n et la torsion géodésique σ_g de la courbe C , qui peut s'écrire

$$\sin \omega_1 (1 - \beta_1 \kappa_n) = \beta_1 \cos \omega_1 \sigma_g,$$

où $\beta_1 \neq 0, \sin \omega_1 \neq 0$, on déduit que l'on a

$$(4.5) \quad \sin \omega_1 = \frac{\beta_1^2 \sigma_g^2}{(1 - \beta_1 \kappa_n)^2 + \beta_1^2 \sigma_g^2}.$$

Par ailleurs, d'après la seconde formule (3.8), la torsion géodésique σ_{1g} de la ligne de striction C_1 de la surface R_1 qui constitue avec R un couple de BERTRAND, est liée avec κ_n, σ_g par la relation

$$(4.6) \quad \sigma_{1g} = \frac{\sigma_g}{(1 - \beta_1 \kappa_n)^2 + \beta_1^2 \sigma_g^2}.$$

Des deux relations (4.5) et (4.6) on déduit aussitôt que *les torsions géodésiques σ_g , σ_{1g} des lignes de striction des surfaces R , R_1 en leurs points situés sur la même génératrice de la surface engendrée par les normales centrales communes des deux surfaces vérifient la relation*

$$(4.7) \quad \sigma_g \sigma_{1g} = \frac{\sin^2 \omega_1}{\beta_1^2}.$$

REMARQUE. — Les lignes de striction des deux surfaces réglées gauches R , R_1 qui constituent un couple de BERTRAND, d'après un théorème connu (6, p. 143), sont des géodésiques de ces surfaces, dans le cas particulier où ces courbes sont en plus des trajectoires isogonales des génératrices des deux surfaces ou — ce qui revient au même — dans le cas où les deux surfaces sont des surfaces à striction constante. Alors la normale centrale commune des deux surfaces en chaque couple de points homologues de leurs lignes de striction est nécessairement la normale principale commune de ces courbes aux mêmes points. Donc, dans ce cas, *les lignes de striction des deux surfaces constituent un couple de courbes de BERTRAND et la relation (4.7) se réduit à la relation qui — comme on sait (6, p. 35) — est vérifiée par les torsions des courbes d'un tel couple en leurs points situés sur la même génératrice de la surface engendrée par les normales principales communes de ces courbes.*

5. Si les lignes de striction C , C_1 d'un couple de surfaces R , R_1 de BERTRAND ne sont pas de lignes de courbure de ces surfaces, leurs courbures normales κ_n , κ_{1n} et leurs torsions géodésiques σ_g , σ_{1g} doivent satisfaire — comme nous l'avons reconnu dans le paragraphe précédent — à deux relations de la forme (4.2) et (4.3), les constantes β_1 , ω_1 qui y figurent, étant les valeurs des paramètres β , ω que l'équation (2.7) de l'ensemble (N) associé à R renferme, auxquelles correspond la surface R_1 .

Par ailleurs, si R^* est une surface de cette ensemble correspondant aux valeurs β^* , ω^* des paramètres β , ω , la courbure normale κ_n^* et la torsion géodésique σ_g^* de la ligne de striction C^* de R^* , d'après (3.8), sont liées avec la courbure normale κ_n et la torsion géodésique σ_g de la ligne de striction C de R par les relations

$$(5.1) \quad \kappa_n^* = \frac{\kappa_n - \beta^*(\kappa_n^2 + \sigma_g^2)}{(1 - \beta^*\kappa_n)^2 + \beta^{*2}\sigma_g^2}, \quad \sigma_g^* = \frac{\sigma_g}{(1 - \beta^*\kappa_n)^2 + \beta^{*2}\sigma_g^2}.$$

L'élimination des κ_n , σ_g entre les relations (5.1) et (4.2) conduit à la relation

$$(5.2) \quad \sin \omega_1 \{ (\beta^{*2} - \beta^*\beta_1)(\kappa_n^{*2} + \sigma_g^{*2}) + (2\beta^* - \beta_1)\kappa_n^* + 1 \} - \beta_1 \cos \omega_1 \sigma_g^* = 0,$$

à laquelle doivent satisfaire, dans le cas envisagé, la courbure normale et la torsion géodésique de la ligne de striction de R^* . Cette relation se réduit à la relation (4.2) ou (4.3), si l'on y pose $\beta^* = 0$ ou $\beta^* = \beta_1$ respectivement.

D'autre part, si la courbure normale κ_n^* et la torsion géodésique σ_g^* de la ligne de striction C^* d'une surface réglée gauche R^* vérifient une relation de la forme (5.2) et que l'on ait $\beta_1 \neq 0$, $\sin \omega_1 \neq 0$, de cette relation, qui peut s'écrire

$$\sin \omega_1 \frac{\kappa_n^* + \beta^*(\kappa_n^{*2} + \sigma_g^{*2})}{(1 - \beta^*\kappa_n^*)^2 + \beta^{*2}\sigma_g^{*2}} + \cos \omega_1 \frac{\sigma_g^*}{(1 - \beta^*\kappa_n^*)^2 + \beta^{*2}\sigma_g^{*2}} = \frac{\sin \omega_1}{\beta_1},$$

résulte, eu égard aux (3.6), que l'ensemble (N) associé à la surface R^* contient une surface de BERTRAND, puisque la courbure normale et la torsion géodésique de sa ligne de striction vérifient une relation de la forme (4.2), ou — ce qui revient au même — que les normales centrales de R^* sont les normales centrales communes d'un couple de surfaces de BERTRAND.

Il s'ensuit que la courbure normale κ_n et la torsion géodésique σ_g de la ligne de striction d'une surface gauche R doivent vérifier une relation de la forme

$$(5.3) \quad A(\kappa_n^2 + \sigma_g^2) + B\kappa_n + C\sigma_g + D = 0,$$

les coefficients A, B, C, D qui y figurent étant des constantes dont au moins la seconde et la quatrième sont $\neq 0$, lorsque la ligne de striction de R n'est pas une ligne de courbure et que ses normales centrales soient les normales centrales communes d'un couple de surfaces de BERTRAND.

D'autre part, si la courbure normale et la torsion géodésique de la ligne de striction d'une surface gauche réelle vérifient une relation de la forme (5.3), le second et le quatrième des coefficients constants A, B, C, D qui y figurent, étant $\neq 0$, et que l'on considère les relations

$$(5.4) \quad \beta^{*2} - \beta^*\beta_1 = \frac{A}{D}, \quad 2\beta^* - \beta_1 = \frac{B}{D}, \quad \beta_1 \frac{\cos \omega_1}{\sin \omega_1} = -\frac{C}{D},$$

en éliminant β_1 entre les deux premières, on parvient à la relation

$$D\beta^{*2} - B\beta^* + A = 0.$$

Or, si $4AD - B^2 \leq 0$, à chaque racine (réelle) du polynôme $D\beta^{*2} - B\beta^* + A$ on peut faire associer, à l'aide des deux dernières relations (5.4), deux valeurs réelles des $\beta_1, ctg \omega_1$ telles que la relation (5.2), si l'on y remplace $\beta_1, ctg \omega_1$ par ces valeurs et β^* par la racine considérée, se ramène à la relation

(5.3); ce qui prouve — comme nous l'avons déjà reconnu — que les normales centrales de R^* sont les normales centrales communes d'un couple de surfaces de BERTRAND.

On peut donc formuler le

THÉOREME IV. — *Afin que les normales centrales d'une surface réglée gauche réelle, dont la ligne de striction n'est pas une ligne de courbure, soient les normales centrales communes d'un couple de surfaces réelles de BERTRAND, il faut et il suffit que la courbure normale et la torsion géodésique de sa ligne de striction vérifient une relation algébrique du second degré de la forme (5.3), les coefficients A, B, C, D qui y figurent étant des constantes telles que l'on ait $4AD - B^2 \leq 0$, tandis que B et D sont $\neq 0$.*

Il est à noter que, comme il résulte des considérations précédentes, les normales centrales communes d'un couple de surfaces de BERTRAND sont en même temps les normales centrales communes d'un second couple de surfaces de cette espèce, qui en général ne coïncide pas avec le premier.

Par ailleurs, si l'on tient compte du fait que la ligne de striction C^* de la surface considérée R^* de l'ensemble (N) associé à R est une trajectoire orthogonale choisie au hasard des génératrices de la surface R_n engendrée par les normales centrales de R , on déduit de la relation (5.2) et de la remarque finale du paragraphe 1, que, lorsque R est une surface de BERTRAND, dont la ligne de striction C n'est pas une ligne de courbure et que l'on choisisse C comme courbe directrice sur la surface R_n , la courbure et la torsion géodésiques κ'_g, σ'_g de chaque trajectoire orthogonale des génératrices de R_n vérifient une relation de la forme

$$(5.5) \quad A \{ (\beta^2 - \beta_1 \beta) (\kappa_g'^2 + \sigma_g'^2) + (2\beta - \beta_1) \kappa_g' + 1 \} + B \beta_1 \sigma_g' = 0,$$

les coefficients A, B, β_2, β qui y figurent étant des constantes dont les trois premières sont les mêmes pour toutes ces courbes, la première et la troisième sont $\neq 0$ et la quatrième varie de l'une à l'autre de ces courbes.

On a donc le

THÉOREME V. — *La courbure et la torsion géodésiques de chaque trajectoire orthogonale des génératrices de la surface R_n engendrée par les normales centrales communes d'un couple de surfaces de Bertrand, dont les lignes de striction ne sont pas de lignes de courbure, vérifient une relation algébrique du second degré de la forme*

$$(5.6) \quad A'(\kappa_g'^2 + \sigma_g'^2) + B'\kappa_g' + C'\sigma_g' + D' = 0$$

à coefficients qui sont constants sur elle, mais qui varient de l'une à l'autre de ces courbes. Cette relation devient linéaire sur la ligne de striction de cha-

cune des surfaces dont les normales centrales communes sont les génératrices de la surface.

De ce théorème joint au fait que les normales principales communes d'un couple de courbes de BERTRAND sont — comme on le reconnaît aisément — les normales centrales communes de ∞^1 couples de surfaces de BERTRAND à striction constante, on déduit que la courbure et la torsion géodésiques de chaque trajectoire orthogonale des génératrices de la surface engendrée par les normales principales communes d'un couple de courbes de BERTRAND vérifient une relation algébrique du second degré de la forme (5.6), à coefficients qui sont constants sur elle mais qui varient de l'une à l'autre de ces courbes. Cette relation sur chaque courbe du couple se réduit à la relation linéaire vérifiée par la courbure et la torsion de cette courbe.

6. Supposons maintenant que la ligne de striction C de la surface considérée R soit une ligne asymptotique de cette surface et, par conséquent, que l'on ait en chaque point de C

$$(6.1) \quad \kappa_n = 0.$$

Dans ce cas la courbe C est une géodésique de la surface R_n engendrée par les normales centrales de R , puisque les surfaces, R , R_n se coupent sous un angle droit le long de cette courbe; aussi les normales centrales de R sont-elles les binormales de la courbe C .

En outre, dans ce cas, les formules (3.8), qui expriment la courbure normale κ_{1n} et la torsion géodésique σ_{1g} de la ligne de striction C_1 d'une surface R_1 de l'ensemble (N) associé à R comme fonctions de la courbure normale κ_n et de la torsion géodésique σ_g de la ligne de striction C de R , en vertu de (6.1), deviennent

$$(6.2) \quad \kappa_{1n} = -\frac{\beta_1 \sigma_g^2}{1 + \beta_1^2 \sigma_g^2}, \quad \sigma_{1g} = \frac{\sigma_g}{1 + \beta_1^2 \sigma_g^2}.$$

En éliminant σ_g entre ces deux relations on déduit que la courbure normale κ_{1n} et la torsion géodésique σ_{1g} de la ligne de striction C_1 d'une surface R_1 de l'ensemble (N) associé à la surface R , lorsque les normales centrales de R sont les binormales de sa ligne de striction C , doivent vérifier une relation de la forme

$$(6.3) \quad \beta_1(\kappa_{1n}^2 + \sigma_{1g}^2) + \kappa_{1n} = 0,$$

le coefficient β_1 qui y figure étant égal en valeur absolue à la distance constante, d'après (2.8), des deux points des courbes C , C_1 situés sur la même normale centrale de R .

D'autre part, les normales centrales d'une surface réglée gauche R_1 sont les binormales d'une courbe gauche, lorsque la courbure normale et la torsion géodésique de sa ligne de striction C_1 vérifient une relation de la forme (6.3).

En effet de cette relation résulte, à l'aide de la première formule (3.8), que l'ensemble (N) associé à la surface R_1 contient une surface R dont la ligne de striction est une ligne asymptotique. Par conséquent les normales centrales communes des surfaces R, R_1 sont les binormales de cette courbe.

On a donc le

THÉOREME VI. — *Afin que les normales centrales d'une surface réglée gauche soient les binormales d'une courbe gauche, il faut et il suffit que la courbure normale et la torsion géodésique de sa ligne de striction vérifient une relation algébrique du second degré de la forme (6.3), le coefficient unique, qui y figure, étant une constante.*

La condition (6.3) qui, d'après le théorème VI, est nécessaire et suffisante afin qu'une surface réglée gauche jouisse de la propriété indiquée, si l'on y remplace κ_{1n}, σ_{1g} par leurs valeurs comme fonction des invariants fondamentaux de la surface: $\kappa_1, \sigma_1, \varphi_1$, affecte la forme

$$\beta_1(\kappa_1^2 + \sigma_1^2) + \kappa_1 \cos \varphi_1 - \sigma_1 \sin \varphi_1 = 0$$

et sous cette forme elle est donnée par E. KRUPPA (4, p. 165).

Par ailleurs la courbure normale κ_{1n} et la torsion géodésique σ_{1g} de la ligne de striction C_1 de la surface R_1 , d'après ce qui est exposé dans la remarque finale du paragraphe 1, sont respectivement égales à la courbure et à la torsion géodésiques $\kappa'_{1g}, \sigma'_{1g}$ de cette courbe, considérée comme une courbe tracée sur la surface R_n engendrée par les normales centrales communes des surfaces R, R_1 . Donc, d'après (6.3), $\kappa'_{1g}, \sigma'_{1g}$ doivent vérifier la relation

$$(6.4) \quad \beta_1(\kappa_{1g}'^2 + \sigma_{1g}'^2) + \kappa'_{1g} = 0.$$

Mais R_1 est une surface de l'ensemble (N) associé à R choisie au hasard; par conséquent, sa ligne de striction C_1 est une trajectoire orthogonale des génératrices de la surface R_n choisie aussi au hasard. En outre chaque trajectoire orthogonale des génératrices de la surface engendrée par les binormales d'une courbe gauche, d'après le théorème I, est la ligne de striction de ∞^1 surfaces réglées gauches qui admettent les binormales de cette courbe comme normales centrales. On peut donc énoncer le

THÉOREME VII. — *La courbure et la torsion géodésiques de chaque trajectoire orthogonale des génératrices de la surface engendrée par les binormales d'une courbe gauche C vérifient une relation algébrique du second degré de la forme (6.4), le coefficient unique qui y figure étant une constante égale en*

valeur absolue à la distance constante des deux points de cette trajectoire et de la courbe C situés sur la même génératrice de la surface.

De ce théorème, si l'on tient compte de la propriété caractéristique des courbes de MANNHEIM, d'après laquelle les normales principales d'une courbe de cette espèce C_1 sont les binormales d'une autre courbe gauche C et du fait que la courbe C_1 est une ligne asymptotique de la surface engendrée par ses normales principales, on déduit que la courbure et la torsion géodésiques de chaque trajectoire orthogonale des génératrices de la surface engendrée par les normales principales d'une courbe de MANNHEIM C_1 vérifient une relation algébrique du second degré de la forme (6.4), le coefficient unique qui y figure étant égal en valeur absolue à la distance constante des deux points de cette trajectoire et de la courbe dont les binormales sont les normales principales de la courbe C_1 situés sur la même génératrice de la surface. Cette relation se réduit sur la courbe C_1 à la relation vérifiée par la courbure et la torsion de cette courbe.

7. Considérons maintenant la surface développable R_d tangente à la surface considérée R tout le long de sa ligne de striction C .

Les génératrices de la surface R_d sont les tangentes à la surface R aux points de la courbe C , conjuguées aux tangentes à R en ces mêmes points et — comme on sait (2, p. 189) — la génératrice de cette surface issue du point courant $K(u)$ de C est parallèle au vecteur

$$(7.1) \quad \bar{d} = \sigma \bar{e} + \kappa \bar{z},$$

où κ , σ sont la courbure et la torsion de R sur sa génératrice issue du point K .

Si l'on désigne par ψ l'angle $(\bar{t}, \bar{d})$, où $\bar{t}$ est le vecteur unitaire (1.4) parallèle à la tangente à C en K , en vertu des (1.4) et (7.1), on a

$$\cos \psi = \frac{\kappa \sin \varphi + \sigma \cos \varphi}{\sqrt{\kappa^2 + \sigma^2}}.$$

De cette formule, qui, à l'aide des (1.5), acquiert la forme

$$(7.2) \quad \cos \psi = \frac{\sigma_g}{\sqrt{\kappa_n^2 + \sigma_g^2}},$$

on déduit aussitôt que, pour que la ligne de striction d'une surface réglée gauche R soit une trajectoire isogonale des génératrices de la surface développable R_d tangente à R tout le long de la courbe C , il faut et il suffit que la courbure normale et la torsion géodésique de cette courbe vérifient

une relation de la forme

$$(7.3) \quad A\kappa_n + B\sigma_g = 0,$$

les coefficients A , B qui y figurent étant des constantes dont au moins une est $\neq 0$. On peut donc distinguer trois cas suivant que l'on a $A = 0$, $B \neq 0$, ou $A \neq 0$, $B = 0$, ou $A \neq 0$, $B \neq 0$.

Si $A = 0$, $B \neq 0$, la ligne de striction C de R est une ligne de courbure, puisque en chaque point de C on a $\sigma_g = 0$. Dans ce cas la surface R_n engendrée par les normales centrales de R est développable et les trajectoires orthogonales des génératrices de R_n sont des lignes de courbure de cette surface. Par conséquent leur torsion géodésique est partout $= 0$.

Si $A \neq 0$, $B = 0$, la ligne de striction C de R est une ligne asymptotique de cette surface et ce cas est discuté dans le paragraphe précédent.

Si enfin $A \neq 0$, $B \neq 0$, en éliminant κ_n , σ_g entre la relation (7.3) et les deux relations (3.8) vérifiées par les courbures normales κ_n , κ_{1n} et les torsions géodésiques σ_g , σ_{1g} de la ligne de striction C de R et de la ligne de striction C_1 , d'une surface R_1 de l'ensemble (N) associé à R , on déduit que la courbure normale κ_{1n} et la torsion géodésique σ_{1g} de la courbe C_1 doivent vérifier la relation

$$(7.4) \quad \beta_1 A(\kappa_{1n}^2 + \sigma_{1g}^2) + A\kappa_{1n} + B\sigma_{1g} = 0$$

où β_1 , est une constante égale en valeur absolue à la distance constante, d'après (2.8), des deux points des courbes C , C_1 situés sur la même normale centrale commune des surfaces R , R_1 .

Les normales centrales de la surface R sont en même temps les normales à la surface développable R_d tangente à R tout le long de sa ligne de striction C . Par ailleurs, d'après le théorème I, une trajectoire isogonale des génératrices d'une surface développable est la ligne de striction de ∞^1 surfaces réglées gauches qui admettent les normales à la surface aux points de cette courbe comme normales centrales.

Cela étant, de la relation (7.4) on déduit que la courbure normale κ_n et la torsion géodésique σ_g de la ligne de striction d'une surface réglée gauche doivent vérifier une relation de la forme

$$(7.5) \quad A_1(\kappa_n^2 + \sigma_g^2) + B_1\kappa_n + C_1\sigma_g = 0,$$

les coefficients A_1 , B_1 , C_1 qui y figurent étant des constantes, dont au moins les deux dernières sont $\neq 0$, lorsque les normales centrales de la surface sont les normales à une surface développable aux points d'une trajectoire isogonale — non orthogonale — de ses génératrices.

D'autre part, la condition (7.5) vérifiée par la courbure normale et la torsion géodésique de la ligne de striction d'une surface réglée gauche R est suffisante, afin que les normales centrales de la surface soient les normales à une surface développable aux points d'une trajectoire isogonale de ses génératrices, car de cette relation, qui, si l'on y pose $B_1 = A$, $A_1 = B_1 \beta_1$, $C_1 = B B_1$, acquiert la forme

$$A \{ \beta_1 (\kappa_n^2 + \sigma_g^2) + \kappa_n \} + B \sigma_g = 0,$$

on déduit, à l'aide des formules (3.8), que la courbure normale et la torsion géodésique de la ligne de striction d'une surface de l'ensemble (N) associé à R vérifient une relation de la forme (7.3). Cette surface coïncide avec R , si $A_1 = 0$.

On peut donc énoncer le

THÉOREME VIII. — *Afin que les normales centrales d'une surface réglée gauche soient les normales à une surface développable aux points d'une trajectoire isogonale — non orthogonale — de ses génératrices, il faut et il suffit que la courbure normale et la torsion géodésique de sa ligne de striction vérifient une relation algébrique du second degré de la forme (7.5), les coefficients qui y figurent étant des constantes dont au moins les deux dernières sont $\neq 0$.*

En outre, d'après la remarque finale du paragraphe 1, la courbure et la torsion géodésiques κ'_{1g} , σ'_{1g} de la ligne de striction C_1 d'une surface R_1 de l'ensemble (N) associé à R , considérée comme une courbe tracée sur la surface R_n engendrée par les normales centrales de R , doivent vérifier, dans le cas envisagé, la relation

$$(7.6) \quad A \beta_1 (\kappa'_{1g}{}^2 + \sigma'_{1g}{}^2) + A \kappa'_{1g} + B \sigma'_{1g} = 0$$

à laquelle on parvient en remplaçant dans la relation (7.4), κ_{1n} , σ_{1g} par κ'_{1g} , σ'_{1g} respectivement. Les coefficients A , B qui figurent dans la relation (7.6) sont les coefficients de la relation (7.3), tandis que β_1 est une constante égale en valeur absolue à la distance constante, d'après (2.8), des deux points de la courbe C_1 et de la ligne de striction C de R , situés sur la même génératrice de la surface R_n .

Cette constatation, jointe au fait que, d'après le théorème I, chaque trajectoire orthogonale des génératrices de la surface R_n engendrée par les normales à une surface développable aux points d'une trajectoire isogonale de ses génératrices, est la ligne de striction de ∞^1 surfaces réglées gauches qui admettent les génératrices de R_n comme normales centrales, permet de formuler le

THÉOREME IX. — *La courbure et la torsion géodésiques de chaque trajectoire orthogonale des génératrices de la surface engendrée par les normales à*

une surface développable aux points d'une trajectoire isogonale C — non orthogonale — de ses génératrices, vérifient une relation algébrique du second degré de la forme (7.6) à coefficients qui sont constants sur elle. Les deux premiers des coefficients A , B , β_1 qui figurent dans cette relation, étant tous les deux $\neq 0$, sont les mêmes sur toutes ces courbes, tandis que le troisième varie de l'une à l'autre. Cette relation se réduit sur la courbe C à la relation linéaire et homogène vérifiée par la courbure et la torsion géodésiques de cette courbe.

De ce théorème, si l'on tient compte du fait que les normales principales d'une hélice cylindrique sont les normales le long de cette courbe à la surface cylindrique dont l'hélice est une géodésique, on déduit que la courbure et la torsion géodésiques de chaque trajectoire orthogonale des génératrices de la surface engendrée par les normales principales d'une hélice cylindrique, sont liées par une relation algébrique du second degré de la forme (7.6), les coefficients A , B , β qui y figurent étant constants sur elle. Le coefficient β varie de l'une à l'autre de ces courbes, tandis que les deux premiers sont invariables; ce sont les coefficients qui figurent dans la relation linéaire et homogène vérifiée par la courbure et la torsion de l'hélice.

8. Soit R_1 une surface de l'ensemble (N) associé à la surface considérée R , correspondant aux valeurs β_1 , ω_1 des paramètres β , ω qui figurent dans l'équation (2.7) de cet ensemble.

La courbure normale κ_{1n} et la torsion géodésique σ_{1g} de la ligne de striction C_1 de R_1 sont les fonctions (3.8) de la courbure normale κ_n et de la torsion géodésique σ_g de la ligne de striction C de R .

En éliminant β_1 entre les deux relations (3.8), on parvient facilement à la relation

$$(8.1) \quad \frac{\sigma_{1g}}{\kappa_{1n}^2 + \sigma_{1g}^2} = \frac{\sigma_g}{\kappa_n^2 + \sigma_g^2};$$

ce qui montre que le rapport $\frac{\kappa_n^2 + \sigma_g^2}{\sigma_g}$ est le même pour toutes les surfaces de l'ensemble (N) associé à R .

La valeur de ce rapport au point courant $K(u)$ de la ligne de striction C de R est égale au paramètre de distribution p_n de la surface R_n , engendrée par les normales centrales de R sur sa génératrice issue de ce point.

En effet, d'après la formule connue, le paramètre de distribution p_n de R_n sur sa génératrice issue du point $K(u)$ de la courbe C , est

$$p_n = \frac{(\dot{\rho} \wedge \dot{n}) \times \dot{n}}{\dot{n}^2}.$$

Cette formule, si l'on y remplace $\bar{\rho}$, $\bar{n}$ par leurs valeurs (1.4) et (1.2), acquiert la forme

$$p_n = \frac{\kappa \sin \varphi + \sigma \cos \varphi}{\kappa^2 + \sigma^2},$$

ou finalement, à l'aide des (1.5),

$$(8.2) \quad p_n = \frac{\sigma_g}{\kappa_n^2 + \sigma_g^2}.$$

De cette formule on déduit aussitôt que, pour que la surface R_n engendrée par les normales centrales d'une surface réglée, soit une surface à paramètre de distribution constant, il faut et il suffit que l'on ait

$$(8.3) \quad a(\kappa_n^2 + \sigma_g^2) - \sigma_g = 0,$$

où a est une constante.

On a donc le

THÉOREME X. - *Pour que la surface engendrée par les normales centrales d'une surface réglée gauche R , soit une surface à paramètre de distribution constant, il faut et il suffit que la courbure normale et la torsion géodésique de la ligne de striction de R vérifient une relation algébrique du second degré de la forme (8.3), le coefficient unique qui y figure étant égal au paramètre de distribution constant de cette surface.*

Par ailleurs des deux relations (8.1) et (8.3) on déduit aussitôt, si l'on tient compte en outre de la remarque finale du paragraphe 1, que la courbure et la torsion géodésiques κ'_{1g} , σ'_{1g} de la ligne de striction C_1 d'une surface R_1 de l'ensemble (N) associé à R , considérée comme une courbe tracée sur la surface R_n engendrée par les normales centrales de R vérifient la relation

$$(8.4) \quad a(\kappa_{1g}'^2 + \sigma_{1g}'^2) - \sigma'_{1g} = 0,$$

où a est une constante, lorsque R_n est une surface à paramètre de distribution constant égal à a .

Cette constatation jointe au fait que, d'après le théorème I, les génératrices d'une surface réglée à paramètre de distribution constant sont les normales centrales communes de ∞^2 surfaces réglées gauches, permet de formuler le

THÉOREME XI. - *La courbure et la torsion géodésiques de chaque trajectoire orthogonale des génératrices d'une surface réglée à paramètre de distribution constant vérifient une relation algébrique du second degré de la forme (8.4), le coefficient unique qui y figure étant égal au paramètre de distribution constant de la surface.*

9. Supposons enfin que la ligne de striction C de la surface R soit une courbe de cette surface, dont la courbure normale et la torsion géodésique sont toutes les deux constantes:

$$(9.1) \quad \kappa_n = c_1, \quad \sigma_g = c_2,$$

où c_1, c_2 sont des constantes dont au moins la seconde est $\neq 0$.

Dans ce cas, d'après ce qui est exposé dans le paragraphe 7, la courbe C est une trajectoire isogonale des génératrices de la surface développable R_d tangente à R le long de cette courbe.

En outre, les normales centrales de R , d'après ce qui est exposé dans le paragraphe 6, sont les binormales d'une courbe gauche C_1 : la ligne de striction la surface R_1 de l'ensemble (N) associé à R correspondant aux valeurs $\beta_1 = \frac{c_2}{c_1^2 + c_2^2}$, ω_1 des paramètre β, ω qui figurent dans l'équation (2.7) de cet ensemble.

Par ailleurs, dans ce cas, la surface R_n engendrée par les normales centrales de R , grâce aux (9.1), est une surface à paramètre de distribution constant:

$$(9.2) \quad p_n = \frac{c_2}{c_1^2 + c_2^2} \neq 0.$$

Cela étant, d'après le théorème XI, la courbure et la torsion géodésiques $\kappa'_{1g}, \sigma'_{1g}$ de la courbe C_1 dont les binormales sont les normales centrales de R , considérée comme une courbe de la surface R_n , doivent vérifier la relation

$$(9.3) \quad p_n(\kappa'^2_{1g} + \sigma'^2_{1g}) - \sigma'_{1g} = 0.$$

Mais la courbe C_1 est nécessairement une géodésique de la surface R_n engendrée par ses binormales. On aura donc $\kappa'_{1g} = 0$, $\sigma'_{1g} = \sigma_1$, où σ_1 est la torsion de cette courbe et de la relation (9.3) on déduit que l'on doit avoir soit $\sigma'_{1g} = \sigma_1 = 0$ soit $\sigma'_{1g} = \sigma_1 = \frac{1}{p_n} \neq 0$.

Si $\sigma_1 = 0$, la courbe C_1 serait une courbe plane et la surface R_n engendrée par ses binormales serait une surface cylindrique, ce qui, d'après l'hypothèse faite pour le paramètre de distribution de R , est exclu.

Donc, dans le cas envisagé, les normales centrales de la surface R sont les binormales d'une courbe gauche à torsion constante:

$$(9.4) \quad \sigma_1 = \frac{1}{p_n} = \frac{c_1^2 + c_2^2}{c_2}.$$

D'autre part, la surface R_b engendrée par les binormales d'une courbe gauche C à torsion constante c est — comme on sait (1, p. 104) — une surface gauche à paramètre de distribution constant $p_n = \frac{1}{c}$.

Or, si l'on choisit sur la surface R_b la courbe C comme courbe directrice et que l'on tienne compte du fait que la courbure et la torsion géodésiques de C considérée comme une courbe tracée sur R_b , sont

$$(9.5) \quad \kappa'_{1g} = 0, \quad \sigma'_{1g} = \sigma_1 = c,$$

puisque C est une géodésique de R_b , on obtient à l'aide des (3.9) et (9.5) pour la courbure et la torsion géodésiques κ'_g, σ'_g d'une trajectoire orthogonale des génératrices de la surface R_b les expressions

$$(9.6) \quad \kappa'_g = -\frac{\beta'\sigma^2}{1 + \beta'^2 c^2}, \quad \sigma'_g = \frac{c}{1 + \beta'^2 c^2};$$

ce qui montre que κ'_g, σ'_g sont constantes sur chaque trajectoire orthogonale des génératrices de la surface R_b , le coefficient β' qui figure dans les formules (9.6) étant constant sur chacune de ces courbes.

Les considérations précédentes permettent d'énoncer le

THÉOREME XII. — *La courbure et la torsion géodésiques des trajectoires orthogonales des génératrices d'une surface réglée gauche ne sont constantes sur chacune de ces courbes que dans le cas où les génératrices de la surface sont les binormales d'une courbe gauche à torsion constante.*

Il est à noter que, d'après un théorème du à X. ANTONI (4, p. 168), si une trajectoire orthogonale des génératrices de la surface engendrée par les binormales d'une courbe gauche C_1 est une courbe de la surface à courbure géodésique constante toutes les trajectoires orthogonales des génératrices de la surface sont nécessairement des courbes à courbure géodésique constante.

Dans ce cas la courbe C_1 est nécessairement une courbe à torsion constante.

En effet, C_1 est une trajectoire orthogonale des génératrices de la surface R_b engendrée par ses binormales et en même temps une géodésique de cette surface. On aura donc, en désignant par $\kappa'_{1g}, \sigma'_{1g}$ la courbure et la torsion géodésiques de C_1 , $\kappa'_{1g} = 0, \sigma'_{1g} = \sigma_1$, où σ_1 est la torsion de cette courbe.

Or, si une autre trajectoire orthogonale C' des génératrices de R_b est une courbe à courbure géodésique constante: $\kappa'_g = c' \neq 0$ et que l'on choisisse sur la surface R_b la courbe C_1 comme courbe directrice, on aura, d'après la première formule (3.9), pour la courbure géodésique κ'_g de la courbe C'

l'expression

$$\kappa'_g = - \frac{\beta' \sigma_1^2}{1 + \beta'^2 \sigma_1^2} = \text{Cte},$$

ce qui prouve, eu égard au fait que β' est une constante sur la courbe C' , que C_1 doit être, dans le cas envisagé, une courbe à torsion constante.

De cette constatation jointe au théorème XII résulte que, si une trajectoire orthogonale des génératrices de la surface engendrée par les binormales d'une courbe gauche est une courbe de la surface à courbure géodésique constante ($\neq 0$), la courbure et la torsion géodésiques des trajectoires orthogonales des génératrices de la surface sont sur chacune de ces courbes toutes les deux constantes.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] A. BRAUNER, *Über Strahlflächen von Konstantem Drall*, Mh. für Math. 63 (1959), pp. 101-111.
 - [2] J. KRAMES, *Über den Drall windschiefer Flächen*, Anz. der Öst. Akad. der Wiss. Wien, Math-Nat. Klasse 97 (1960), pp. 187-192.
 - [3] E. KRUPPA, *Analytische und konstruktive Differential geometrie*, Springer 1957.
 - [4] — —, *Zur Differentialgeometrie der Strahlflächen und Raumkurven*, Stzb. der Öst. Akad. der Wiss. Wien (1957), pp. 143-176.
 - [5] G. SANNIA, *Una rappresentazione intrinseca delle rigate*, Giorn. di Mat. 63 (1925), pp. 31-47.
 - [6] G. E. WEATHERBURN, *Differential geometry of three dimensions*, vol. I, Cambridge, 1961.
-