Un teorema di esistenza per un problema misto.

di Maria Grazia Cazzani Nieri (Pavia) (*) (**)

Sunto. - *Sotto ampie ipotesi è dimostrato un teorema di esistenza relativo alla soluzione (in senso generalizzato) di un problema misto per il sistema semilineare*

$$(I)\qquad \sum_{j=1}^{m} a_{ij}(x, y)\left\{\frac{\partial z_j}{\partial x} + \rho_i(x, y)\frac{\partial z_j}{\partial y}\right\} = f_i(x, y, z_1, \dots, z_m), \qquad (i = 1, \dots, m).$$

La soluzione é ricercata nel campo funzionale costituito dalle m-ple di funzioni $z_i(x, y)$, $(i = 1, \dots, m)$, *le quali nel proprio campo di definizione sono assolutamente continue in x e lipschitziane in y, e soddisfano il sistema (I) quasi ovunque.*

In un lavoro precedente [1] è stato considerato il sistema di equazioni a derivate parziali quasi lineare iperbolico in due variabili indipendenti

$$p_i + \rho_i(x, y, z_1, \dots, z_m)q_i = f_i(x, y, z_1, \dots, z_m), \qquad (i = 1, \dots, m).$$

Nell'ipotesi che sia

$$\rho_i(\dots) > 0$$

per $i = 1, \dots, r$, con $1 \leq r < m$, e

$$\rho_i(\dots) < 0$$

per $i = r + 1, \dots, m$, sono stati dimostrati teoremi di esistenza, unicità e dipendenza continua dai dati per questo problema misto: ricercare una m-pla di funzioni

$$z_1(x, y), \dots, z_m(x, y)$$

soluzione quasi ovunque del sistema, soddisfacente le condizioni

$$z_i(0, y) = \Phi_i(y) \qquad (0 \leq y \leq b_0) \qquad (i = 1, \dots, m)$$

$$z_i(x, 0) = \Psi_i(x) \qquad (0 \leq x \leq a) \qquad (i = 1, \dots, r),$$

dove $\Phi_i(y)$, $(i = 1, \dots, m)$, $\Psi_i(x)$, $(i = 1, \dots, r)$, sono funzioni assegnate.

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dei contratti di ricerca del C.N.R.

(**) Entrata in Redazione il giorno 1 giugno 1970.

(1) M. G. Cazzani Nieri - *Su un problema misto per un sistema di equazioni a derivate parziali*. Annali di Matematica (IV), vol. LXXVII (1967), pp. 131-178.

Successivamente è stato considerato lo stesso problema misto relativo al sistema quasi lineare iperbolico in due variabili indipendenti (in forma caratteristica)

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij}(x, y, z_1, \ldots, z_m)(p_j + \rho_i(x, y, z_1, \ldots, z_m)q_j) =$$
$$= f_i(x, y, z_1, \ldots, z_m) \qquad (i = 1, \ldots, m)$$

e sono stati dimostrati teoremi di unicità e dipendenza continua dai dati [2].

In entrambi i lavori le funzioni $\rho_i(\ldots)$, $f_i(\ldots)$ sono supposte quasi continue in x e soddisfano nel complesso delle rimanenti variabili condizioni del tipo di CARATHÉODORY, le funzioni $a_{ij}(\ldots)$ sono assolutamente continue in x e lipschitziane nel complesso delle rimanenti variabili: come soluzione in senso generalizzato del sistema è intesa ogni m-pla di funzioni $z_i(x, y)$, $(i = 1, \ldots, m)$, assolutamente continue in x e lipschitziane in y, le quali soddisfano il sistema quasi ovunque nel proprio campo di definizione.

Nel presente lavoro consideriamo il sistema semilineare in forma caratteristica

$$\text{(I)} \qquad \sum_{j=1}^{m} a_{ij}(x, y)\{p_j + \rho_i(x, y)q_j\} = f_i(x, y, z_1, \ldots, z_m), \qquad (i = 1, \ldots, m)$$

e nelle stesse ampie ipotesi formulate nei teoremi precedenti dimostriamo l'esistenza di una soluzione del problema misto sopra enunciato, relativo al sistema (I): la soluzione, in senso generalizzato, è ricercata anche qui nella classe delle funzioni assolutamente continue in x e lipchitziane in y, soddisfa quasi ovunque nel proprio campo di definizione il sistema (I) e le condizioni

$$(\mathrm{I}_0) \qquad \begin{cases} z_i(0, y) = \Phi_i(y) & (0 \leq y \leq b_0) \qquad (i = 1, \ldots, m) \\ z_i(x, 0) = \Psi_i(x) & (0 \leq x \leq a) \qquad (i = 1, \ldots, r). \end{cases}$$

I primi due paragrafi sono preliminari: nel § 1 si dimostrano alcune condizioni necessarie a cui devono soddisfare i coefficienti e i dati affinchè la soluzione appartenga alla suddetta classe funzionale (Teorema I), nel § 2 è dimostrato un teorema di esistenza e unicità della soluzione del problema di CAUCHY relativo ad un sistema del primo ordine semilineare (Teorema II): tale teorema è utilizzato nel successivo § 3.

Nel § 3 infine è dimostrato il teorema di esistenza della soluzione del problema misto relativo al sistema (I) con un procedimento di approssimazioni successive (Teorema III).

---

[2] M. G CAZZANI NIERI, *Un teorema di unicità per un problema misto*, Rend. Ist. Lomb. di Scienze e Lettere, vol. 101 (1967), pp 589-608

§ 1. - 1. Richiamiamo una definizione [3].

Una funzione $z(x, y)$, definita in un campo T, si dice di classe G nel campo T se su ogni segmento di T parallelo all'asse x è funzione assolutamente continua della sola x e se esiste una costante L tale che sia

$$|z(x, y) - z(x, \bar{y})| \leq L\,|y - \bar{y}|$$

per tutte le coppie (x, y), $(x, \bar{y})$ appartenenti al campo T.

2. TEOREMA I (CONDIZIONE NECESSARIA). - *Sia dato il sistema*

$$\text{(I)} \qquad \sum_{j=1}^{m} a_{ij}(x, y)\left\{\frac{\partial z_j}{\partial x} + \rho_i(x, y)\frac{\partial z_j}{\partial y}\right\} = f_i(x, y, z_1, \dots, z_m), \qquad (i = 1, \dots, m).$$

Le funzioni $a_{ij}(x, y)$, $(i, j = 1, \dots, m)$ siano continue nel campo

$$D_0\colon \quad 0 \leq x \leq a_0, \qquad 0 \leq y \leq b_0 - \int_0^x M(t)dt,$$

essendo $M(x)$ una funzione non negativa, quasi continua e integrabile [4] *in $(0, a_0)$, tale che per $0 \leq x < a_0$ sia*

$$\int_0^x M(t)dt < b_0,$$

mentre per $x = a_0$ può anche valere l'uguaglianza; detto A il determinante delle funzioni a_{ij}, $(i, j = 1, \dots, m)$, in tutto D_0 sia

$$\text{(1)} \qquad A = 1,$$

inoltre, detto A_{m-r} il determinante delle funzioni a_{ij}, $(i, j = r + 1, \dots, m)$ essendo r un numero intero con $1 \leq r \leq m$, in tutto D_0 sia

$$\text{(2)} \qquad A_{m-r} \neq 0.$$

---

(3) Per tale definizione cfr. M. CINQUINI CIBRARIO e S. CINQUINI, *Equazioni a derivate parziali di tipo iperbolico*, «Monografie Matematiche del C.N.R.» 12, Ediz. Cremonese, Roma (1964) Cap. IV, § 2, n. 8, b). pp. 336.

(4) In tutto il presente lavoro l'integrabilità va intesa nel senso di LEBESGUE.

Sia $\mu(x)$ *una funzione quasi continua, non negativa e integrabile tale che sia*

$$|a_{ij}(x', y) - a_{ij}(x'', y)| \leq \int_{x'}^{x''} \mu(x)dx \qquad (i, j = 1, ..., m) \tag{3}$$

per ogni coppia di punti (x', y), (x'', y) *del campo* D_0, *con* $x' < x''$.

Esista un numero $\Lambda > 0$ *tale che per tutte le coppie di punti* (x, y), $(x, \bar{y})$ *del campo* D_0 *valgano le*

$$|a_{ij}(x, y) - a_{ij}(x, \bar{y})| \leq \Lambda |y - \bar{y}| \qquad (i, j = 1, ..., m). \tag{4}$$

Siano $\rho_i(x, y)$, $(i = 1, ..., m)$, *funzioni definite nel campo* D_0, *le quali su ogni segmento parallelo all'asse* x *siano quasi continue rispetto a* x *e, per ogni* x *fissato in* $(0, a_0)$, *siano continue in* y *nell'intervallo* $0 \leq y \leq b_0 - \int_0^x M(t)dt$; *per quasi tutti gli* x *di* $(0, a_0)$ *sia*

$$|\rho_i(x, y)| \leq M(x) \qquad (i = 1, ..., m) \tag{5}$$

per ogni y *dell'intervallo* $0 \leq y \leq b_0 - \int_0^x M(t)dt$: *esista una funzione* $L(x)$ *quasi continua, non negativa e integrabile in* $(0, a_0)$ *tale che per quasi tutti gli* x *di* $(0, a_0)$ *sia*

$$|\rho_i(x, y) - \rho_i(x, \bar{y})| \leq L(x) |y - \bar{y}| \qquad (i = 1, ..., m) \tag{6}$$

per ogni coppia di valori y, $\bar{y}$ *dell'intervallo* $(0, b_0 - \int_0^x M(t)dt)$.

Siano $f_i(x, y, z_1, ..., z_m)$, $(i = 1, ..., m)$, *funzioni definite nel campo*

$$C: \quad 0 \leq x \leq a_0, \qquad 0 \leq y \leq b_0 - \int_0^x M(t)dt, \qquad z_i^{(0)} - \gamma_i \leq z_i \leq z_i^{(0)} + \gamma_i, \qquad (i = 1, ..., m),$$

quasi continue in x *su ogni segmento appartenente al campo* C *e parallelo all'asse* x, *e, per ogni* x *fissato di* $(0, a_0)$, *continue nel complesso delle variabili* y, z_1, ..., z_m *nel campo*

$$\Delta_x: \quad 0 \leq y \leq b_0 - \int_0^x M(t)dt, \qquad z_i^{(0)} - \gamma_i \leq z_i \leq z_i^{(0)} + \gamma_i, \qquad (i = 1, ..., m);$$

esistano due funzioni $N(x)$, $L_1(x)$, *quasi continue, non negative e integrabili in* $(0, a_0)$, *tali che per quasi tutti gli* x *di* $(0, a_0)$ *sia*

$$|f_i(x, y, z_1, \dots, z_m)| \leq N(x) \qquad (i = 1, \dots, m) \tag{7}$$

per ogni $(m+1)$*-pla* $(y, z_1, \dots, z_m)$ *appartenente al campo* Δ_x, *e*

$$\begin{aligned} &|f_i(x, y, z_1, \dots, z_m) - f_i(x, \bar{y}, \bar{z}_1, \dots, \bar{z}_m)| \leq \\ &\leq L_1(x)\{|y - \bar{y}| + \sum_{j=1}^{m} |z_j - \bar{z}_j|\} \qquad (i = 1, \dots, m) \end{aligned} \tag{8}$$

per ogni coppia di $(m+1)$*-ple* $(y, z_1, \dots, z_m)$, $(\bar{y}, \bar{z}_1, \dots, \bar{z}_m)$ *appartenenti a* Δ_x.

Inoltre per quasi tutti gli x *di* $(0, a_0)$ *valgano le*

$$\rho_i(x, y) > 0 \qquad (i = 1, \dots, r) \tag{9_1}$$

$$\rho_i(x, y) < 0 \qquad (i = r+1, \dots, m) \tag{9_2}$$

per ogni y *dell'intervallo* $(0, b_0 - \int_0^x M(t)dt)$.

Sia

$$z_1(x, y), \dots, z_m(x, y) \tag{10}$$

una m*-pla di funzioni definite nel campo* D_0, *ivi di classe* G, *soddisfacenti in quasi tutto* D_0 *il sistema* (1) *e le condizioni*

$$\begin{cases} z_i(0, y) = \Phi_i(y) & (0 \leq y \leq b_0), \qquad (i = 1, \dots, m) \\ z_i(x, 0) = \Psi_i(x) & (0 \leq x \leq a_0), \qquad (1 = 1, \dots, r), \end{cases} \tag{I_0}$$

essendo $\Phi_i(y)$, $(i = 1, \dots, m)$, $\Psi_i(x)$, $(i = 1, \dots, r)$, *funzioni assegnate, rispettivamente lipschitziane in* $(0, b_0)$ *e assolutamente continue in* $(0, a_0)$, *soddisfacenti le*

$$\Phi_i(0) = \Psi_i(0) \qquad (i = 1, \dots, r). \tag{10'}$$

Dimostriamo che, indicati con $\beta_{\nu j}$ *i complementi algebrici degli elementi* $a_{\nu j}$ *nel determinante* A_{m-r} [5], *sono necessariamente soddisfatte le*

---

[5] Se $r = m - 1$, si intenda $\dfrac{\beta_{mm}}{A_1} = \dfrac{1}{a_{mm}}$.

$$\begin{gathered}
\Big| \sum_{j=1}^{r} a_{ij}(x,\ 0)\Psi'_j(x) + \sum_{j=r+1}^{m} a_{ij}(x,\ 0) \sum_{\nu=r+1}^{m} \frac{\beta_{\nu j}(x,\ 0)}{A_{m-r}(x,\ 0)} \times \\
\times [f_\nu(x,\ 0,\ \Psi_1(x),\ \dots,\ \Psi_r(x),\ z_{r+1}(x,\ 0),\ \dots,\ z_m(x,\ 0)) - \\
- \sum_{s=1}^{r} a_{\nu s}(x,\ 0)\Psi'_s(x)] - f_i(x,\ 0,\ \Psi_1(x),\ \dots,\ \Psi_r(x),\ z_{r+1}(x,\ 0),\ \dots,\ z_m(x,\ 0)) \Big| \leq \\
\leq F[\rho_i(x,\ 0) - \sum_{\nu=r+1}^{m} \rho_\nu(x,\ 0)] \qquad (i = 1,\ \dots,\ r)
\end{gathered} \tag{11}$$

in quasi tutto $(0,\ a_0)$, *essendo* F *una costante non negativa.*

a) Osserviamo che, se una m-pla di funzioni $z_j(x,\ y)$ $(j = 1,\ \dots,\ m)$, di classe G nel campo D_0, soddisfa quasi ovunque in D_0 il sistema (I), esiste una funzione $\tau(x)$ non negativa, quasi continua e integrabile in $(0,\ a_0)$, tale che su ogni segmento di D_0 parallelo all'asse x è

$$\left| \frac{\partial z_j(x,\ y)}{\partial x} \right| \leq \tau(x) \qquad (j = 1,\ \dots,\ m) \tag{12}$$

per quasi tutti gli x.

Infatti, considerando il sistema (I) come sistema algebrico lineare nelle $\frac{\partial z_j(x,\ y)}{\partial x}$ e risolvendolo, indicati con $\alpha_{ij}(x,\ y)$ i complementi algebrici degli elementi $a_{ij}(x,\ y)$ nel determinante A, in quasi tutto D_0 si ha

$$\frac{\partial z_j(x,\ y)}{\partial x} = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij}(x,\ y) \left\{ f_i(x,\ y,\ z_1(x,\ y),\ \dots,\ z_m(\dots)) - \rho_i(x,\ y) \sum_{h=1}^{m} \frac{\partial z_h(x,\ y)}{\partial y} \right\}, \qquad (j = 1,\ \dots,\ m),$$

da cui segue i quasi tutto D_0, tenuto conto delle (5) e (7),

$$\left| \frac{\partial z_j(x,\ y)}{\partial x} \right| \leq K_1 N(x) + K_2 M(x), \qquad (j = 1,\ \dots,\ m), \tag{12'}$$

essendo K_1, K_2 costanti opportune, di cui non stiamo a dare l'espressione esplicita.

Indicato con I_y l'intervallo dei valori x tali che $(x,\ y)$, in corrispondenza ad ogni y di $(0,\ b_0)$, appartenga a D_0, la (12') vale per quasi tutti gli y di $(0,\ b_0)$ in quasi tutto I_y; e subito si prova che in corrispondenza ad ogni

y (6) di $(0, b_0)$ la (12') vale per quasi tutti gli x di I_y.

b) Considerate le ultime $m - r$ equazioni del sistema (I) come equazioni algebriche lineari in $\dfrac{\partial z_j(x, y)}{\partial x}$, $(j = r+1, \dots, m)$, tenuto conto della (2), risolvendo rispetto a queste ultime seguono in quasi tutto D_0 le

$$\frac{\partial z_j(x, y)}{\partial x} = \sum_{\nu=r+1}^{m} \frac{\beta_{\nu j}(x, y)}{A_{m-r}(x, y)} \Big[f_\nu(x, y, z_1(x, y), \dots, z_m(\dots)) -$$
$$- \sum_{s=1}^{r} a_{\nu s}(x, y) \frac{\partial z_s(x, y)}{\partial x} - \rho_\nu(x, y) \sum_{s=1}^{m} a_{\nu s}(x, y) \frac{\partial z_s(x, y)}{\partial y} \Big],$$
$$(j = r+1, \dots, m),$$

le quali, in corrispondenza a quasi tutti gli y di $(0, b_0)$, valgono per quasi tutti gli x di I_y.

Per $i = 1, \dots, r$ in corrispondenza a quasi tutti gli y di $(0, b_0)$ per quasi tutti gli x di I_y è allora

$$\sum_{j=1}^{r} a_{ij}(x, y) \frac{\partial z_j(x, y)}{\partial x} + \sum_{j=r+1}^{m} \frac{a_{ij}(x, y)}{A_{m-r}(x, y)} \sum_{\nu=r+1}^{m} \beta_{\nu j}(x, y) \Big[f_\nu(x, y, z_1(\dots), \dots, z_m(\dots)) -$$
$$- \sum_{s=1}^{r} a_{\nu s}(x, y) \frac{\partial z_s(x, y)}{\partial x} - \rho_\nu(x, y) \sum_{s=1}^{m} a_{\nu s}(x, y) \frac{\partial z_s(x, y)}{\partial y} \Big] +$$
$$+ \rho_i(x, y) \sum_{j=1}^{m} a_{ij}(x, y) \frac{\partial z_j(x, y)}{\partial y} = f_i(x, y, z_1(x, y), \dots, z_m(\dots))$$

e

$$\sum_{j=1}^{r} a_{ij}(x, y) \frac{\partial z_j(x, y)}{\partial x} + \sum_{j=r+1}^{m} a_{ij}(x, y) \sum_{\nu=r+1}^{m} \frac{\beta_{\nu j}(x, y)}{A_{m-r}(x, y)} \Big| f_\nu(x, y, z_1(\dots), \dots, z_m(\dots)) -$$
$$(12'') \quad - \sum_{s=1}^{r} a_{\nu s}(x, y) \frac{\partial z_s(x, y)}{\partial x} \Big| - f_i(x, y, z_1(\dots), \dots, z_m(\dots)) =$$
$$= \sum_{j=r+1}^{m} a_{ij}(x, y) \sum_{\nu=r+1}^{m} \frac{\beta_{\nu j}(x, y)}{A_{m-r}(x, y)} \rho_\nu(x, y) \sum_{s=1}^{m} a_{\nu s}(x, y) \frac{\partial z_s(x, y)}{\partial y} -$$
$$- \rho_i(x, y) \sum_{s=1}^{m} a_{is}(x, y) \frac{\partial z_s(x, y)}{\partial y}, \qquad (i = 1, \dots, r);$$

---

(6) Infatti dalle (12') si ha per quasi tutti gli y di $(0, b_0)$ per ogni coppia x', x'' di I_y, con $x' < x''$,

$$(*) \qquad |z_j(x', y) - z_j(x'', y)| \leq \int_{x'}^{x''} [K_1 N(x) + K_2 M(x)] dy, \qquad (j = 1, \dots, m).$$

Per la continuità del primo membro rispetto a y e l'indipendenza del secondo membro da y, la $(*)$ vale in corrispondenza ad ogni y.

essendo le funzioni $a_{ij}(x, y)$ continue, quindi limitate, in D_0, tenuto conto della (2) e della continuità di $A_{m-r}(x, y)$ e infine della lipschitzianità delle $z_s(x, y)$, $(s = 1, \ldots, m)$, rispetto a y, esiste una costante non negativa F, che sarebbe facile calcolare esplicitamente, tale che sia

(13)

$$\left| \int_{x'}^{x''} \left\{ \sum_{j=1}^{r} a_{ij}(x, y) \frac{\partial z_j(x, y))}{\partial x} + \sum_{j=r+1}^{m} a_{ij}(x, y) \sum_{\nu=r+1}^{m} \frac{\beta_{\nu j}(x, y)}{A_{m-r}(x, y)} \left[f_\nu(x, y, z_1(\ldots), \ldots, z_m(\ldots)) - \right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. - \sum_{s=1}^{r} a_{\nu s}(x, y) \frac{\partial z_s(x, y)}{\partial x} \right] - f_i(x, y, z_1(\ldots), \ldots, z_m(\ldots)) \right\} dx \right| \leq F \int_{x'}^{x''} [\rho_i(x, y) - \sum_{\nu=r+1}^{m} \rho_\nu(x, y)] dx,$$

$$(i = 1, \ldots, r).$$

Le (13) valgono in corrispondeza a quasi tutti gli y di $(0\ b_0)$ per ogni coppia di valori x', x'' di I_y, con $x' < x''$.

Si verifica immediatamente [7] che tanto il primo che il secondo membro delle (13) sono funzioni continue (anzi lipschitziane) rispetto a y, per cui le

---

[7] Dimostriamo che la funzione

$$\int_{x'}^{x''} a_{ij}(x, y) \frac{\partial z_j(x, y)}{\partial x}\, dx$$

è lipschitziana in y. Infatti dalle (4) segue con artificio evidente, seguito da una integrazione per parti

$$\left| \int_{x'}^{x''} \left[a_{ij}(x, y) \frac{\partial z_j(x, y)}{\partial x} - a_{ij}(x, \bar{y}) \frac{\partial z_j(x, \bar{y})}{\partial x} \right] dx \right| =$$

$$= \left| \int_{x'}^{x''} \left\{ [a_{ij}(x, y) - a_{ij}(x, \bar{y})] \frac{\partial z_j(x, y)}{\partial x} + \left[\frac{\partial z_j(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial z_j(x, \bar{y})}{\partial x} \right] a_{ij}(x, \bar{y}) \right\} dx \right| \leq$$

$$\leq \Lambda\, | y \quad \bar{y} | \int_{x'}^{x''} \left| \frac{\partial z_j(x, y)}{\partial x} \right| dx + B_1\, | [z_j(x, y) - z_j(x, \bar{y})]_{x=x'}^{x=x''} | +$$

$$+ \int_{x'}^{x''} | z_j(x, y) - z_j(x, \bar{y}) | \left| \frac{\partial a_{ij}(x, y)}{\partial x} \right| dx,$$

dove B_1 è una costante positiva maggiorante $| a_{ij}(x, y) |$ in D_0; tenuto conto delle (3), (12) ne segue l'asserto.

Per gli altri termini la lipschitzianità è evidente in virtù delle (2), (4), (6), (8).

(13) valgono in corrispondenza ad ogni y di $(0, b_0)$ per tutte le coppie x', x'' di I_y, con $x' < x''$.

In particolare per $y = 0$ si ha

$$\left| \int_{x'}^{x''} \Big\{ \sum_{j=1}^{r} a_{ij}(x, 0)\Psi_j'(x) + \sum_{j=r+1}^{m} a_{ij}(x, 0) \sum_{\nu=r+1}^{m} \frac{\beta_{\nu j}(x, 0)}{A_{m-r}(x, 0)} [f_\nu(x, 0, \Psi_1(x), \dots, \Psi_r(x), z_{r+1}(x, 0), \dots,$$

$$\dots, z_m(x, 0)) - \sum_{s=1}^{r} a_{\nu s}(x, 0)\Psi_s'(x)] - f_i(x, 0, \Psi_1(x), \dots, \Psi_r(x), z_{r+1}(x, 0), \dots, z_m(x, 0)) \Big\} dx \right| \le$$

$$\le F \int_{x'}^{x''} [\rho_i(x, 0) - \sum_{\nu=r+1}^{m} \rho_\nu(x, 0)] dx \qquad (i = 1, \dots, r),$$

da cui evidentemente seguono le (11) in quasi tutto $(0, a_0)$.

OSSERVAZIONE. - In particolare se è

$$a_{ii} = 1, \qquad a_{ij} = 0 \quad \text{per} \quad i \neq j, \qquad (i, j = 1, \dots, m),$$

il sistema (I) è

$$p_i + \rho_i(x, y) q_i = f_i(x, y, z_1, \dots, z_m) \qquad (i = 1, \dots, m);$$

le (12'') divengono

$$\frac{\partial z_i(x, y)}{\partial x} - f_i(x, y, z_1, (x, y), \dots, z_m(x, y)) = -\rho_i(x, y) \frac{\partial z_i(x, y)}{\partial y} \qquad (i = 1, \dots, r),$$

da cui necessariamente per $x' < x''$

$$(13') \qquad \left| \int_{x'}^{x''} \left[\frac{\partial z_i(x, y)}{\partial x} - f_i(x, y, z_1(\dots), \dots, z_m(\dots)) \right] dx \right| \le F \int_{x'}^{x''} \rho_i(x, y) dx \qquad (i = 1, \dots, r)$$

e, per $y = 0$, le

$$(13_0') \qquad \left| \int_{x'}^{x''} [\Psi_i'(x) - f_i(x, y, \Psi_1(x), \dots, \Psi_r(x), z_{r+1}(x, 0), \dots, z_m(x, 0))] dx \right| \le$$

$$\le F \int_{x'}^{x''} \rho_i(x, 0) dx,$$

da cui infine ([8]) le

$$(11') \qquad |\Psi_i'(x) - f_i(x,\ 0,\ \Psi_1(x),\ \ldots,\ \Psi_r(x),\ z_{r+1}(x,\ 0),\ \ldots,\ z_m(x,\ 0)| \leq F\rho_i(x,\ 0) \qquad (i = 1,\ \ldots,\ r).$$

3. - Nelle ipotesi formulate nel n. 1, l'ulteriore ipotesi che, essendo $f_i(\ldots)$, $(i = 1, \ldots, m)$, indipendenti da $z_{r+1}, \ldots, z_m$, valgano le diseguaglianze (11) non è sufficiente per l'esistenza di una soluzione del sistema (I) sotto le condizioni (I_0)

$$z_1(x,\ y),\ \ldots,\ z_m(x,\ y),$$

di classe G in un opportuno campo D, come è mostrato dall'esempio che segue.

Dato il sistema

$$(\alpha) \qquad \begin{cases} p_1 + 2xq_1 + p_2 + 2xq_2 = 1 \\ \qquad p_2 - \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\, q_2 = 1, \end{cases}$$

vogliamo provare che nel campo

$$D:\quad 0 \leq x \leq \frac{1}{4} \qquad 0 \leq y \leq 1 - \sqrt{x}$$

non esiste soluzione di classe G del sistema dato la quale soddisfi le

$$(\beta) \qquad \begin{cases} z_1(0,\ y) = 0, \qquad z_2(0,\ y) = y & (0 \leq y \leq 1) \\ z_1(x,\ 0) = 0 & \left(0 \leq x \leq \dfrac{1}{4}\right). \end{cases}$$

Valgono le ipotesi del n. 1 e la diseguaglianza (11) che qui è

$$2x + \frac{1}{2\sqrt{x}} > 0, \qquad \left(0 < x \leq \frac{1}{4}\right).$$

Se si indicano con $(X,\ Y)$ le coordinate correnti e se $Y = g_i(X;\ x,\ y)$, $(i = 1,\ 2)$, sono le equazioni delle due curve caratteristiche ([9]) del sistema (α) per il punto $(x,\ y)$, risulta

([8]) Cfr. l.c. in ([1]), § 2, n. 1, dis. (35).

([9]) Per la defizione delle funzioni $g_i(X;\ x,\ y)$, $(i = 1,\ 2)$, cfr. il successivo § 2, n. 2.

$$g_1(X;\ x,\ y) = y - x^2 + X^2, \qquad g_2(X;\ x,\ y) = y + \sqrt{x} - \sqrt{X}.$$

Indicata con ξ l'ascissa del punto comune alla curva $Y = g_1(X;\ x,\ y)$ e al semiasse delle X positive, si ha $\xi = \sqrt{x^2 - y}$.

Se esistesse una soluzione $z_1(x,\ y)$, $z_2(x,\ y)$ di classe G del sistema (α) soddisfacente le condizioni (β), essa soddisferebbe necessariamente le equazioni integrali ottenute dalle (α) integrando lungo le curve caratteristiche [10], cioè le

$$\begin{cases} z_1(x,\ y) + z_2(x,\ y) = g_1(0;\ x,\ y) + x \\ \qquad\qquad\ \ z_2(x,\ y) = g_2(0;\ x,\ y) + x \end{cases}$$

nel campo D_1: $0 \leq x \leq \dfrac{1}{4}$, $x^2 \leq y \leq 1 - \sqrt{x}$, e le

$$\begin{cases} z_1(x,\ y) + z_2(x,\ y) = z_2(\xi,\ 0) + x - \xi \\ \qquad\qquad\ \ z_2(x,\ y) = g_2(0;\ x,\ y) + x \end{cases}$$

nel campo D_2: $0 \leq x \leq \dfrac{1}{4}$, $0 \leq y \leq x^2$.

Si avrebbe

$$(\gamma) \qquad z_1(x,\ y) = -\sqrt{x} - x^2, \qquad z_2(x,\ y) = y + \sqrt{x} + x$$

in D_1,

$$(\delta) \qquad z_1(x,\ y) = \sqrt[4]{x^2 - y} - y - \sqrt{x}, \qquad z_2(x,\ y) = y + \sqrt{x} + x$$

in D_2.

Dalle (δ), per $y < x^2$, si ha

$$\frac{\partial z_1(x,\ y)}{\partial y} = -\frac{1}{4\sqrt[4]{(x^2 - y)^3}} - 1$$

da cui

$$\lim_{y \to x^2 - 0} \frac{\partial z_1(x,\ y)}{\partial y} = -\infty,$$

e la funzione $z_1(x,\ y)$ non è lipschitziana rispetto a y.

([10]) Cfr più avanti l.c. in ([15]), § 1, n. 2 *b*), pp. 128-132.

§ 2.

1. TEOREMA II (PRELIMINARE TEOREMA DI ESISTENZA E UNICITÀ) - *Sia dato il sistema*

$$\text{(II)}\qquad \begin{aligned}&\sum_{j=1}^{k} b_{ij}(x, y)\left\{\frac{\partial Z_j}{\partial x} + \sigma_i(x, y)\frac{\partial Z_j}{\partial y}\right\} = \\ &= \chi_i(x, y, Z_1, \ldots, Z_k) + \sum_{j=1}^{n} c_{ij}(x, y)\left\{\frac{\partial u_{ij}(x, y)}{\partial x} + \sigma_i(x, y)\frac{\partial u_{ij}(x, y)}{\partial y}\right\},\\ &\qquad\qquad (i = 1, \ldots, k),\end{aligned}$$

dove x, y sono le variabili indipendenti e $Z_1(x, y)$, ..., $Z_k(x, y)$ le funzioni incognite.

Le funzioni $b_{ij}(x, y)$, $(i, j = 1, \ldots, k)$, siano continue nel campo (11)

$$D_0:\quad 0 \leq x \leq a_0, \qquad 0 \leq y \leq b_0 - \int_0^x M(t)dt,$$

essendo $M(x)$ una funzione non negativa, quasi continua e integrabile in $(0, a_0)$, tale che per $0 \leq x \leq a_0$ sia

$$\int_0^x M(t)dt < b_0,$$

mentre per $x = a_0$ può anche valere l'uguaglianza; detto B il determinante delle funzioni $b_{ij}(x, y)$, $(i, j = 1, \ldots, k)$, in tutto D_0 sia

$$B \neq 0.$$

Siano $\mu(x)$, $\bar{\mu}(x)$, $\nu(x)$ tre funzioni quasi continue, non negative e integrabili in $(0, a_0)$ tali che sia

$$(15')\qquad |b_{ij}(x', y) - b_{ij}(x'', y)| \leq \int_{x'}^{x''} \mu(x)dx \qquad (i, j = 1, \ldots, k)$$

---

(11) I simboli usati in tutto il presente paragrafo sono indipendenti da quelli usati nei §§ 1 e 3.

$$|c_{ij}(x', y) - c_{ij}(x'', y)| \leq \int_{x'}^{x''} \bar{\mu}(x)dx \tag{15''}$$

$$|u_{ij}(x', y) - u_{ij}(x'', y)| \leq \int_{x'}^{x''} \nu(x)dx \qquad (i = 1, ..., k,\ j = 1, ..., n), \tag{15'''}$$

per ogni coppia di punti (x', y), (x'', y) *del campo* D_0, *con* $x' < x''$.

Esistano tre costanti non negative Λ, $\bar{\Lambda}$, H, *tali che per tutte le coppie di punti* (x, y), $(x, \bar{y})$ *del campo* D_0 *valgano le*

$$|b_{ij}(x, y) - b_{ij}(x, \bar{y})| \leq \Lambda\, |y - \bar{y}| \qquad (i, j = 1, ..., k) \tag{16'}$$

$$|c_{ij}(x, y) - c_{ij}(x, \bar{y})| \leq \bar{\Lambda}\, |y - \bar{y}| \tag{16''}$$

$$|u_{ij}(x, y) - u_{ij}(x, \bar{y})| \leq H\, |y - \bar{y}| \qquad (i = 1, ..., k,\ j = 1, ..., n). \tag{16'''}$$

Siano $\sigma_i(x, y)$, $(i = 1, ..., k)$, *funzioni definite in* D_0, *le quali su ogni segmento parallelo all'asse* x *siano quasi continue rispetto a* x *e, per ogni* x *fissato in* $(0, a_0)$, *siano continue in* y *nell'intervallo* $0 \leq y \leq b_0 - \int_0^x M(t)dt$; *per quasi tutti gli* x *di* $(0, a_0)$ *sia*

$$|\sigma_i(x, y)| \leq M(x) \qquad (i = 1, ..., k) \tag{17}$$

per ogni y *dell'intervallo* $0 \leq y \leq b_0 - \int_0^x M(t)dt$; *esista una funzione* $L(x)$ *quasi continua, non negativa e integrabile in* $(0, a_0)$, *tale che per quasi tutti gli* x *di* $(0, a_0)$ *sia*

$$|\sigma_i(x, y) - \sigma_i(x, \bar{y})| \leq L(x)\, |y - \bar{y}| \qquad (i = 1, ..., k) \tag{18}$$

per ogni coppia di valori y, $\bar{y}$ *appartenenti all'intervallo* $(0, b_0 - \int_0^x M(t)dt)$.

Inoltre per quasi tutti gli x *di* $(0, a_0)$ *sia*

$$\sigma_i(x, y) < 0 \tag{19}$$

per ogni y *dell'intervallo* $(0, b_0 - \int_0^x M(t)dt)$.

Siano $\chi_i(x, y, Z_1, ..., Z_k)$, $(i = 1, ..., k)$, *funzioni definite nel campo*

$$C:\ \ 0 \leq x \leq a_0, \qquad 0 \leq y \leq b_0 - \int_0^x M(t)dt, \qquad Z_i^{(0)} - \gamma_i \leq Z_i \leq Z_i^{(0)} + \gamma_i,$$

$$(i = 1, ..., k),$$

le quali, in corrispondenza ad ogni $(k+1)$*-pla* $(y, Z_1, \ldots, Z_k)$ *del campo*

$$\Delta_x: \quad 0 \leq y \leq b_0 - \int_0^x M(t)dt, \qquad Z_i^{(0)} - \gamma_i \leq Z_i \leq Z_i^{(0)} + \gamma_i, \qquad (i = 1, \ldots, k),$$

siano quasi continue rispetto a x *su ogni segmento appartenente al campo* C *e parallelo all'asse* x, *e, per ogni* x *fissato di* $(0, a_0)$, *continue nel complesso delle variabili* $(y, Z_1, \ldots, Z_k)$ *in* Δ_x; *esistano due funzioni* $N(x)$, $L_1(x)$, *quasi continue, non negative e integrabili in* $(0, a_0)$, *tali che per quasi tutti gli* x *di* $(0, a_0)$ *sia*

$$|\chi_i(x, y, Z_1, \ldots, Z_k)| \leq N(x) \qquad (i = 1, \ldots, k) \tag{20}$$

per ogni $(k+1)$*-pla* $(y, Z_1, \ldots, Z_k)$ *di* Δ_x, *e*

$$\begin{aligned} &|\chi_i(x, y, Z_1, \ldots, Z_k) - \chi_i(x, \bar{y}, \bar{Z}_1, \ldots, \bar{Z}_k)| \leq \\ &\leq L_1(x) \left\{ |y - \bar{y}| + \sum_{j=1}^{k} |Z_j - \bar{Z}_j| \right\} \qquad (i = 1, \ldots, k) \end{aligned} \tag{21}$$

per ogni coppia di $(k+1)$*-ple* $(y, Z_1, \ldots, Z_k)$, $(\bar{y}, \bar{Z}_1, \ldots, \bar{Z}_k)$ *di* Δ_x.

Si dimostra che, assegnate k *funzioni lipschitziane in* $(0, b_0)$

$$\varphi_1(y), \ldots, \varphi_k(y)$$

tali che

$$\varphi_i(0) = Z_i^{(0)} \tag{22}$$

$$|\varphi_i(y) - Z_i^0| \leq \mu_i < \gamma_i \qquad (i = 1, \ldots, k), \quad (0 \leq y \leq b_0), \tag{22'}$$

esiste una ed una sola k*-pla di funzioni*

$$Z_1(x, y), \ldots, Z_k(x, y)$$

di classe G *in un campo*

$$D_1. \quad 0 \leq x \leq a_1, \; 0 \leq y \leq b_0 - \int_0^x M(t)dt,$$

dove a_1 *è un opportuno numero positivo* (12), *con* $a_1 \leq a_0$, *le quali soddisfano il sistema* (II) *in quasi tutto il campo* D_1 *e inoltre le*

(12) Circa la determinazione di a_1 cfr. n. 2. (27).

$$(\mathrm{II}_0) \qquad Z_i(0,\ y) = \varphi_i(y) \qquad (0 \leq y \leq b_0), \qquad (i = 1,\ \ldots,\ k).$$

2. Per le ipotesi fatte esistono cinque costanti positive λ, B_1, $\overline{B}_1$, B_3, ω tali che, indicati con $\beta_{ij}(x,\ y)$ i complementi algebrici di $b_{ij}(\ldots)$ in $B(\ldots)$, sia

$$(23) \qquad |\ \varphi_i(y) - \varphi_i(\bar{y})\ | \leq \lambda\ |\ \bar{y} - y\ |$$

per ogni coppia di valori y, $\bar{y}$ di $(0,\ b_0)$, e

$$(24) \qquad |\ b_{ij}(x,\ y)\ | \leq B_1, \qquad |\ c_{ij}(x,\ y)\ | \leq \overline{B}_1, \qquad |\ \beta_{ij}(x,\ y)\ | \leq B_3, \qquad |\ B(x,\ y)\ | \geq \omega$$

in tutto il campo D_0.

Posto

$$(25) \qquad \begin{cases} E_1(x) = \dfrac{kB_3}{\omega}[\mu(x) + \Lambda M(x)] \\[2ex] E_2(x) = \dfrac{kB_3}{\omega}[N(x) + n\overline{B}_1(\nu(x) + HM(x)) + kB_1\lambda M(x)] \end{cases}$$

e indicata con $U(x)$ la funzione definita dall'equazione differenziale (scritta in forma integrale)

$$(26) \qquad U(x) = k\int_0^x [E_1(X)U(X) + E_2(X)]dX,$$

cioè

$$(26') \qquad U(x) = k\int_0^x E_2(X)e^{k\int_X^x E_1(t)dt}\,dX,$$

la quale è non decrescente, sia a_1 un numero positivo, con $a_1 \leq a_0$, tale che valga la

$$(27) \qquad U(a_1) \leq k(\gamma_i - \mu_i) \qquad (i = 1,\ \ldots,\ k).$$

Dimostriamo l'esistenza di una soluzione del sistema (II), soddisfacente le (II_0), nel campo

$$D_1:\quad 0 \leq x \leq a_1, \qquad 0 \leq y \leq b_0 - \int_0^x M(t)dt.$$

Siano

$$Y = g_i(X;\ x,\ y) \qquad (i = 1,\ \dots,\ k)$$

le curve caratteristiche del sistema (II) definite dalle equazioni integrali

$$g_i(X;\ x,\ y) = y + \int_x^X \sigma_i(t,\ g_i(t;\ x,\ y))dt, \tag{28}$$

essendo $(x,\ y)$ un punto di D_1, e X, Y le coordinate correnti sulla curva.

Per $0 \leq X \leq x$ i punti $(X,\ g_i(X;\ x,\ y))$, $(i = 1,\ \dots,\ k)$, appartengono al campo D_1, inoltre le funzioni $g_i(X;\ x,\ y)$ risultano decrescenti in X, crescenti rispetto a y e rispetto a x, assolutamente continue in X, in x, lipschitziane in y [13].

Si può dimostrare che, nelle ipotesi enunciate nel n. 1, se k funzioni $Z_i(x,\ y)$, $(i = 1,\ \dots,\ k)$ sono di classe G e soddisfano il sistema integrale

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{k} b_{ij}(x,\ y)Z_j(x,\ y) = {} & \sum_{j=1}^{k} b_{ij}(0,\ g_i(0;\ x,\ y))\varphi_j(g_i(0;\ x,\ y)) + \\ & + \int_0^x \Big\{ \sum_{j=1}^{k} \frac{db_{ij}(X,\ g_i(X;\ x,\ y))}{dX} Z_j(X,\ g_i(\dots)) + \\ & + \chi_i(X,\ g_i(\dots),\ Z_1(X,\ g_i(\dots)),\ \dots,\ Z_k(X,\ g_i(\dots))) + \\ & + \sum_{j=1}^{n} c_{ij}(X,\ g_i(\dots)) \frac{du_{ij}(X,\ g_i(\dots))}{dX} \Big\} dX, \qquad (i = 1,\ \dots,\ k), \end{aligned} \tag{29}$$

nel campo D_1, in quasi tutto D_1 esse soddisfano il sistema (II), inoltre valgono le (II_0); e viceversa [15]

Posto

$$Z_i^{(0)}(x,\ y) = \varphi_j(y) \qquad (j = 1,\ \dots,\ k), \tag{30$_0$}$$

([13]) Circa la definizione e le proprietà delle funzioni $g_i(X;x,y)$ cfr. l.c. in ([1]), p. 137.

([14]) In corrispondenza ad ogni $(x,\ y)$ di D_1 la funzione $b_{ij}(X,\ g_i(X;x,\ y))$ è assolutamente continua rispetto a X in $(0,\ x)$ ed esiste in quasi tutto $(0,\ x)$ la $\dfrac{d\ b_{ij}(X,\ g_i(\dots))}{dX}$ (cfr. nota ([16])).

([15]) Cfr. M. CINQUINI CIBRARIO, ***Teoremi di esistenza per sistemi semilineari di equazioni a derivate parziali in più variabili indipendenti***, Annali di Matematica (IV), vol. LXVIII (1965), pp. 119-160. Cfr. § 1, n. 2, *b*), pp. 128-132 e § 1, m. 2, *f*), pp. 140-145; per dimostrare che dal sistema di equazioni a derivate parziali (II) segue il sistema integrale (29) e viceversa si ragiona in modo analogo.

tenuto conto della (14) definiamo le funzioni

$$Z_j^{(s)}(x,\ y) \qquad (j = 1, \ldots, k), \qquad (s = 1, 2, \ldots)$$

mediante le

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{k} b_{ij}(x,\ y) Z_j^{(s)}(x,\ y) &= \sum_{j=1}^{k} b_{ij}(0,\ g_i(0;\ x,\ y))\varphi_j(g_i(0;\ x,\ y)) + \\ &+ \int_0^x \Big\{ \sum_{j=1}^{k} \frac{db_{ij}(X,\ g_i(X;\ x,\ y))}{dX} Z_j^{(s-1)}(X,\ g_i(\ldots)) + \\ &+ \chi_i(X,\ g_i(\ldots),\ Z_1^{(s-1)}(X,\ g_i(\ldots)), \ldots,\ Z_k^{(s-1)}(X,\ g_i(\ldots))) + \\ &+ \sum_{j=1}^{m} c_{ij}(X,\ g_i(\ldots)) \frac{du_{ij}(X,\ g_i(\ldots))}{dX} \Big\} dX \qquad (i = 1, \ldots, k).\end{aligned} \tag{30}$$

3. *a*) - Indicate rispettivamente con λ_0, λ_1 le costanti di LIPSCHITZ delle funzioni $\frac{\beta_{ij}(x,\ y)}{B(x,\ y)}$, $(i, j = 1, \ldots, k)$, $g_i(X;\ x,\ y)$, $(i = 1, \ldots, k)$, rispetto a y e posto

$$\mu_{0i} = \mu_i + |\, Z_i^{(0)} \,|, \qquad \gamma_{0i} = \gamma_i + |\, Z_i^{(0)} \,|, \qquad (i = 1, \ldots, k),$$

$$\begin{aligned}\lambda_2 = \lambda + k\lambda_0 \Big\{ & B_1 \sum_{h=1}^{k} \mu_{0h} + \int_0^{a_1} \Big[\sum_{h=1}^{k} \gamma_{0h}(\mu(x) + \Lambda M(x)) + N(x) + \\ & + n\overline{B}_1(\nu(x) + HM(x)) \Big] dx \Big\} + \\ + \frac{kB_3}{\omega} \Big\{ & 2\Lambda\lambda_1 \sum_{h=1}^{k} \mu_{0h} + kB_1\lambda\lambda_1 + \Lambda \sum_{h=1}^{k} \gamma_{0h} + \\ & + \int_0^{a_1} \Big\{ \frac{k^2 B_3}{\omega} \Lambda\lambda_1 \Big[N(x) + n\overline{B}_1(\nu(x) + HM(x)) + 2 \sum_{h=1}^{k} \gamma_{0h}(\mu(x) + \Lambda M(x)) \Big] + \\ & + \lambda_1 L_1(x) + n\overline{\Lambda}\lambda_1(\nu(x) + HM(x)) + nH\lambda_1(\overline{\mu}(x) + \overline{\Lambda}M(x)) \Big\} dx + \\ & + n\overline{B}_1 H(1 + \lambda_1) \Big\}\end{aligned} \tag{31}$$

$$S(x) = \frac{kB_3}{\omega} \Big[\frac{k^2 B_3}{\omega} \Lambda\lambda_1 B_1 M(x) + \lambda_1 L_1(x) + \lambda_1(\mu(x) + 2\Lambda M(x)) \Big], \tag{32}$$

sia $V(x)$ la funzione definita in $(0, a_1)$ dall'equazione differenziale, scritta in forma integrale,

$$V(x) = k\lambda_2 + k\int_0^x S(X)V(X)dX, \tag{33}$$

cioè

$$V(x) = k\lambda_2 e^{k\int_0^x S(X)dX} \qquad (0 \leq x \leq a_1), \tag{33'}$$

la quale è non decrescente in $(0, a_1)$.

Siano $Z_j^{(s-1)}(x, y)$, $(j = 1, \ldots, k)$, funzioni di classe G nel campo D_1, soddisfacenti le

$$Z_j^{(s-1)}(0, y) = \varphi_j(y) \qquad (0 \leq y \leq b_0), \tag{34}$$

$$|Z_j^{(s-1)}(x, y) - \varphi_j(y)| \leq \frac{U(x)}{k} \tag{35}$$

nel campo D_1,

$$\left|\frac{Z_j^{(s-1)}(x, y) - Z_j^{(s-1)}(x, \bar{y})}{y - \bar{y}}\right| \leq \frac{V(x)}{k} \tag{36}$$

per ogni coppia di punti (x, y), $(x, \bar{y})$ del campo D_1,

$$\begin{aligned} &|Z_j^{(s-1)}(x', y) - Z_j^{(s-1)}(x'', y)| \leq \\ &\leq \frac{kB_3}{\omega}\int_{x'}^{x''}[B_1M(x)V(x) + 2\sum_{h=1}^{k}\gamma_{0h}(\mu(x) + \Lambda M(x)) + N(x) + \\ &+ n\bar{B}_1(\nu(x) + HM(x))]dx \end{aligned} \tag{37}$$

per ogni coppia di punti (x', y), (x'', y) appartenenti a D_1, con $x' < x''$, da cui seguono le

$$\begin{aligned} \left|\frac{\partial Z_j^{(s-1)}(x, y)}{\partial x}\right| \leq \frac{kB_3}{\omega}[B_1M(x)V(x) + 2\sum_{h=1}^{k}\gamma_{0h}(\mu(x) + \Lambda M(x)) + \\ + N(x) + n\bar{B}_1(\nu(x) + HM(x))], \end{aligned} \tag{37'}$$

le quali, in corrispondenza ad ogni y di $(0, b_0)$, valgono per quasi tutti gli x tali che (x, y) appartenga a D_1.

Si dimostra allora che le funzioni

$$Z_1^{(s)}(x, y), \ldots, Z_k^{(s)}(x, y),$$

definite dalle (30), sono di classe G in D_1 e soddisfano le (34), (35). (36), (37).
Sviluppiamo la dimostrazione nel successivo capoverso b).
Poichè le funzioni $Z_j^{(0)}(x, y)$, $(j = 1, \ldots, k)$, definite dalle

$$(30_0) \qquad Z_j^{(0)}(x, y) = \varphi_j(y) \qquad (j = 1, \ldots, x),$$

tenuto conto che è $\lambda < \lambda_2$, soddisfano le (34), (35), (36), (37), le funzioni $Z_j^{(1)}(x, y)$, $(j = 1, \ldots, k)$, sono di classe G in D_1 e soddisfano le (34), (35), (36), (37); e così proseguendo le funzioni delle successioni

$$Z_1^{(s)}(x, y), \ldots, Z_k^{(s)}(x, y) \qquad (s = 1, 2, \ldots)$$

sono di classe G in D_1 e soddisfano le (34), (35), (36), (37).

b) Dimostriamo che, se le funzioni $Z_j^{(s-1)}(x, y)$, $(j = 1, \ldots, k)$, sono di classe G in D_1 e soddisfano le (34), (35), (36), (37), delle stesse proprietà godono le funzioni $Z_j^{(s)}(x, y)$, $(j = 1, \ldots, k)$, definite dalle (30).
Osserviamo innanzitutto che dall'ipotesi che le funzioni $Z_j^{(s-1)}(x, y)$, $(j = 1, \ldots, k)$, soddisfino le (35) e dalle (22'), (27), seguono le

$$(38) \qquad | Z_j^{(s-1)}(x, y) - Z_j^{(0)} | \leq \gamma_j \qquad (j = 1, \ldots, k).$$

Le (30) si possono anche scrivere

$$\sum_{j=1}^{k} b_{ij}(x, y)[Z_j^{(s)}(x, y) - \varphi_j(y)] =$$

$$= \int_0^x \Bigg\{ \sum_{j=1}^{k} \frac{db_{ij}(X, g_i(X; x, y))}{dX} [Z_j^{(s-1)}(X, g_i(\ldots)) - \varphi_j(g_i(\ldots))] +$$

$$(30') \qquad + \chi_i(X, g_i(\ldots), Z_1^{(s-1)}(X, g_i(\ldots)), \ldots, Z_k^{(s-1)}(X, g_i(\ldots))) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{n} c_{ij}(X, g_i(\ldots)) \frac{du_j(X, g_i(\ldots))}{dX} -$$

$$- \sum_{j=1}^{k} b_{ij}(X, g_i(\ldots)) \frac{d\varphi_j(g_i(\ldots))}{dX} \Bigg\} dX, \qquad (i = 1, \ldots, k).$$

Dalle (30′), tenuto conto della (14), si ha

$$Z_j^{(s)}(0,\ y) = \varphi_j(y) \qquad (j = 1,\ \dots,\ k). \tag{34}$$

Indicata con $U^{(s-1)}(x)$, $(0 \leq x \leq a_1)$, la funzione

$$\max_{0 \leq y \leq b_0 - \int_0^x M(t)dt} \sum_{i=1}^{k} |\, Z_i^{(s-1)}(x,\ y) - \varphi_i(y) \,|,$$

tenuto conto delle (15), (16), (17), (20), (24) è

$$|\, Z_j^{(s)}(x,\ y) - \varphi_j(y) \,| \leq \frac{kB_3}{\omega} \int_0^x \{ [\mu(X) + \Lambda M(x)] U^{(s-1)}(X) +$$

$$+ N(X) + n\bar{B}_1[\nu(X) + HM(X)] + kB_1\lambda M(X) \}\, dX, \qquad (j = 1,\ \dots,\ k).$$

In virtù delle (25) si ha

$$|\, Z_j^{(s)}(x,\ y) - \varphi_j(y) \,| \leq \int_0^x [E_1(X) U^{(s-1)}(X) + E_2(X)] dX, \qquad (j = 1,\ \dots,\ k); \tag{39}$$

poichè dalle (35) segue

$$U^{(s-1)}(x) \leq U(x) \qquad (0 \leq x \leq a_1), \tag{40}$$

valgono le

$$|\, Z_j^{(s)}(x,\ y) - \varphi_j(y) \,| \leq \int_0^x [E_1(X) U(X) + E_2(X)] dX,$$

cioè tenuto conto della (26),

$$|\, Z_j^{(s)}(x,\ y) - \varphi_j(y) \,| \leq \frac{U(x)}{k} \qquad (j = 1,\ \dots,\ k). \tag{35}$$

Dimostriamo ora che in corrispondenza ad ogni x di $(0,\ a_1)$ le funzioni $Z_j^{(s)}(x,\ y)$, $(j = 1,\ \dots,\ k)$, sono lipschitziane rispetto a y in $(0,\ b_0 - \int_0^x M(t)dt)$ e soddisfano le (36).

Dalle (30) seguono le

$$
(41)\qquad \begin{aligned}
Z_j^{(s)}(x, y) = \sum_{i=i}^{k} \frac{\beta_{ij}(x, y)}{B(x, y)} \Big\{ \sum_{h=1}^{k} b_{ih}(0, g_i(0; x, y))\varphi_h(g_i(0; x, y)) + \\
+ \int_0^x \Big\{ \sum_{h=1}^{k} \frac{db_{ih}(X, g_i(X; x, y))}{dX} Z_h^{(s-1)}(X, g_i(...)) + \\
+ \chi_i(X, g_i(...), Z_1^{(s-1)}(X, g_i(...)), ..., Z_k^{(s-1)}(X, g_i(...))) + \\
+ \sum_{\nu=1}^{n} c_{i\nu}(X, g_i(...)) \frac{du_{i\nu}(X, g_i(...))}{dX} \Big\} dX, \qquad (j = 1, ..., k),
\end{aligned}
$$

da cui, con alcuni calcoli e integrazioni per parti, tenuto conto delle (15), (16), (17), (20), (21), (22'), (23), (24), (28), (38) e del significato delle costanti λ_0, λ_1 (cfr. capoverso *a*)), posto

$$
g_i(X; x, y) = g_i, \qquad g_i(X; x, \bar{y}) = \bar{g}_i \qquad (i = 1, ..., k),
$$

in corrispondenza ad ogni coppia di punti (x, y), $(x, \bar{y})$ del campo D_1 seguono le [16]

---

[16] Considerate le funzioni $b_{ij}(X, g_i(X; x, y))$, $(i, j = 1, ..., k)$, per ogni coppia di valori X', X'' tali che i punti $(X', g_i(X'; x, y))$, $(X'', g_i(X''; x, y))$ (che indichiamo per brevità con (X', g_i'), (X'', g_i'')) appartengano al campo D_1, in virtù delle (15'), (16'), (17), (28) si ha

$$
\begin{aligned}
| b_{ij}(X', g_i') - b_{ij}(X'', g_i'') | \leq | b_{ij}(X', g_i') - b_{ij}(X', g_i'') | + \\
+ | b_{ij}(X', g_i'') - b_{ij}(X'', g_i'') | \leq \left| \int_{X'}^{X''} [\mu(x) + \Lambda M(x)] dx \right|,
\end{aligned}
$$

da cui segue l'assoluta continuità delle funzioni $b_{ij}(X, g_i(X; x, y)$ nell'intervallo dei valori X tali che $(X, g_i(X; x, y))$ appartenga a D_1; inoltre per quasi tutti gli X di tale intervallo è

$$
\left| \frac{db_{ij}(X, g_i(X; x, y))}{dX} \right| \leq \mu(X) + \Lambda M(X).
$$

In modo analogo si ottengono dalle (15), (16), (17), (28), (36), (37) le maggiorazioni relative alle $\frac{dc_{ij}(X, g_i(X, x, y))}{dX}$, $\frac{du_{ij}(X, g_i(...))}{dX}$, $\frac{dZ_j^{(s-1)}(X, g_i(..))}{dX}$.

$$\left|\frac{Z_j^{(s)}(x,\,y)-Z_j^{(s)}(x,\,\bar y)}{y-\bar y}\right|\le$$

$$\le k\lambda_0\left\{B_1\sum_{h=1}^{k}\mu_{0h}+\int_0^{a_1}\sum_{h=1}^{k}\gamma_{0h}(\mu(X)+\Lambda M(X))+N(X)+n\bar B_1(\nu(X)+HM(X))]dX\right\}+$$

$$+\frac{kB_3}{\omega}(\Lambda\lambda_1\sum_{h=1}^{k}\mu_{0h}+kB_1\lambda\lambda_1)+$$

$$+\frac{kB_3}{\omega\,|\,y-\bar y\,|}\sum_{h=1}^{k}\left|\left[(b_{ih}(X,\,g_i)-b_{ih}(X,\,\bar g_i))Z_h^{(s-1)}(X,\,g_i)\right]_{X=0}^{X=x}-\right.$$

$$-\int_0^x\left[(b_{ih}(X,\,g_i)-b_{ih}(X,\,\bar g_i))\frac{dZ_h^{(s-1)}(X,\,g_i)}{dX}+\right.$$

$$\left.\left.+\frac{db_{ih}(X,\,\bar g_i)}{dX}(Z_h^{(s-1)}(X,\,g_i)-Z_h^{(s-1)}(X,\,\bar g_i))\right]dX\right|+$$

$$+\frac{kB_3}{\omega}\int_0^x L_1(X)\left(\lambda_1+\sum_{h=1}^{k}\left|\frac{Z_h^{(s-1)}(X,\,g_i)-Z_h^{(s-1)}(X,\,\bar g_i)}{y-\bar y}\right|\right)dX+$$

$$+\frac{kB_3}{\omega\,|\,y-\bar y\,|}\sum_{h=1}^{n}\left|\left[(u_{ih}(X,\,g_i)-u_{ih}(X,\,\bar g_i))c_{ih}(X,\,g_i)\right]_{X=0}^{X=x}-\right.$$

$$-\int_0^x\left[(u_{ih}(X,\,g_i)-u_{ih}(X,\,\bar g_i))\frac{dc_{ih}(X,\,g_i)}{dX}+\right.$$

$$\left.\left.+\frac{du_{ij}(X,\,\bar g_i)}{dX}(c_{ih}(X,\,g_i)-c_{ih}(X,\,\bar g_i))\right]dX\right|,\qquad (j=1,\,\dots,\,k).$$

Posto

$$\sup_{\substack{0\le X\le x\\ 0\le y\le b_0-\int_0^X M(t)dt\\ 0\le\bar y\le b_0-\int_0^X M(t)dt}}\sum_{h=1}^{k}\left|\frac{Z_h^{(s-1)}(X,\,y)-Z_h^{(s-1)}(X,\,\bar y)}{y-\bar y}\right|=A_{s-1}(x)\tag{42}$$

e tenuto conto delle (15), (16), (17), (24), (28), (37), (38) e inoltre delle posizioni (31), (32) si ha

$$\left| \frac{Z_j^{(s)}(x,\ y) - Z_j^{(s)}(x,\ \bar{y})}{y - \bar{y}} \right| \leq \lambda_2 + \int_0^x S(X) A_{s-1}(X) dX \tag{42'}$$

ed essendo, in virtù delle (36),

$$A_{s-1}(x) \leq V(x)$$

seguono le

$$\left| \frac{Z_j^{(s)}(x,\ y) - Z_j^{(s)}(x,\ \bar{y})}{y - \bar{y}} \right| \leq \frac{V(x)}{k} \qquad (j = 1,\ \ldots,\ k). \tag{36}$$

Dimostriamo ora che le funzioni $Z_j^{(s)}(x,\ y)$, $(j = 1,\ \ldots,\ k)$, sono assolutamente continue rispetto a x su ogni segmento di D_1 parallelo all'asse x e valgono le (37).

Siano $(x',\ y)$, $(x'',\ y)$ due punti di D_1, con $x' < x''$.

Consideriamo la funzione

$$g_i(X;\ x'',\ y) = y + \int_{x''}^{X} \sigma_i(t,\ g_i(t;\ x'',\ y))dt;$$

tenuto conto delle (17), per $0 \leq X \leq x''$ è

$$0 \leq g_i(X;\ x'',\ y) \leq b_0 - \int_0^X M(t)dt,$$

in particolare, posto $y'_i = g_i(x';\ x'',\ y)$, il punto $(x',\ y'_i)$ appartiene al campo D_1. Inoltre in virtù delle (17), (28) è

$$0 < y'_i - y < \int_{x'}^{x''} M(x)dx. \tag{43}$$

Si ha

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{k} b_{ij}(x',\ y) Z_j^{(s)}(x'',\ y) - \sum_{j=1}^{k} b_{ij}(x',\ y) Z_j^{(s)}(x',\ y) = \\ &= \sum_{j=1}^{k} [b_{ij}(x'',\ y) Z_j^{(s)}(x'',\ y) - b_{ij}(x',\ y'_i) Z_j^{(s)}(x',\ y'_i) + \\ &+ b_{ij}(x',\ y'_i) Z_j^{(s)}(x',\ y'_i) - b_{ij}(x',\ y) Z_j^{(s)}(x',\ y)]. \end{aligned} \tag{44}$$

Indicato con Δ_i il secondo membro della (44), tenuto conto delle (16'), (30) e delle (36) (relative alle $Z_j^{(s)}(x, y)$), poichè i punti (x'', y), (x', y_i') appartengono alla curva $Y = g_i(X; x'', y)$, si ha

$$|\Delta_i| \leq \int_{x'}^{x''} \left[\sum_{j=1}^{k} \gamma_{0j}(\mu(x) + \Lambda M(x)) + N(x) + n\overline{B}_1(\nu(x) + HM(x)) \right] dx +$$

$$+ \left[\Lambda \sum_{j=1}^{k} \gamma_{0j} + B_1 V(x') \right] (y_i' - y);$$

tenuto conto della (43), ed essendo $V(x)$ non decrescente in $(0, a_1)$, si ha

$$(45) \qquad \begin{aligned} |\Delta_i| \leq \int_{x'}^{x''} \Big\{ & \sum_{j=1}^{k} \gamma_{0j}(\mu(x) + \Lambda M(x)) + N(x) + n\overline{B}_1(\nu(x) + HM(x)) + \\ & + \left[\Lambda \sum_{j=1}^{k} \gamma_{0j} + B_1 V(x) \right] M(x) \Big\} dx \qquad (i = 1, \ldots, k). \end{aligned}$$

Scritte le (44) nella forma

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{k} b_{ij}(x'', y)[Z_j^{(s)}(x'', y) - Z_j^{(s)}(x', y)] = \\ & = \sum_{j=1}^{k} [b_{ij}(x', y) - b_{ij}(x'', y)] Z_j^{(s)}(x', y) + \Delta_i \qquad (i = 1, \ldots, k), \end{aligned}$$

tenuto conto delle (14), (45) seguono le

$$(37) \qquad \begin{aligned} & |Z_j^{(s)}(x'', y) - Z_j^{(s)}(x', y)| \leq \\ & \leq \frac{kB_3}{\omega} \int_{x'}^{x''} \Big\{ 2 \sum_{j=1}^{k} \gamma_{0j}[\mu(x) + \Lambda M(x)] + N(x) + n\overline{B}_1[\nu(x) + HM(x)] + \\ & + B_1 M(x) V(x) \Big\} dx \qquad (j = 1, \ldots, k); \end{aligned}$$

ne segue l'assoluta continuità delle funzioni $Z_j^{(s)}(x, y)$, $(i = 1, \ldots, k)$, rispetto a x su ogni segmento di D_1 parallelo all'asse x, e inoltre valgono le (37).

4. *a*) - *Convergenza delle approssimazioni successive.* Posto

$$(46)\qquad v_s(t) = \sup_{\substack{0 \le \tau \le t \\ 0 \le y \le b_0 - \int_0^\tau M(\eta)d\eta}} \sum_{j=1}^{k} | Z_j^{(s)}(\tau, y) - Z_j^{(s-1)}(\tau, y) |, \qquad (s = 1, 2, 3, ...),$$

dalle (41) si ha, per $0 \le X \le x$, $s = 2, 3, ...$,

$$| Z_j^{(s)}(X, y) - Z_j^{(s-1)}(X, y) | \le \frac{kB_3}{\omega} \int_0^X [\mu(t) + \Lambda M(t) + L_1(t)] v_{s-1}(t) dt \le$$

$$\le \frac{kB_3}{\omega} \int_0^x [\mu(t) + \Lambda M(t) + L_1(t)] v_{s-1}(t) dt$$

e quindi anche

$$(47)\qquad v_s(x) \le \frac{k^2B_3}{\omega} \int_0^x [\mu(t) + \Lambda M(t) + L_1(t)] v_{s-1}(t) dt, \qquad (s = 2, 3, ...).$$

In tutto $(0, a_1)$ le funzioni $v_s(t)$, $(s = 1, 2, ...)$, sono non decrescenti, in particolare si ha

$$(47')\qquad v_1(t) \le v_1(a_1).$$

Si dimostra allora, tenuto conto della (47), che per $s = 2, 3, ...$ è [17]

---

[17] Posto $\frac{k^2B_3}{\omega}[\mu(t) + \Lambda M(t) + L_1(t)] = M_1(t)$, dalle (47), (47') per $s = 2$ si ha $v_2(x) \le \le \int_0^x M_1(t) v_1(t) dt \le v_1(a_1) \int_0^x M_1(t) dt$, e la (47'') è provata per $s = 2$. Supposta vera la (47'') per $s = \nu$, si prova che essa vale per $s = \nu + 1$, in virtù delle (47). Si ha infatti

$$v_{\nu+1}(x) \le \int_0^x M_1(t) v_\nu(t) dt \le \int_0^x M_1(t) v_1(a_1) \frac{\left[\int_0^t M_1(\tau)d\tau\right]^{\nu-1}}{(\nu-1)!} dt =$$

$$= \frac{v_1(a_1)}{(\nu-1)!} \left[\frac{\left(\int_0^t M_1(\tau)d\tau\right)^\nu}{\nu} \right]_{t=0}^{t=x} = v_1(a_1) \cdot \frac{\left[\int_0^x M_1(t)dt\right]^\nu}{\nu!}.$$

$$(47'') \qquad v_s(x) \leq v_1(a_1) \frac{\left\{ \dfrac{k^2 B^3}{\omega} \displaystyle\int_0^x [\mu(t) + \Lambda M(t) + L_1(t)] dt \right\}^{s-1}}{(s-1)!} \qquad (0 \leq x \leq a_1).$$

Dalla convergenza della serie numerica

$$\sum_{s=0}^{\infty} v_1(a_1) \frac{\left[\dfrac{k^2 B_3}{\omega} \displaystyle\int_0^{a_1} [\mu(t) + \Lambda M(t) + L_1(t)] dt \right]^s}{s!}$$

segue la convergenza uniforme delle funzioni $Z_j^{(s)}(x, y)$, $(j = 1, \ldots, k)$, in tutto il campo D_1; le funzioni

$$Z_j(x, y) = \lim_{s \to \infty} Z_j^{(s)}(x, y) \qquad (j = 1, \ldots, k)$$

soddisfano il sistema (29) nel campo D_1 e le condizioni (II_0), come segue subito dalle (34) o anche direttamente dalle (29) per $x = 0$.

b) Dalle (36), (37), le quali valgono anche per le funzioni $Z_j(x, y)$, $(j = 1, \ldots, k)$, segue che le funzioni $Z_j(x, y)$, $(j = 1, \ldots, k)$, sono di classe G nel campo D_1.

Dal sistema (29), il quale è soddisfatto in tutto il campo D_1, segue allora ([17 bis]) che il sistema (II) è soddisfatto dalle funzioni $Z_j(x, y)$, $(j = 1, \ldots, k)$, in quasi tutto il campo D_1; e valgono le (II_0).

Posto

$$A(x) = \sup_{\substack{0 \leq X \leq x \\ 0 \leq y \leq b_0 - \int_0^X M(t) dt \\ 0 \leq \bar{y} \leq b_0 - \int_0^X M(t) dt}} \sum_{j=1}^{k} \left| \frac{Z_j(X, y) - Z_j(X, \bar{y})}{y - \bar{y}} \right|,$$

dal sistema (II) seguono direttamente, risolvendo rispetto alle $\dfrac{\partial Z_j(x, y)}{\partial x}$ e tenendo conto delle (15'''), (16'''), (17), (20), (24), le

$$(37_0) \quad \left| \frac{\partial Z_j(x, y)}{\partial x} \right| \leq \frac{k B_3}{\omega} \{ B_1 M(x) A(x) + N(x) + n \bar{B}_1 (\nu(x) + H M(x)) \}, \quad (j = 1, \ldots, k),$$

([17 bis]) Cfr. l.c. a nota ([15]), § 1, n. 2, *f*), pp. 140-145 le quali valgono su ogni segmento di D_1 parallelo all'asse x per quasi tutti gli x.

Con un calcolo diretto (analogo a quello sviluppato per dimostrare le (36)), a partire dalle (29), tenendo conto delle (37_0), si provano le

$$(36_0) \qquad \left|\frac{Z_j(x,\ y) - Z_j(x,\ \bar{y})}{y-\bar{y}}\right| \leq \frac{\overline{V}(x)}{k} \qquad (j=1,\ \dots,\ k),$$

dove [18]

$$(36'_0) \qquad \overline{V}(x) = k\bar{\lambda}_2 e^{k\int_0^x S(X)dX} \qquad (0 \leq x \leq a_1),$$

essendo $\bar{\lambda}_2$ la costante ottenute da λ_2 sopprimendo il termine

$$2\frac{k^3B_3^2}{\omega^2}\Lambda\lambda_1 \sum_{j=1}^{k} \gamma_{0j} \int_0^{a_1} (\mu(x) + \Lambda M(x))dx.$$

5. - *Unicità*. Indicata con $\overline{Z}_j(x,\ y)$, $(j = 1,\ \dots,\ k)$, un'altra soluzione di classe G del sistema (II) nel campo D_1, soddisfacente le (II_0), necessariamente essa soddisfa il sistema (29). Posto

$$\zeta(x) = \max_{0\leq y\leq b_0-\int_0^x M(t)dt} \sum_{j=1}^{k} |\, Z_j(x,\ y) - \overline{Z}_j(x,\ y)\,|,$$

dimostriamo che in tutto D_1 è

$$(48) \qquad \zeta(x) = 0.$$

Infatti, risolto il sistema di equazioni (29) considerate come equazioni algebriche in $Z_j(x,\ y)$, $(j = 1,\ \dots,\ k)$, tenuto conto delle (15'), (16'), (21), (24) si ha

$$|\, z_j(x,\ y) - z_j(x,\ \bar{y})\,| \leq \frac{k^2B_3}{\omega}\int_0^x [\mu(X) + \Lambda M(X) + L_1(X)] \times$$

$$\times\, |\, Z_j(X,\ g_i(X\,;\ x,\ y)) - \overline{Z}_j(X,\ g_i(\dots))\,|\, dX,$$

---

[18] Si trova infatti (cfr. le (42'))

$$A(x) \leq k\bar{\lambda}_2 + k\int_0^x S(X)A(X)dX.$$

e anche

$$\zeta(x) \leq \frac{k^2 B_3}{\omega} \int_0^x [\mu(X) + \Lambda M(X) + L_1^-(X)]\zeta(X) dX,$$

da cui segue la (48) in virtù del lemma di GRONWALL generalizzato [19].

§ 3.

1. TEOREMA III (DI ESISTENZA) - *Valgano le ipotesi del Teorema I sulle funzioni* $a_{ij}(x, y)$, $\rho_i(x, y)$, $f_i(x, y, z_1, \dots, z_m)$, $(i, j = 1, \dots, m)$ *e sui dati* $\Phi_i(y)$, $(i = 1, \dots, m)$, $\Psi_i(x)$, $(i = 1, \dots, r)$.

Sia

$$(49) \quad \begin{cases} \Phi_i(0) = z_i^{(0)} & & (i = 1, \dots, m), \\ |\Phi_i(y) - \Phi_i(0)| \leq \mu_i < \gamma_i & (0 \leq y \leq b_0), & (i = r+1, \dots, m), \\ |\Phi_i(y) - \Phi_i(0)| \leq \frac{\mu_i}{2} < \frac{\gamma_i}{2} & (0 \leq y \leq b_0), & (i = 1, \dots, r), \\ |\Psi_i(x) - \Phi_i(0)| \leq \frac{\mu_i}{2} & (0 \leq x \leq a_0), & (i = 1, \dots, r). \end{cases}$$

Supponiamo inoltre che in quasi tutto $(0, a_0)$ *sia*

$$(11_1) \quad \begin{aligned} &\Big| \sum_{j=1}^{r} a_{ij}(x, 0)\Psi_j'(x) + \sum_{j=r+1}^{m} a_{ij}(x, 0) \sum_{\nu=r+1}^{m} \frac{\beta_{\nu j}(x, 0)}{A_{m-r}(x, 0)} [f_\nu(x, 0, \Psi_1(x), \dots, \Psi_r(x), \\ &\qquad\qquad z_{r+1}, \dots, z_m) - \\ &- \sum_{s=1}^{r} a_{\nu s}(x, 0)\Psi_s'(x)] - f_i(x, 0, \Psi_1(x), \dots, \Psi_r(x), z_{r+1}, \dots, z_m) \Big| \leq \\ &\leq F\rho_i(x, 0), \qquad\qquad (i = 1, \dots, r) \end{aligned}$$

e

$$(11_2) \quad \sum_{s=1}^{m} \Big| \sum_{j=r+1}^{m} a_{ij}(x, 0) \sum_{\nu=r+1}^{m} \frac{\beta_{\nu j}(x, 0)}{A_{m-r}(x, 0)} a_{\nu s}(x, 0)\rho_\nu(x, 0) \Big| \leq F\rho_i(x, 0) \qquad (i = 1, \dots, r)$$

---

[19] Cfr. G. SANSONE - R. CONTI, *Equazioni differenziali non lineari*, « Monografie Matematiche del C.N.R. », Ediz. Cremonese, Roma (1956), Cap. I, § 2, n. 1, pp. 15-16.

per ogni $(m-r)$*-pla* $z_{r+1}, \dots, z_m$ *con* $|z_j - z_j^{(0)}| \leq \gamma_j$, $(j = r+1, \dots, m)$, *essendo* F *una costante non negativa.*

Si dimostra che esiste una m-pla di funzioni

$$z_1(x, y), \dots, z_m(x, y),$$

di classe G in un campo

$$D: \qquad 0 \leq x \leq a, \qquad 0 \leq y \leq b_0 - \int_0^x M(t)dt,$$

dove a *è un opportuno numero positivo* ([20]), *con* $a \leq a_0$, *la quale soddisfa quasi ovunque in* D *il sistema* (I), *e inoltre le condizioni* (I_0) *nei rispettivi intervalli* $(0, b_0)$, $(0, a_0)$.

2. - Per le ipotesi fatte esistono cinque costanti positive λ, B_1, B_2, B_3, ω tali che sia

$$|\Phi_i(y) - \Phi_i(\bar{y})| \leq \lambda |y - \bar{y}| \qquad (i = 1, \dots, m) \tag{50}$$

per ogni coppia di valori y, $\bar{y}$ di $(0, b_0)$, e in tutto D_0

$$|a_{ij}(x, y)| \leq B_1 \qquad (i, j = 1, \dots, m) \tag{51}$$

$$|\alpha_{ij}(x, y)| \leq B_2 \tag{52}$$

$$|\beta_{ij}(x, y)| \leq B_3 \tag{53}$$

$$|A_{m-r}(x, y)| \geq \omega \tag{54}$$

Consideriamo le curve caratteristiche definite nel campo D dalle equazioni ([21])

$$g_i(X;\ x, y) = y + \int_x^X \rho_i(t, g_i(t;\ x, y))\, dt, \qquad (i = 1, \dots, m), \tag{55}$$

essendo (x, y) un punto di D e X, Y le cordinate correnti sulla curva.

Risulta per $i = 1, \dots, m$

$$|g_i(X;\ x, y) - g_i(X;\ x, \bar{y})| \leq \lambda_1 |y - \bar{y}|, \tag{56}$$

([20]) Circa la determinazione di a cfr. n. 4, (65), (65*).

([21]) Circa la definizione e le proprietà delle funzioni $g_i(X; x, y)$ cfr. l.c. in ([1]), pp. 137.

dove

$$\lambda_1 = e^{\int_0^a L(t)dt},$$

$$(57) \qquad |g_i(X;\ x',\ y) - g_i(X;\ x'',\ y)| \leq \lambda_1 \int_{x'}^{x''} M(t)dt.$$

Inoltre è (cfr. nota ([16]))

$$(58) \qquad |a_{ij}(X',\ g_i(X';\ x,\ y)) - a_{ij}(X'',\ g_i(X'';\ x,\ y))| \leq \int_{X'}^{X''} (\mu(t) + \Lambda M(t))dt$$

e

$$(58') \qquad \left|\frac{da_{ij}(X,\ g_i(X;\ x,\ y))}{dX}\right| \leq \mu(X) + \Lambda M(X) \qquad (i,\ j = 1,\ \dots,\ m).$$

Si intende che le (56), (57), (58), (58′) valgono per tutti i punti $(X,\ g_i(X;\ x,\ y))$, o coppie di punti, appartenenti al campo D.

3. - Definiamo in D le funzioni $z_j^{(0)}(x,\ y)$, $(j = 1,\ \dots,\ r)$, mediante le

$$(59) \qquad z_j^{(0)}(x,\ y) = \Psi_j(x) + \Phi_j(y) - \Phi_j(0)$$

e successivamente, per $n = 1,\ 2,\ \dots$, definiamo le funzioni $z_j^{*(n)}(x,\ y)$, $(j = r+1,\ \dots,\ m)$ mediante il sistema di equazioni integrali

$$\sum_{j=r+1}^{m} a_{ij}(x,\ y) z_j^{*(n)}(x,\ y) + \sum_{j=1}^{r} a_{ij}(x,\ y) z_j^{(n-1)}(x,\ y) =$$

$$= \sum_{j=1}^{m} a_{ij}(0,\ g_i(0;\ x,\ y))\Phi_j(g_i(0;\ x,\ y)) +$$

$$(60) \qquad + \int_0^x \left\{ \sum_{j=r+1}^{m} \frac{da_{ij}(X,\ g_i(X;\ x,\ y))}{dX} z_j^{*(n)}(X,\ g_i(\dots)) + \sum_{j=1}^{r} \frac{da_{ij}(X,\ g_i(\dots))}{dX} z_j^{(n-1)}(X,\ g_i(\dots)) + \right.$$

$$\left. + f_i(X,\ g_i(\dots),\ z_1^{(n-1)}(X,\ g_i(\dots),\ \dots,\ z_r^{(n-1)}(\dots),\ z_{r+1}^{*(n)}(\dots),\ \dots,\ z_m^{*(n)}(\dots)) \right\} dX,$$

$$(i = r+1,\ \dots,\ m),$$

e le funzioni $z_j^{(n)}(x,\ y)$, $(j = 1,\ \dots,\ m)$, mediante il sistema costituito dalle m equazioni algebriche

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij}(x,\ y)z_j^{(n)}(x,\ y) = \sum_{j=1}^{m} a_{ij}(0,\ g_i(0;\ x,\ y))\Phi_j(g_i(0;\ x,\ y)) +$$

$$(61)\quad + \int_0^x \Big\{ \sum_{j=1}^{r} \frac{da_{ij}(X,\ g_i(X;\ x,\ y))}{dX} z_j^{(n-1)}(X,\ g_i(...)) + \sum_{j=r+1}^{m} \frac{da_{ij}(X,\ g_i(...))}{dX} z_j^{*(n)}(X,\ g_i(...)) +$$

$$+ f_i(X,\ g_i(...),\ z_1^{(n-1)}(...),\ ...,\ z_r^{(n-1)}(...),\ z_{r+1}^{*(n)}(...),\ ...,\ z_m^{*(n)}(...)) \Big\} dX$$

per $(i = r + 1,\ ...,\ m)$, e, per $i = 1,\ ...,\ r$, dalla (61) se $y \geq g_i(x;\ 0,\ 0)$ e dalla

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij}(X,\ y)z_j^{(n)}(x,\ y) = \sum_{j=1}^{r} a_{ij}(\xi_i,\ 0)\Psi_j(\xi_i) + \sum_{j=r+1}^{m} a_{ij}(\xi_i,\ 0)z_j^{*(n)}(\xi_i,\ 0) +$$

$$(62)\quad + \int_{\xi_i}^x \Big\{ \sum_{j=1}^{r} \frac{da_{ij}(X,\ g_i(X;\ x,\ y))}{dX} z_j^{(n-1)}(X,\ g_i(...)) + \sum_{j=r+1}^{m} \frac{da_{ij}(X,\ g_i(...))}{dX} z_j^{*(n)}(X,\ g_i(...)) +$$

$$+ f_i(X,\ g_i(...),\ z_1^{(n-1)}(...),\ ...,\ z_r^{(n-1)}(...),\ z_{r+1}^{*(n)}(...),\ ...,\ z_m^{*(n)}(...)) \Big\} dX$$

se $y < g_i(x;\ 0,\ 0)$, dove ξ_i è l'ascissa del punto comune alla curva $Y = g_i(X;\ x,\ y)$ e all'asse X.

4. - Posto

$$(63)\quad \begin{cases} H_1 = \dfrac{(m - r)^2 B_3}{\omega}, \qquad H_2 = rmB_2(1 + H_1B_1), \\ C(x) = N(x) + mB_1\lambda M(x) + B_1 \displaystyle\sum_{i=1}^{r} |\ \Psi'_i(x)\ | \qquad (0 \leq x \leq a_0), \end{cases}$$

siano $U^*(x)$, $\overline{U}(x)$ le funzioni non decrescenti definite in $(0,\ a_0)$ dal sistema integrale

$$(64)\quad \begin{cases} U^*(x) = H_1B_1\overline{U}(x) + H_1 \displaystyle\int_0^x \{ [\mu(X) + \Lambda M(X)][U^*(X) + \overline{U}(X)] + C(X) \}\, dX \\ \overline{U}(x) = H_2 \displaystyle\int_0^x \{ (\mu(X) + \Lambda M(X)][U^*(X) + \overline{U}(X)] + C(X) \}\, dX. \end{cases}$$

Risulta

$$\overline{U}(x) = \int_0^x C(X) e^{(H_1+H_2+H_1H_2B_1)\int_X^x (\mu(t)+\Lambda M(t))dt} dX \tag{64'}$$

$$U^*(x) = H_1\left(B_1 + \frac{1}{H_2}\right)\overline{U}(x). \tag{64*'}$$

Sia a, con $0 < a \leq a_0$, il massimo valore di x per cui valgono le

$$\frac{\overline{U}(x)}{r} \leq \gamma_i - \mu_i \qquad (i = 1, \dots, m) \tag{65}$$

$$\frac{U^*(x)}{m-r} \leq \gamma_i - \mu_i \qquad (i = r+1, \dots, m). \tag{65*}$$

Sia $W(x)$ la funzione definita in $(0, a)$ dall'equazione integrale

$$W(x) = r\lambda_4 + r\int_0^x S_1(X) W(X) dX, \tag{66}$$

cioè

$$W(x) = r\lambda_4 e^{r\int_0^x S_1(X)dX}, \tag{67}$$

dove la costante λ_4 (soddisfacente la diseguaglianza $\lambda_4 \geq \lambda$) e la funzione $S_1(x)$ sono definite più avanti rispettivamente dalle (90), (91).

Siano $z_j^{(n-1)}(x, y)$, $(j = 1, \dots, r)$, funzioni definite nel campo

$$D: \qquad 0 \leq x \leq a, \qquad 0 \leq y \leq b_0 - \int^x M(t)dt,$$

ivi di classe G, soddisfacenti le

$$z_j^{(n-1)}(0, y) = \Phi_j(y) \qquad (0 \leq y \leq b_0), \tag{68_1}$$

$$z_j^{(n-1)}(x, 0) = \Psi_j(x) \qquad (0 \leq x \leq a), \tag{68_2}$$

$$|z_j^{(n-1)}(x, y) - (\Phi_j(y) + \Psi_j(x) - \Phi_j(0))| \leq \frac{\overline{U}(x)}{r} \tag{69_1}$$

in tutto il campo D,

$$(70) \qquad | z_j^{(n-1)}(x, y) - z_j^{(n-1)}(x, \bar{y}) | \leq \frac{W(x)}{r} | y - \bar{y} |$$

per tutte le coppie (x, y), $(x, \bar{y})$ del campo D, e in quasi tutto D, le

$$(71) \qquad \left| \frac{\partial z_j^{(n-1)}(x, y)}{\partial x} \right| \leq p(x) + \frac{m^2 B_1 B_2}{r} M(x) W(x),$$

avendo posto

$$(71') \qquad p(x) = m B_2 [N(x) + 2(\mu(x) + \Lambda M(x)) \sum_{i=1}^{m} (\gamma_i + | \Phi_i(0) |)] + \sum_{i=1}^{r} | \Psi_i'(x) | .$$

Osserviamo che dalle (49), (65), (69) seguono in tutto il campo D le

$$(69') \qquad | z_j^{(n-1)}(x, y) - \Phi_j(0) | \leq \gamma_j \qquad (j = 1, \ldots, r).$$

Si dimostra allora che

1⁰) esiste un'unica $(m - r)$-pla di funzioni di classe G in D

$$z_{r+1}^{*(n)}(x, y), \ldots, z_m^{*(n)}(x, y)$$

soddisfacenti il sistema (60), le

$$(68^*) \qquad z_j^{*(n)}(0, y) = \Phi_j(y) \qquad (0 \leq y \leq b_0),$$

e le

$$(69^*) \qquad | z_j^{*(n)}(x, y) - \Phi_j(y) | \leq \frac{U^*(x)}{m - r};$$

osserviamo che dalle (69*), tenuto conto delle (49) e (65*), seguono le

$$(69^{*\prime}) \qquad | z_j^{*(n)}(x, y) - \Phi_j(0) | \leq \gamma_j \qquad (j = r + 1, \ldots, m);$$

2⁰) le funzioni

$$z_1^{(n)}(x, y), \ldots, z_m^{(n)}(x, y),$$

definite algebricamente dalle (61), (62), sono di classe G in D e soddisfano le

$$(68_1) \qquad z_j^{(n)}(0, y) = \Phi_j(y) \qquad (j = 1, \ldots, m), \quad (0 \leq y \leq b_0),$$

$$(68_2) \qquad z_j^{(n)}(x, 0) = \Psi_j(x) \qquad (j = 1, \ldots, r), \quad (0 \leq x \leq a),$$

$$(69_1) \qquad |z_j^{(n)}(x, y) - (\Phi_j(y) + \Psi_j(x) - \Phi_j(0))| \leq \frac{\bar{U}(x)}{r} \qquad (j = 1, \dots, r)$$

e

$$(69_2) \qquad |z_j^{(n)}(x, y) - \Phi_j(y)| \leq \frac{\bar{U}(x)}{r} \qquad (j = r + 1, \dots, m)$$

nel campo D,

$$(70) \qquad |z_j^{(n)}(x, y) - z_j^{(n)}(x, \bar{y})| \leq \frac{W(x)}{r} |y - \bar{y}| \qquad (j = 1, \dots, m)$$

per ogni coppia di punti (x, y), $(x, \bar{y})$ di D, e infine in quasi tutto D le

$$(71) \qquad \left|\frac{\partial z_j^{(n)}(x, y)}{\partial x}\right| \leq p(x) + \frac{m^2}{r} B_1 B_2^1 M(x) W(x) \qquad (j = 1, \dots, m).$$

In particolare per $j = 1, \dots, r$ le funzioni $z_j^{(n)}(x, y)$ sono di classe G ed hanno le stesse proprietà (68), (69), (70), (71) delle funzioni $z_j^{(n-1)}(x, y)$, $(j = 1, \dots, r)$.

Sviluppiamo la dimostrazione delle proprietà 1° e 2° nei successivi numeri 5, 6, 7.

Poichè le funzioni $z_j^{(0)}(x, y)$, $(j = 1, \dots, r)$, definite dalle

$$(59) \qquad z_j^{(0)}(x, y) = \Phi_j(y) + \Psi_i(x) - \Phi_j(0),$$

sono di classe G in D e soddisfano le (68), (69), (70), (71), esiste un'unica $(m - r)$-pla di funzioni

$$z_{r+1}^{*(1)}(x, y), \dots, z_m^{*(1)}(x, y).$$

le quali sono di classe G in D e soddisfano le (69*); quindi le funzioni

$$z_1^{(1)}(x, y), \dots, z_m^{(1)}(x, y)$$

risultano di classe G in D e soddisfano le (68), (69), (70), (71), in particolare tali proprietà valgono per le funzioni

$$z_1^{(1)}(x, y), \dots z_r^{(1)}(x, y).$$

E così proseguendo, vengono definite le funzioni delle successioni

$$z_1^{(n)}(x, y), \dots, z_m^{(n)}(x, y)$$

$$z_{r+1}^{*(n)}(x, y), \dots, z_m^{*(n)}(x, y) \qquad (n = 1, 2, \dots),$$

le quali sono di classe G in D.

5. - Il sistema di equazioni integrali (60) nelle funzioni incognite $z_j^{*(n)}(x, y)$, $(j = r + 1, ..., m)$, si può scrivere nella forma

$$\sum_{j=r+1}^{m} a_{ij}(x, y) z_j^{*(n)}(x, y) = \sum_{j=r+1}^{m} a_{ij}(0, g_i(0; x, y))\Phi_j(g_i(0; x, y))$$

$$(60') \qquad + \int_0^x \Bigg\{ \sum_{j=r+1}^{m} \frac{d a_{ij}(X, g_i(X; x, y))}{dX} z_j^{*(n)}(X, g_i(...)) dX +$$

$$+ f_i^{(n)}(X, g_i(X; x, y)) + \sum_{j=1}^{r} a_{ij}(X, g_i(..)) \frac{dz_j^{(n-1)}(X, g_i(...))}{dX} \Bigg\} dX,$$

$$(j = r + 1, ..., m),$$

avendo posto per brevità, anche per il seguito,

$$(72) \qquad f_i^{(n)}(X, Y) = f_i(X, Y, z_1^{(n-1)}(X, Y), ..., z_r^{(n-1)}(...), z_{r+1}^{*(n)}(...), ..., z_m^{*(n)}(...)),$$

$$(i = 1, ..., m).$$

Il sistema (60') è un sistema della forma (30''') [22]; valgono le ipotesi del Teorema II, quindi esiste in un opportuno campo una ed una sola soluzione di classe G

$$z_{r+1}^*(x, y), ..., z_m^*(x, y)$$

soddisfacente le

$$(68^*) \qquad z_j^*(0, y) = \Phi_j(y) \qquad (j = r + 1, ..., m).$$

---

[22] Il sistema (60') è un sistema di $(m - r)$ equazioni integrali nelle $m - r$ funzioni incognite $z_{r+1}^{*(n)}(x, y), ..., z_m^{*(n)}(x, y)$, che qui sostituiscono le funzioni $Z_1(x, y), ..., Z_k(x, y)$ del sistema (30'''); inoltre in luogo delle funzioni $\sum_{j=1}^{n} c_{ij}(X, g_i(...)) \frac{du_{ij}(X, g_i(...)}{dX}$ qui figurano le funzioni $\sum_{j=1}^{r} a_{ij}(X, g_i(...)) \frac{dz_j^{(n-1)}(X, g_i(...))}{dX}$.

Osserviamo che alle diseguaglianze

$$| \chi_i(x, y, Z_1, ..., Z_k) - \chi_i(x, \bar{y}, \bar{Z}_1, ..., \bar{Z}_k) \leq L_1(x) \{ | y - \bar{y} | + \sum_{h=1}^{k} | Z_h - \bar{Z}_h | \}$$

vengono sostituite le

$$| f_i(x, y, z_1^{(n-1)}(x, y), ..., z_r^{(n-1)}(x, y), z_{r+1}, ..., z_m) - f_i x, \bar{y}, z_1^{(n-1)}(x, \bar{y}), ..., z_r^{(-1)}(x, \bar{y}), \bar{z}_{r+1}, ..., \bar{z}_m) | \leq$$

$$\leq L_1(x) \{ (1 + W(x)) | y - \bar{y} | + \sum_{h=r+1}^{m} | z_h - \bar{z}_h | \}.$$

Come campo di esistenza e unicità della soluzione consideriamo il campo D definito nel n. 1.

Infatti in luogo della funzione $U(x)$, definita dalla (24), si considera ora la funzione $U^*(x)$ definita mediante le (64): scritte le (60') nella forma

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=r+1}^{m} a_{ij}(x, y)[z_j^{*(n)}(x, y) - \Phi_j(y)] + \\
&+\sum_{j=1}^{r} a_{ij}(x, y)[z_j^{(n-1)}(x, y) - (\Phi_j(y) + \Psi_j(x) - \Phi_j(0))] = \\
&= \int_0^x \Big\{ \sum_{j=r+1}^{m} \frac{da_{ij}(X, g_i(\ldots))}{dX}[z_j^{*(n)}(X, g_i(\ldots)) - \Phi_j(g_i(\ldots)] + \\
(60'')\quad &+\sum_{j=1}^{r} \frac{da_{ij}(X, g_i(\ldots))}{dX}[z_j^{(n-1)}(X, g_i(\ldots)) - (\Phi_j(g_i(\ldots)) + \Psi_j(X) - \Phi_j(0))] + \\
&+ f_i^{(n)}(X, g_i(\ldots)) - \sum_{j=r+1}^{m} a_{ij}(X, g_i(\ldots)) \frac{d\Phi_j(g_i(\ldots))}{dX} - \\
&- \sum_{j=1}^{r} a_{ij}(X, g_i(\ldots))\Big(\frac{d\Phi_j(g_i(\ldots))}{dX} + \Psi_j'(X)\Big)\Big\} dX \qquad (i = r+1, \ldots, m),
\end{aligned}$$

modificando di poco [23] il calcolo sviluppato nel § 2 per dimostrare la (35) (cfr. 3, *b*)), si prova che è

---

[23] È stato opportuno sostituire, scrivendo le (60') nella forma (60''), al termine

$$\int_0^x \sum_{j=1}^{r} a_{ij}(X, g_i(\ldots)) \frac{dz_j^{(n-1)}(X, g_i(\ldots))}{dX} dX$$

l'espressione

$$\begin{aligned}
&\Big[\sum_{j=1}^{r} a_{ij}(X, g_i(\ldots))[z_j^{(n-1)}(X, g_i(\ldots)) - (\Phi_j(g_i(\ldots)) + \Psi_j(x) - \Phi_j(0))]\Big]_{X=0}^{X=x} - \\
&- \int_0^x \Big\{ \sum_{j=1}^{r} \frac{da_{ij}(X, g_i(\ldots))}{dX}[z_j^{(n-1)}(X, g_i(\ldots)) - (\Phi_j(g_i(\ldots)) + \Psi_j(x) - \Phi_j(0))] + \\
&+ \sum_{j=1}^{r} a_{ij}(X, g_i(\ldots))\Big[\frac{d\Phi_j(g_i(\ldots))}{dX} + \Psi'_j(X)\Big]\Big\} dX,
\end{aligned}$$

il cui valore assoluto è maggiorato da

$$B_1 \bar{U}(x) + \int^x \{ (\mu(X) + \Lambda M(X)) U(X) + rB_1 \lambda M(X) + \sum_{j=1}^{r} |\Psi'_j(X)| \} dX$$

$$|z_j^{*(n)}(x,\ y)-\Phi_j(y)|\leq$$

$$\leq\frac{(m-r)B_3}{\omega}\left\{B_1\bar{U}(x)+\int_0^x[(\mu(X)+\Lambda M(X))(U^*(X)+\bar{U}(X))+C(X)]dX\right\},$$

$$(j=r+1,\ \dots,\ m),$$

e quindi, tenuto conto delle posizioni (63), in virtù delle (64) si ha

$$(69^*)\qquad |z_j^{*(n)}(x,\ y)-\Phi_j(y)|\leq\frac{U^*(x)}{m-r}\qquad (j=r+1,\ \dots,\ m)$$

in tutto il campo D.

Inoltre con calcoli analoghi a quelli sviluppati per provare la (36_0) (cfr. § 2, n. 4, *b*)) si ottengono le

$$(36^*)\qquad \left|\frac{z_j^{*(n)}(x,\ y)-z_j^{*(n)}(x,\ \bar{y})}{y-\bar{y}}\right|\leq\frac{V^*(x)}{m-r}\qquad (j=r+1,\ \dots,\ m),$$

essendo $V^*(x)$, $(0\leq x\leq a)$, la funzione (non decrescente)

$$(36^{*\prime})\qquad V^*(x)=(m-r)\lambda_2' e^{(m-r)\int_0^x S^*(X)dX}$$

ottenuta da $\bar{V}(x)$ (cfr. la $(36_0')$ del § 2, n. 4, *b*)) sostituendo alla costante $\bar{\lambda}_2$ la costante

$$\lambda_2'=\lambda+(m-r)\lambda_0\left\{B_1\left(\sum_{h=1}^{r}\gamma_{0h}+\sum_{h=1}^{m}\mu_{0h}\right)+\int_0^a[(\mu(x)+\Lambda M(x))\sum_{h=1}^{m}\gamma_{0h}+N(x)]dX\right\}+$$

$$+\frac{(m-r)B_3}{\omega}\left\{2\Lambda\lambda_1\sum_{h=r+1}^{m}\mu_{0h}+mB_1\lambda\lambda_1+\Lambda\sum_{h=r+1}^{m}\gamma_{0h}+B_1W(a)+\right.$$

$$(31^*)\qquad +\int_0^a\left\{\frac{(m-r)^2B_3}{\omega}\Lambda\lambda_1[N(x)+rB_1(p(x)+(m^2B_1B_2^{\cdot}+1)M(x)W(a))]+\right.$$

$$+\lambda_1(1+W(a))L_1(x)+r\Lambda\lambda_1(p(x)+(m^2B_1B_2^{\cdot}+1)M(x)W(a))+$$

$$\left.\left.+\lambda_1W(a)(\mu(x)+\Lambda M(x))\right\}dx\right\},$$

nella quale si è indicata con λ_0 la costante di LIPSCHITZ delle funzioni $\dfrac{\beta_{ij}(x,\ y)}{A_{m-r}(x,\ y)}$, $(i,\ j=r+1,\ \dots,\ m)$, rispetto a y e si è posto

$$(72') \quad \gamma_{0i}=\gamma_i+|\Phi_i(0)|,\ (i=1,\ldots,m),\ \mu_{0i}=\frac{\mu_i}{2}+|\Phi_i(0)|,\ (i=1,\ldots,r).\ \mu_{0i}=\mu_i+|\Phi_i(0)|,$$
$$(i=r+1,\ \ldots,\ m),$$

e sostituendo alla funzione $S(x)$ la funzione

$$(32^*) \quad S^*(x)=\frac{(m-r)B_3}{\omega}\left\{\frac{(m-r)^2B_3}{\omega}\Lambda\lambda_1B_1M(x)+\lambda_1[L_1(x)+\mu(x)+2\Lambda M(x)]\right\}.$$

Posto

$$(72'')\quad \begin{cases} \lambda_1^*=\lambda+(m-r)\lambda_0\left\{B_1\left(\sum_{h=1}^{r}\gamma_{0h}+\sum_{h=1}^{m}\mu_{0h}\right)+\int_0^a\left|(\mu(x)+\Lambda M(x))\sum_{h=1}^{m}\gamma_{0h}+N(x)\right|dx\right\}+ \\ +\frac{(m-r)B_3}{\omega}\left\{2\Lambda\lambda_1\sum_{h=r+1}^{m}\mu_{0h}+mB_1\lambda\lambda_1+\Lambda\sum_{h=r+1}^{m}\gamma_{0h}+\right. \\ \left.+\int_0^a\left\{\frac{(m-r)^2B_3}{\omega}\Lambda\lambda_1[N(x)+rB_1p(x)]+\lambda_1L_1(x)+r\Lambda\lambda_1p(x)\right\}dx\right\} \\ \lambda_2^*=\frac{(m-r)B_3}{\omega}\left\{B_1+\int_0^a\left[\frac{r(m-r)^2B_1B_3}{\omega}\Lambda\lambda_1(m^2B_1B_2+1)M(x)+\lambda_1L_1(x)+\right.\right. \\ \left.\left.+r\Lambda\lambda_1(m^2B_1B_2+1)M(x)+\lambda_1(\mu(x)+\Lambda M(x))\right]dx\right\}, \end{cases}$$

si ha

$$V^*(x)=(m-r)(\lambda_1^*+\lambda_2^*W(a))e^{(m-r)\int_0^x S^*(X)dX}$$

e

$$\left|\frac{z_j^{*(n)}(x,\ y)-z_j^{*(n)}(x,\ \bar y)}{y-\bar y}\right|\leq[\lambda_1^*+\lambda_2^*W(a)]e^{(m-r)\int_0^x S^*(X)dX},\qquad (j=r+1,\ \ldots,\ m).$$

Osserviamo per il seguito che, fissato x in $(0,\ a)$, da quanto precede risulta, per $0\leq X\leq x$,

$$\left|\frac{z_j^{*(n)}(X,\ y)-z_j^{*(n)}(X,\ \bar y)}{y-\bar y}\right|\leq[\lambda_1^*+\lambda_2^*W(x)]e^{(m-r)\int_0^x S^*(t)dt},$$

in particolare, per $X=x$,

(73) $$\left|\frac{z_j^{*(n)}(x,\ y)-z_j^{*(n)}(x,\ \bar{y})}{y-\bar{y}}\right|\leq[\lambda_1^*+\lambda_2^*\,W(x)]e^{(m-r)\int_0^x S^*(t)dt},\qquad (j=r+1,\ \ldots,\ m);$$

indichiamo con $W^*(x)$ la funzione

(73′) $$W^*(x)=(m-r)[\lambda_1^*+\lambda_2^*\,W(x)]e^{(m-r)\int_0^x S^*(t)dt};$$

la (73) diviene allora

(73″) $$\left|\frac{z_j^{*(n)}(x,\ y)-z_j^{*(n)}(x,\ \bar{y})}{y-\bar{y}}\right|\leq\frac{W^*(x)}{m-r}\qquad (j=r+1,\ \ldots,\ m).$$

Valgono le [24]

$$\left|\frac{\partial z_j^{*(n)}(x,\ y)}{\partial x}\right|\leq\frac{(m-r)B_3}{\omega}\{B_1M(x)W^*(x)+rB_1p(x)+B_1(m^2B_1B_2+1)M(x)W(x)+N(x)\}$$
$$(j=r+1,\ \ldots,\ m)$$

le quali valgono su ogni segmento di D parallelo all'asse x per quasi tutti gli x; posto

(74₁) $$\alpha(x)=\frac{(m-r)B_3}{\omega}[B_1\lambda_1^*M(x)e^{(m-r)\int_0^x S^*(t)dt}+rB_1p(x)+N(x)]$$

(74₂) $$\beta(x)=\frac{(m-r)B_3}{\omega}[B_1\lambda_2^*M(x)e^{(m-r)\int_0^x S^*(t)dt}+B_1(m^2B_1B_2+1)],$$

si ha

(75) $$\left|\frac{\partial z_j^{*(n)}(x,\ y)}{\partial x}\right|\leq\alpha(x)+\beta(x)\,W(x)\qquad (j=r+1,\ \ldots,\ m).$$

([24]) Dalle (60) seguono infatti (cfr. nota ([15])) in quasi tutto il campo D le

$$\sum_{j=r+1}^{m}a_{ij}(x,y)\left[\frac{\partial z_j^{*(n)}(x,\ y)}{\partial x}+\rho_i(x,\ y)\frac{\partial z_j^{*(n)}(x,\ y)}{\partial y}\right]+\sum_{j=1}^{r}a_{ij}(x,y)\left[\frac{\partial z_j^{(n-1)}(x,\ y)}{\partial x}+\rho_i(x,\ y)\frac{\partial z_j^{(n-1)}(x,y)}{\partial y}\right]=$$
$$=f_i(x,\ y,\ z_1^{(n-1)}(x,\ y),\ \ldots,\ z_r^{(n-1)}(\ldots),\ z_{r+1}^{*(n)}(\ldots),\ \ldots\ ,\ z_m^{*(n)}(\ldots))\qquad (i=r+1,\ \ldots,\ m);$$

risolvendo rispetto a $\dfrac{\partial z_j^{*(n)}(x,\ y)}{\partial x}$ e maggiorando si ottengono le diseguaglianze che seguono.

6. - Consideriamo ora le funzioni $z_j^{(n)}(x, y)$, $(j = 1, \dots m)$, definite algebricamente dal sistema lineare (61), (62).

Tenuto conto delle (68_2), per $y = 0$ si ha dalle (60), (61)

$$\sum_{j=r+1}^{m} a_{ij}(x, 0) z_j^{*(n)}(x, 0) + \sum_{j=1}^{r} a_{ij}(x, 0) \Psi_j(x) = \sum_{j=1}^{m} a_{ij}(x, 0) z_j^{(n)}(x, 0)$$

$$(j = r + 1, \dots, m),$$

inoltre, in virtù della (62), è [25]

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij}(x, 0) z_j^{(n)}(x, 0) = \sum_{j=1}^{r} a_{ij}(x, 0) \Psi_j(x) + \sum_{j=r+1}^{m} a_{ij}(x, 0) z_j^{*(n)}(x, 0)$$

$$(j = 1, \dots, r).$$

Ne segue

$$\sum_{j=1}^{r} a_{ij}(x, 0)[z_j^{(n)}(x, 0) - \Psi_j(x)] + \sum_{j=r+1}^{m} a_{ij}(x, 0)[z_j^{(n)}(x, 0) - z_j^{*(n)}(x, 0)] = 0,$$

$$(i = 1, \dots, m);$$

dalla (1) seguono necessariamente le

$$(68_2) \qquad z_j^{(n)}(x, 0) = \Psi_j(x) \qquad (j = 1, \dots, r) \quad (0 \leq x \leq a)$$

$$(76) \qquad z_j^{(n)}(x, 0) = z_j^{*(n)}(x, 0) \qquad (j = r + 1, \dots, m), \quad (0 \leq x \leq a).$$

Inoltre dalle (61), (68_1), (60) subito seguono, per $0 \leq y \leq b_0$, le

$$(68_1) \qquad z_j^{(n)}(0, y) = \Phi_j(y) \qquad (j = 1, \dots, m)$$

$$(68^*) \qquad z_j^{*(n)}(0, y) = \Phi_j(y) \qquad (j = r + 1, \dots, m).$$

Dimostriamo ora che nel campo D è

$$(69_1) \qquad | z_j^{(n)}(x, y) - (\Phi_j(y) + \Psi_j(x) - \Phi_j(0)) | \leq \frac{\overline{U}(x)}{r} \qquad (j = 1, \dots, r)$$

$$(69_2) \qquad | z_j^{(n)}(x, y) - \Phi_j(y) | \leq \frac{\overline{U}(x)}{r} \qquad (j = r + 1, \dots, m).$$

[25] Per $y = 0$ nelle (62) è $\xi_i = x$.

Scriviamo le (61), (62) rispettivamente nella forma

$$
\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{r} a_{ij}(x,\ y)[z_j^{(n)}(x,\ y) - (\Phi_j(y) + \Psi_j(x) - \Phi_j(0))] + \\
&+ \sum_{j=r+1}^{m} a_{ij}(x,\ y)[z_j^{(n)}(x,\ y) - \Phi_j(y)] = \\
&= \int_0^x \Big\{ \sum_{j=1}^{r} \frac{da_{ij}(X,\ g_i(X;\ x,\ y))}{dX}[z_j^{(n-1)}(X,\ g_i(\ldots)) - (\Phi_j(g_i(\ldots)) + \Psi_j(X) - \Phi_j(0))] + \\
(61')\quad &+ \sum_{j=r+1}^{m} \frac{da_{ij}(X,\ g_i(\ldots))}{dX}[z_j^{*(n)}(X,\ g_i(\ldots)) - \Phi_j(g_i(\ldots))] + \\
&+ f_i^{(n)}(X,\ g_i(\ldots)) - \sum_{j=1}^{r} a_{ij}(X,\ g_i(\ldots))\left[\frac{d\Phi_j(g_i(\ldots))}{dX} + \Psi_j'(X)\right] - \\
&- \sum_{j=r+1}^{m} a_{ij}(X,\ g_i(\ldots))\frac{d\Phi_j(g_i(\ldots))}{dX}\Big\}\, dX,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{r} a_{ij}(x,\ y)[z_j^{(n)}(x,\ y) - (\Phi_j(y) + \Psi_j(x) - \Phi_j(0))] + \\
&+ \sum_{j=r+1}^{m} a_{ij}(x,\ y)[z_j^{(n)}(x,\ y) - \Phi_j(y)] = \\
&= \sum_{j=r+1}^{m} a_{ij}(\xi_i,\ 0)[z_j^{(n)}(\xi_i,\ 0) - \Phi_j(0)] + \\
(62')\quad &+ \int_{\xi_i}^x \Big\{ \sum_{j=1}^{r} \frac{da_{ij}(X,\ g_i(X;\ x,\ y))}{dX}[z_j^{(n-1)}(X,\ g_i(\ldots)) - (\Phi_j(g_i(\ldots)) + \Psi_j(X) - \Phi_j(0))] + \\
&+ \sum_{j=r+1}^{m} \frac{da_{ij}(X,\ g_i(\ldots))}{dX}[z_j^{*(n)}(X,\ g_i(\ldots) - \Phi_j(g_i(\ldots))] + \\
&+ f_i^{(n)}(X,\ g_i(\ldots)) - \sum_{j=1}^{r} a_{ij}(X,\ g_i(\ldots))\left[\frac{d\Phi_j(g_i(\ldots))}{dX} + \Psi_j'(X)\right] - \\
&- \sum_{j=r+1}^{m} a_{ij}(X,\ g_i(\ldots))\frac{d\Phi_j(g_i(\ldots))}{dX}\Big\}\, dX,
\end{aligned}
$$

dove si è tenuto conto della posizione (72).

Dalle (60″) del numero precedente, per $y=0$, si ottiene

$$\sum_{j=r+1}^{m} a_{ij}(x,\ 0)[z_j^{*(n)}(x,\ 0)-\Phi_j(0)]=$$

$$=\int_0^x\Big\{\sum_{j=r+1}^{m}\frac{da_{ij}(X,\ g_i(X;\ x,\ 0))}{dX}[z_j^{*(n)}(X,\ g_j(\dots))-\Phi_j(g_i(\dots))]+$$

$$(60_0')\qquad +\sum_{j=1}^{r}\frac{da_{ij}(X,\ g_i(\dots))}{dX}[z_j^{(n-1)}(X,\ g_i(\dots))-(\Phi_j(g_i(\dots))+\Psi_i(X)-\Phi_j(0)]+$$

$$+f_i^{(n)}(X,\ g_i(\dots))-\sum_{j=r+1}^{m}a_{ij}(X,\ g_i(\dots))\frac{d\Phi_j(g_i(\dots))}{dX}-$$

$$-\sum_{j=1}^{r}a_{ij}(X,\ g_i(\dots))\left[\frac{d\Phi_j(g_i(\dots))}{dX}+\Psi_j'(X)\right]\Big\}dX\qquad (i=r+1,\ \dots,\ m),$$

da cui, tenuto conto delle (69), (69*) e della terza delle (63) si ha

$$(77)\quad |z_j^{*(n)}(x,\ 0)-\Phi_j(0)|\le\frac{(m-r)B_3}{\omega}\int_0^x\{(\mu(X)+\Lambda M(X))[U(X)+U^*(X)]+C(X)\}\,dX,$$
$$(j=r+1,\ \dots,\ m).$$

Dalle (61′), (62′), indicando con η_i l'ascissa del punto intersezione della curva

$$Y=g_i(X;\ x,\ y)\qquad\qquad (i=1,\ \dots,\ r)$$

con l'asse x o con l'asse y (se $y\ge g_i(x;\ 0,\ 0)$ è $\eta_i=0$, se $y<g_i(x;\ 0,\ 0)$ è $\eta_i=\xi_i>0$), segue allora

$$|z_j^{(n)}(x,\ y)-(\Phi_j(y)+\Psi_j(x)-\Phi_j(0))|\le$$

$$\le B_2\sum_{i=1}^{r}\Big\{\frac{(m-r)^2B_1B_3}{\omega}\int_0^{\eta_i}[(\mu(X)+\Lambda M(X))(U^*(X)+\bar U(X))+C(X)]dX+$$

$$(78)\qquad +\int_{\eta_i}^{x}[(\mu(X)+\Lambda M(X))(U^*(X)+\bar U(X))+C(X)]dX\Big\}+$$

$$+B_2\sum_{i=r+1}^{m}\int_0^x[(\mu(X)+\Lambda M(X))(U^*(X)+\bar U(X))+C(X)]dX\le$$

$$\le mB_2\left(1+\frac{(m-r)^2B_1B_3}{\omega}\right)\int_0^x[(\mu(X)+\Lambda M(X))(U^*(X)+U(X))+C(X)]dX$$
$$(j=1,\ \dots,\ r),$$

e la stessa maggiorazione vale per la funzioni $|z_j^{(n)}(x, y) - \Phi_j(y)|$, $(j = r+1, ..., m)$.

Tenuto conto delle (63), (64) è allora

$$(69_1) \qquad |z_j^{(n)}(x, y) - (\Phi_j(y) + \Psi_j(x) - \Phi_j(0))| \leq \frac{\bar{U}(x)}{r} \qquad (j = 1, ..., r)$$

$$(69_2) \qquad |z_j^{(n)}(x, y) - \Phi_j(y)| \leq \frac{\bar{U}(x)}{r} \qquad (j = r+1, ..., m).$$

7. - Dimostriamo ora che è

$$\left|\frac{z_j^{(n)}(x, y) - z_j^{(n)}(x, \bar{y})}{y - \bar{y}}\right| \leq \frac{W(x)}{r} \qquad (j = 1, ..., m)$$

per ogni coppia di punti (x, y), $(x, \bar{y})$ del campo D.

a) Allo scopo di maggiorare la

$$\sum_{j=1}^{r}\left|\frac{z_j^{(n)}(x, y) - z_j^{(n)}(x, \bar{y})}{y - \bar{y}}\right|$$

introduciamo le funzioni $z_{0j}^{(n)}(x, y)$, $(j = r+1, ..., m)$, definite dal sistema di $m - r$ equazioni algebriche lineari [26]

$$(79) \qquad \begin{aligned} &\sum_{j=r+1}^{m} a_{ij}(x, y) z_{0j}^{(n)}(x, y) + \sum_{j=1}^{r} a_{ij}(x, y)[\Psi_j(x) + \Phi_j(y) - \Phi_j(0)] = \\ &= \sum_{j=1}^{m} a_{ij}(0, g_i(0; x, y))\Phi_j(g_i(0; x, y)) + \\ &+ \int_0^x \left\{ \sum_{j=1}^{r} \frac{da_{ij}(X, g_i(...))}{dX} z_j^{(n-1)}(X, g_i(...)) + \sum_{j=r+1}^{m} \frac{da_{ij}(X, g_i(...))}{dX} z_j^{*(n)}(X, g_i(...)) + \right. \\ &\left. + f_i^{(n)}(X, g_i(...)) \right\} dX \qquad (i = r+1, ..., m), \end{aligned}$$

nel campo D.

---

[26] Per $n = 1$ le funzioni $z_{0j}^{(n)}(x, y)$ coincidono con le funzioni $z_j^{*(n)}(x, y)$ in tutto $\underline{D}$, $(j = r+1, ..., m)$.

Dall'uguaglianza dei secondi membri delle (60) e (79), tenuto conto delle (2) e (68_2), subito risulta

$$z_{0j}^{(n)}(x,\ 0) = z_j^{*(n)}(x,\ 0) \qquad (j = r+1,\ \dots,\ m),\quad (0 \leq x \leq a). \tag{80}$$

Inoltre è

$$z_{0j}^{(n)}(0,\ y) = \Phi_j(y) \qquad (j = r+1,\ \dots,\ m),\quad (0 \leq y \leq b_0). \tag{80'}$$

Le funzioni $z_{0j}^{(n)}(x,\ y)$, $(j = r+1,\ \dots,\ m)$, sono lipschitziane in y.

Infatti, con calcoli analoghi a quelli sviluppati per dimostrare le (36) e le (73) si trova, per ogni coppia di punti $(x,\ y)$, $(x,\ \bar{y})$ di D,

$$\left|\frac{z_{0j}^{(n)}(x,\ y) - z_{0j}^{(n)}(x,\ \bar{y})}{y-\bar{y}}\right| \leq \lambda_1^* + \lambda\lambda_2^* + \int^x S^*(X)[W(X) + W^*(X)]dX, \tag{81}$$

$$(j = r+1,\ \dots,\ m);$$

posto

$$W_0(x) = \lambda_1^* + \lambda\lambda_2^* + \int_0^x S^*(X)[W(X) + W^*(X)]dX, \tag{82}$$

è

$$\left|\frac{z_{0j}^{(n)}(x,\ y) - z_{0j}^{(n)}(x,\ \bar{y})}{y-\bar{y}}\right| \leq W_0(x) \leq W_0(a). \tag{81'}$$

Osserviamo che, tenuto conto della prima delle (72''), risulta

$$\lambda \leq W_0(0). \tag{81''}$$

Si dimostra allora che le funzioni $z_{0j}^{(n)}(x,\ y)$, $(j = r+1,\ \dots,\ m)$, sono assolutamente continue in x su ogni segmento di D parallelo all'asse x: la dimostrazione è del tutto analoga a quella sviluppata nel § 2, n. 2, a) per provare l'assoluta continuità delle funzioni $Z_j^{(s)}(x,\ y)$, $(j = 1,\ \dots,\ k)$.

Sia i un numero intero compreso tra 1 e r e siano $(x,\ y)$, $(x,\ \bar{y})$ due punti del campo D con $\bar{y} < y < g_i(x;\ 0,\ 0)$; siano ξ_i, $\bar{\xi}_i$, con $\xi_i < \bar{\xi}_i$, i valori di $(0,\ a)$ per i quali è

$$g_i(\xi_i;\ x,\ y) = 0, \qquad g_i(\bar{\xi}_i;\ x,\ \bar{y}) = 0. \tag{81'''}$$

Dimostriamo che è

$$\left|\int_{\xi_i}^{\bar{\xi}_i}\left\{\sum_{j=1}^{r} a_{ij}(X,\ 0)\Psi_j'(X)+\sum_{j=r+1}^{m} a_{ij}(X,\ 0)\frac{\partial z_{0j}^{(n)}(X,\ 0)}{\partial X}-\right.\right.$$

$$\tag{83}\left.\left.-f_i(X,\ 0,\ \Psi_1(X),\ \dots,\ \Psi_r(X),\ z_{r+1}^{*(n)}(X,\ 0),\ z_m^{*(n)}(X,\ 0))\right\}dX\right|\leq$$

$$\leq F\lambda_1\left(1+\int_0^a L(X)dX\right)(1+W_0(\bar{\xi}_i))\,|\,y-\bar{y}\,|,\qquad (i=1,\ \dots,\ r),$$

ovvero, tenuto conto delle (80),

$$\left|\int_{\xi_i}^{\bar{\xi}_i}\left\{\sum_{j=1}^{r} a_{ij}(X,\ 0)\Psi_j'(X)+\sum_{j=r+1}^{m} a_{ij}(X,\ 0)\frac{\partial z_j^{*(n)}(X,\ 0)}{\partial X}-\right.\right.$$

$$\tag{83'}\left.\left.-f_i(X,\ 0,\ \Psi_1(X),\ \dots,\ \Psi_r(X),\ z_{r+1}^{*(n)}(X,\ 0),\ \dots,\ z_m^{*(n)}(X,\ 0))\right\}dX\right|\leq$$

$$\leq F\lambda_1\left(1+\int_0^a L(X)dX\right)(1+W_0(\bar{\xi}_i))\,|\,y-\bar{y}\,|,\qquad (i=1,\ \dots,\ r).$$

Infatti dalle (79) segue

$$\sum_{j=r+1}^{m} a_{ij}(x,\ y)z_{0j}^{(n)}(x,\ y)+\sum_{j=1}^{r} a_{ij}(x,\ y)[\Psi_j(x)+\Phi_j(y)-\Phi_j(0)]-$$

$$-\sum_{j=1}^{m} a_{ij}(0,\ g_i(0;\ x,\ y))\Phi_j(g_i(\dots)-$$

$$-\int_0^x\left\{\sum_{j=r+1}^{m}\frac{da_{ij}(X,\ g_i(X;\ x,\ y))}{dX}z_{0j}^{(n)}(X,\ g_i(\dots))+\right.$$

$$\left.+\sum_{j=1}^{r}\frac{da_{ij}(X,\ g_i(\dots))}{dX}[\Psi_j(X)+\Phi_j(g_i(\dots))-\Phi_j(0)]\right\}dX=$$

$$=\int_0^x\sum_{j=r+1}^{m}\frac{da_{ij}(X,\ g_i(X;\ x,\ y))}{dX}[z_j^{*(n)}(X,\ g_i(\dots))-z_{0j}^{(n)}(X,\ g_i(\dots))]+$$

$$+\sum_{j=1}^{r}\frac{da_{ij}(X,\ g_i(\dots))}{dX}[z_j^{(n-1)}(X,\ g_i(\dots))-(\Psi_j(X)+\Phi_j(g_i(\dots))-\Phi_j(0))]+$$

$$+f_i^{(n)}(X,\ g_i(\dots))\}\,dX,\qquad (i=r+1,\ \dots,\ m),$$

e, in quasi tutto D (cfr. nota ([15])),

$$\sum_{j=r+1}^{m} a_{ij}(x, y)\left[\frac{\partial z_{0j}^{(n)}(x, y)}{\partial x} + \rho_i(x, y)\frac{\partial z_{0j}^{(n)}(x, y)}{\partial y}\right] +$$

$$+ \sum_{j=1}^{r} a_{ij}(x, y)[\Psi_j'(x) + \rho_i(x, y)\Phi_j'(y)] =$$

$$(84) \qquad = f_i^{(n)}(x, y) +$$

$$+ \sum_{j=r+1}^{m}\left[\frac{\partial a_{ij}(x, y)}{\partial x} + \rho_i(x, y)\frac{\partial a_{ij}(x, y)}{\partial y}\right][z_j^{*(n)}(x, y) - z_{0j}^{(n)}(x, y)] +$$

$$+ \sum_{j=1}^{r}\left[\frac{\partial a_{ij}(x, y)}{\partial x} + \rho_i(x, y)\frac{\partial a_{ij}(x, y)}{\partial y}\right][z_j^{(n-1)}(x, y) - (\Psi_j(x) + \Phi_j(y) - \Phi_j(0))],$$

$$(i = r + 1, \ldots, m):$$

le (84) valgono, in corrispondenza a quasi tutti gli y di $(0, b_0)$, per quasi tutti gli x, e così le

$$\frac{\partial z_{0j}^{(n)}(x, y)}{\partial y} = \sum_{\nu=r+1}^{m}\frac{\beta_{\nu j}(x, y)}{A_{m-r}(x, y)}\Bigg\{-\sum_{h=1}^{r} a_{\nu h}(x, y)\Psi_h'(x) + f_\nu^{(n)}(x, y) +$$

$$(84') \qquad + \sum_{h=r+1}^{m}\left[\frac{\partial a_{\nu h}(x, y)}{\partial x} + \rho_\nu(x, y)\frac{\partial a_{\nu h}(x, y)}{\partial y}\right]\cdot[z_h^{*(n)}(x, y) - z_{0h}^{(n)}(x, y)] +$$

$$+ \sum_{h=1}^{r}\left[\frac{\partial a_{\nu h}(\ldots)}{\partial x} + \rho_\nu(\ldots)\frac{\partial a_{\nu h}(\ldots)}{\partial y}\right]\cdot[z_h^{(n-1)}(x, y) - (\Psi_h(x) + \Phi_h(y) - \Phi_h(0))] -$$

$$- \rho_\nu(x, y)\left[\sum_{h=r+1}^{m}\frac{\partial z_{0h}^{(n)}(x, y)}{\partial y} a_{\nu h}(x, y) + \sum_{h=1}^{r} a_{\nu h}(x, y)\Phi_h'(y)\right]\Bigg\},$$

$$(j = r + 1, \ldots, m).$$

Per ξ_i, $\bar{\xi}_i$ fissati, con $\xi_i < \bar{\xi}_i$, consideriamo le funzioni

$$
(85)\quad \begin{cases}
G_i^{(0)}(Y) = \displaystyle\int_{\xi_i}^{\overline{\xi}_i} \Big[\sum_{j=r+1}^{m} a_{ij}(x,\ Y) \frac{\partial z_{0j}^{(n)}(x,\ Y)}{\partial x} + \sum_{j=1}^{r} a_{ij}(x,\ Y)\Psi_j'(x) - \\
\qquad - f_i^{(n)}(x,\ Y) dx, \\
G_i^{(1)}(Y) = \displaystyle\int_{\xi_i}^{\overline{\xi}_i} \Big\{ \sum_{j=1}^{r} a_{ij}(x,\ Y)\Psi_j'(x) + \sum_{j=r+1}^{m} a_{ij}(x,\ Y) \sum_{\nu=r+1}^{m} \frac{\beta_{\nu j}(x,\ Y)}{A_{m-r}(x,\ Y)} \times \\
\qquad \times [f_\nu^{(n)}(x,\ Y) \quad \displaystyle\sum_{h=1}^{r} a_{\nu h}(x,\ Y)\Psi_h'(x)] - f_i^{(n)}(x,\ Y) \Big\} dx \\
G_i^{(2)}(Y) = \displaystyle\sum_{h=1}^{m} \int_{\xi_i}^{\overline{\xi}_i} \Big| \sum_{j=r+1}^{m} a_{ij}(x,\ Y) \sum_{\nu=r+1}^{m} \frac{\beta_{\nu j}(x,\ Y)}{A_{m-r}(x,\ Y)} a_{\nu h}(x,\ Y)\rho_\nu(x,\ Y) \Big| dx, \\
\qquad\qquad (i = 1,\ \ldots,\ r),
\end{cases}
$$

per $0 \leq Y \leq y_0$, essendo y_0 tale che appartenga al campo D il rettangolo $\xi_i \leq x \leq \overline{\xi}_i$, $0 \leq Y \leq y_0$; tali funzioni sono continue in Y, più precisamente lipschitziane ([27]) in Y, e così le funzioni

$$
\int_{\xi_i}^{\overline{\xi}_i} \rho_i(x,\ Y) dx \qquad (i = 1,\ \ldots,\ r).
$$

Per $Y = 0$ si ha dalle (11)

$$
(86)\quad \begin{cases}
| G_i^{(1)}(0) | \leq F \displaystyle\int_{\xi_i}^{\overline{\xi}_i} \rho_i(x,\ 0) dx \\
G_i^{(2)}(0) \leq F \displaystyle\int_{\xi_i}^{\overline{\xi}_i} \rho_i(x,\ 0) dx.
\end{cases}
$$

([27]) Cfr. nota ([7]) circa la lipschitzianità in y del termine $\int_{\xi_i}^{\overline{\xi}_i} a_{ij}(x,\ Y) \frac{\partial z_{0j}^{(n)}(x,\ Y)}{\partial x} dx$. Per gli altri termini che figurano in $G_i^{(0)}(Y)$, $G_i^{(1)}(Y)$, $G_i^{(2)}(Y)$ l'affermazione è evidente.

Tenuto conto delle (84′) in quasi tutto $(0,\ y_0)$ si ha

$$G_i^{(0)}(Y) = G_i^{(1)}(Y) + \int_{\xi_i}^{\bar{\xi}_i} \sum_{j=r+1}^{m} a_{ij}(x,\ Y) \sum_{\nu=r+1}^{m} \frac{\beta_{\nu j}(x,\ Y)}{A_{m-r}(\ldots)} \rho_\nu(\ldots) \times$$

$$\times \left[- \sum_{h=r+1}^{m} a_{\nu h}(\ldots) \frac{\partial z_{0h}^{(n)}(\ldots)}{\partial Y} - \sum_{h=1}^{r} a_{\nu h}(\ldots) \Phi_h'(Y) \right] dx +$$

$$+ \int_{\xi_i}^{\bar{\xi}_i} \left\{ \sum_{j=r+1}^{m} a_{ij}(\ldots) \sum_{\nu=r+1}^{m} \frac{\beta_{\nu j}(\ldots)}{A_{m-r}(\ldots)} \left[\sum_{h=r+1}^{m} \left(\frac{\partial a_{\nu h}(\ldots)}{\partial x} + \rho_\nu(\ldots) \frac{\partial a_{\nu h}(\ldots)}{\partial Y} \right) \times \right.\right.$$

$$\times (z_h^{*(n)}(\ldots) - z_{0h}^{(n)}(\ldots)) +$$

$$\left.\left. + \sum_{h=1}^{r} \left(\frac{\partial a_{\nu h}(\ldots)}{\partial x} + \rho_\nu(\ldots) \frac{\partial a_{\nu h}(\ldots)}{\partial Y} \right) (z_h^{(n-1)}(\ldots) - (\Phi_h(y) + \Psi_h(x) - \Phi_h(0)) \right] \right\} dx,$$

e, tenuto conto delle (80), (81′), (50) ([28])

$$| G_i^{(0)}(Y) | \leq | G_i^{(1)}(Y) | + W_0(\bar{\xi}_i) \sum_{h=1}^{m} \int_{\xi_i}^{\bar{\xi}_i} \left| \sum_{j=r+1}^{m} a_{ij}(x,\ Y) \sum_{\nu=r+1}^{m} \frac{\beta_{\nu j}(\ldots)}{A_{m-r}(\ldots)} a_{\nu h}(\ldots) \rho_\nu(\ldots) \right| dx +$$

$$+ \left| \int_{\xi_i}^{\bar{\xi}_i} \sum_{j=r+1}^{m} a_{ij}(\ldots) \sum_{\nu=r+1}^{m} \frac{\beta_{\nu j}(\ldots)}{A_{m-r}(\ldots)} \left\{ \sum_{h=r+1}^{m} \left[\frac{\partial a_{\nu h}(\ldots)}{\partial x} + \rho_\nu(\ldots) \frac{\partial a_{\nu h}(\ldots)}{\partial y} \right] \times \right.\right.$$

$$\times [z_h^{*(n)}(x,\ Y) - z_h^{*(n)}(x,\ 0) + z_{0h}^{(n)}(x,\ 0) - z_{0h}^{(n)}(x,\ Y)] +$$

$$\left.\left. + \sum_{h=1}^{r} \left[\frac{\partial a_{\nu h}(\ldots)}{\partial x} + \rho_\nu(\ldots) \frac{\partial a_{\nu h}(\ldots)}{\partial y} \right] [z_h^{(n-1)}(x,\ Y) - \Psi_h(x) + \Phi_h(0) - \Phi_h(Y)] \right\} dx \right|,$$

([28]) Si tenga conto che dalle (81′) segue

$$\left| \frac{\partial z_{0j}^{(n)}(x,\ y)}{\partial y} \right| \leq W_0(x),$$

ed essendo $W_0(x)$ non decrescente, per $\xi_i \leq x \leq \bar{\xi}_i$, è

$$\left| \frac{\partial z_{0j}^{(n)}(x,\ y)}{\partial y} \right| \leq W_0(\bar{\xi}_i).$$

Inoltre tenuto conto delle (81″) si ha

$$| \Phi'_h(Y) | \leq \lambda \leq W_0(\bar{\xi}_i).$$

da cui, in quasi tutto $(0, y_0)$,

$$(87) \qquad | G_i^{(0)}(Y) | \leq | G_i^{(1)}(Y) | + W_0(\bar{\xi}_i) G_i^{(2)}(Y) + \varepsilon_i(Y),$$

dove

$$\varepsilon_i(Y) = \frac{(m-r)^2 B_1 B_3}{\omega} Y \int_{\xi_i}^{\bar{\xi}_i} [\mu(x) + \Lambda M(x)][W^*(x) + (m-r) W_0(x) + W(x) + r\lambda] dx,$$

$$(i = 1, \ldots, r);$$

quindi, per le continuità rispetto a Y del primo e secondo membro della (87), la (87) vale in tutto $(0, y_0)$, in particolare per $Y = 0$ e si ottiene

$$| G_i^{(0)}(0) | \leq | G_i^{(1)}(0) | + W_0(\bar{\xi}_i) G_i^{(2)}(0),$$

da cui, in virtù delle (86),

$$| G_i^{(0)}(0) | \leq F(1 + W_0(\bar{\xi}_i)) \int_{\xi_i}^{\bar{\xi}_i} \rho_i(x, 0) dx$$

e infine, se y, $\bar{y}$ sono i valori legati a ξ_i, $\bar{\xi}_i$ dalle relazioni (81'''), [29]

$$| G_i^{(0)}(0) | \leq F\lambda_1 (1 + W_0(\bar{\xi}_i)) \left(1 + \int_0^a L(x) dx\right)(y - \bar{y}) \qquad (i = 1, \ldots, r),$$

vale a dire le (83).

([29]) Tenuto conto che è $\bar{y} < y$, $\xi_i < \bar{\xi}_i$, $g_i(\bar{\xi}_i; x, \bar{y}) = 0$, $\int_{\xi_i}^{\bar{\xi}_i} \rho_i(t, g_i(t; x, y)) dt = g_i(\bar{\xi}_i; x, y)$, ed essendo $g_i(t; x, y)$ crescente in t, si ha

$$\int_{\xi_i}^{\bar{\xi}_i} \rho_i(t, 0) dt = \int_{\xi_i}^{\bar{\xi}_i} [\rho_i(t, 0) - \rho_i(t, g_i(t; x, y)) + \rho_i(t, g_i(t; x, y))] dt \leq$$

$$\leq \int_{\xi_i}^{\bar{\xi}_i} L(t) g_i(t; x, y) dt + g_i(\bar{\xi}_i; x, y) - g_i(\bar{\xi}_i; x, \bar{y}) \leq$$

$$\leq [g_i(\bar{\xi}_i; x, y) - g_i(\bar{\xi}_i; x, \bar{y})]\left(1 + \int_0^a L(t) dt\right) \leq \lambda_1 \left(1 + \int_0^a L(t) dt\right)(y - \bar{y}).$$

OSSERVAZIONE. - Rileviamo che per ottenere le maggiorazioni (87), (83) è essenziale che sia

$$z_h^{*(n)}(x,\ 0) - z_{0h}^{(n)}(x,\ 0) = 0 \qquad (h = r+1,\ \dots,\ m).$$

È per questo che sono state introdotte le funzioni $z_h^{*(n)}(x, y)$, $(h=r+1, \dots, m)$, e non sono state definite direttamente le $z_j^{(n)}(x, y)$, $(j = 1, \dots, m)$, mediante le

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij}(x,\ y) z_j^{(n)}(x,\ y) = \sum_{j=1}^{m} a_{ij}(0,\ g_i(0;\ x,\ y))\Phi_j(g_i(\dots)) +$$

$$+ \int_0^x \left\{ \sum_{j=1}^{m} \frac{d a_{ij}(X,\ g_i(\dots))}{dX} z_j^{(n-1)}(X,\ g_i(\dots)) + f_i(X,\ g_i(\dots),\ z_1^{(n-1)}(\dots),\ \dots,\ z_m^{(n-1)}(\dots) \right\} dX$$

ovvero

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij}(x,\ y) z_j^{(n)}(x,\ y) = \sum_{j=1}^{r} a_{ij}(\xi_i,\ 0)\Psi_j(\xi_i) + \sum_{j=r+1}^{m} a_{ij}(\xi_i,\ 0) z_j^{(n-1)}(\xi_i,\ 0) +$$

$$+ \int_{\xi_i}^{x} \{ \dots \}\, dX.$$

In tal caso infatti alle (79) sarebbero state sostituite le

$$\sum_{j=r+1}^{m} a_{ij}(x,\ y) z_{0j}^{(n)}(x,\ y) + \sum_{j=1}^{r} a_{ij}(x,\ y)[\Psi_j(x) + \Phi_j(y) - \Phi_j(0)] =$$

$$= \sum_{j=1}^{m} a_{ij}(0,\ g_i(0;\ x,\ y))\Phi_j(g_i(\dots)) + \int_0^x \{ \dots \}\, dX,$$

da cui

$$z_{0j}^{(n)}(x,\ 0) = z_j^{(n)}(x,\ 0), \qquad (j = r+1,\ \dots,\ m),$$

e nelle (84′) sarebbe comparso il termine

$$\sum_{\nu=r+1}^{m} \frac{\beta_{\nu j}(\dots)}{A_{m-r}(\dots)} \sum_{h=r+1}^{m} \left[\frac{\partial a_{\nu h}(\dots)}{\partial x} + \rho_\nu(\dots) \frac{\partial a_{\nu h}(\dots)}{\partial y} \right] \cdot [z_h^{(n-1)}(x,\ y) - z_{0h}^{(n)}(x,\ y)]$$

anzichè

$$\sum_{\nu=r+1}^{m} \frac{\beta_{\nu j}(\dots)}{A_{m-r}(\dots)} \sum_{h=r+1}^{m} [\dots] \cdot [z_h^{*(n)}(x,\ y) - z_{0h}^{(n)}(x,\ y)].$$

b) Dalle (61), (62), supposto $\bar{y} < y \leq g_i(x;\ 0,\ 0)$, $(i = 1, \ldots, r)$, posto

$$\eta_i(X,\ y) = \sum_{h=1}^{r} \frac{da_{ih}(X,\ g_i(X;\ x,\ y))}{dX} z_h^{(n-1)}(X,\ g_i(\ldots)) +$$

$$+ \sum_{h=r+1}^{m} \frac{da_{ih}(X,\ g_i(\ldots))}{dX} z_h^{*(n)}(X,\ g_i(\ldots)) + f_i^{(n)}X,\ g_i(\ldots)),$$

segue

$$z_j^{(n)}(x,\ y) - z_j^{(n)}(x,\ \bar{y}) = \sum_{i=r+1}^{m} \alpha_{ij}(x,\ y) \left\{ \sum_{h=1}^{m} a_{ih}(0,\ g_i(0;\ x,\ y))\Phi_h(g_i(0;\ x,\ y)) + \right.$$

$$\left. + \int_0^x \eta_i(X,\ y)dX \right\} -$$

$$- \sum_{i=r+1}^{m} \alpha_{ij}(x,\ \bar{y}) \left\{ \sum_{h=1}^{m} a_{ih}(0,\ g_i(0;\ x,\ \bar{y}))\Phi_h(g_i(0;\ x,\ \bar{y})) + \int_0^x \eta_i(X,\ \bar{y})dX \right\} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{r} \alpha_{ij}(x,\ y) \left\{ \sum_{h=1}^{r} a_{ih}(\xi_i,\ 0)\Psi_h(\xi_i) + \sum_{h=r+1}^{m} a_{ih}(\xi_i,\ 0) z_h^{*(n)}(\xi_i,\ 0) + \int_{\xi_i}^{x} \eta_i(X,\ y)dX \right\} -$$

$$- \sum_{i=1}^{r} \alpha_{ij}(x,\ \bar{y}) \left\{ \sum_{h=1}^{r} a_{ih}(\bar{\xi}_i,\ 0)\Psi_h(\bar{\xi}_i) + \sum_{h=r+1}^{m} a_{ih}(\bar{\xi}_i,\ 0) z_h^{*(n)}(\bar{\xi}_i,\ 0) + \int_{\bar{\xi}_i}^{x} \eta_i(X,\ \bar{y})dX \right\}$$

$$(j = 1,\ \ldots,\ m).$$

Indicata con λ_3 la costante di LIPSCHITZ delle funzioni $\alpha_{ij}\ (x,\ y)$, $(i,\ j = 1, \ldots, m)$, rispetto a y, aggiungendo e togliendo alcuni termini e tenendo conto delle (7), (8), (49), (50), (51), (52), (56), (58'), (69'), (69*'), (72'), (80), posto

$$g_i(X;\ x,\ y) = g_i, \qquad g_i(X;\ x,\ \bar{y}) = \bar{g}_i,$$

si ha

$$| z_j^{(n)}(x,\ y) - z_j^{(n)}(x,\ \bar{y}) | \leq m\lambda_3 \left\{ B_1 \sum_{h=1}^{m} \gamma_{0h} + \int_0^a [(\mu(x) + \Lambda M(x)) \sum_{h=1}^{m} \gamma_{0h} + N(x)] dx \right\} (y - \bar{y}) +$$

$$+ (m - r) B_2 (\Lambda\lambda_1 \sum_{h=1}^{m} \mu_{0h} + m B_1 \lambda\lambda_1)(y - \bar{y}) +$$

$$+ B_2 \sum_{i=1}^{r} \left| \sum_{h=1} \left[\int_{\bar{\xi}_i}^{\xi_i} \frac{\partial a_{ih}(X,\ 0)}{\partial X} \Psi_h(X)dX + \int_{\bar{\xi}_i}^{\xi_i} a_{ih}(X,\ 0)\Psi'_h(X)dX \right] \right. +$$

$$+ \sum_{h=r+1}^{m} \left| \int_{\bar{\xi}_i}^{\xi_i} \frac{\partial a_{ih}(X,\ 0)}{\partial X} z_{0h}^{(n)}(X,\ 0) dX + \int_{\bar{\xi}_i}^{\xi_i} a_{ih}(X,\ 0) \frac{\partial z_{0h}^{(n)}(X,\ 0)}{\partial X} dX \right| +$$

$$+ \int_{\xi_i}^{\bar{\xi}_i} \left[\sum_{h=1}^{r} \frac{da_{ih}(X,\ g_i)}{dX} z_h^{(n-1)}(X,\ g_i) + \sum_{h=r+1}^{m} \frac{da_{ih}(X,\ g_i)}{dX} z_h^{*(n)}(X,\ g_i) \right] dX +$$

$$+ \int_{\xi_i}^{\bar{\xi}_i} f_i^{(n)}(X,\ g_i) dX \Big| + B_2 \sum_{i=r+1}^{m} \left\{ \left| \int_0^x \left\{ \sum_{h=1}^{r} \left[\frac{da_{ih}(X,\ g_i)}{dX} - \frac{da_{ih}(X,\ \bar{g}_i)}{dX} \right] z_h^{(n-1)}(X,\ g_i) + \right. \right. \right.$$

$$+ \sum_{h=1}^{r} \frac{da_{ih}(X,\ \bar{g}_i)}{dX} [z_h^{(n-1)}(X,\ g_i) - z_h^{(n-1)}(X,\ \bar{g}_i)] +$$

$$+ \sum_{h=r+1}^{m} \left[\frac{da_{ih}(X,\ g_i)}{dX} - \frac{da_{ih}(X,\ \bar{g}_i)}{dX} \right] z_h^{*(n)}(X,\ g_i) +$$

$$\left. \left. + \sum_{h=r+1}^{m} \frac{da_{ih}(X,\ \bar{g}_i)}{dX} [z_h^{*(n)}(X,\ g_i) - z_h^{*(n)}(X,\ \bar{g}_i)] \right\} dX \right| +$$

$$\left. + \int_0^x L_1(X) [|g_i - \bar{g}_i| + \sum_{h=1}^{r} |z_h^{(n-1)}(X,\ g_i) - z_h^{(n-1)}(X,\ \bar{g}_i)| + \sum_{h=r+1}^{m} |z_h^{*(n)}(X,\ g_i) - z_h^{*(n)}(X,\ \bar{g}_i)|] dX \right\} +$$

$$+ B_2 \sum_{i=1}^{r} \left\{ \left| \int_{\bar{\xi}_i}^{x} \{ \ldots \} \, dX \right| + \int_{\bar{\xi}_i}^{x} L_1(X) [\ldots] dX \right\}, \qquad (j = 1,\ \ldots,\ m)$$

Aggiungendo e togliendo termini opportuni, con alcune integrazioni per parti, tenuto conto (56), (58'), (70), (71), (83), si ottiene

$$\left| \frac{z_j^{(n)}(x,\ y) - z_j^{(n)}(x,\ \bar{y})}{y - \bar{y}} \right| \leq m\lambda_3 \left\{ B_1 \sum_{h=1}^{m} \gamma_{0h} + \int_0^a [(\mu(x) + \Lambda M(x)) \sum_{h=1}^{m} \gamma_{0h} + N(x)] dx \right\} +$$

$$+ (m - r) B_2 (\Lambda \lambda_1 \sum_{h=1}^{m} \mu_{0h} + m B_1 \lambda \lambda_1) + F \lambda_1 \left(1 + \int_0^a L(x) dx \right) \sum_{i=1}^{r} W_0(\bar{\xi}_i) +$$

$$+ \frac{B_2}{y - \bar{y}} \sum_{i=1}^{r} \left\{ \int_{\xi_i}^{\bar{\xi}_i} (\mu(X) + \Lambda M(X)) g_i(X;\ x,\ y) (W(X) + W^*(X)) dX + \right.$$

$$+\left|\int_{\xi_i}^{\bar{\xi}_i}\sum_{h=1}^{r}\left(\frac{da_{ih}(X,\ g_i)}{dX}-\frac{\partial a_{ih}(X,\ 0)}{\partial X}\right)\Psi_h(X)dX+\right.$$

$$\left.+\int_{\xi_i}^{\bar{\xi}_i}\sum_{h=r+1}^{m}\left(\frac{da_{ih}(X,\ g_i)}{dX}-\frac{\partial a_{ih}(X,\ 0)}{\partial X}\right)z_h^{*(n)}(X,\ 0)dX\right|+$$

$$\left.+\int_{\xi_i}^{\bar{\xi}_i}L_1(X)[g_i+\sum_{h=1}^{r}|z_h^{(n-1)}(X,\ g_i)-\Psi_h(X)|+\sum_{h=r+1}^{m}|z_h^{*(n)}(X,\ g_i)-z_h^{*(n)}(X,\ 0)|]dX\right\}+$$

$$+\frac{B_2}{y-\bar{y}}\sum_{i=r+1}^{m}\left\{\sum_{h=1}^{m}\gamma_{0h}\,|\,[a_{ih}(X,\ g_i)-a_{ih}(X,\ \bar{g}_i)]_{X=0}^{X=x}\,|+\right.$$

$$+\sum_{h=1}^{r}\left|\int_0^x[a_{ih}(X,\ g_i)-a_{ih}(X,\ \bar{g}_i)]\frac{dz_h^{(n-1)}(X,\ g_i)}{dX}dX\right|+$$

$$+\sum_{h=r+1}^{m}\left|\int_0^x[a_{ih}(X,\ g_i)-a_{ih}(X,\ \bar{g}_i)]\frac{dz_h^{*(n)}(X,\ g_i)}{dX}dX\right|+$$

$$\left.+\int_0^x[(\mu(X)+\Lambda M(X)+L_1(X))(g_i-\bar{g}_i)(W(X)+W^*(X))+L_1(X)(g_i-\bar{g}_i)]dX\right\}+$$

$$+\frac{B_2}{y-\bar{y}}\sum_{i=1}^{r}\left\{\sum_{h=1}^{m}\gamma_{0h}\left|[a_{ih}(X,\ g_i)-a_{ih}(X,\ \bar{g}_i)]_{X=\bar{\xi}_i}^{X=x}\right|+\right.$$

$$+\sum_{h=1}^{r}\left|\int_{\bar{\xi}_i}^x[a_{ih}(X,\ g_i)-a_{ih}(X,\ \bar{g}_i)]\frac{dz_h^{(n-1)}(X,\ g_i)}{dX}dX\right|+$$

$$+\sum_{h=r+1}^{m}\left|\int_{\bar{\xi}_i}^x[a_{ih}(X,\ g_i)-a_{ih}(X,\ \bar{g}_i)]\frac{dz_h^{*(n)}(X,\ g_i)}{dX}dX\right|+$$

$$\left.+\int_{\bar{\xi}_i}^x[\mu(X)+\Lambda M(X)+L_1(X))(g_i-\bar{g}_i)(W(X)+W^*(X))+L_1(X)(g_i-\bar{g}_i)]dX\right\},$$

$$(j=1,\ \ldots,\ m),$$

da cui, con ulteriori integrazioni per parti, in virtù delle (4), (56), (68_2), (71), (75), (82), con qualche calcolo si ottiene

$$\left|\frac{z_j^{(n)}(x,\, y) - z_j^{(n)}(x,\, \bar{y})}{y - \bar{y}}\right| \leq m\lambda_3 \left\{ B_1 \sum_{h=1}^{m} \gamma_{0h} + \int_0^a [(\mu(x) + \Lambda M(x)) \sum_{h=1}^{m} \gamma_{0h} + N(x)]dx \right\} +$$

$$+ (m - r)B_2(\Lambda\lambda_1 \sum_{h=1}^{m} \mu_{0h} + mB_1\lambda\lambda_1) + rF\lambda_1\left(1 + \int_0^a L(x)dx\right)\left\{ \lambda_1^* + \lambda\lambda_2^* + \right.$$

$$\left. + \int_0^x S^*(X)(W(X) + W^*(X))dX \right\} +$$

(88)

$$+ mB_2\lambda_1 \int_0^a L_1(x)dx + rB_2\Lambda\lambda_1 \sum_{h=1}^{m} \gamma_{0h} + mB_2\Lambda(1 + \lambda_1) \sum_{h=1}^{m} \gamma_{0h} +$$

$$+ mB_2\Lambda\lambda_1 \int_0^x r\left[p(X) + (m^2B_1B_2 + 1)M(X)\frac{W(X)}{r}\right] dX +$$

$$+ mB_2\Lambda\lambda_1 \int_0^x (m - r)\left[\alpha(X) + \beta(x)W(X) + M(X)\frac{W^*(X)}{m - r}\right] dX +$$

$$+ mB_2\lambda_1 \int_0^x (\mu(X) + \Lambda M(X) + L_1(X))(W(X) + W^*(X))dX. \qquad (j = 1, \ldots, m),$$

e, tenuto conto della (73′), e posto

$$S_0(x) = rF\lambda_1\left(1 + \int_0^a L(t)dt\right)S^*(x) + mB_2\lambda_1(\mu(x) + 2\Lambda M(x) + L_1(x)), \tag{89}$$

$$\lambda_4 = \lambda + m\lambda_3 \left\{ B_1 \sum_{h=1}^{m} \gamma_{0h} + \int_0^a [(\mu(x) + \Lambda M(x)) \sum_{h=1}^{m} \gamma_{0h} + N(x)]\, dX \right\} +$$

$$+ mB_2\lambda_1(\Lambda \sum_{h=1}^{m} \mu_{0h} + mB_1\lambda) +$$

(90)

$$+ rF\lambda_1\left(1 + \int_0^a L(x)dx\right)(\lambda_1^* + \lambda\lambda_2^*) + mB_2\lambda_1 \int_0^a L_1(x)dx +$$

$$+ B_2\Lambda[r\lambda_1 + m(1 + \lambda_1)] \sum_{h=1}^{m} \gamma_{0h} + mrB_2\Lambda\lambda_1 \int_0^a p(x)dx +$$

$$+ m(m - r)B_2\Lambda\lambda_1 \int_0^a \alpha(x)dx + (m - r)\lambda_1^* \int_0^a S_0(x)dx,$$

si ha

$$\left|\frac{z_j^{(n)}(x,\ y)-z_j^{(n)}(x,\ \bar{y})}{y-\bar{y}}\right| \leq \lambda_4 + \int_0^x \{ S_0(X)[1+(m-r)\overset{*}{\lambda}_2 e^{(m-r)\int_0^X S^*(t)dt}] +$$

$$+ m^3 B_1 B_2^2 \Lambda \lambda_1 M(X) + m(m-r) B_2 \Lambda \lambda_1 \beta(X) \} \ W(X) dX,$$

$$(j=1,\ \ldots,\ m);$$

posto infine

$$S_1(x) = S_0(x)[1+(m-r)\overset{*}{\lambda}_2 e^{(m-r)\int_0^x S^*(t)dt}] + m^3 B_1 B_2^2 \Lambda \lambda_1 M(x) + \tag{91}$$

$$+ m(m-r) B_2 \Lambda \lambda_1 \beta(x),$$

è

$$\left|\frac{z_j^{(n)}(x,\ y)-z_j^{(n)}(x,\ \bar{y})}{y-\bar{y}}\right| \leq \lambda_4 + \int_0^x S_1(X) W(X) dX,$$

vale a dire (cfr. la (66))

$$\left|\frac{z_j^{(n)}(x,\ y)-z_j^{(n)}(x,\ \bar{y})}{y-\bar{y}}\right| \leq \frac{W(x)}{r} \qquad (j=1,\ \ldots,\ m), \tag{70}$$

come si voleva dimostrare.

Se per uno o più valori di i, $(i=1,\ \ldots,\ r)$, è $y > \bar{y} \geq g_i(x;\ 0,\ 0)$ oppure $y > g_i(x;\ 0,\ 0) > \bar{y}$, valgono ancora [30] le maggiorazioni (92), (92'), come si può verificare facilmente.

Si può dimostrare che le funzioni $z_j^{(n)}(x,\ y)$, $(j=1,\ \ldots,\ m)$, sono assolutamente continue in x su ogni segmento di D parallelo all'asse x e valgono le (71).

Siano $(x',\ y)$, $(x'',\ y)$ due punti del campo D, con $x' < x''$, $y > 0$, e supponiamo che il punto $P'(x',\ g_i(x';\ x'',\ y))$ ovvero il punto $P''(x'',\ g_i(x'';\ x',\ y))$ appartengano al campo D.

Se P'' appartiene al campo D, dalla i-esima della (61) o (62) segue

---

[30] A tale scopo nella posizione (90) si è sostituito al fattore $m-r$, che compare nel secondo termine del secondo membro della (88), il fattore m.

$$|\sum_{j=1}^{m} a_{ij}(x', y)z_j^{(n)}(x', y) - \sum_{j=1}^{m} a_{ij}(x'', y)z_j^{(n)}(x'', y)| =$$

$$= |\sum_{j=1}^{m} a_{ij}(x', y)z_j^{(n)}(x', y) - \sum_{j=1}^{m} a_{ij}(x'', g_i(x''; x', y))z_j^{(n)}(x'', g_i(x''; x', y)) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{m} a_{ij}(x'', g_i(x''; x', y))z_j^{(n)}(x'', g_i(x''; x', y)) - \sum_{j=1}^{m} a_{ij}(x'', y)z_j^{(n)}(x'', y)| \leq$$

$$\leq \left| \int_{x'}^{x''} \left[\sum_{j=1}^{r} \frac{da_{ij}(X, g_i(X; x', y))}{dX} z_j^{(n-1)}(X, g_i(...)) + \sum_{j=r+1}^{m} \frac{da_{ij}(X, g_i(...))}{dX} z_j^{*(n)}(X, g_i(...)) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + f_i^{(n)}(X, g_i(...)) \right] dX \right| + \left(mB_1 \frac{W(a)}{r} + \Lambda \sum_{j=1}^{m} \gamma_{0j} \right) (g_i(x''; x', y) - y),$$

e infine

$$|\sum_{j=1}^{m} a_{ij}(x', y)z_j^{(n)}(x', y) - \sum_{j=1}^{m} a_{ij}(x'', y)z_j^{(n)}(x'', y)| \leq$$

(92)

$$\leq \int_{x'}^{x''} \left\{ [\mu(X) + \Lambda M(X)] \sum_{j=1}^{m} \gamma_{0j} + N(X) \right\} dX + \left(mB_1 \frac{W(a)}{r} + \Lambda \sum_{j=1}^{m} \gamma_{0j} \right) \int_{x'}^{x''} M(X) dX.$$

Alla stessa diseguaglianza si perviene se P' appartiene al campo D; ciò vale senz'altro se $i = r + 1, ..., m$.

Per $i = 1, ..., r$, se nessuno dei punti P', P'' appartiene al campo D, con un artificio già utilizzato altrove ([31]) si dimostra che vale ancora la (92).

In virtù della (92) i membri di ciascuna delle (61), (62) sono funzioni assolutamente continue in x; dall'assoluta continuità in x delle funzioni $a_{ij}(x, y)$, $(i, j = 1, ..., m)$, e dalla (1) segue allora ([32]) l'assoluta continuità delle funzioni $z_j^{(n)}(x, y)$, $(j = 1, ..., m)$, rispetto a x su ogni segmento di D parallelo all'asse x.

Dalle (61), (62), le quali valgono in tutto il campo D seguono in quasi tutto D le ([33])

([31]) Cfr. l c. in nota ([1]), § 2, n. 3, *c*), pp. 157-159.
([32]) Cfr. § 2, n. 2, *a*).
([33]) Cfr. nota ([15]).

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij}(x,\ y)\left[\frac{\partial z_j^{(n)}(x,\ y)}{\partial x} + \rho_i(x,\ y)\frac{\partial z_j^{(n)}(x,\ y)}{\partial y}\right] =$$

$$= \sum_{j=1}^{r}\left[\frac{\partial a_{ij}(x,\ y)}{\partial x} + \rho_i(x,\ y)\frac{\partial a_{ij}(x,\ y)}{dy}\right]\cdot[z_j^{(n-1)}(x,\ y) - z_j^{(n)}(x,\ y)] +$$

$$+ \sum_{j=r+1}^{m}\left[\frac{\partial a_{ij}(x,\ y)}{\partial x} + \rho_i(x,\ y)\frac{\partial a_{ij}(x,\ y)}{\partial y}\right]\cdot[z_j^{*(n)}(x,\ y) - z_j^{(n)}(x,\ y)] +$$

$$+ f_i^{(n)}(x,\ y) \qquad (i = 1,\ \ldots,\ m),$$

da cui

$$\left|\frac{\partial z_j^{(n)}(x,\ y)}{\partial x}\right| \leq mB_2[2(\mu(x) + \Lambda M(x))\sum_{j=1}^{m}\gamma_{0i} + N(x)] + m^2B_1B_2\frac{W(x)}{r},$$

e, tenuto conto della posizione (71'),

$$\left|\frac{\partial z_j^{(n)}(x,\ y)}{\partial x}\right| \leq p(x) + m^2B_1B_2\frac{W(x)}{r} \qquad (j = 1,\ \ldots,\ m); \tag{71}$$

le (71) valgono in quasi tutto D ed è immediato che in corrispondenza ad ogni y di $(0,\ b_0)$ valgono per quasi tutti gli x tali che $(x,\ y)$ appartenga al campo D.

8. – *Convergenza delle approssimazioni successive.* Dimostriamo ora la convergenza delle funzioni $z_j^{(n)}(x,\ y)$, $(j = 1,\ \ldots,\ m)$, $z_j^{*(n)}(x,\ y)$, $(j = r + 1,\ \ldots,\ m)$, nel campo D.

Posto

$$\left\{\begin{array}{ll} u_j^{*(n)}(x,\ y) = z_j^{*(n)}(x,\ y) - z_j^{*(n-1)}(x,\ y) & (j = r + 1,\ \ldots,\ m;\ n = 2,\ 3,\ \ldots) \\ u_j^{(n)}(x,\ y) = z_j^{(n)}(x,\ y) - z_j^{(n-1)}(x,\ y) & (j = 1,\ \ldots,\ m;\ n = 1,\ 2,\ \ldots) \end{array}\right. \tag{93}$$

dalle (60) seguono le

$$\sum_{j=r+1}^{m} a_{ij}(x,\ y)u_j^{*(n)}(x,\ x) + \sum_{j=1}^{r} a_{ij}(x,\ y)u_j^{(n-1)}(x,\ y) =$$

$$(94) = \int_0^x\left\{\sum_{j=r+1}^{m}\frac{da_{ij}(X,\ g_i(X;\ x,\ y))}{dX}u_j^{*(n)}(X,\ g_i(\ldots)) + \sum_{j=1}^{r}\frac{da_{ij}(X,\ g_i(\ldots))}{dX}u_j^{(n-1)}(X,\ g_i(\ldots)) +\right.$$

$$\left. + f_i^{(n)}(X,\ g_i(\ldots)) - f_i^{(n-1)}(X,\ g_i(\ldots))\right\}dX, \qquad (i = r + 1,\ \ldots,\ m;\ n = 2,\ 3,\ \ldots),$$

e, tenuto conto delle (68_2),

$$\sum_{j=r+1}^{m} a_{ij}(x,\ 0)u_j^{*(n)}(x,\ 0) =$$

$$(94_0)\quad = \int_0^x \left\{ \sum_{j=r+1}^{m} \frac{da_{ij}(X,\ g_i(X;\ x,\ 0))}{dX} u_j^{*(n)}(X,\ g_i(...)) + \sum_{j=1}^{r} \frac{da_{ij}(X,\ g_i(...))}{dX} u_j^{(n-1)}(X,\ g_i(...)) + \right.$$

$$\left. + f_i^{(n)}(X,\ g_i(...)) - f_i^{(n-1)}(X,\ g_i(...)) \right\} dX \qquad (i = r+1,\ ...,\ m).$$

Dalle (61) seguono, per $i = r+1,\ ...,\ m$, le

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij}(x,\ y)u_j^{(n)}(x,\ y) =$$

$$(95)\quad = \int_0^x \left\{ \sum_{j=1}^{r} \frac{da_{ij}(X,\ g_i(X;\ x,\ y))}{dX} u_j^{(n-1)}(X,\ g_i(...) + \sum_{j=r+1}^{m} \frac{da_{ij}(X,\ g_i(...))}{dX} u_j^{*(n)}(X,\ g_i(...)) + \right.$$

$$\left. + f_i^{(n)}(X,\ g_i(...)) - f_i^{(n-1)}(X,\ g_i(..)) \right\} dX,$$

e, per $i = 1,\ ..,\ r$, se $y \geq g_i(x;\ 0,\ 0)$ la (95), e, se $y < g_i(x;\ 0,\ 0)$, dalla (62) segue la

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij}(x,\ y)u_j^{(n)}(x,\ y) = \sum_{j=r+1}^{m} a_{ij}(\xi_i,\ 0)u_j^{*(n)}(\xi_i,\ 0) +$$

$$(96)\quad + \int_{\xi_i}^x \left\{ \sum_{j=1}^{r} \frac{da_{ij}(X,\ g_i(X;\ x,\ y))}{dX} u_j^{(n-1)}(X,\ g_i(...)) + \sum_{j=r+1}^{m} \frac{da_{ij}(X,\ g_i(...))}{dX} u_j^{*(n)}(X,\ g_i(...)) + \right.$$

$$\left. + f_i^{(n)}(X,\ g_i(...)) - f_i^{(n-1)}(X,\ g_i(...)) \right\} dX.$$

Dalle (94), tenuto conto delle (8), (52), (53), (54), (58'), si ha

$$| u_j^{*(n)}(x,\ y) | \leq \frac{B_3}{\omega} \sum_{i=r+1}^{m} \left\{ B_1 \sum_{h=1}^{r} | u_h^{(n-1)}(x,\ y) | + \right.$$

$$\left. + \int_0^x [\mu(X) + \Lambda M(X) + L_1(X)][\sum_{h=r+1}^{m} | u_h^{*(n)}(X,\ g_i(X;\ x,\ y)) | + \sum_{h=1}^{r} | u_h^{(n-1)}(X,\ g_i(...)) |] dX \right\}$$

e, posto

$$S_2(x) = \mu(x) + \Lambda M(x) + L_1(x), \tag{96'}$$

$$| u_j^{*(n)}(x, y) | \leq \frac{B_3}{\omega} \sum_{i=r+1}^{m} \left\{ B_1 \sum_{h=1}^{r} | u_h^{(n-1)}(x, y) | + \right.$$

$$\left. + \int_0^x S_2(X) [\sum_{h=r+1}^{m} | u_h^{*(n)}(X, g_i(X; x, y)) | + \sum_{h=1}^{r} | u_h^{(n-1)}(X, g_i(...)) |] dX \right\} \tag{97}$$

$$(j = r + 1, \ldots, m).$$

Dalle (94_0) si hanno le

$$| u_j^{*(n)}(x, 0) | \leq \frac{B_3}{\omega} \sum_{i=r+1}^{m} \int_0^x S_2(X) [\sum_{h=r+1}^{r} | u_h^{*(n)}(X, g_i(X; x, 0)) | + \sum_{h=1}^{r} | u_h^{(n-1)}(X, g_i(..)) |] dX, \tag{97_0}$$

$$(j = r + 1, \ldots, m),$$

dalle (95) le

$$| u_j^{(n)}(x, y) | \leq B_2 \sum_{i=1}^{m} \int_0^x S_2(X) [\sum_{h=1}^{r} | u_h^{(n-1)}(X, g_i(X; x, y)) | + \sum_{h=r+1}^{m} | u_h^{*(n)}(X, g_i(...)) |] dX \tag{98}$$

se per tutti i valori i, con $1 \leq i \leq r$, è $y \geq g_i(x; 0, 0)$; ovvero, se per $i = i_s$, con $1 \leq i_s \leq r$, $(s = 1, \ldots, \nu \leq r)$, è $y < g_{i_s}(x; 0, 0)$, e per $i = i_s$, $(s = \nu + 1, \ldots, m)$, è $y \geq g_{i_s}(x; 0, 0)$, tenuto conto anche delle (96), si hanno le

$$| u_j^{(n)}(x, y) | \leq B_2 \sum_{s=1}^{\nu} \left\{ B_1 \sum_{h=r+1}^{m} | u_h^{*(n)}(\xi_{i_s}, 0) | + \right.$$

$$\left. + \int_{\xi_{i_s}}^x S_2(X) [\sum_{h=1}^{r} | u_h^{(n-1)}(X, g_{i_s}(X; x, y) | + \sum_{h=r+1}^{m} | u_h^{*(n)}(X, g_{i_s}(...)) |] dX \right\} + \tag{99}$$

$$+ B_2 \sum_{s=\nu+1}^{m} \int_0^x S_2(X) [\sum_{h=1}^{r} | u_h^{(n-1)}(X, g_{i_s}(...)) | + \sum_{h=r+1}^{m} | u_h^{*(n)}(X, g_{i_s}(...)) |] dX,$$

$$(j = 1, \ldots, m).$$

Definiamo le funzioni

$$\mathfrak{U}^{*(n)}(x) = \sup_{\substack{0 \le X \le x \\ 0 \le y \le b_0 - \int_0^X M(t)dt}} \sum_{j=r+1}^{m} | u_j^{*(n)}(X, y) |, \qquad (n = 2, 3, ...)$$

$$\mathfrak{U}^{(n)}(x) = \sup_{\substack{0 \le X \le x \\ 0 \le y \le b_0 - \int_0^X M(t)dt}} \sum_{j=1}^{r} | u_j^{(n)}(X, y) |, \qquad (n = 1, 2, ...).$$

Dalle (97) si ha

$$\sum_{j=r+1}^{m} | u_j^{*(n)}(x, y) | \le \frac{(m-r)^2 B_3}{\omega} \Big\{ B_1 \mathfrak{U}^{(n-1)}(x) + \tag{100}$$

$$+ \int_0^x S_2(X)[\mathfrak{U}^{(n-1)}(X) + \mathfrak{U}^{*(n)}(X)]dX \Big\}$$

e quindi anche [34]

$$\mathfrak{U}^{*(n)}(x) \le \frac{(m-r)^2 B_3}{\omega} \Big\{ B_1 \mathfrak{U}^{(n-1)}(x) + \int_0^x S_2(X)[\mathfrak{U}^{(n-1)}(X) + \mathfrak{U}^{*(n)}(X)]dX \Big\},$$

e a maggior ragione, se x è fissato in $(0, a)$, tenuto conto che $\mathfrak{U}^{(n-1)}(x)$ è non decrescente, per $0 \le t \le x$ vale la

$$\mathfrak{U}^{*(n)}(t) \le \frac{(m-r)^2 B_3}{\omega} \Big\{ B_1 \mathfrak{U}^{(n-1)}(x) + \int_0^t S_2(X)[\mathfrak{U}^{(n-1)}(X) + \mathfrak{U}^{*(n)}(X)]dX \Big\} \le$$

$$\le \frac{(m-r)^2 B_3}{\omega} \Big(B_1 + \int_0^a S_2(X)dX \Big) \mathfrak{U}^{(n-1)}(x) + \frac{(m-r)^2 B_3}{\omega} \int_0^t S_2(X) \mathfrak{U}^{*(n)}(X)dX;$$

---

(34) Per ogni χ, con $0 \le \chi \le x$, indicato con $\eta(x)$ il secondo membro della (100) è

$$\sum_{j=r+1}^{m} | u_j^{*(n)}(\chi, y) | \le \eta(\chi) \le \eta(x),$$

quindi anche

$$\sup_{\substack{0 \le \chi \le x \\ 0 \le y \le b_0 - \int_0^\chi M(t)dt}} \sum_{j=r+1}^{m} | u_j^{*(n)}(\chi, y) | \le \eta(x).$$

in virtù del lemma di GRONWALL generalizzato ne segue, per $0 \leq t \leq x$,

$$\mathfrak{U}^{*(n)}(t) \leq e^{\frac{(m-r)^2 B_3}{\omega}\int_0^a S(X)dX} \frac{(m-r)^2 B_3}{\omega}\left(B_1 + \int_0^a S_2(X)dX\right) \cdot \mathfrak{U}^{(n-1)}(x),$$

e anche, posto

$$e^{\frac{(m-r)^2 B_3}{\omega}\int_0^a S_2(X)dX} \frac{(m-r)^2 B_3}{\omega}\left(B_1 + \int_0^a S_2(X)dX\right) = k_1, \tag{100'}$$

$$\mathfrak{U}^{*(n)}(x) \leq k_1 \mathfrak{U}^{(n-1)}(x) \qquad (0 \leq x \leq a). \tag{101}$$

Dalla (97_0) segue allora

$$\sum_{j=r+1}^{m} |u_j^{*(n)}(x, 0)| \leq (1 + k_1)\frac{(m-r)^2 B_3}{\omega}\int_0^x S_2(X)\mathfrak{U}^{(n-1)}(X)dX. \tag{102}$$

Allora dalla (98) o (99), indicata con k_2 la maggiore delle costanti $1 + k_1$, $H_1 B_1(1 + k_1)$, segue

$$|u_j^{(n)}(x, y)| \leq m B_2 k_2 \int_0^x S_2(X)\mathfrak{U}^{(n-1)}(X)dX, \qquad (j = 1, \ldots, m), \tag{103}$$

e anche [35]

$$\mathfrak{U}^{(n)}(x) \leq r m B_2 k_2 \int_0^x S_2(X)\mathfrak{U}^{(n-1)}(X)dX. \tag{104}$$

Si dimostra allora che, per $n = 1, 2, 3, \ldots$, è [36]

---

[35] Cfr. nota [34].

[36] Infatti per $n=1$ si ha $\mathfrak{U}^{(1)}(x) \leq \mathfrak{U}^{(1)}(a)$, per $n=2$, posto $rmB_2k_2 = k_3$, segue dalla (104)

$$\mathfrak{U}^{(2)}(x) \leq \mathfrak{U}^{(1)}(a) k_3 \int_0^x S_2(X)dX.$$

Supposta vera la (105) per $n=s$, con un rapido calcolo si prova che essa vale per

$$\mathfrak{M}^{(n)}(x) \leq \mathfrak{M}^{(1)}(a) \frac{[rmB_2k_2 \int_0^x S_2(X)dX]^{n-1}}{(n-1)!} \qquad (0 \leq x \leq a). \tag{105}$$

Dalla convergenza della serie numerica

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathfrak{M}^{(1)}(a) \frac{[rmB_2k_2 \int_0^a S_2(X)dX]^n}{n!} \tag{106}$$

segue la convergenza uniforme delle funzioni $z_j^{(n)}(x, y)$, $(j = 1, \ldots, r)$, in tutto il campo D.

Tenuto conto delle (101), (103), ne segue anche la convergenza uniforme nel campo D delle funzioni $z_j^{*(n)}(x, y)$, $z_j^{(n)}(x, y)$ $(j = r + 1, \ldots, m)$.

Posto

$$\lim_{n\to\infty} z_j^{(n)}(x, y) = z_j(x, y) \qquad (j = 1, \ldots, m), \tag{107}$$

$$\lim_{n\to\infty} z_j^{*(n)}(x, y) = z_j^*(x, y) \qquad (j = r + 1, \ldots, m), \tag{108}$$

dalle (60), (61) si ha nel campo D

$$\sum_{j=r+1}^{m} a_{ij}(x, y)z_j^*(x, y) + \sum_{j=1}^{r} a_{ij}(x, y)z_j(x, y) =$$

$$= \sum_{j=1}^{m} a_{ij}(0, g_i(0; x, y))\Phi_j(g_i(0; x, y)) + \int_0^x \left\{ \sum_{j=1}^{r} \frac{da_{ij}(X, g_i(X; x, y))}{dX} z_j(X, g_i(\ldots)) + \right.$$

(60''')

$$\left. + \sum_{j=r+1}^{m} \frac{da_{ij}(X, g_i(\ldots))}{dX} z_j^*(X, g_i(\ldots)) + f_i(X, g_i(\ldots), z_1(X, g_i(\ldots), \ldots, z_r(\ldots), z_{r+1}(\ldots), \ldots, z_m(\ldots)) \right\} dX,$$

$$(i = r + 1, \ldots, m),$$

$n = s + 1$, tenendo conto della (104). Infatti è

$$\mathfrak{M}^{(s+1)}(x) \leq k_3 \int_0^x S_2(X)\mathfrak{M}^{(s)}(X)dX \leq k_3 \int_0^x S_2(X)\mathfrak{M}^{(1)}(a) \frac{\left[k_3 \int_0^X S_2(t)dt\right]^{s-1}}{(s-1)!} dX \leq$$

$$\leq \frac{\mathfrak{M}^{(1)}(a)}{(s-1)!} \left[\frac{\left(k_3 \int_0^X S_2(t)dt\right)^s}{s} \right]_{X=0}^{X=x} = \mathfrak{M}^{(1)}(a) \frac{\left[k_3 \int_0^x S_2(t)dt\right]^s}{s!}.$$

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij}(x, y) z_j(x, y) = \sum_{j=1}^{m} a_{ij}(0, g_i(0; x, y))\Phi_j(0, g_i(0; x, y)) + \tag{61''}$$
$$+ \int_0^x \{ \dots \} dX \qquad (i = r + 1, \dots, m.$$

Dall' uguaglianza dei secondi membri delle (60'''), (61'') seguono, per $i = r + 1, \dots, m$, le

$$\sum_{j=r+1}^{m} a_{ij}(x, y) z_j^*(x, y) = \sum_{j=r+1}^{m} a_{ij}(x, y) z_j(x, y)$$

e quindi, in virtù della (2), è nel campo D

$$z_j^*(x, y) = z_j(x, y) \qquad (j = r + 1, \dots, m). \tag{109}$$

Allora la (61'') diviene

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij}(x, y) z_j(x, y) = \sum_{j=1}^{m} a_{ij}(0, g_i 0; x, y))\Phi_j(g_i(0; x, y)) + \tag{110}$$
$$+ \int_0^x \left\{ \sum_{j=1}^{m} \frac{da_{ij}(X, g_i(X; x, y))}{dX} z_j(X, g_i(\dots)) + f_i(X, g_i(\dots), z_1(X, g_i(\dots)), \dots, z_m(\dots)) \right\} dX,$$

la quale, per $i = r + 1, \dots, m$, vale in tutto il campo D e, per $i = 1, \dots, r$, vale nei punti (x, y) del campo D per i quali è $y \geq g_i(x; 0, 0)$.

Se $y < g_i(x; 0, 0)$ dalla (62) segue, tenuto conto delle (109),

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij}(x, y) z_j(x, y) = \sum_{j=1}^{r} a_{ij}(\xi_i, 0)\Psi_j(\xi_i) + \sum_{j=r+1}^{m} a_{ij}(\xi_i, 0) z_j(\xi_i, 0) + \tag{111}$$
$$+ \int_{\xi_i}^x \left\{ \sum_{j=1}^{m} \frac{da_{ij}(X, g_i(X; x, y))}{dX} z_j(X, g_i(\dots)) + f_i(X, g_i(\dots), z_1(X, g_i(\dots)), \dots, z_m(\dots)) \right\} dX.$$

Poichè le funzioni $z_j^{(n)}(x, y)$, $(j = 1, \dots, m)$, $(n = 1, 2, \dots)$, sono di classe G in D, soddisfano le (70) e, per ogni coppia di punti (x', y), (x'', y) di D, con $x' < x''$, le

$$(71') \qquad |z_j^{(n)}(x', y) - z_j^{(n)}(x'', y)| \leq \int_{x'}^{x''} \left[p(x) + m^2 B_1 B_2 M(x) \frac{W(x)}{r} \right] dx,$$

le quali seguono immediatamente dalle (71), anche le funzioni $z_i(x, y)$, $(j = 1, ..., m)$, soddisfano le (70), (71'), e sono quindi di classe G nel campo D.

Dalle (110), (111) si ottengono allora (37) in quasi tutto D le (I).

Inoltre dalle (68_1), (68_2) seguono le (I_0).

Si può provare che in corrispondenza ad ogni y di $(0, b_0)$ per quasi tutti gli x valgono le

$$(71'') \qquad \left| \frac{\partial z_j(x, y)}{\partial x} \right| \leq m B_2 N(x) + m^2 B_1 B_2 M(x) \frac{W(x)}{r} \qquad (j = 1, ..., m).$$

OSSERVAZIONE I. - Se in luogo delle (5), (7), (9_1) valgono le

$$|\rho_i(x, y)| \leq M, \quad |f_i(x, y, z_1, ..., z_m)| \leq N, \ (i = 1, ..., m), \quad \rho_i(x, y) \geq \Omega, \ (i = 1, ..., r),$$

essendo M, N, Ω costanti positive, e se le funzioni $\Psi_i(x)$, $(i = 1, ..., r)$, sono lipschitziane in $(0, a_0)$, le (11_1), (11_2) sono senz'altro soddisfatte.

Inoltre in tali ipotesi le funzioni $z_i(x, y)$, $(i = 1, ..., m)$, tenuto conto delle (71''), risultano lipschitziane anche rispetto a x in corrispondenza ad ogni y di $(0, b_0)$.

OSSERVAZIONE II. - *Unicità*. La soluzione costruita è unica nel campo funzionale considerato e dipende con continuità dai dati (38).

(37) Cfr. l.c. nella nota (15) e anche l.c. nota (1), § 2, n. 8, pp. 174-177. La dimostrazione per dedurre le (I) dalle (110), (111) è analoga.

(38) Cfr. l.c. nella nota (2).