Energia libera e stato tensionale dei continui (*)

GIUSEPPE GRIOLI (a Padova) (**)

(A Bruno Finzi nel suo 70mo compleanno)

Sunto. - *Si indaga, in condizioni molto generali di deformazione, entro quali limiti la conoscenza della struttura analitica dell'energia libera permetta di prevedere il comportamento meccanico di un continuo in relazione alla sua capacità di reazioni interne. La teoria comprende in particolare casi noti di Cosserat e di microstrutture.*

L'orientamento della Meccanica dei Continui si è rivolta negli ultimi tempi verso lo studio delle microstrutture. Dopo una vigorosa ripresa dello studio dei Continui di Casserat, che ha richiamato l'attenzione sui continui tridimensionali orientati-continui-polari-[1], [2], [3], [7], [8], [9], [10], [11], [12], [13], [14], [18], [19], [20], [21], [22], [23], [24], [27], [28], [29], [30], l'interesse si è andato estendendo verso la considerazione di continui il cui schema matematico vuole, in qualche modo, ricordare una provenienza particellare, mediante l'introduzione di iperstress, ipercoppie, iperforze, il cui significato fisico non sempre, però, riesce chiaro. [4], [5], [6], [15], [16], [17], [25], [26].

In realtà, si vuole pensare a un sistema materiale formato da un grandissimo numero di particelle estese e deformabili (molecole) interagenti tra di loro, ma di queste reciproche azioni si tiene conto solo in parte mediante un loro «riassunto» globale nello stabilire la struttura matematica dello schema continuo con cui si vuole rappresentare il sistema materiale.

Un tale continuo non può essere descritto mediante l'uso del strain classico, ma occorre fare intervenire uu certo numero di nuovi enti cinematici, *direttori*, *rotazioni*, ecc.

Il riferimento a una provenienza «molecolare» è in effetti dovuto non solo all'interesse che tale fatto può di per se presentare, ma anche al desiderio di una giustificazione «fisica» della creazione di una teoria dei continui che, per la presenza in essa di un gran numero di parametri cinematici

---

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dei Gruppi di ricerca matematica del C. N. R..

(**) Entrata in Redazione il 25 giugno 1970.

e costitutivi, permetta una maggiore apertura verso la spiegazione di taluni fenomeni di stress asimmetrici, che già cominciano a mettersi in evidenza nei solidi cristallini, di propagazione ondosa e, forse, verso la stessa fisica teorica.

A parte il caso dei Continui di Cosserat, la teoria della microstrutture ha havuto in questi ultimi tempi ampi sviluppi solo nel caso delle piccole deformazioni (caso lineare) e con riferimento a un numero limitato di parametri [15], [26], mentre nel caso di deformazioni finite solo casi speciali hanno avuto qualche sviluppo.

Vale la pena pertanto, di stabilire le equazioni di un tipo molto generale di continuo dipendente da un numero qualunque di parametri cinematici e con deformazioni finite.

Ciò che servirà per raggiungere lo scopo è la conoscenza della struttura dell' *energia libera* ma non la provenienza fisica dello schema matematico (tipo di microstruttura), quantunque tocchi all'esperienza fisica stabilire quali dei parametri ammessi presentino un'utilità concreta, mentre il confronto con tipi noti di microstrutture - quantunque non essenziale - ne giustificherà a posteriore l'introduzione.

La teoria viene sviluppata in assenza di vincoli interni e superficiali. Nuovi problemi vengono proposti all'attenzione dell'Analista, la cui collaborazione potrà riuscire preziosa.

1. - Energia libera.

Sia C' la configurazione attuale di un continuo e C una sua configurazione di riferimento. Siano P e P' punti corrispondenti di C e C' e y_r, x_r le coordinate di P e P' rispetto a una terna trirettangola levogira di versori c_r. La corrispondenza tra C e C' sia biunivoca e dotata di tutte le condizioni di regolarità analitica che occorreranno:

Per potere costruire una teoria più avanzata non solo di quella classica con stress simmetrico ma anche di quella dei continui di Cosserat occorre ritenere che il comportamento del continuo dipenda oltre che dal gradiente dello spostamento e dalla matrice di rotazione e dalle sue derivate prime anche da ulteriori elementi.

Supporrò, pertanto, che l' *energia libera* - funzione termodinamica di Helmotz - in generale dipenda oltre che dalle derivate delle x_r rispetto alle y_s - che brevemente indicherò con $x_{r,s}$ -, anche da un certo numero di matrici $\gamma^{(i)} \equiv \gamma^{(i)}_{rs_1 \dots s_n}$, $(i = 1, 2 \dots)$, dipendenti dalle configurazioni C, C', da P (o, se si vuole, da P') oltre che dalla temperatura assoluta, dall'entropia, ecc., Tuttavia avverto sin d'ora che nel seguito non terrò conto della dipendenza dalla temperatura, dall'entropia, ecc., in quanto, avendo di mira unicamente lo studio del comportamento meccanico del continuo sarà possibile evitare inutili complicazioni formali e considerare soltanto trasformazioni isoterme.

L'unica condizione che potrà (e dovrà) essere imposta a priori all'energia libera - che indicherò con I - é di soddisfare al *principio di indifferenza materiale* [18]. Dovrà, cioè essere [1]

$$\delta I = \frac{\partial I}{\partial x_{r,s}} \delta x_{r,s} + \sum_{i=1\dots} \frac{\partial I}{\partial \gamma^{(i)}_{rs_1\dots s_n}} \delta \gamma^{(i)}_{rs_1\dots s_n} = 0, \tag{1}$$

in corrispondenza a ogni spostamento rigido isotermo infinitesimo dalla configurazione C' a una vicinissima $C' + \delta C'$.

Nulla si può dedurre dalla (1) sino a che non si conosca la legge di dipendenza delle variazioni $\delta\gamma^{(i)}_{rs_1\dots s_n}$ delle $\gamma^{(i)}_{rs_1\dots s_n}$ dagli elementi caratteristici di uno spostamento rigido.

A tale fine, si supponga che in corrispondenza a un qualunque spostamento rigido (anche finito) da C' a C'' risulti [2]

$$\gamma^{(i)}(C, C'') = R(C', C'')\, \gamma^{(i)}(C, C') \rightarrow [\gamma^{(i)}_{rs_1\dots s_n}(C, C'') = R_{rl}\, \gamma^{(i)}_{ls_1\dots s_n}] \tag{2}$$

ove R è la matrice, indipendente da P, della rotazione contenuta nello spostamento $C'\ C''$. L'ipotesi espressa da (2) è avvalorata da un gran numero di casi concreti noti in cui essa è verificata. Da (2) segue

$$\gamma^{(i)}(C, C'') - \gamma^{(i)}(C, C') = (R - 1)\, \gamma^{(i)}(C, C'). \tag{3}$$

Se in particolare, lo spostamento rigido $C'\ C''$ è infinitesimo e la sua rotazione è caratterizzata dal vettore B, risulterà

$$\delta\gamma^{(i)}_{rs_1\dots s_n} = \varepsilon_{rlp}\, B_l\, \gamma^{(i)}_{ps_1\dots s_n} \tag{4}$$

ove ε_{rlp} denota l'indicatore di Ricci.

Poichè uno spostamento rigido infinitesimo è espresso dalla relazione

$$\delta x_r = \varepsilon_{rlp}\, B_l\, x_p + A_r \tag{5}$$

con A_r e B_r indipendenti dalle x_p, da (1), (4), (5) segue

$$\delta I = \varepsilon_{rlm} \left[\frac{\partial I}{\partial x_{r,s}} x_{m,s} + \sum_i \frac{\partial I}{\partial \gamma^{(i)}_{rs_1\dots s_n}} \gamma^{(i)}_{ms_1\dots s_n} \right] B_l = 0 \tag{6}$$

per ogni arbitrario B_l.

---

[1] Di solito, la condizione viene imposta direttamente allo stress.

[2] La condizione (2) è soddisfatta, in particolare, nei casi di Cosserat e di un certo tipo di microstrutturr lineari [15].

Si ponga

$$a \equiv (a_{rs} = x_{r,s}), \quad \nu^{(i)} = \bar{a}\gamma^{(i)} \rightarrow [\nu^{(i)}_{rs_1 \dots s_n} = x_{l,r}\, \gamma^{(i)}_{ls_1 \dots s_n}], \tag{7}$$

ove $\bar{a}$ denota la matrice coniugata della matrice a. Lo jacobiano delle x_r rispetto allle y_s è da supporsi non nullo (anzi positivo) e le (7) indicano una corrispondenza biunivoca tra le a_{rs}, $\nu^{(i)}_{rs_1 \dots s_n}$ e le $x_{r,s}$, $\gamma^{(i)}_{rs_1 \dots s_n}$. Pertanto, la I può pensarsi dipendente dalle variabili a_{rs}, $\nu^{(i)}_{rs_1 \dots s_n}$:

$$I = F'(a_{rs}, \nu^{(i)}_{rs_1 \dots s_n}). \tag{8}$$

In base a (8), tenuto conto dell'arbitrarietà delle B_l, la (6), con qualche sviluppo, diviene

$$\varepsilon_{rlm}\, a_{ms} \frac{\partial F'}{\partial a_{rs}} = 0, \tag{9}$$

la cui più generale soluzione è un'arbitraria funzione delle $\nu^{(i)}_{rs_1 \dots s_n}$ e delle variabili

$$b_{rs} = x_{i,r}\, x_{i,s}. \tag{10}$$

Vale la pena di osservare che le variabili b_{rs}, $\nu^{(i)}_{rs_1 \dots s_n}$ sono invarianti per spostamenti rigidi. Per le b_{rs} cioè è evidente (e ben noto). Per quanto riguarda le $\nu^{(i)}_{rs_1 \dots s_n}$ si osservi che in base a (2), in corrispondenza a ogni spostamento rigido, si ha

$$\begin{aligned} \nu^{(i)}(C, C'') - \nu^{(i)}(C, C') &= \bar{a}(C, C'')\, \gamma^{(i)}(C, C'') - \bar{a}(C, C')\, \gamma^{(i)}(C, C') = \\ &= [\bar{a}(C, C'')\, R(C', C'') - \bar{a}(C, C')]\, \gamma^{(i)}(C, C') = 0 \end{aligned} \tag{11}$$

per il fatto che è

$$\bar{a}(C, C'') = \overline{R(C', C'')\, a(C, C')} = \bar{a}(C, C')\, R^{-1}(C', C''). \tag{12}$$

Si conclude: ogni qualvolta l'energia libera dipende da variabili $x_{r,s}$, $\gamma^{(i)}_{rs_1 \dots s_n}$ verificanti la (4) in corrispondenza a ogni spostamento rigido infinitesimo, condizione necessaria e sufficiente affinchè essa soddisfi al principio di indifferenza materiale è che essa dipende da quelle variabili attraverso le b_{rs}, $\nu^{(i)}_{rs_1 \dots s_n}$ o - se si vuole - per tramite di espressioni costruite con le $x_{r,s}$, $\gamma^{(i)}_{rs_1 \dots s_n}$ che risultino invarianti per spostamenti rigidi.

Nel caso particolare che I dipenda dalle $x_{r,s}$ a dalle sole

$$\gamma^{(1)}_{rs} = \mu_{rs} = \frac{1}{2D}\, \varepsilon_{rpt}\, x_{t,sm}\, B_{pm}\,, \tag{13}$$

ove B_{pm} denota il complemento algebrico di $x_{p,m}$ nel determinante $D = \| r_{p,m} \|$, si ricade nel caso dei continui di Cosserat con rotazioni vincolate [2]. Si può dimostrare che la matrice μ_{rs} soddisfa alle (4).

Denotando con la sbarretta la derivazione rispetto alle x_r, con la virgola quella rispetto alle y_r, risulta

$$\delta x_{r,s} = (\delta x_r)_{/q}\, x_{q,s}\,. \tag{14}$$

Da (7), (10), tenendo presente che I può pensarsi quale funzione delle b_{rs}, $\nu^{(i)}_{rs_1\ldots s_n}$: $I = F(b_{rs}, \nu^{(i)}_{rs,\ldots s_n})$, segue

$$\delta I = \frac{\partial F}{\partial b_{rs}}\, \delta b_{rs} + \sum_i \frac{\partial F}{\partial \nu^{(i)}_{rs_1\ldots s_n}}\, \delta \nu^{(i)}_{rs_1\ldots s_n} = \tag{15}$$

$$= \left[2 \frac{\partial F}{\partial b_{lm}}\, x_{r,m} + \sum_i \frac{\partial F}{\partial \nu^{(i)}_{lps_2\ldots s_n}}\, \gamma^{(i)}_{rps_2\ldots s_n} \right] x_{q,l}\, (\delta u_r)_{/q} +$$

$$+ \sum_i \frac{\partial F}{\partial \nu^{(i)}_{rs_1\ldots s_n}}\, x_{l,r}\, \delta \gamma^{(i)}_{ls_1\ldots s_n}\,.$$

L'uguaglianza $\delta l^{(i)} = -\delta I$ valida per ogni spostamento revisibile isotermo, mostra che nel caso che le $x_{r,s}$, $\gamma^{(i)}_{rs_1\ldots s_n}$ siano tra loro del tutto indipendenti e non esistano vincoli interni nè superficiali, il continuo è capace di uno stress X_{rs} le cui parti simmetrica ed emisimmetrica sono espresse rispettivamente da

$$\begin{cases} X_{(rq)} = -2 \dfrac{\partial F}{\partial b_{li}}\, x_{r,i}\, x_{q,l} - \displaystyle\sum_i \frac{\partial F}{\partial \nu^{(i)}_{lps_2\ldots s_n}}\, \underbrace{\gamma_{rps_2\ldots s_n}\, x_{q,l}}\,, \\[2ex] X_{[rq]} = - \displaystyle\sum_i \frac{\partial F}{\partial \nu^{(i)}_{lps_2\ldots s_n}}\, \underbrace{\gamma^{(i)}_{rps_2\ldots s_n}\, x_{q,l}}\,, \end{cases} \tag{16}$$

mentre il coefficiente di $\delta\gamma^{(i)}_{ls_1\ldots s_n}$ nella (15) individua un gruppo di variabili ausiliarie che secondo la terminologia corrente in simili problemi dovrebbe dirsi un *iperstress* (nonostante non abbia un ben chiaro significato fisico).

Una volta stabilita un'opportuna espressione del lavoro delle forze esterne non è difficile scrivere le equazioni di campo verificate dal suddetto stress ma rinuncio a farlo, anche perchè nei casi concreti, spesso le variabili $x_{r,s}$, $\gamma^{(i)}_{rs_1\ldots s_n}$ non sono generalmente indipendenti e di ciò si dovrà tener conto.

D'ora in avanti mi riferirò a un caso particolare concreto che comprende i casi finora più diffusamente studiati nel corrispondente problema linearizzato pur essendo - anche se linearizzato - più generale di essi. Supporrò, cioè che I dipenda soltanto dalle variabili $x_{r,s}$, $\gamma^{(1)}_{rs_1s_2}$, $\gamma^{(2)}_{rs_1}$, $\gamma^{(2)}_{rs_1s_2}$ e sia precisamente

$$\gamma^{(1)}_{rs_1s_2} = x_{r,s_1s_2}, \quad \gamma^{(2)}_{rs_1} = \gamma_{rs_1}, \quad \gamma^{(2)}_{rs_1s_2} = \gamma^{(2)}_{rs_1,s_2} = \gamma_{rs_1s_2}, \tag{17}$$

con la condizione che la matrice γ_{rs} soddisfi alle (2), (4). Di conseguenza anche le $\gamma^{(1)}_{rs_1s_2}$, $\gamma^{(2)}_{rs_1s_2}$ soddisferanno a quelle uguaglianze.

Per le cose dette, l'energia libera sarà in definitiva funzione delle variabili

$$b_{rs} = x_{i,r}\, x_{i,s}, \quad b_{rst} = x_{i,r}\, x_{i,st}, \quad \nu_{rs} = x_{i,r}\, \gamma_{is}, \quad \nu_{rst} = x_{i,r}\, \gamma_{i,st}. \tag{18}$$

Risulterà, cioè,

$$I = F(b_{rs}, b_{rst}, \nu_{rs}, \nu_{rst}). \tag{19}$$

2. - Equazioui di campo.

In base a (14) e alle uguaglianze

$$\delta x_{r,st} = x_{q,s}\, x_{p,t}\, (\delta x_r)_{/pq} + x_{q,st}\, (\delta x_r)_{/q}. \quad \delta\gamma_{rst} = (\delta\gamma_{rs})_{/q}\, x_{q,t}, \tag{20}$$

da (18), (19) si deduce

$$\begin{aligned} \delta I = \Big\{ \Big[2 \frac{\partial F}{\partial b_{si}} x_{r,i} + \frac{\partial F}{\partial b_{sit}} x_{r,it} + \frac{\partial F}{\partial \nu_{si}} \gamma_{ri} + \frac{\partial F}{\partial \nu_{sit}} \gamma_{rit} \Big] x_{q,s} + \\ + \frac{\partial F}{\partial b_{ist}} x_{i,r}\, x_{q,st} \Big\} (\partial u_r)_{/q} + \frac{\partial F}{\partial b_{rst}} x_{i,r}\, x_{p,s}\, x_{q,t}\, (\partial u_i)_{/pq} + \\ + \frac{\partial F}{\partial \nu_{rs}} x_{i,r}\, \delta\gamma_{is} + \frac{\partial F}{\partial \nu_{rst}} x_{i,r}\, x_{q,t}\, (\delta\gamma_{is})_{/q}. \end{aligned} \tag{21}$$

Posto

$$
(22)\qquad \begin{cases} \Gamma_{ipq} = -\, x_{i,r}\, x_{p,s}\, x_{q,t}\, \dfrac{\partial F}{\partial b_{rst}} \\[2ex] \xi_{rs} = -\dfrac{\partial F}{\partial \gamma_{is}}\, x_{r,i}\,, \quad \eta_{rst} = -\dfrac{\partial F}{\partial \gamma_{isq}}\, x_{r,i}\, x_{t,q} \\[2ex] T_{rq} = -\,2\,\dfrac{\partial F}{\partial b_{pi}}\, x_{r,i}\, x_{q,p} - \dfrac{\partial F}{\partial b_{sit}}\,(x_{r,it}\, x_{q,s} + x_{r,s}\, x_{q,it}) = T_{qr}\,, \end{cases}
$$

la (21) può porsi nella forma

$$
(23)\qquad -\delta I = \left[T_{rq} + \xi_{qi}\,\gamma_{ri} + \frac{1}{D}\,\eta_{qil}\, B_{lt}\,\gamma_{rit} \right] (\delta u_r)_{/q} + \\ + \Gamma_{ipq}\,(\delta u_i)_{/pq} + \xi_{iq}\,\delta\gamma_{iq} + \eta_{isq}\,(\delta\gamma_{is})_{/q}\,,
$$

la quale, fatte le posizioni

$$
(24)\qquad \begin{cases} B_{rlq} = \eta_{rsq}\,\gamma_{ls}\,, \qquad N_{qr} = \xi_{qi}\,\gamma_{ri} + \dfrac{B_{lt}}{D}\,\eta_{qil}\,\gamma_{rit}\,, \\[2ex] \delta\gamma_{rs} = \delta\psi_{rl}\,\gamma_{ls} \end{cases}
$$

assume l'aspetto più conveniente

$$
(25)\qquad -\delta I = (T_{rq} + N_{qr})\,(\delta u_r)_{/q} + \Gamma_{ipq}\,(\delta u_i)_{/pq} + \\ + N_{il}\,\delta\psi_{il} + B_{ilq}\,(\delta\psi_{il})_{/q}\,.
$$

A questo punto conviene osservare che lo spostamento δu_r subordina la rotazione locale $B_r^{(u)}$ espressa da

$$
(26)\qquad B_r^{(u)} = \frac{1}{2}\,\varepsilon_{rlp}(\delta u_p)_{/l} \rightarrow (\delta u_{\underline{p}})_{/l} - \varepsilon_{pil}\, B_i^{(u)} = 0
$$

e soddisfacente alla relazione

$$
(27)\qquad (B_r^{(u)})_{/r} = 0\,.
$$

Conviene anche scindere la matrice $\delta\psi$ nelle sue parti simmetrica ed emisimetrica:

$$
(28)\qquad \delta\psi_{rs} = \delta\psi_{(rs)} + \varepsilon_{rls}\, B_l\,,
$$

scindendo il vettore che caratterizza la parte emisimmetrica, B_l, com'è certamente possibile, in due parti di cui una è proprio $B_l^{(u)}$: $B_l = B_l^{(u)} + B_l'$. Per le posizioni fatte la (25) diviene

$$-\delta I = [T_{rq} + N_{(qr)}](\delta u_r)_{/q} + \Gamma_{\underset{\smile}{rpq}}(\delta u_{\underset{\smile}{r}})_{/pq} + N_{(rl)}\,\delta\psi_{(rl)} + \\ + B_{\underset{\smile}{rlq}}(\delta\psi_{\underset{\smile}{rl}})_{/q} + N_{\underset{\smile}{qr}}\,\varepsilon_{rlq}\,B'_l + \Gamma_{\underset{\smile}{rpq}}\,\varepsilon_{rlp}\,B^{(u)}_{l/q} + \\ + B_{\underset{\smile}{rpq}}\,\varepsilon_{rip}\,(B^{(u)}_i + B'_i)_{/q}\,, \tag{29}$$

ove come al solito i simboli $\smile$ e $\llcorner\!\lrcorner$ indicano le parti simmetrica ed emisimmetrica con riferimento agli indici a cui sono sottoposti.

Per ogni trasformazione reversibile isoterma l'espressione di $-\delta I$ uguaglia il lavoro delle forze interne, $\delta l^{(i)}$, per unità di volume dello stato attuale, in corrispondenza, cioè, a ogni scelta delle quantità [1] $(\delta u_r)_{/q}$, $(\delta u_r)_{/pq}$, $B^{(u)}_r$, B'_l $B'_{l/q}$, $\delta\psi_{(rl)}(\delta\psi_{rl})_{/q}$ soddisfacenti alle (26), (27). Ne segue

$$\delta l^{(i)} = -\delta I + X'_{pt}[\varepsilon_{ipt}\,B^{(u)}_i + (\delta u_p)_{/t}] + \beta\delta_{rq}\,B^{(u)}_{r/q}\,, \tag{30}$$

ove le X'_{pt} e β costituiscono rispettivamente una matrice emisimmetrica e un-parametro, per ora arbitrari.

Uno stato di equilibrio è, pertanto, caratterizzato dalla equazione variazionale

$$\int_{C'} \{\delta I - X'_{pt}[\varepsilon_{ipt}\,B^{(u)}_i + (\delta u_p)_{/t}] - \beta\delta_{rq}\,B^{(u)}_{r/q}\}\,dC' - \delta L^{(e)} = 0, \tag{31}$$

ove δI è espresso da (29) e $\delta L^{(e)}$ denota il lavoro delle forze esterne.

A questo punto occorre postulare un'espressione esplicita per tale lavoro. Basta osservare le (29), (30) per riconoscere che il lavoro delle forze interne si annulla - per uno stress generico - allora e solo allora che si annullino δu_r, $\delta\psi_{(rl)}$, $B^{(u)}_l$ B'_l. Ciò induce a postulare per $\delta L^{(e)}$ un'espressione del tipo

$$\delta L^{(e)} = \int_{C'} \mu'[F'_r\,\delta u_r + M'_{(rs)}\,\delta\psi_{(rs)} + M'_r(B^{(u)}_r + B'_r)\,dC' + \\ + \int_{\sigma'}\left[f'_r\,\delta u_r + m'_{(rs)}\,\delta\psi_{(rs)} + m'_r(B^{(u)}_r + B'_r)\right]d\sigma' \tag{32}$$

ove, evidentemente σ' denota la frontiera di C' e μ' la densità in C'. Esistono microstrutture soddisfacenti alla (32).

Con qualche sviluppo, da (29), (31), (32) si deducono le equazioni euleriane dell'equilibrio. Esse sono

$$(T_{rq} + N_{\underset{\smile}{rq}} - \Gamma_{\underset{\smile}{rpq}/p} + X'_{rp})_{/q} = \mu' F'_r\,, \tag{33}$$

$$B_{\underset{\smile}{rl}q|q} - N_{\underset{\smile}{rl}} = \mu' M'_{(rl)}, \qquad (\text{in } C') \tag{34}$$

$$\varepsilon_{ril}(B_{rlq|q} - N_{rl}) = \mu' M'_i \tag{35}$$

$$\varepsilon_{ril}[(B_{rlq} + \Gamma_{rlq})_{|q} + X'_{rl}] + \beta_{|i} = \mu' M'_i, \tag{36}$$

valide in C', e

$$(T_{rq} + N_{\underset{\smile}{rq}} - \Gamma_{\underset{\smile}{rq}p|p} + X'_{rq})\, n_q = f'_r, \tag{37}$$

$$B_{\underset{\smile}{rl}q}\, n_q = m_{(rl)} \tag{38}$$

$$B_{rlq}\, \varepsilon_{ril}\, n_q = m'_i \tag{39}$$

$$\varepsilon_{ril}(B_{rlq} + \Gamma_{rlq})\, n_q + \beta n_i = m'_i \tag{40}$$

$$\Gamma_{\underset{\smile}{rpq}}\, n_q = 0 \tag{41}$$

valide su σ'.

Da (35), (36) segue

$$X'_{rl} = -\Gamma_{\underset{\smile}{rl}p|p} - N_{\underset{\smile}{rl}} - \frac{1}{2}\varepsilon_{ril}\, \beta_{|i}. \tag{42}$$

La (42), supposta valida anche su σ', permette di dare alla (37,1) la forma

$$(T_{rq} + N_{rq} - \Gamma_{rqp|p})\, n_q - \frac{1}{2}\varepsilon_{riq}\, \beta_{|i}\, n_q = f'_r, \ (\text{su } \sigma'). \tag{43}$$

Inoltre, da (39), (40) segue

$$\beta n_i = \varepsilon_{ril}\, \Gamma_{rlq}\, n_q \ (\text{su } \sigma') \tag{44}$$

e quindi

$$\beta = \varepsilon_{rli}\, \Gamma_{rlq}\, n_q\, n_i, \qquad \varepsilon_{rlt}\, \Gamma_{rlq}\, n_q\, (n_t n_i - \delta_{it}) = 0, \tag{45}$$

valide su σ'.

In definitiva, il problema analitico che si presenta, tenuto conto della (42), è rappresentato dalle equazioni

$$\left\{ \begin{array}{l} (T_{rq} + N_{qr} - \Gamma_{rpq|p})_{|q} = \mu' F'_r \\ B_{\underset{\smile}{rl}q|q} - N_{\underset{\smile}{rl}} = \mu' M'_{(rl)} \quad (\text{in } C') \\ \varepsilon_{ril}(B_{rlq|q} + N_{rl}) = \mu' M'_i \end{array} \right. \tag{46}$$

valide in C', con le condizioni al contorno - ottenute eliminando nelle (37), ..., (41) $\beta_{/i}$ -

$$
(47) \qquad \begin{cases} [(T_{rq} + N_{qr} - \Gamma_{rqp|p})\, n_q - f'_r]\, n_r = 0, \\[2mm] B_{\underset{\smile}{rl}q}\, n_q = m'_{(rl)}\,, \quad B_{rlq}\, \varepsilon_{ril}\, n_q = m'_i \\[2mm] \varepsilon_{rlt}\, \Gamma_{rlq}\, n_q\, (n_t\, n_i - \delta_{ti}) = 0, \quad \Gamma_{\underset{\smile}{rp}q}\, n_q = 0, \end{cases}
$$

e dalle equazioni costuitive (22).

Naturalmente, lo studio analitico del problema implica la preliminare riduzione in forma lagrangiana del sistema delle equazioni, ma rinuncio a farlo.

La forma euleriana è, invece, particolarmente adatta per comprendere il comportamento meccanico del continuo e le sue capacità reattive. Dall'interpretazione delle equazioni ottenute si riconosce che si presenta uno stress la cui parte simmetrica è definita da

$$
(48) \qquad P_{rq} = T_{rq} + N_{(qr)} - \Gamma_{\underset{\smile}{rq}p|p}\,,
$$

mentre quella antisimmetrica è espressa dalle X'_{rl} in base a (42).

La (39) indica, inoltre, la presenza di coppie di contatto rappresentate dalla matrice $\varepsilon_{ril}\, B_{rlq}$. Dalla (47,1) si deduce che su σ' soltanto la componente normale dello sforzo è dederminato dalla conoscenza della forza esterna superficiale, fatto, questo, dovuto alla indeterminazione portata dalla presenza del parametro β: se per un qualche motivo si dovesse ritenere $\beta_{/i} = 0$ su σ', lo sforzo sarebbe completamente determinato sulla frontiera.

La teoria precedentemente esposta comprende i casi più notevoli sino ad ora studiati:

a) supponendo la I indipendente dalle $x_{r,st}$, γ_{rst} e identificando le γ_{rs} con le μ_{rs}, espresse da (13), si ritrova la teoria dei continui di Cosserat con rotazioni vincolate [2];

b) supponendo la I indipendente dalle $x_{r,st}$ e identificando la γ con una matrice di rotazione si ritrova formalmente la teoria dei continui di Cosserat con rotazioni libere [23];

c) supponendo la I indipendente dalle $x_{r,st}$ e linearizzando il problema si ritrova la teoria delle microstrutture già studiata da Mindlin [15].

Vale la pena di osservare che se si suppone la I indipendente dalle γ_{rs}, γ_{vst} ma il continuo sensibile alle coppie, nel senso che il lavoro delle forze esterne dipende in modo esplicito dalle rotazioni locali - in modo che sussista la (32) senza i termini in B_r', $\delta\psi_{(rs)}\cdot$, le equazioni generali divengono

$$(T_{rq} - \Gamma_{rpq|p})_{|q} = \mu' F_r' \qquad (\text{in } C') \tag{49}$$

$$\begin{cases} [(T_{rq} - \Gamma_{rqp|p})n_q - f_r']n_r = 0, \\ (\varepsilon_{rlt}\Gamma_{rlq}n_q + m_t')(n_t n_i - \delta_{it}) = 0, \ \ \underline{\Gamma_{rpq}} n_q = 0. \end{cases} \qquad (\text{su } \sigma') \tag{50}$$

In tal caso si presenta uno stress la cui parte simmetrica è espressa da (48) dopo avere ivi soppresso il termine in N_{rq}, mentre quella antisimmetrica è

$$X_{rs}' = -\underline{\Gamma_{rsp|p}} - \frac{1}{2}\varepsilon_{ris}\beta_{|i} + \frac{1}{2}\mu'\varepsilon_{ris}M_i' \tag{51}$$

Si constata inoltre la presenza di coppie di contatto definite dalla matrice $\varepsilon_{ril}\Gamma_{rlq} + \beta\delta_{iq}$.

Ben differentemente vanno le cose nell'ipotesi che - non dipendendo la I dalle γ_{rs}, γ_{rst} - si ritenga il sistema non sensibile alle coppie. In tal caso può aversi equilibrio solo in presenza di sollecitazioni di tipo classico [$M_i' = 0$, $M_{(il)}' = 0$, $m_i' = m_{(il)}' = 0$] e non si presentano coppie di contatto. Il sistema differenziale che descrive il comportamento del continuo è

$$\begin{cases} (T_{rp} - \Gamma_{rpq|p})_{|q} = \mu' F_r' \qquad (\text{in } C') \\ (T_{rq} - \Gamma_{rqp|p})n_q = f_r', \ \ \Gamma_{rpq}n_q = 0, \qquad (\text{su } \sigma'), \end{cases} \tag{52}$$

da cui si vede che si presenta uno stress non simmetrico la cui parte antisimmetrica è $X_{rq}' = \underline{\Gamma_{rqp|p}}$.

Analoga circostanza si deve presumere si presenti anche quando l'energia libera dipende da derivate di ordine comunque elevato delle x_r.

Quanto è detto precedentemente serve a porre in evidenza in che misura la conoscenza della struttura dell'energia libera sia sufficiente per la descrizione delle capacità meccaniche di un continuo e delle sue possibilità reattive interne. Naturalmente alla conoscenza della I va necessariamente associata quella delle variabili cinematiche a cui il continuo è effettivamente capace di reagire di fronte all'azione delle forze esterne: spostamenti, rotazioni, ecc.. Tale conoscenza si può raggiungere mediante l'acquisizione dell'espressione del lavoro delle forze esterne.

Il problema al contorno che si presenta nei vari casi merita un'indagine di tipo analitico che potrebbe dare qualche sorpresa o, addirittura rivelare qualche incompatibilità se la I dipende in modo generico dalle $x_{r,st}$ (e senza legami tra loro e le γ_{rs}). Sin d'ora si può osservare che nel caso che la I non dipenda dalle $x_{r,st}$, nel sistema di equazioni (46) va soppresso il termine nelle Γ_{rpq} mentre delle (47) rimangono soltanto le prime tre (senza il termine nelle Γ_{rpq}). Il parametro β risulta ora nullo su σ'.

Si presentano pertanto dodici equazioni differenziali valide in C', nelle dodici incognite costituite dalle tre u_r e dalle nove γ_{rs}. Le condizioni al contorno, invece, a causa dell'indeterminazione dovuta alla presenza del parametro β sono in numero di dieci. Se tale parametro fosse nullo, le condizioni al contorno sarebbero anch'esse in numero di dodici in quanto al posto dell'unica condizione (47,1) vi sarebbero le tre condizioni (43) [senza il termine in Γ_{rpq}].

Nel caso che la I dipenda dalle $x_{r,st}$ si presentano ulteriori condizioni al contorno [vedi (47) e un'indagine analitica esistenziale non sarebbe certo superflua. Essa potrebbe dare qualche informazione sulle possibilità che l'energia libera dipenda dalle derivate seconde delle x^r.

BIBLIOGRAFIA

[1] C. TRUESDELL and R. A. TOUPIN, *The classical field theories*, Handbuch der Physik, B III/1, (1960).

[2] G. GRIOLI, *Elasticità asimmetrica*, Annali di Mat. Pura ed Applicata. (IV). 4, pp. 389-418 (1960).

[3] — —, *Onde di discontinuità ed elasticità asimmetrica*, Acc. Naz. dei Lincei, S. VIII, V. XIXX, fasc. 5, (Nov. 1960).

[4] J. L. ERICKSEN, Arch. Rat. Mech. Anal. 4, 231 (1960).

[5] — —, Trans. Soc. Rheol. 4, 29 (1960).

[6] — —, Trans. Soc. Rheol. 5, 23 (1960).

[7] G. GRIOLI, *Mathematical theory of elastic Equilibrium* (*Recent results*), Ergebnisse der Angewandten Mathematik, 7, p. 141 160 (1962).

[8] R. TOUPIN, *Elastic materials with couple-stress*, Archive for Rational Mechanics and Analysis, V. 11, n. 5 (1962).

[9] R. D. MINDLIN and H. F. TIERSTEN, *Effects of couples-stress in linear elasticity*, Archive for Rational Mechanics and Analysis, V. 11, n. 5 (1962).

[10] R. TOUPIN, Arch. Rat. Mech. Anal. 11, (1962).

[11] G. GRIOLI, *Sulla meccanica dei continui a trasformazioni reversibili*, Seminari dell'Istituto Nazionale di Alta Matematica. (1962-63).

[12] A. BRESSAN, *Sui sistemi continui nel caso asimmetrico*, Annali di Mat. Pura e Applicata. S. IV. T. 72. (1963).

[13] D. GALLETTO, *Nuove forme per le equazioni in coordinate generali della statica dei continui con caratteristiche di tensione asimmetriche*, Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa. S. III. Vol. XVII. fasc. IV (1963).

[14] R. TOUPIN, *Theories of elasticity with couples-stress*, Arch. Rational Mech and Anal., 17, 85- 112, (1964).

[15] R. D. MINDLIN, *Microstructure iu linear elasticity*, Arch. Rat. Mech. and Anal., 16, 51-78, (1964).

[16] A. E. GREEN and R. S. RIVLIN, Arch. Rat. Anal. 16, 325 (1964).

[17] — — and — , Arch. Rat. Mech. Anal. 17, 113 (1964).

[18] C. TRUESDELL and W. NOLL, *The non-linear field theory of mechanics*, Handbuch der Physik, Band III/3, p. 44. (1965).

[19] D. GALLETTO, *Contributo allo studio dei sistemi continui a trasformazioni reversibili con caratteristiche di tensione asimmetriche,* Rendiconti del Seminario Matematico Università di Padova. (1965).

[20] — —, *Sistemi incomprimibili a trasformazioni reversibili nel caso asimmetrico*, Rendiconti del Seminario Matematico Università di Padova. (1965-66).

[21] A. BRESSAN, *Coppie di contatto in relatività,* Annali di Mat. Pura ed Applicata (1966).

[22] — —, *Elasticità relativistica con coppie di contatto*, Ricerche di Matematica. Vol. XV (1966).

[23] H. SCHAEFER, *Das Cosserat-Kontinuum*, Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanic. B. 47, H. 8 p. 485-498 (1967).

[24] G. GRIOLI, *On the thermodynamic potential of Cosserat continua,* Simposio IUTAM di Freudenstad-Stoccarda (1968).

[25] R. S. RIVILIN, *Generalized mechanics of continua media,* Simposio IUTAM di Freudenstad-Stoccarda (1968).

[26] A. C. ERINGEN, *Mechanics of micromorphic continua*, Simposio IUTAM di Freudenstadt Stoccarda (1968).

[27] G. GRIOLI, *Questioni di compatibilità per i continui di Cosserat,* Ist. Naz. di Alta Matematica. Symposia Mathematica Vol. I. (1968).

[28] G. FERRARESE, *La volta sottile, semplice esempio di sistema continuo polare bidimensionale,* Ist. Naz. di Alta Matematica. Symposia Mathematica. (1968).

[29] C. AGOSTINELLI, *Sulla possibilità di sforzi asimmetrici in un corpo elastico emogeneo isotropo elettricamente conduttore in moto vibratorio sotto l'azione di un campo magnetico,* Rendiconti Acc. Naz. dei Lincei. S. 8 Vol. 43 e Vol. 44, Fasc. 1 (1968).

[30] — —, *On the dynamics of homogeneous, isotropic, elettrically conductive elastic bodies subjected to a magnetic field. Case of vibratory plates,* Mecanica. Journal of the Italian Association of Theoretical and Applied Mechanics. Vol. 4 (1969).