Familles d'opérateurs maximaux monotones et mesurabilité (*).

HEDY ATTOUCH (Paris, France)

Summary. – *This paper is devoted to the study of family of maximal monotone operators in Hilbert spaces. The first part deals with convergence of such sequences in resolvent's sense, the second one with the study of different notions of measurability one can put on such families. We look with particular attention to the case of subdifferentials. This problems are looked, with in mind, applications to the study of convergence of solutions of variational inequalities and to the study of evolutions equations with time dependant operators.*

CHAPITRE 0
INTRODUCTION

1) A l'origine de ce travail, on trouve un certain nombre de problèmes soulevés par l'étude des solutions fortes d'équations d'évolution du type

$$\text{(I)} \qquad \frac{du}{dt}(t) + A\big(t, u(t)\big) \ni f(t) .$$

L'opérateur $A(t, \cdot)$, $(t \in [0, T])$, est maximal monotone dans un espace de Hilbert H; on cherche u continue de $[0, T]$ dans H, à dérivée distribution dans $L^2(0, T; H)$.

Une méthode générale pour étudier (I) consiste à l'approcher par

$$\text{(I)}_\lambda \qquad \frac{du_\lambda}{dt}(t) + A_\lambda\big(t, u_\lambda(t)\big) = f(t)$$

où $A_\lambda(t, \cdot)$ est l'approximation Yosida de $A(t, \cdot)$; l'opérateur $A_\lambda(t, \cdot)$ est lipschitzien et pour résoudre (I)_λ par le théorème de Cauchy-Lipschitz, on est amené naturellement à faire une hypothèse de mesurabilité sur la famille $\big(A(t, \cdot)\big)_{t\in[0,T]}$, à savoir:

$$\text{(0.1)} \qquad \forall x \in H , \quad \forall \lambda > 0 , \quad t \mapsto A_\lambda(t, x) \quad \text{est mesurable.}$$

Mais dans la pratique, les $\big(A_\lambda(t, \cdot)\big)_{t\in[0,T]}$ ne sont pas des données du problème (I). Le chapitre II est consacré à l'étude des différentes notions de mesurabilité portant sur des familles $\big(A(t, \cdot)\big)_{t\in[0,T]}$ d'opérateurs maximaux monotones dans un espace de Hilbert séparable H; on montre tout d'abord (Théorème 2.1) que la mesurabilité des résolvantes (0.1) est équivalente à la mesurabilité des graphes des opérateurs

(*) Entrata in Redazione il 4 agosto 1977.

$A(t, \cdot)$ au sens de C. CASTAING [12]; on fait également le lien, en montrant l'équivalence dans le cas où les opérateurs $A(t, \cdot)$ sont de domaines d'intérieurs relatifs non vides, avec la mesurabilité des sections minimales $A_0(t, \cdot)$ (th. 2.2).

Dans le cas où les $(A(t, \cdot))_{t\in[0,T]}$ sont des sous-différentiels de fonctions $(\varphi(t, \cdot))_{t\in[0,T]}$, où $\varphi(t, \cdot)$ est convexe, semi-continue inférieurement, propre de H dans $]-\infty, +\infty]$, on montre (Théorème 2.3) l'équivalence entre la mesurabilité de la famille $(\partial\varphi(t, \cdot))_{t\in[0,T]}$ (au sens précédent), et la propriété d'intégrande normale au sens de R. T. ROCKAFELLAR [27] de l'application $(t, x) \mapsto \varphi(t, x)$.

2) Dans de nombreux cas, il arrive que l'on ait à étudier non pas (I) mais un problème « perturbé »

$$\text{(II)} \qquad \frac{du}{dt}(t) + A(t, u(t)) + B(t, u(t)) \ni f(t) .$$

Si $B(t, \cdot)$ est maximal monotone, on approche (II) par

$$\text{(II)}_\lambda \qquad \frac{du_\lambda}{dt}(t) + A(t, u_\lambda(t)) + B_\lambda(t, u_\lambda(t)) \ni f(t)$$

que l'on résoud par un théorème de perturbation lipschitzien (cf. [8]), les hypothèses faites par ailleurs sur A et B permettant de passer à la limite lorsque $\lambda \to 0$.

Dans le Ch. III, on étend cette méthode au cas où $B(t, \cdot)$ est seulement monotone, en montrant (Théorème 3.1) que l'on peut prolonger une famille mesurable (au sens des graphes) d'opérateurs monotones, en une famille mesurable d'opérateurs maximaux monotones; on en déduit un théorème de perturbation (Théorème 3.2) s'appliquant directement au problème de la chaleur non linéaire dans un domaine variable (cf. [3]).

3) On est naturellement amené à considérer une famille mesurable d'opérateurs maximaux monotones $(A(t, \cdot))_{t\in[0,T]}$, comme une application mesurable de $[0, T]$ dans $\mathcal{M}_R$, où $\mathcal{M}_R$ désigne l'ensemble des maximaux monotones muni de la topologie de la convergence des résolvantes (cf. Définition 1.1); appliquant la propriété de Lusin, on se ramène à étudier (Ch. I) la convergence, au sens des résolvantes, des suites d'opérateurs maximaux monotones (notion introduite par H. BRÉZIS [10]). Cette notion de convergence sur les suites d'opérateurs maximaux monotones recouvre la notion de G-convergence introduite par De-Giorgi dans l'étude des suites d'opérateurs elliptiques uniformément coercifs, ce qui justifie par ailleurs son importance. Dans le cas où les opérateurs $(A^n)_{n\in N}$ sont des sous-différentiels $(\partial\varphi^n)_{n\in N}$, on montre (Théorème 1.2) l'équivalence entre la convergence de $\partial\varphi^n$ vers $\partial\varphi$ dans $\mathcal{M}_R$ et la convergence de φ^n vers φ au sens de Mosco (Définition 1.4); ce Théorème met clairement en évidence, la continuité de la transformation de Young-Fenchel $(\varphi \mapsto \varphi^*)$, et le résultat parallèle concernant la stabilité de la notion d'intégrande normale par passage à la fonction conjuguée.

Cette approche permet de définir simplement une topologie sur l'ensemble des fonctions convexes pour laquelle les suites convergentes sont les suites convergeant au sens de Mosco (Proposition 1.6).

On étudie par ailleurs, étant donnée une suite $(\varphi^n)_{n\in N}$, la notion de convergence correspondant à la convergence des semi-groupes associés $(S^{\partial\varphi^n}(t))_{n\in N}$, et le lien avec la notion précédente de convergence (dans $\mathcal{M}_R$) de la suite $(\partial\varphi^n)_{n\in N}$ (Th. 1.4 et Th. 1.1).

Je tiens à remercier P. BENILAN, Ch. CASTAING, A. DAMLAMIAN pour tout ce qu'ils ont pu m'apporter au cours de ce travail et je remercie tout particulièrement Haïm BREZIS pour les conseils et les encouragements constants qu'il a bien voulu me prodiguer.

CHAPITRE I

TOPOLOGIE DE LA R-CONVERGENCE

1. – Définition et propriétés de la topologie de la R-convergence.

Soit X un espace de Banach; un opérateur multivoque A de X dans X est dit accrétif si $\forall\lambda > 0$ $(I + \lambda A)^{-1}$ est une contraction de $R(I + \lambda A)$ dans X; A est dit m-accrétif si en outre $\forall\lambda > 0$ $R(I + \lambda A) = X$.

Si X est un Hilbert, accrétif et monotone sont deux notions équivalentes. Tout d'abord établissons un lemme général qui comme corollaire donne un résultat dû à H. Brezis concernant le lien entre la convergence d'opérateurs m-accrétifs au sens des graphes et la convergence des résolvantes.

LEMME 1.1. – *X espace vectoriel topologique réel.*

$$(A^n)_{n\in N}, \quad A \text{ opérateurs multivoques de } X \text{ dans } X.$$

Il y a équivalence;

(i) $\forall(x, y)\in A,\ \exists(x^n, y^n)\in A^n\colon\ x^n\to x,\ y^n\to y;$

(ii) $\forall\lambda > 0,\ \forall(x, y)\in(I+\lambda A)^{-1},\ \exists(x^n, y^n)\in(I+\lambda A^n)^{-1}\colon\ x^n\to x,\ y^n\to y;$

(iii) $\exists\lambda > 0,\ \forall(x, y)\in(I+\lambda A)^{-1},\ \exists(x^n, y^n)\in(I+\lambda A^n)^{-1}\colon x^n\to x,\ y^n\to y.$

COROLLARY 1.1. – *X Banach quelconque.*

$$(A^n)_{n\in N}, \quad A \text{ opérateurs } m\text{-accrétifs dans } X.$$

Il y a équivalence;

(i) $\forall(x, y)\in A,\ \exists(x^n, y^n)\in A^n,\ x^n\to x,\ y^n\to y;$

(ii) $\forall\lambda > 0,\ \forall x\in X,\ (I+\lambda A^n)^{-1}x\to(I+\lambda A)^{-1}x;$

(iii) $\exists\lambda > 0,\ \forall x\in X,\ (I+\lambda A^n)^{-1}x\to(I+\lambda A)^{-1}x.$

DÉMONSTRATION DU COROLLAIRE 1.1:

(ii) $\Rightarrow$ (iii) évident.

(iii) $\Rightarrow$ (i) découle de l'implication (iii) $\Rightarrow$ (i) du lemme 1.1.

(i) $\Rightarrow$ (ii) Soit $\lambda > 0$, $x \in X$ fixés; d'après (i) $\Rightarrow$ (ii) du lemme 1.1 il existe $(x^n, y^n) \in (I + \lambda A^n)^{-1}$ tels que $x^n \to x$ et $y_n \to (I + \lambda A)^{-1}x$.

$$\begin{aligned}|(I + \lambda A^n)^{-1}x - (I + \lambda A)^{-1}x \leqslant |(I + \lambda A^n)^{-1}x - (I + \lambda A^n)^{-1}x_n| &+ \\ + |(I + \lambda A^n)^{-1}x_n - (I + \lambda A)^{-1}x| & \\ \leqslant |x - x_n| + |y_n - (I + \lambda A)^{-1}x| &\end{aligned}$$

et donc $(I + \lambda A^n)^{-1}x \to (I + \lambda A)^{-1}x$.

DÉMONSTRATION DU LEMME 1.1:

(i) $\Rightarrow$ (ii) Soit $(x, y) \in (I + \lambda A)^{-1}$ i.e. $y \in (I + \lambda A)^{-1}x$

$$\frac{x-y}{\lambda} \in Ay\,.$$

D'après (i) $\exists (y^n, z^n) \in A^n$ (i.e. $z^n \in A^n y^n$) tels que

$$y^n \to y \qquad \text{et} \qquad z^n \to z = \frac{x-y}{\lambda}\,.$$

Posons $x^n = \lambda z^n + y^n$ alors $x^n \in (I + \lambda A^n) y^n$ i.e. $y^n \in (I + \lambda A^n)^{-1} x_n$ et $y^n \to y$,

$$x^n \to \lambda z + y = \lambda \left(\frac{x-y}{\lambda}\right) + y = x\,.$$

(ii) $\Rightarrow$ (iii) évident.

(iii) $\Rightarrow$ (i) Soit $(x, y) \in A$; alors $x \in (I + \lambda_0 A)^{-1}(x + \lambda_0 y)$; ($\lambda_0$ donné par (iii)). D'après (iii), $\exists (z^n, x^n) \in (I + \lambda_0 A^n)^{-1}$: $x^n \to x$ et $z^n \to x + \lambda_0 y$.

$$x_n \in (I + \lambda_0 A^n)^{-1} z_n \Rightarrow \frac{z_n - x_n}{\lambda_0} \in A^n x_n \qquad \text{posons} \qquad y_n = \frac{z_n - x_n}{\lambda_0}\,.$$

On a $(x^n, y^n) \in A^n$; $x_n \to x$ et $y_n \to (1/\lambda_0)[x + \lambda_0 y - x] = y$.

1.1. *Définition de la topologie de la R-convergence.*

On notera $\mathcal{A}$ l'ensemble des opérateurs m-accrétifs d'un espace de Banach X.

DÉFINITION 1.1. – La topologie de la R-convergence sur $\mathcal{A}$ est la topologie la moins fine rendant continues les applications $(\Gamma_{\lambda,x})_{x\in H,\lambda>0}$ de $\mathcal{A}$ dans X:

$$\Gamma_{\lambda,x}(A) = (I + \lambda A)^{-1}x\,.$$

On notera $\mathcal{A}_R$, $\mathcal{A}$ muni de la topologie de la R-convergence et $A_n \to A$ désignera la convergence de la suite $(A_n)_{n\in N}$ vers A dans $\mathcal{A}_R$.

Dans le cadre hilbertien ($X = H$ Hilbert) on notera $\mathcal{M}$ (égal à $\mathcal{A}$) l'ensemble des maximaux monotones et $\mathcal{M}_R$, cet ensemble muni de la topologie de la R-convergence.

PROPOSITION 1.1. – *On suppose X séparable.*

$\mathcal{A}_R$ est un espace polonais (séparable, métrisable, complet pour une métrique induisant la topologie).

DÉMONSTRATION. – Soit $(x_n)_{n\in N}$ dense dans X et d la distance sur $\mathcal{M}$ définie par

$$d(A, B) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \inf\big(1, |(I + A)^{-1}x_n - (I + B)^{-1}x_n|\big) .$$

Montrons que la topologie de la R-convergence est associée à cette métrique (par exemple).

La topologie associée à d est la topologie la moins fine sur $\mathcal{A}$ rendant continues les applications $(\Gamma_{1,x_n})_{n\in N}$: $A \to (I + A)^{-1}x_n$; on a donc

$$i: \mathcal{A}_R \to (\mathcal{A}, d) \qquad \text{continue}$$

Montrons que $i: (\mathcal{A}, d) \to \mathcal{A}_R$ est continue; il suffit de montrer que si $d(A^n, A) \to 0$ alors $\forall \lambda > 0$, $\forall x \in X$ $\Gamma_{\lambda,x}(A^n) \to \Gamma_{\lambda,x}(A)$ (i.e. $A^n \to A$); Soit donc $(A^n)_{n\in N}$, A: $\forall k \in N$ $(I + A^n)^{-1}x_k \to (I + A)^{-1}x_k$; on en déduit immédiatement que $\forall x \in X$ $(I + A^n)^{-1}x \to$ $\to (I + A)^{-1}x$ et, tenant compte de l'implication (iii) $\Rightarrow$ (ii) du corollaire 1.1, cela entraîne que $\forall \lambda > 0$, $\forall x \in X$ $(I + \lambda A^n)^{-1}x \to (I + \lambda A)^{-1}x$, i.e. $A^n \to A$.

Soit j: $\mathcal{A} \to X^N$

$$j(A) = \big((I + A)^{-1}x_n\big)_{n\in N}.$$

L'application j est injective, car $\forall n \in N$ $(I + A)^{-1}x_n = (I + B)^{-1}x_n$ entraîne $\forall x \in X$ $(I + A)^{-1}x = (I + B)^{-1}x$ et donc $A = B$; j est une bijection de $\mathcal{A}$ sur $j(\mathcal{A})$; d'autre part, par définition de la topologie de la R-convergence, j est un homéomorphisme de $\mathcal{A}_R$ sur $j(\mathcal{A})$, où $j(\mathcal{A})$ est muni de la topologie induite par la topologie produit sur X^N; $\mathcal{A}_R$ s'identifie donc à un sous ensemble de X^N muni de la topologie produit; $\mathcal{A}_R$ est donc séparable (X métrique séparable est à base dénombrable, donc X^N est à base dénombrable, donc $\mathcal{A}_R$ est à base dénombrable, donc $\mathcal{A}_R$ est séprable).

Montrons que $(\mathcal{A}, d)$ est complet:

Soit $(A^k)_{k\in N}$ une suite de Cauchy dans $(\mathcal{A}, d)$

$$\forall n \in N \quad |(I + A^k)^{-1}x_n - (I + A^{k'})^{-1}x_n| \to 0 \quad \text{quand } k \text{ et } k' \to +\infty .$$

On en déduit la même propriété pour un x quelconque dans X, et X étant complet,

$$\forall x \in X \quad (I + A^k)^{-1}x \to F(x) \quad \text{lorsque } k \to +\infty .$$

L'application $F: X \to X$ est une contraction partout définie de X dans X. Posons $A = F^{-1} - I$; alors $(I + A)^{-1} = F$ et donc $(I + A^k)^{-1}x \xrightarrow[k\to+\infty]{} (I + A)^{-1}x$ dans X.

D'après le lemme 1.1, $\forall(x, y) \in A$, $\exists(x_k, y_k) \in A^k$, $x_k \to x$ et $y_k \to y$; or l'accrétivité se conserve pour la convergence au sens des graphes; l'opérateur A est donc m-accrétif et la suite A^k converge vers A dans $\mathcal{A}_R$.

1.2. *Propriétés de la R-convergence.*

Nous allons tout d'abord préciser le lien entre la convergence des résolvantes et la convergence des graphes, pour une suite d'opérateurs m-accrétifs.

DÉFINITION 1.2. – Soit X un espace métrique; étant donnée une suite $(A^n)_{n\in N}$ de parties de X, on définit

$$\underline{\lim}\, A^n = \{x \in X;\ \text{il existe } (x_n)_{n\in N},\ x_n \in A_n,\ x_n \to x\}$$
$$\overline{\lim}\, A^n = \{x \in X;\ \text{il existe } (x_{n(k)})_{k\in N},\ x_{n(k)} \in A^{n(k)},\ x_{n(k)} \xrightarrow[k\to+\infty]{} x\}$$

(on notera, de façon générale, l'inclusion $\underline{\lim}\, A^n \subset \overline{\lim}\, A^n$, et le fait que $\underline{\lim}\, A^n$ et $\overline{\lim}\, A^n$ sont deux ensembles fermés; cf. [6]).

On dira que A^n converge vers A et l'on notera $A^n \to A$, si l'on a la double inclusion: $\overline{\lim}\, A^n \subset A \subset \underline{\lim}\, A^n$.

LEMME 1.2. – Soit X Banach et $A^n \to A$ dans $\mathcal{A}_R$; soit $y_n \in A^n x_n$, $y_n \to y$ et $x_n \to x$; alors $y \in Ax$.

Supposant ce lemme démontré, on déduit, tenant du corollaire 1.1, le résultat suivant (on notera $G(A) = \{(x, y) \in X \times X / y \in Ax\}$, le graphe de A dans $X \times X$):

COROLLAIRE 1.2. – Soit X Banach; sont équivalents

(i) $A^n \to A$ dans $\mathcal{A}_R$;

(ii) $G(A^n) \to G(A)$ (i.e. $\overline{\lim}\, G(A^n) \subset G(A) \subset \underline{\lim}\, G(A^n)$).

DÉMONSTRATION DU LEMME 1.2. – Soit $(\xi, \eta) \in A$ et $\lambda > 0$; on a

$$\xi = (I + \lambda A)^{-1}(\xi + \lambda\eta) \qquad \text{et} \qquad \xi_n = (I + \lambda A^n)^{-1}(\xi + \lambda\eta) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \xi\,;$$

d'autre part, $x_n = (I + \lambda A^n)^{-1}(x_n + \lambda y_n)$; tenant compte de l'accrétivité de A^n

$$|\xi_n - x_n| \leqslant |(\xi + \lambda\eta) - (x_n + \lambda y_n)|$$

et à la limite

$$|\xi - x| \leqslant |(\xi + \lambda\eta) - (x + \lambda y)|\,.$$

L'opérateur $A \cup (x, y)$ est donc accrétif et tenant compte de la maximalité de A, on obtient que $y \in Ax$.

REMARQUE 1.1. – Soit X Banach tel que l'application de dualité $W: X \to X'$ soit univoque continue; on a alors un résultat un peu plus fort que celui du lemme 1.2: Soit $A^n \to A$ dans $\mathcal{A}_R$, $y_n \in A^n x_n$, $x_n \to x$ et $y_n \xrightarrow{w-H} y$; alors $y \in Ax$. Etant donné $(\xi, \eta) \in A$, il existe une suite $(\xi_n, \eta_n) \in A^n$ telle que $\xi_n \to \xi$ et $\eta_n \to \eta$; d'près l'accrétivité de A^n

$$\langle \eta_n - y_n,\ W(\xi_n - x_n)\rangle \geqslant 0$$

et par passage à la limite, W étant univoque continue,

$$\forall (\xi, \eta) \in A \qquad \langle \eta - y,\ W(\xi - x)\rangle \geqslant 0$$

ce qui d'après la maximalité de A entraîne que $y \in Ax$.

Du corollaire 1.2 on déduit le résultat suivant:

COROLLAIRE 1.3. – Soit X Banach; l'application $A \mapsto A^{-1}$ est un homéomorphisme de $\mathcal{A}_R$ sur lui-même.

DÉMONSTRATION. – Si A appartient à $\mathcal{A}$, A^{-1} appartient aussi à $\mathcal{A}$; de façon évidente si $G(A^n) \to G(A)$ alors $G(A^{n^{-1}}) \to G(A^{-1})$ d'où le résultat; on aurait également pu conclure en remarquant que:

$$\forall \lambda > 0,\ \forall x \in X \qquad (I + \lambda A^{-1})^{-1} x = A_{1/\lambda}\left(\frac{x}{\lambda}\right),$$

où A_λ est l'approximation Yosida de A.

Nous allons à présent nous intéresser à l'étude de sous-ensembles particuliers de $\mathcal{A}_R$; auparavant, dégageons de la démonstration de la proposition 1.1 le résultat suivant, et, introduisons la notion de famille résolvante:

LEMME 1.3. – Soit X Banach quelconque et $(A^n)_{n\in N}$ une suite d'opérateurs m-accrétifs dans X; on a les équivalences:

(i) $\exists \lambda_0 > 0$, $\exists (x_i)_{i\in I}$ dense dans X tels que, pour tout i de I, la suite $\big((I + \lambda_0 A^n)^{-1} x_i\big)_{n\in N}$ converge dans X.

(ii) $\forall \lambda > 0$, $\forall x \in X$ la suite $\big((I + \lambda A^n)^{-1} x\big)_{n\in N}$ converge dans X; (on note $f(\lambda, x)$ sa limite).

(iii) Il existe A dans $\mathcal{A}$ tel que $A^n \to A$ dans $\mathcal{A}_R$.

Remarquons que A est évidemment unique et que $\forall \lambda > 0, \forall x \in H$, $(I + \lambda A)^{-1} x = f(\lambda, x)$.

On aurait pu par ailleurs montrer (ii) $\Rightarrow$ (iii), en remarquant que la famille $(f(\lambda,\cdot))_{\lambda<0}$ est une famille résolvante; cela découle du lemme suivant (cf. [11] par exemple).

LEMME 1.4. – Soit X Banach quelconque et A un opérateur m-accrétif dans X; notons $J_\lambda = (I+\lambda A)^{-1}$ la résolvante d'indice $\lambda>0$ de A; la famille résolvante $(J_\lambda)_{\lambda>0}$ satisfait alors à l'équation résolvante

$$\forall\lambda,\mu>0\ \ \forall x\in H \qquad J_\lambda x = J_\mu\left(\frac{\mu}{\lambda}x + \left(1-\frac{\mu}{\lambda}\right)J_\lambda x\right).$$

Réciproquement, étant donnée $(f(\lambda,\cdot))_{\lambda>0}$ une famille de contractions partout définies de X dans X satisfaisant à l'équation précédente, il existe un unique $A\in\mathcal{A}$ tel que $\forall\lambda>0$, $(I+\lambda A)^{-1}=f(\lambda,\cdot)$.

1.3. *Etude de quelques sous-ensembles de $\mathcal{A}_R$:*

1) *Le sous-ensemble des m-accrétifs lipschitziens partout définis est dense dans $\mathcal{A}_R$.*

Soit $A_\lambda = (1/\lambda)(I-(I+\lambda A)^{-1})$ l'approximation Yosida de l'opérateur A; A_λ est m-accrétif, lipschitzien partout défini et $A_\lambda \xrightarrow[\lambda\to 0]{} A$ dans $\mathcal{A}_R$; en effet, $(A_\lambda)_1 = A_{\lambda+1} \xrightarrow[\lambda\to 0]{} A_1$ puisque $\lambda\mapsto A_\lambda x$, ou, de façon équivalente, $\lambda\to J_\lambda x$, est continue de $]0,+\infty[$ dans H:

$$\forall\lambda,\mu>0 \qquad J_\lambda x - J_\mu x = J_\mu\left(\frac{\mu}{\lambda}x + \left(1-\frac{\mu}{\lambda}\right)J_\lambda x\right) - J_\mu x$$

d'où,

$$\forall\lambda_0>0,\ \forall\lambda,\mu\in[\lambda_0,+\infty[\qquad |J_\lambda x - J_\mu x| \leq |\lambda-\mu|\cdot|A_{\lambda_0}x|\,.$$

2) *Le sous-ensemble des m-accrétifs linéaires multivoques est fermé dans $\mathcal{A}_R$.*

Un opérateur A de $\mathcal{A}$ est dit linéaire si son graphe est un sous-espace vectoriel (fermé) de $X\times X$; il est clair que cette propriété est conservée par convergence des graphes.

Par contre, le *sous-ensemble des m-accrétifs linéaires univoques* n'est pas fermé dans $\mathcal{A}_R$: prenons dans X Banach quelconque l'opérateur A de graphe $G(A)=\{0\}\times X$ (i.e. $D(A)=\{0\}$ et $A(0)=X$); A est bien un m-accrétif linéaire multivoque; ses résolvantes sont identiquement nulles et

$$\forall\lambda>0 \qquad A_\lambda = \frac{1}{\lambda}I \xrightarrow[(\lambda\to 0)]{} A \quad \text{dans } \mathcal{A}_R, \qquad \text{(d'après 1)}\,,$$

ce qui donne un exemple d'une suite d'opérateurs m-accrétifs linéaire univoques convergeant vers un opérateur m-accrétif linéaire multivoque.

On peut donner une caractérisation commode des opérateurs univoques dans l'ensemble des m-accrétifs linéaires multivoques, lorsque X est un Banach réflexif.

(Dans le cas H Hilbert ce résultat est démontré par H. BRÉZIS [10]; dans le cas X réflexif, l'implication (A m-accrétif linéaire univoque) $\Rightarrow$ $(\overline{D(A)} = X)$ a été montrée par P. BENILAN [5]).

PROPOSITION 1.2. – Soit X un Banach réflexif; soit A un opérateur m-accrétif linéaire; il y a équivalence entre

(i) A est univoque;

(ii) $\overline{D(A)} = X$.

(ii) $\Rightarrow$ (i) est vrai dans un espace de Banach quelconque.

DÉMONSTRATION. – (i) $\Rightarrow$ (ii). Montrons en fait le résultat un peu plus fort suivant. Soit A un opérateur linéaire univoque dans un Banach réflexif tel qu'il existe

$$(\lambda_n)_{n\in N}\,\lambda_n \to 0\,, \quad \lambda_n \geqslant 0 \quad \text{et} \quad \sup_{n\in N} |(I + \lambda_n A)^{-1}| < +\infty\,; \quad \text{alors } \overline{D(A)} = X.$$

Soit $f \in X'$ tel que $\langle f, x\rangle = 0$ $\forall x \in D(A)$; montrons que $f = 0$; il suffit de montrer, tenant compte de $R(I + \lambda_0 A) = X$, que

$$\forall x \in D(A) \qquad \langle f, x + \lambda_0 Ax\rangle = 0\,,$$

ou, de façon équivalente,

$$\forall x \in D(A) \qquad \langle f, Ax\rangle = 0\,.$$

Par hypothèse, $\forall n \in N$, $\exists x_n \in X$, $x_n + \lambda_n A x_n = x$ $\big(x \in D(A)$ fixé$\big)$ d'où $Ax_n + \lambda_n A^2 x_n = Ax$ i.e. $Ax_n = (I + \lambda_n A)^{-1}(Ax)$.

Par conséquent $\sup\limits_{n\in N} |Ax_n| < +\infty$ et $|x_n - x| = \lambda_n |Ax_n| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$; soit $x_{n_k} \to x$ et $Ax_{n_k} \rightharpoonup l$; A étant linéaire et de graphe fermé (car $(I + \lambda_0 A)^{-1}$ est une contraction) on en déduit que $l = Ax$, i.e. $Ax_n \rightharpoonup Ax$. Or $\langle f, Ax_n\rangle = (1/\lambda_n)\langle f, x - x_n\rangle = 0$ et donc $\langle f, Ax\rangle = 0$.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Notons que A univoque équivaut à $A(0) = 0$; montrons tout d'abord que si A est un m-accrétif dans un espace de Banach quelconque X, $\forall x \in \overline{D(A)}$, $\lim\limits_{\lambda\to 0} J_\lambda x = x$.

Soit $x_n \in D(A)$ $x_n \to x$:

$$\begin{aligned} |J_\lambda x - x| &\leqslant |J_\lambda x - J_\lambda x_n| + |J_\lambda x_n - x_n| + |x_n - x| \\ &\leqslant 2|x - x_n| + |J_\lambda x_n - x_n|\,. \end{aligned}$$

Or $J_\lambda x_n \xrightarrow[\lambda\to 0]{} x_n$, puisque $|x_n - J_\lambda x_n| \leqslant \lambda \operatorname*{Inf}\limits_{y\in A(x_n)} |y|$; par conséquent $J_\lambda x \xrightarrow[\lambda\to 0]{} x$.

Soit alors $y \in A(0)$; on a $0 + \lambda A(0) \in \lambda y$ i.e. $J_\lambda(\lambda y) = 0$; J_λ étant linéaire, on obtient que $\forall \lambda > 0$ $J_\lambda(y) = 0$; par hypothèse $\overline{D(A)} = X$, il s'ensuit que $\forall z \in X$ $J_\lambda z \xrightarrow[\lambda \to 0]{} z$; on en déduit que $y = \lim_{\lambda \to 0} J_\lambda(y) = 0$; on retrouve alors le résultat suivant:

COROLLAIRE 1.4. – Soit X un espace de Banach quelconque, $(J_\lambda)_{\lambda<0}$ une famille d'opérateurs linéaires continus, $\|J_\lambda\| \leqslant 1$, satisfaisant à l'équation résolvante et tels que $\overline{R(J_\lambda)} = X$; il existe alors un unique opérateur A m-accrétif linéaire univoque tel que $\forall \lambda > 0$ $J_\lambda = (I + \lambda A)^{-1}$.

REMARQUE 1.2. – Lorsque X n'est pas réflexif un opérateur m-accrétif linéaire univoque n'est plus nécessairement de domaine dense:

EXEMPLE. – $X = \mathcal{C}([0, 1]; \boldsymbol{R})$ $Au = u'$ avec $D(A) = \{u \in \mathcal{C}^1([0, 1]);\ u(0) = 0\}$. A est m-accrétif mais $\overline{D(A)} = \{u \in X;\ u(0) = 0\} \not\subset X$.

3) Prenons $X = H$ *Hilbert réel*, nous allons montrer que *l'ensemble des sous différentiels de fonctions convexes, s.c.i. propres sur H est fermé dans $\mathcal{M}_R$.*

Etant donné $\varphi: H \to]-\infty, +\infty]$ convexe, s.c.i. propre ($\not\equiv +\infty$), on définit son sous-différentiel

$$\begin{aligned}\partial\varphi &= \{(u, f) \in H \times H;\ \forall v \in H\ \varphi(v) \geqslant \varphi(u) + \langle f, v - u\rangle\} \\ &= \{(u, f) \in H \times H;\ \varphi(u) + \varphi^*(f) - \langle f, u\rangle = 0\}\end{aligned}$$

où φ^* désigne la fonctionnelle conjuguée de φ:

$$\varphi^*(f) = \sup_{v \in H} \{\langle f, v\rangle - \varphi(v)\}\,.$$

On définit la régularisée Yosida d'une fonction convexe s.c.i. propre φ par

$$(\varphi)_\mu = \varphi \nabla \frac{1}{2\mu}|\cdot|^2 \qquad \text{soit} \qquad (\varphi)_\mu(x) = \operatorname*{Min}_{y \in H}\left\{\varphi(y) + \frac{1}{2\mu}|x - y|^2\right\}.$$

NOTATIONS. – On notera $\mathcal{M}_\varphi$ l'ensemble des sous-différentiels de fonctions convexes sci, propres de H dans $]-\infty, +\infty]$; $\mathcal{M}_\varphi$ est sous-cône de $\mathcal{M}$ ensemble des maximaux nonotones de H dans H.

PROPOSITION 1.3. – $\mathcal{M}_\varphi$ est séquentiellement fermé dans $\mathcal{M}$ pour la topologie de la R-convergence.

DÉMONSTRATION. – Soit $A^n = \partial\varphi^n$ convergeant vers A dans $\mathcal{M}_R$; fixons-nous une suite $(x_i)_{i=0}^l$ $x_l = x_0$ et $(y_i)_{i=1}^l$ $y_i \in Ax_i$; d'après la définition de la convergence dans $\mathcal{M}_R$, pour tout i, $1 \leqslant i \leqslant l$ on va pouvoir trouver une suite $(x_i^n, y_i^n)_{n \in N}$ telle que $y_i^n \in A^n x_i^n$ et $x_i^n \to x_i$, $y_i^n \to y_i$. L'opérateur A^n étant cycliquement monotone

$$\sum_{i-1}^{l} \langle x_i^n - x_{i=1}^n, y_i^n\rangle \geqslant 0$$

et par passage à la limite

$$\sum_{i=1}^{l} \langle x_i - x_{i-1}, y_i \rangle \geqslant 0 ;$$

l'opérateur A étant cycliquement monotone et étant maximal monotone, est donc un sous-différentiel.

REMARQUE 1.3. – *a*) On peut montrer que $\mathcal{M}_\varphi$ est séquentiellement fermé pour une convergence plus faible que la R-convergence.

Soit $(A^n)_{n\in N}$, $A^n \in \mathcal{M}_\varphi$, $A \in \mathcal{M}$ tels que

$$\forall \lambda > 0 \qquad \forall x \in H \qquad (I + \lambda A^n)^{-1} x \rightharpoonup (I + \lambda A)^{-1} x \qquad (\text{dans } w - H).$$

Montrons que A appartient à $\mathcal{M}_\varphi$: à cet effet, puisque $A_\lambda \to A$ $(\lambda \to 0)$ dans $\mathcal{M}_R$, et tenant compte de la proposition 1.3, il suffit de montrer que, pour tout λ strictement positif, A_λ appartient à $\mathcal{M}_\varphi$; soit $(x_i)_{i=0}^{l}$ un cycle $(x_l = x_0)$ et $\lambda > 0$ fixé:

$$\forall n \in N \sum_{i=1}^{l} \langle x_i - x_{i-1}, \; A_\lambda^n x_i \rangle \geqslant 0$$

et par passage à la limite lorsque n tend vers $+\infty$

$$\sum_{i=1}^{l} \langle x_i - x_{i-1}, \; A_\lambda x_i \rangle \geqslant 0$$

puisque par hypothèse $A_\lambda^n x_i \rightharpoonup A_\lambda x_i$ $(n \to +\infty)$; A_λ appartient donc à $\mathcal{M}_\varphi$.

b) Un sous-ensemble de $\mathcal{M}_\varphi$ possède lui-même cette propriété de fermeture: notons $\mathcal{M}_{\mathcal{K}}$ l'ensemble des sous-différentiels de fonctions indicatrices de convexes fermés non vides de H; on note I_K la fonction indicatrice du convexe K. Soit $(K_n)_{n\in N}$ une suite de convexes fermés non vides de H et A un élément de $\mathcal{M}$ tels que $\forall \lambda > 0$, $\forall x \in H$, $(I + \lambda\, \partial I_{K_n})^{-1} x \xrightarrow{w-H} (I + \lambda A)^{-1} x$; d'après le *a*) on sait que A appartient à $\mathcal{M}_\varphi$; d'autre part, puisque $(I + \lambda\, \partial I_{K_n})^{-1} x = \operatorname{proj}_{K_n} x$, on a

$$\begin{aligned}
\forall x \in H \qquad \forall \lambda,\ \mu > 0 \qquad (I + \lambda A)^{-1} x &= (I + \mu A)^{-1} x \\
&= \lim_{\mu \to 0} (I + \mu A)^{-1} x \\
&= \operatorname{proj}_{\overline{D(A)}} x \\
&= (I + \lambda\, \partial I_{\overline{D(A)}})^{-1} x
\end{aligned}$$

et donc, $A = \partial I_{\overline{D(A)}}$; (on sait que $\overline{D(A)}$ est un convexe fermé non vide).

2. – Convergence de semi-groupes.

Dans ce paragraphe $X = H$ Hilbert réel; étant donné $A \in \mathcal{M}$ (A maximal monotone), on notera A^0 la section minimale de A et $S^A(t)$ le semi-groupe engendré par A.

Rappelons le résultat suivant, qui, sous cette forme, est dû à H. BRÉZIS [9], et qui généralise de nombreux résultats obtenus précédemment.

THÉORÈME. – Soit $(A^n)_{n\in N}$, A une suite d'opérateurs maximaux monotones dans H Hilbert réel; sont équivalents:

(i) $\forall x \in \overline{D(A)}$, $\forall \lambda > 0$ $(I + \lambda A^n)^{-1}x \to (I + \lambda A)^{-1}x$.

(ii) $\forall x \in D(A)$, $\exists x_n \in D(A^n)$, $x_n \to x$ et $(A^n)^0 x_n \to A^0 x$.

(iii) $\forall x \in \overline{D(A)}$, $\exists x_n \in \overline{D(A^n)}$, $x_n \to x$ et $\forall t \geq 0$ $S(t)x_n \to S(t)x$.

Lorsque l'une de ces trois propriétés équivalentes est satisfaite on dira que A^n converge vers A au sens des semi-groupes et l'on notera $S^{A^n} \to S^A$, ou bien que $(A^n)^0$ converge vers A^0 et l'on notera $(A^n)^0 \to A^0$.

Il convient de noter que si A est maximal monotone non univoque, A^0 n'est pas maximal monotone; d'autre part, une même suite $(A^n)_{n\in N}$ peut converger vers une infinité de limites au sens des semi-groupes:

EXAMPLE. – $H = \mathbf{R}$, $A_n = 0$, $A = \partial I_{[\alpha,\beta]}$ ($\alpha, \beta \in \mathbf{R}$), on a bien $(A^n)^0 \to (A)^0$.

On constate également, sur cet exemple que $(A^n)^0 \to A^0$ mais que A^n ne converge pas vers A dans $\mathcal{M}_R$; pour remonter de la convergence des sections minimales à la R-convergence des opérateurs, il faut rajouter une condition de convergence des domaines:

DÉFINITION 1.3. – Soit $(A^n)_{n\in N}$ une suite d'opérateurs maximaux monotones; on pose

$$w - \mathcal{M} \lim D(A^n) = \{x \in H / x = w - \lim x_{n_K};\ \sup_{K\in N} |(A^{n_K})_0 x_{n_K}| < +\infty\}.$$

THÉORÈME 1.1. – *Soit $(A_n)_{n\in N}$ une suite d'opérateurs maximaux monotones dans un espace de Hilbert H; il y a équivalence*

(i) $A_n \to A$ *dans* $\mathcal{M}_R$;

(ii) $A_n^0 \to A^0$ *et* $w - \mathcal{M} \limsup D(A_n) \subset \overline{D(A)}$.

DÉMONSTRATION. – (i) $\Rightarrow$ (ii). Pour que l'exposé soit complet, montrons le premier point, $A_n^0 \to A^0$ (cf. [10]): suit $u \in D(A)$; puisque $A^n \to A$, il existe $(\xi_n, \eta_n) \in A^n$ $\xi_n \to u$, $\eta_n \to A^0 u$.

Or $|A_n^0 \xi_n| \leq |\eta_n|$ et la suite $(A_n^0 \xi_n)_{n\in N}$ reste bornée; soit $A_{n_K}^0 \xi_{n_K} \xrightarrow{w-H} \eta$. Puisque $\xi_{n_K} \to u$, on en déduit $\eta \in Au$ (Remarque 1.1); par passage à la limite sur $|A_n^0 \xi_n| \leq |\eta_n|$ on obtient

$$|\eta| \leq \underline{\lim}\, |A_n^0 \xi_n| \leq \underline{\lim}\, |\eta_n| = |A^0 u| \qquad \text{et donc } \eta = A^0 u;$$

la suite $A_n^0 \xi_n \xrightarrow{w-H} A_0 u$ et de l'inégalité $\overline{\lim}\, |A_n^0 \xi_n| \leq \overline{\lim}\, |\eta_n| = |A^0 u|$ on déduit la convergence forte.

Montrons à présent que si $x_n \rightharpoonup x$ et $\sup\limits_{n\in N} |A_n^0 x_n| < +\infty$ alors $x \in \overline{D(A)}$. Soit $(\xi, \eta) \in A$ et $(\xi_n, \eta_n) \in A_n$, $\xi_n \to \xi$ et $\eta_n \to \eta$; écrivons la monotonie de A^n aux points ξ^n et x_n: $\langle \eta_n - A_n^0 x_n, \xi_n - x_n \rangle \geq 0$ d'où

$$\langle A_n^0 x_n, x_n \rangle \geq \langle A_n^0 x_n, \xi_n \rangle + \langle x_n, \eta_n \rangle - \langle \eta_n, \xi_n \rangle .$$

Or $\langle A_n^0 x_n, x_n \rangle \leq |A_n^0 x_n| \cdot |x_n| \leq C$, C constante positive.

Soit z un point limite de $(A_n^0 x_n)_{n\in N}$, passant à la limite on obtient

$$\forall (\xi, \eta) \in A \qquad C \geq \langle z, \xi \rangle + \langle \eta, x - \xi \rangle .$$

Prenant $\xi = J_\lambda x$ et $\eta = A_\lambda x$ et multipliant par $\lambda > 0$

$$\forall \lambda > 0 \qquad \lambda [C + |z| \cdot |J_\lambda x|] \geq |x - J_\lambda x|^2 .$$

Or $(J_\lambda x)_{\lambda > 0}$ reste borné et l'on obtient $|x - J_\lambda x| \leq C_1 \cdot \sqrt{\lambda}$, d'où l'appartenance de x à $\overline{D(A)}$.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Soit f donné dans H et $u_n = (I + A_n)^{-1} f$; montrons que $u_n \to (I + A)^{-1} f$; soit $x_n \to x$ et $A_n^0 x_n \to A^0 x$ fixés; l'opérateur $(I + A_n)^{-1}$ étant une contraction

$$|u_n - x_n| \leq |f - x_n - A_n^0 x_n| \qquad \text{et} \qquad (u_n)_{n\in N} \text{ reste bornée.}$$

Soit $u_{n_K} \xrightarrow{w-H} u$; puisque $|A_{n_K}^0 u_{n_K}| \leq |f - u_{n_K}|$ d'après l'hypothèse de « convergence des domaines », $u \in \overline{D(A)}$.

Soit $\xi \in D(A)$ et $\xi_n \to \xi$, $A_n^0 \xi_n \to A^0 \xi$; écrivons la monotonie de A_{n_K} aux points u_{n_K} et ξ_{n_K}:

$$\langle f - u_{n_K} - A_{n_K}^0 \xi_{n_K}, u_{n_K} - \xi_{n_K} \rangle \geq 0$$

et à la limite

$$\forall \xi \in D(A) \qquad \langle f - u - A^0 \xi, u - \xi \rangle \geq 0 .$$

Tenant compte du fait que u appartient à $\overline{D(A)}$ et que A^0 est une section principale de A, on déduit $f - u \in Au$ i.e. $u = (I + A)^{-1} f$; par conséquent $u_n \rightharpoonup (I + A)^{-1} f$

et prenant dans l'argument précédent $\xi = (I + A)^{-1}f$ (qui appartient bien à $D(A)$) on obtient $\overline{\lim}\, |u_n|^2 \leqslant |(I + A)^{-1}f|^2$ et donc

$$(I + A_n)^{-1}f \to (I + A)^{-1}f \, .$$

3. – Topologie induite sur l'ensemble des sous-différentiels.

Dans cette partie $X = H$ espace de Hilbert réel; on étudie sur les suites $(\varphi^n)_{n\in N}$ de fonctions convexes, semi-continues inférieurement, propres de H dans $]-\infty, +\infty]$, pour chaque notion de convergence (convergence dans $\mathcal{M}_R$ et convergence des semi-groupes) des sous-différentiels $(\partial\varphi^n)_{n\in N}$, la notion de convergence correspondante pour la suite $(\varphi^n)_{n\in N}$; (pour un résumé de ces résultats cf. [2]).

3.0. *Convergence au sens de Mosco.*

Définition 1.4. – Soit $(\varphi^n)_{n\in N}$, φ convexes, sci, propres, d'un Banach X dans $]-\infty, +\infty]$; on note

$$\operatorname{Epi} \varphi^n = \{(x, \lambda) \in X \times \boldsymbol{R} / \lambda \geqslant \varphi^n(x)\} \, .$$

On dira que φ^n converge vers φ et l'on notera $\varphi^n \to \varphi$ si

$$\operatorname{Epi} \varphi^n \to \operatorname{Epi} \varphi \qquad \text{dans } X \times R \text{ et } \omega - (X \times \boldsymbol{R}) \, .$$

Cette convergence a été étudiée en détail par Mosco [21], nous rappelons quelques résultats dont nous aurons besoin par la suite.

Soient $(A^n)_{n\in N}$, $A^n \subset X$; notant s-lim et ω-lim les limites associées respectivement aux topologies fortes et faibles sur X on a les inclusions évidentes:

$$s\text{-}\underline{\lim}\, A^n \subset s\text{-}\overline{\lim}\, A^n \subset \omega\text{-}\overline{\lim}\, A^n$$
$$s\text{-}\underline{\lim}\, A^n \subset \omega\text{-}\underline{\lim}\, A^n \subset \omega\text{-}\overline{\lim}\, A^n \, .$$

L'égalité entre ces quatre ensembles est donc équivalente à l'égalité entre $s\text{-}\underline{\lim}\, A^n$ et $\omega\text{-}\overline{\lim}\, A^n$ et donc

$$\varphi^n \to \varphi \Leftrightarrow \omega\text{-}\overline{\lim} \operatorname{Epi} \varphi^n \subset \operatorname{Epi} \varphi \subset s\text{-}\underline{\lim} \operatorname{Epi} \varphi^n \, .$$

On vérifie immédiatement que $\varphi^n \to \varphi$ si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées:

(s-sci) $\quad \forall x \in D(\varphi) \quad \exists (x^n)_{n\in N}, \quad x^n \in D(\varphi^n) : x^n \to x \quad \text{et} \quad \varphi(x) \geqslant \overline{\lim}\, \varphi^n(x^n) \, ;$

(ω-scs) $\quad \forall \big(n(k)\big)_{k\in N}, \quad$ suite extraite, $\quad \forall (x_k)_{k\in N} \quad x_k \rightharpoonup x \Rightarrow \varphi(x) \leqslant \underline{\lim}\, \varphi^{n(k)}(x_k) \, .$

LEMME 1.5. – *Soit* $(\varphi^n)_{n\in N}$, φ *convexes, sci, propres de* X *Banach réflexif dans* $]-\infty, +\infty]$ *telles que* $\varphi^n \to \varphi$ *(au sens de Mosco); il existe alors deux constantes* α, β *positives telles que pour tout* x *de* X, *pour tout entier* n,

$$\varphi^n(x) + \alpha|x| + \beta \geqslant 0 .$$

DÉMONSTRATION. – Raisonnons par l'absurde; pour $k \in N$, il existe $n(k) \in N$ il existe $x_k \in X$ tels que $\varphi^{n(k)}(x_k) + k\big(|x_k| + 1\big) < 0$; on peut évidemment supposer la suite $n(k)$ croissante, car si pour n supérieur à $n(k)$ et pour tout x de H $\varphi^n(x) + (k+1)\big(|x| + 1\big) \geqslant 0$ on pourra trouver deux nombres α et β tels que pour tout $n \in N$ et tout $x \in X$, $\varphi^n(x) + \alpha|x| + \beta \geqslant 0$.

Deux cas se présentent:

a) la suite $(x_k)_{k\in N}$ est bornée; soit z une valeur d'adhérence faible de cette suite; on notera encore $x_k \rightharpoonup z$; on a d'après la propriété (ω-scs)

$$\varphi(z) \leqslant \varliminf \varphi^{n(k)}(x_k) \leqslant \varliminf [-k|x_k| - k] = -\infty$$

d'où la contradiction;

b) la suite $(x_k)_{k\in N}$ est non bornée; notons encore $(x_k)_{k\in N}$ la suite telle que $|x_k| \xrightarrow[k\to+\infty]{} +\infty$; soit $\xi_0 \in D(\varphi)$, d'après la propriété (s-sci) il existe une suite $(\xi_k)_{k\in N}$ telle que $\xi_k \to \xi_0$ et $\varphi^{n(k)}(\xi_k) \to \varphi(\xi_0)$.

Posons

$$z_k = t_k x_k + (1 - t_k)\xi_k = \xi_k + t_k(x_k - \xi_k)$$

et choisissons t_k de telle sorte que $z_k \to \xi_0$, $t_k = 1/\big(\sqrt{k}\,|x_k - \xi_k|\big)$ par exemple. (Notons que $0 < t_k < 1$ pour k suffisamment grand puisque $|x_k - \xi_k| \xrightarrow[k\to+\infty]{} +\infty$); utilisant la convexité de $\varphi^{n(k)}$ on obtient

$$\begin{aligned}\varphi^{n(k)}(z_k) &\leqslant t_k \varphi^{n(k)}(x_k) + (1 - t_k)\varphi^{n(k)}(\xi_k)\\ &\leqslant - t_k \cdot k\big[|x_k| + 1\big] + (1 - t_k)\varphi^{n(k)}(\xi_k)\\ &\leqslant -\sqrt{k}\cdot \frac{|x_k| + 1}{|x_k - \xi_k|} + (1 - t_k)\varphi^{n(k)}(\xi_k)\end{aligned}$$

et donc utilisant à nouveau la propriété (ω-scs)

$$\varphi(\xi_0) \leqslant -\infty \qquad \text{d'où la contradiction} .$$

REMARQUE 1.4. – On utilise en fait dans cette démonstration la propriété (ω-scs), et la propriété (s-sci) sous une forme beaucoup plus faible à savoir:

$$\exists x_0 \in D(\varphi) \qquad \exists (x^n)_{n\in N} \quad x^n \in D(\varphi^n) : x^n \rightharpoonup x_0 \qquad \text{et} \qquad +\infty > \varlimsup \varphi^n(x^n) .$$

Pour terminer ces préliminaires montrons le résultat suivant:

LEMM 1.6. – *Soit (X, d) un espace métrique et $(a_{n,m})_{(n,m)\times N\times N}$ une suite double telle que*

$$\forall n \in N \qquad a_{n,m} \xrightarrow[(m\to+\infty)]{} a_n \qquad et \qquad a_n \to a\,.$$

Il existe alors une application $m \to k(m)$ de N dans N croissante (non strictement croissante en général) telle que

$$a_{k(m),m} \xrightarrow[m\to+\infty]{} a\,.$$

DÉMONSTRATION. – On construit par récurrence deux suites d'entiers strictement croissantes $(N_p)_{p\in N}$ et $(M_p)_{p\in N}$ de la façon suivante:

$$\exists N_1\colon\ \forall n \geqslant N_1\quad |a - a_n| \leqslant \tfrac{1}{2} \quad \text{et} \quad \exists M_1\colon\ \forall m \geqslant M_1\quad |a_{N_1} - a_{N_1,m}| \leqslant \tfrac{1}{2}$$
$$\exists N_2 > N_1\quad \forall n \geqslant N_2\quad |a - a_n| \leqslant 1/2^2 \quad \text{et} \quad \exists M_2 > M_1\quad \forall m \geqslant M_2\quad |a_{N_2} - a_{N_2,m}| \leqslant 1/2^2$$
$$\exists N_p > N_{p-1}\quad \forall n \geqslant N_p\quad |a - a_n| \leqslant 1/2^p \quad \text{et} \quad \exists M_p > M_{p-1}\quad \forall m \geqslant M_p\quad |a_{N_p} - a_{N_p,m}| \leqslant 1/2^p\,.$$

Posons $k(m) = N_p$ si $M_{p+1} > m \geqslant M_p$; on a alors si $M_p \leqslant m < M_{p+1}$

$$\begin{aligned}|a - a_{k(m),m}| = |a - a_{N_p,m}| &\leqslant |a - a_{N_p}| + |a_{N_p} - a_{N_p,m}|\\ &\leqslant 1/2^p + 1/2^p\end{aligned}$$

et donc $\forall m \geqslant M_p$, $|a - a_{k(m),m}| \leqslant 1/2^{p-1}$; la suite $(a_{k(m),m})_{m\in N}$ converge donc vers a.

Remarquons que cette démonstration revient à montrer qu'une limite inférieure d'ensemble est fermée.

3.1. *Lien entre la R-convergence des $(\partial\varphi^n)_{n\in N}$ et la convergence des $(\varphi^n)_{n\in N}$.*

Nous allons montrer le résultat suivant:

THÉORÈME 1.2. – Soient $(\varphi^n)_{n\in N}$, φ une suite de fonctions convexes, s.c.i., propres de H Hilbert réel dans $]-\infty, +\infty]$; sont équivalents:

(*a*) La suite $(\varphi^n)_{n\in N}$ converge vers φ au sens de Mosco.

$$(b)\begin{cases}\forall\lambda > 0,\ \forall x \in H,\ (I + \lambda\,\partial\varphi^n)^{-1}x \to (I + \lambda\,\partial\varphi)^{-1}x,\\ \exists(u, v) \in \partial\varphi,\ \exists(u_n, v_n) \in \partial\varphi^n,\ u_n \to u,\ v_n \to v \text{ et } \varphi^n(u_n) \to \varphi(u).\end{cases}$$

$$(c)\begin{cases}\forall\lambda > 0,\ \forall x \in H,\ (I + \lambda\,\partial\varphi^n)^{-1} \xrightarrow{w-H} (I + \lambda\,\partial\varphi)^{-1}x,\\ \exists(u, v) \in \partial\varphi,\ \exists(u_n, v_n) \in \partial\varphi^n,\ u_n \to u,\ v_n \to v \text{ et } \varphi^n(u_n) \to \varphi(u).\end{cases}$$

(*d*) $\forall\lambda > 0$, $\forall x \in H$, $\varphi^u_\lambda(x) \to \varphi_\lambda(x)$ [1].

---

[1] Je remercie P. L. LIONS pour l'amélioration qu'il a apportée en supprimant dans (*d*) l'hypothèse selon laquelle les $(\varphi^n)_{n\in N}$ possédaient une minorante quadratique commune.

On a alors:

$$\forall (x, f) \in \partial\varphi\,, \quad \exists (x_n, f_n) \in \partial\varphi^n\,, \quad x_n \to x\,, \quad f_n \to f \quad \text{et} \quad \varphi^n(x_n) \to \varphi(x)\,.$$

Démonstration. – Nous allons montrer les implications

$$(a) \Leftrightarrow (b) \Rightarrow (c) \Rightarrow (d) \Rightarrow (b)\,.$$

$(a) \Rightarrow (b)$. Soit $x \in H$ fixé; posons $y_n = (I + \partial\varphi^n)^{-1}x$ et montrons que $y_n \to (I + \partial\varphi)^{-1}x$; il s'en suivra, d'après le corollaire 1.1, que $\partial\varphi^n \to \partial\varphi$ dans $\mathcal{M}_R$; par définition de y_n, $x - y_n \in \partial\varphi^n(y_n)$ et donc:

$$\text{(1)} \qquad \forall z \in H \quad \varphi^n(z) \geqslant \varphi^n(y_n) + \langle x - y_n, z - y_n\rangle\,.$$

Soit z_0 fixé dans $D(\varphi)$; il existe $(z^n)_{n\in\mathbf{N}}$, $z^n \to z_0$ et $\varphi^n(z^n) \to \varphi(z_0)$:

$$\text{(2)} \qquad \varphi^n(z^n) \geqslant \varphi^n(y_n) + \langle x - y_n, z_n - y_n\rangle\,.$$

Or la suite φ^n convergeant vers φ au sens de Mosco, d'après le lemme 1.3, il existe deux constantes α, β telles que pour tout ξ de H, pour tout n de $\mathbf{N}$:

$$\varphi^n(\xi) + \alpha|\xi| + \beta \geqslant 0\,;$$

reportant dans (2)

$$\varphi^n(z^n) \geqslant -\alpha|y_n| - \beta + \langle x - y_n, z_n - y_n\rangle$$

d'où l'on déduit immédiatement que la suite $(y_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est bornée; soit donc $y_{n(k)} \rightharpoonup y$; notons $n(k) = k$, on a donc $y_k \rightharpoonup y$.

Etant donné ξ dans H, d'après la propriété s-sci, il existe une suite $(\xi_k)_{k\in\mathbf{N}}$ telle que $\xi^k \to \xi$ et $\varphi(\xi) \geqslant \overline{\lim}\, \varphi^k(\xi^k)$. Ecrivant (1) avec $z = \xi_k$ et passant à la limite inférieure:

$$\underline{\lim}\, \varphi^k(\xi_k) \geqslant \underline{\lim}\, [\varphi^k(y_k) + \langle \xi_k - y_k, x - y_k\rangle]$$
$$\varphi(\xi) \geqslant \underline{\lim}\, \varphi^k(y_k) + \langle \xi - y, x - y\rangle$$

et tenant compte de la propriété ω-scs

$$\varphi(\xi) \geqslant \varphi(y) + \langle \xi - y, x - y\rangle \quad \forall \xi \in H \quad \text{et donc} \quad y = (I + \partial\varphi)^{-1}x.$$

La suite toute entière converge donc faiblement et $y_n = (I + \partial\varphi^n)^{-1}x \rightharpoonup y = (I + \partial\varphi)^{-1}x$. Montrons que la suite converge fortement: utilisant la condition (s-sci) il existe une suite $(\xi_n)_{n\in N}$, $\xi_n \to y$ et $\varphi(y) \geq \overline{\lim}\, \varphi^n(\xi^n)$; d'autre part

$$\varphi^n(\xi^n) - \varphi^n(y_n) \geq \langle \xi^n - y_n, x - y^n \rangle$$

$$\varphi^n(\xi^n) - \varphi^n(y_n) - \langle \xi^n, x - y^n \rangle + \langle x, y_n \rangle \geq |y_n|^2$$

d'où

$$\overline{\lim}\, \varphi^n(\xi^n) + \overline{\lim}\, [-\varphi^n(y^n)] - \langle y, x - y \rangle + \langle x, y \rangle \geq \overline{\lim}\, |y_n|^2$$

or

$$\overline{\lim}\, [-\varphi^n(y^n)] = -\underline{\lim}\, \varphi^n(y_n) \leq -\varphi(y) \qquad (\omega\text{-scs})\,.$$

D'où

$$|y|^2 \geq \overline{\lim}\, |y_n|^2 \qquad \text{et donc} \qquad y_n \to y\,.$$

On a donc montré que $\partial\varphi^n \to \partial\varphi$.

Soit $(f, u) \in \partial\varphi$, il existe donc $(u^n, f^n) \in \partial\varphi^n$ tels que $u^n \to u$, $f^n \to f$.

D'après la propriété (ω-scs) on a $\varphi(u) \leq \underline{\lim}\, \varphi^n(u^n)$.

D'après la propriété (s-sci) il existe $\xi^n \in D(\varphi^n)$ $\xi^n \to u$ et $\varphi(u) \geq \overline{\lim}\, \varphi^n(\xi^n)$.

Ecrivant que $f^n \in \partial\varphi^n(u^n)$ $\varphi^n(\xi^n) \geq \varphi^n(u_n) + \langle f_n, \xi^n - u_n \rangle$ et donc:

$$\varphi(u) \geq \overline{\lim}\, \varphi^n(\xi^n) \geq \overline{\lim}\, \varphi^n(u_n)$$

ce qui entraîne que $\varphi^n(u_n) \to \varphi(u)$.

De l'égalité $\varphi^{n*}(f_n) = \langle f_n, u_n \rangle - \varphi^n(u_n)$ on déduit que $\varphi^{n*}(f_n) \to \varphi^*(f)$.

$(b) \Rightarrow (a)$. Il s'agit de remonter de la convergence des sous-différentiels à la convergence des fonctions; à cet effet, on doit ulitiser un procédé d'intégration qui donne φ en fonction de $\partial\varphi$; on peut passer par l'intermédiaire des φ_λ et écrire (après s'être ramené à $\varphi(0) = \mathrm{Min}\, \varphi = 0$) que

$$\varphi_\lambda(x) = \int_0^1 \langle A_\lambda(\tau x), x > d\tau \qquad (\text{où } A_\lambda = \partial\varphi_\lambda)\,,$$

et utiliser ensuite le lemme 1.6, et le fait que $\varphi_\lambda(x)$ tend vers $\varphi(x)$ lorsque $\lambda \to 0$ (cf. [0]). Nous allons utiliser ici une autre méthode asée sur le lemme suivant dû à R. T. ROCKAFELLAR (cf. [8]).

LEMME 1.7. – Soit $\varphi\colon H \to]-\infty, +\infty]$ convexe, s.c.i. propre; on a la formule « d'intégration »:

$$\forall x \in H \qquad \forall a_0 \in D(\partial\varphi) \qquad \varphi(x) = \mathrm{Sup}\left\{\varphi(a_0) + \sum_{k=1}^{l} \langle a_k - a_{k-1}, (\partial\varphi)(a_{k-1}) \rangle\right\}$$

le sup. étant pris sur l'ensemble des suites finies

$$\{a_0, a_1, \ldots, a_{l-1}, a_l = x;\ \forall k < l\ a_k < l\ a_k \in D(\partial\varphi);\ l \in \boldsymbol{N}\},$$

la notation $\langle y, \partial\varphi(x)\rangle$ désignant l'ensemble des valeurs $\langle y, z\rangle$ pour $z \in \partial\varphi(x)$.

1) Montrons tout d'abord que la propriété ω-scs est vérifiée:

Soit $x_{n(k)} \rightharpoonup x$; montrons que $\varphi(x) \leqslant \varliminf \varphi^{n(k)}(x_{n(k)})$.

Notons, pour simplifier, $x_{n(k)} = x_n$, $\varphi^{n(k)} = \varphi^n$; on a donc $x_n \rightharpoonup x$ et $\partial\varphi^n \to \partial\varphi$.

Soit $(u, f), (u_1, f_1), \ldots, (u_l, f_l)$ une chaîne finie d'éléments de $\partial\varphi$.

Par hypothèse, pour tout i $(i = 1, \ldots, l)$, il existe une suite $(u_i^n, f_i^n)_{n\in\boldsymbol{N}}$ telle que: $\forall n \in \boldsymbol{N}$, $f_i^n \in \partial\varphi^n(u_i^n)$, $u_i^n \to u_i$ et $f_i^n \to f_i$. Or

$$\varphi^n(x_n) \geqslant \varphi^n(u^n) + \langle u_1^n - u^n, f^n\rangle + \ldots + \langle u_l^n - u_{l-1}^n, f_{l-1}^n\rangle + \langle x_n - u_l^n, f_l^n\rangle$$

et par passage à la limite inférieure $(n \to +\infty)$,

$$\varliminf \varphi^n(x_n) \geqslant \varphi(u) + \langle u_1 - u, f\rangle + \ldots + \langle u_l - u_{l-1}, f_{l-1}\rangle + \langle x - u_l, f_l\rangle$$

et passant à la borne supérieure (sur les suites finies), d'après le lemme 1.7

$$\varliminf \varphi^n(x_n) \geqslant \varphi(x).$$

2) Montrons à présent la propriété s-sci.

Remarquons tout d'abord que $\forall x \in D(\varphi)$, $J_\lambda x = (I + \lambda\,\partial\varphi)^{-1} x \xrightarrow[(\lambda\to 0)]{} x$, $J_\lambda x \in D(\partial\varphi)$ et $\varphi(J_\lambda x) \to \varphi(x)$. Tenant compte du lemme 1.6, on se ramène à montrer que:

$$\forall x \in D(\partial\varphi)\,, \quad \exists (x_n)_{n\in\boldsymbol{N}}\,, \quad x_n \in D(\partial\varphi^n)\,, \quad x_n \to x \quad \text{et} \quad \varphi(x) \geqslant \varlimsup \varphi^n(x_n)\,.$$

Soit donc $x \in D(\partial\varphi)$ fixé ainsi qu'un $y \in \partial\varphi(x)$. D'après le corollaire 1.1, il existe une suite $(x_n, y_n)_{n\in\boldsymbol{N}}$, $y_n \in \partial\varphi^n(x_n)$ telle que $x_n \to x$, $y^n \to y$.

Soit $(u_l, f_l) \ldots (u_1, f_1)$ une chaîne finie d'éléments de $\partial\varphi$ et $(u_i^n, f_i^n)_{n\in\boldsymbol{N}}$ les suites approchantes correspondantes $f_i^n \in \partial\varphi^n(u_i^n)$, $f_i^n \to f_i$, $u_i^n \to u_i$. Ecrivant

$$\begin{aligned}
&\varphi^n(u_l^n) \geqslant \varphi^n(x_n) + \langle y_n, u_l^n - x_n\rangle\\
&\varphi^n(u_{l-1}^n) \geqslant \varphi^n(u_l^n) + \langle f_l^n, u_{l-1}^n - u_l^n\rangle\\
&\qquad\vdots\\
&\varphi^n(u^n) \geqslant \varphi^n(u_1^n) + \langle f_1^n, u^n - u_1^n\rangle
\end{aligned}$$

et ajoutant membre à membre on obtient

$$\varphi^n(u^n) \geqslant \varphi^n(x_n) + \langle y_n, u_l^n - x_n\rangle + \langle f_l^n, u_{l-1}^n - u_l^n\rangle + \ldots + \langle f_1^n, u^n - u_1^n\rangle\,.$$

Passant à la limite supérieure en $n \in N$

$$\varphi(u) \geqslant \overline{\lim}\, \varphi^n(x_n) + \langle y, u_l - x\rangle + \langle f_l, u_{l-1} - u_l\rangle + \ldots + \langle f_1, u - u_1\rangle$$

et prenant le sup sur les chaînes finies d'éléments de $\partial\varphi$ on obtient

$$\varphi(u) \geqslant \overline{\lim}\, \varphi^n(x_n) + \varphi(u) - \varphi(x) \qquad \text{soit} \qquad \varphi(x) \geqslant \overline{\lim}\, \varphi^n(x_n)\,.$$

$(b) \Rightarrow (c)$ évident.

$(c) \Rightarrow (d)$. Soit $\lambda > 0$ fixé; posons

$$u_n + \lambda v_n = z^n_\lambda \qquad \text{soit} \qquad u_n = (I + \lambda\,\partial\varphi^n)^{-1} z^n_\lambda\,.$$

Par hypothèse $z^n_\lambda \xrightarrow[n\to+\infty]{} u + \lambda v = z_\lambda$; d'autre part,

$$\varphi^n_\lambda(z^n_\lambda) = \varphi^n\big((I + \lambda\,\partial\varphi^n)^{-1} z^n_\lambda\big) + \frac{1}{2\lambda}\,|z^n_\lambda - (I + \lambda\partial\varphi^n)^{-1} z^n_\lambda|^2 = \varphi^n(u_n) + \frac{\lambda}{2}\,|v_n|^2;$$

par conséquent,

$$\varphi^n_\lambda(z^n_\lambda) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \varphi(u) + \frac{\lambda}{2}\,|v|^2 = \varphi_\lambda(z_\lambda)\,.$$

Soit $x \in H$:

$$\varphi^n_\lambda(x) = \varphi^n_\lambda(z^n_\lambda) + \int_0^1 \langle A^n_\lambda[z^n_\lambda + \tau(x - z^n_\lambda)], x - z^n_\lambda\rangle\, d\tau\,;$$

or

$$A^n_\lambda[z^n_\lambda + \tau(x - z^n_\lambda)] \xrightarrow[(n\to+\infty)]{w-H} A_\lambda[z_\lambda + \tau(x - z_\lambda)]$$

puisque

$$|A^n_\lambda[z^n_\lambda + \tau(x - z^n_\lambda)] - A^n_\lambda[z_\lambda + \tau(x - z)]| \leqslant \frac{1}{\lambda}\,|z^n_\lambda - z_\lambda|\,.$$

D'après le théorème de convergence dominée

$$\varphi^n_\lambda(x) \to \varphi_\lambda(z_\lambda) + \int_0^1 \langle A_\lambda[z_\lambda + \tau(x - z_\lambda)]\,, \quad x - z_\lambda > d\tau = \varphi_\lambda(x)\,.$$

$(d) \Rightarrow (b)$. Soit $x \in H$ fixé; raisonnons tout d'abord à $\lambda > 0$ *fixé* et montrons que

$$J^n_\lambda x \xrightarrow{w-H} J_\lambda x \qquad \text{ou, de façon équivalente,} \qquad A^n_\lambda x \xrightarrow{w-H} A_\lambda x\,.$$

A cet effet, montrons que la suite $(A^n_\lambda x)_{n\in N}$ reste bornée.

De l'inégalité $|\varphi^n_\lambda(x) - \varphi^n_\lambda(y) - \langle A^n_\lambda x, y - x\rangle| \leqslant (1/\lambda)|y - x|^2$, on déduit grâce au Th. de Banach-Steinhauss que la suite $(A^n_\lambda x)_{n\in N}$ est bornée dans H; on peut obtenir des renseignements plus précis, en utilisant le lemme 1.8 ci-dessous: la fonction $\lambda \mapsto \varphi^n_\lambda(x)$ est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ et sa dérivée (en λ) est égale à $-\frac{1}{2}|A^n_\lambda(x)|^2$; par conséquent:

$$\forall 0 < \lambda_0 < \lambda_1 \qquad \varphi^n_{\lambda_0}(x) - \varphi^n_{\lambda_1}(x) = \tfrac{1}{2}\int_{\lambda_0}^{\lambda_1} |A^n_\lambda(x)|^2 \, d\lambda \geqslant \tfrac{1}{2}(\lambda_1 - \lambda_0)|A^n_{\lambda_1}(x)|^2 .$$

On obtient donc que la suite $(A^n_\lambda x)_{n\in N}$ reste bornée. Soit z un point limite faible de la suite $(A^n_\lambda x)_{n\in N}$ ie $A^{n(k)}_\lambda x \xrightarrow[(k\to+\infty)]{w-H} z$; de l'inégalité

$$\forall \xi \in H \qquad \varphi^{(n(k)}_\lambda(\xi) \geqslant \varphi^{n(k)}_\lambda(x) + \langle A^{n(k)}_\lambda x, \xi - x\rangle$$

passant à la limite $(k \to +\infty)$

$$\forall \xi \in H \qquad \varphi_\lambda(\xi) \geqslant \varphi_\lambda(x) + \langle z, \xi - x\rangle \qquad \text{et donc } z = A_\lambda x .$$

Par conséquent $\forall \lambda > 0$, $\forall x \in H$, $A^n_\lambda x \xrightarrow[(n\to+\infty)]{w-H} A_\lambda x$.

Pour montrer la convergence forte des résolvantes, nous allons utiliser le fait que *toutes* les approximations Yosida φ^n_λ convergent simplement; nous utiliserons de nouveau le lemme suivant:

LEMME 1.8. – Soit φ convexe, s.c.i. propre de H dans $]-\infty, +\infty]$ et x fixé dans H. La fonction $\lambda \mapsto \lambda\varphi_\lambda(x)$ est concave, de classe C^1 sur $]0, +\infty[$; sa dérivée première au point λ est égale à $\varphi(J_\lambda x)$; la fonction $\lambda \mapsto \varphi(J_\lambda x)$ est localement lipschitzienne sur $]0, +\infty[$: $\forall \lambda_0 > 0$, $\forall \lambda, \mu \in [\lambda_0, +\infty[$ $|\varphi(J_\lambda x) - \varphi(J_\mu x)| \leqslant |\lambda - \mu| \cdot |A_{\lambda_0} x|^2$; de plus, $\lim_{\lambda\to 0} \lambda\varphi_\lambda(x) = \frac{1}{2} d(x, \overline{D(\varphi)})^2$ où $d(x, \overline{D(\varphi)})$ désigne la distance de x à $\overline{D(\varphi)}$.

Supposons le lemme 1.8 démontré et achevons la démonstration de $(d) \Rightarrow (b)$: De l'égalité $\varphi^n_\lambda(x) = \varphi^n(J^n_\lambda x) + (\lambda/2)|A^n_\lambda x|^2$, on déduit que si l'on arrive à montrer que $\varphi^n(J^n_\lambda x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \varphi(J_\lambda x)$, il s'en suivra que $|A^n_\lambda x| \to |A_\lambda x|$; tenant compte de la convergence faible $A^n_\lambda x \xrightarrow[n\to+\infty]{w-H} A_\lambda x$, on concluera $A^n_\lambda x \xrightarrow[n\to+\infty]{} A_\lambda x$. Or, d'après le lemme 1.8 $\varphi^n(J^n_\lambda x)$ est la dérivée par rapport à λ de $\lambda \to \lambda\varphi^n_\lambda(x)$.

Nous sommes donc amenés à introduire, ayant fixé λ_0 et λ_1 $(0 < \lambda_0 < \lambda_1)$ les suites de fonctions numériques:

$$\lambda \in [\lambda_0, \lambda_1] \mapsto h_n(\lambda) = \varphi^n_\lambda(x) \qquad \text{et} \qquad \lambda \in [\lambda_0, \lambda_1] \mapsto f_n(\lambda) = \varphi^n(J^n_\lambda x) .$$

D'après le lemme 1.8, pour tout $n \in N$ $f_n(\cdot)$ est lipschitzienne; montrons que la suite $(f_n)_{n\in N}$ satisfait aux conditions du théorème d'Ascoli:

a) $\forall \lambda \in [\lambda_0, \lambda_1]$ la suite $(f_n(\lambda))_{n\in N}$ est bornée:

$$f_n(\lambda) = \varphi^n_\lambda(x) - \frac{\lambda}{2} |A^n_\lambda(x)|^2.$$

On a vu auparavant que la suite $(A_\lambda^n x)_{n\in N}$ reste bornée pour λ fixé (et même uniformément bornée pour $\lambda \in [\lambda_0, \lambda_1]$).

b) D'après le lemme 1.8,

$$\forall n \in \boldsymbol{N} \quad \forall \lambda, \mu \in [\lambda_0, \lambda_1] \quad |f_n(\lambda) - f_n(\mu)| \leqslant |\lambda - \mu| \cdot |A_{\lambda_0}^n(x)|^2 .$$

La suite $(A_{\lambda_0}^n(x))_{n\in N}$ étant bornée, il résulteque les fonctions $(f_n(\cdot))_{n\in N}$ admettent une même constante de Lipschitz.

La suite $(f_n)_{n\in N}$ est donc relativement compacte dans $\mathcal{C}_u([\lambda_0, \lambda_1]; \boldsymbol{R})$; il existe une sous-suite $(f_{n_k})_{k\in N}$ et une fonction f telles que $f_{n_k} \to f$ uniformément sur $[\lambda_0, \lambda_1]$.

On est donc dans la situation suivante:

$$\begin{cases} \forall \lambda \in [\lambda_0, \lambda_1] & h_{n_k}(\lambda) \xrightarrow[(k\to+\infty)]{} h(\lambda) \quad (\text{où } h(\lambda) = \varphi_\lambda(x)) \\ & h'_{n_k} = f_{n_k} \to f \quad \text{uniformément sur } [\lambda_0, \lambda_1]. \end{cases}$$

D'après le théorème de dérivation $f = h'$ et donc

$$\varphi^n(J_\lambda^n(\cdot)) \to \varphi(J_\lambda(\cdot)) \quad \text{uniformément sur tout compact de }]0, +\infty[.$$

Il ne reste plus qu'à démontrer le lemme 1.8.

DÉMONSTRATION DU LEMME 1.8. – Soit $x \in H$ fixé. De l'égalité

$$(1) \qquad \lambda\varphi_\lambda(x) = \inf_{y\in D(\varphi)} \{\lambda\varphi(y) + \tfrac{1}{2}|x-y|^2\} ,$$

on déduit que l'application $\lambda \mapsto \lambda\varphi_\lambda(x)$ est concave s.c.s, comme enveloppe inférieure de fonctions affines continues.

Soient $\lambda_1, \lambda_2 > 0$

$$(2) \qquad \lambda_1\varphi_{\lambda_1}(x) = \lambda_1\varphi(J_{\lambda_1}x) + \tfrac{1}{2}|x - J_{\lambda_1}x|^2$$

$$(3) \qquad \lambda_2\varphi_{\lambda_2}(x) = \lambda_2\varphi(J_{\lambda_2}x) + \tfrac{1}{2}|x - J_{\lambda_2}x|^2$$

d'où, tenant compte de (1)

$$\lambda_1\varphi(J_{\lambda_2}x) + \tfrac{1}{2}|x - J_{\lambda_2}x|^2 - \lambda_2\varphi_{\lambda_2}(x) \geqslant \lambda_1\varphi_{\lambda_1}(x) - \lambda_2\varphi_{\lambda_2}(x) \geqslant \\ \geqslant \lambda_1\varphi_{\lambda_1}(x) - \lambda_2\varphi(J_{\lambda_1}x) - \tfrac{1}{2}|x - J_{\lambda_1}x|^2$$

et tenant compte de (2) et (3)

$$(4) \qquad (\lambda_1 - \lambda_2)\varphi(J_{\lambda_2}x) \geqslant \lambda_1\varphi_{\lambda_1}(x) - \lambda_2\varphi_2(x) \geqslant (\lambda_1 - \lambda_2)\varphi(J_{\lambda_1}x) ;$$

par conséquent

(5) $\quad \forall \lambda_1, \lambda_2 > 0 \quad |\lambda_1\varphi_{\lambda_1}(x) - \lambda_2\varphi_{\lambda_2}(x)| \leqslant |\lambda_1 - \lambda_2| \operatorname{Sup}\{|\varphi(J_{\lambda_1}x)|; |\varphi(J_{\lambda_2}x)|\}$.

Montrons que l'application $\lambda \mapsto \varphi(J_\lambda x)$ est continue sur $]0, +\infty[$: de l'égalité

$$\varphi(J_\lambda x) = \varphi_\lambda(x) - \frac{1}{2\lambda}|x - J_\lambda x|^2,$$

on déduit qu'il suffit de montrer la continuité des applications $\lambda \mapsto J_\lambda x$ et $\lambda \mapsto \varphi_\lambda(x)$ sur $]0, +\infty[$; or

(6) $$\forall \lambda, \mu \geqslant \lambda_0 > 0 \qquad |J_\lambda x - J_\mu x| \leqslant |\lambda - \mu| \cdot |A_{\lambda_0} x|,$$

d'où la continuité de $\lambda \mapsto J_\lambda x$; pour montrer la continuité de $\lambda \to \varphi_\lambda(x)$, où de façon équivalente de $\lambda \mapsto \lambda\varphi_\lambda(x)$, il suffit de revenir à (5) en notant que l'application $\lambda \to \varphi(J_\lambda x)$ est bornée sur les compacts de $]0, +\infty[$:

$$\forall \lambda \geqslant \lambda_0 > 0 \qquad -c_1|J_\lambda x| - c_2 \leqslant \varphi(J_\lambda x) \leqslant \varphi_\lambda(x) \leqslant \varphi_{\lambda_0}(x)$$

or $\lambda \to |J_\lambda x|$ reste bien bornée d'après (6) sur les compacts de $]0, +\infty[$; revenant à (4), divisant par $\lambda_1 - \lambda_2$ (avec $\lambda_1 > \lambda_2$, puis $\lambda_1 < \lambda_2$) et faisant tendre λ_2 vers λ_1, on obtient que l'application $\lambda \mapsto \lambda\varphi_\lambda(x)$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et

(7) $$\forall \lambda \in]0, +\infty[\quad \frac{d}{d\lambda}(\lambda\varphi_\lambda(x)) = \varphi(J_\lambda x).$$

La fonction $\lambda \mapsto \varphi(J_\lambda x)$ étant continue sur $]0, +\infty[$, on conclut que l'application $\lambda \mapsto \lambda\varphi_\lambda(x)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$.

Montrons à présent que l'application $\lambda \mapsto \varphi(J_\lambda x)$ est localement lipschitzienne sur $]0, +\infty[$.

Soit $0 < \lambda_2 < \lambda_1$ et $x \in H$ fixés:

$$\varphi(J_{\lambda_2}x) - \varphi(J_{\lambda_1}x) \geqslant \langle A_{\lambda_1}x, J_{\lambda_2}x - J_{\lambda_1}x\rangle$$
$$\geqslant \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}\left\langle \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_1}(x - J_{\lambda_1}x),\ J_{\lambda_2}x - J_{\lambda_2}\left[\frac{\lambda_2}{\lambda_1}x + \left(1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)J_{\lambda_1}x\right]\right\rangle .$$

Or, de façon générale, la monotonie de A entraîne que $J_\lambda = (I + \lambda A)^{-1}$ vérifie:

$$\forall u, v \in H \qquad \langle J_\lambda u - J_\lambda v, u - v\rangle \geqslant |J_\lambda u - J_\lambda v|^2$$

par conséquent,

$$\varphi(J_{\lambda_2}x) - \varphi(J_{\lambda_1}x) \geqslant \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}|J_{\lambda_2}x - J_{\lambda_1}x|^2;$$

(la fonction $\lambda \mapsto \varphi(J_\lambda x)$ comme dérivée d'une fonction concave est bien décroissante). D'autre part,

$$\begin{aligned} 0 \leqslant \varphi(J_{\lambda_2}x) - \varphi(J_{\lambda_1}x) &\leqslant \langle A_{\lambda_2}x, J_{\lambda_2}x - J_{\lambda_1}x\rangle \\ &\leqslant |\lambda_1 - \lambda_2|\cdot|A_{\lambda_2}x|^2 \end{aligned}$$

(puisque $|J_{\lambda_2}x - J_{\lambda_1}x| \leqslant |\lambda_1 - \lambda_2|\cdot|A_{\lambda_2}x|$); on conclut en remarquant que la fonction $\lambda \mapsto |A_\lambda x|$ est localement bornée sur $]0, +\infty[$.

Reste à montrer que l'application $\lambda \mapsto \lambda\varphi_\lambda(x)$ se prolonge en zéro:

$$\lambda\varphi_\lambda(x) = \lambda\varphi(J_\lambda x) + \tfrac{1}{2}|x - J_\lambda x|^2 .$$

Tenant compte du fait que $\lim\limits_{\lambda\to 0} J_\lambda x = \operatorname{proj}_{\overline{D(\varphi)}} x$, il suffit de montrer que $\lim\limits_{\lambda\to 0} \lambda\varphi(J_\lambda x) = 0$:

$$\exists c_1, c_2 \geqslant 0 \quad \forall x \in H \quad \varphi(x) + c_1|x| + c_2 \geqslant 0 ,$$

d'où

$$\lambda\varphi(J_\lambda x) \geqslant -\lambda c_1|J_\lambda x| - \lambda c_2 \quad \text{et} \quad \varliminf_{(\lambda\to 0)} \lambda\varphi(J_\lambda x) \geqslant 0 .$$

D'autre part

$$\forall \xi \in D(\varphi) \quad \lambda\varphi(\xi) \geqslant \lambda\varphi(J_\lambda x) + \langle \xi - J_\lambda x, x - J^\lambda x\rangle$$

et faisant tendre λ vers zéro

$$\forall \xi \in D(\varphi) \quad 0 \geqslant \varlimsup_{(\lambda\to 0)} \lambda\varphi(J_\lambda x) + \langle \xi - \operatorname{proj}_{\overline{D(\varphi)}} x, x - \operatorname{proj}_{\overline{D(\varphi)}} x\rangle$$

et faisant tendre ξ vers $\operatorname{proj}_{\overline{D(\varphi)}} x$, avec $\xi \in D(\varphi)$, on obtient

$$0 \geqslant \varlimsup_{(\lambda\to 0)} \lambda\varphi(J_\lambda x) \quad \text{et donc} \quad \lim_{\lambda\to 0} \lambda\varphi(J_\lambda x) = 0 .$$

Nous allons à présent faire quelques remarques à propos du théorème 1.2; nous dégagerons ensuite un certain nombre de corollaires.

REMARQUE 1.5. – On pourrait penser (notant qu'une fonction convexe n'est déterminée par son sous-différentiel qu'à une constante additive près) remplacer la condition (*b*) du Théorème 1.2 par la condition plus faible suivante:

(*b* bis) $\partial\Phi^n \to \partial\Phi$ et il existe une suite $(u_n)_{n\in N}$, $u_n \to u$, $\Phi^n(u_n) \to \Phi(u)$.

Donnons un exemple où la condition (*b* bis) n'entraîne pas la convergence au sens de Mosco de φ^n vers φ.

De façon générale, si l'on trouve $\varphi^n \xrightarrow{M} \varphi$ et $u_n \to u$ tels que $\varphi^n(u_n) \to \varphi(u) + \lambda$ $(\lambda > 0)$, prenant $\Phi^n = \varphi^n$ et $\Phi = \varphi + \lambda$, on aura bien trouvé un tel exemple.

Prenons $H = L^2(\Omega)$, Ω ouvert borné de $\mathbf{R}^n$, de mesure égale à 1 $(m(\Omega) = 1)$:

$$\varphi^n(f) = \|f\|_{L^n(\Omega)}, \qquad \varphi(f) = \|f\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

On a $\varphi^n \uparrow \varphi$, $(\varphi^n)_{n\in N}$ et φ convexes, sci, propres et $\varphi^n \xrightarrow{M} \varphi$.

Il suffit alors de prendre (étant donné $\lambda > 0$), notant χ_E la fonction caractéristique d'un ensemble E,

$$u_n = \lambda \cdot \chi_{E_n} \quad \text{avec} \quad m(E_n) = 1/n \quad \text{et} \quad u = 0\,.$$

REMARQUE 1.6. – Soit $(A^n)_{n\in N}$ une suite de sous-différentiels convergente dans $\mathcal{M}_\varphi$, $A^n \xrightarrow{R} A$; soit $A = \partial\varphi$, il existe une suite $(\varphi^n)_{n\in N}$, $(\varphi^n\colon H \to]-\infty, +\infty]$ convexe, sci, propre$)$ telle que pour tout n, $A^n = \partial\varphi^n$ et telle que $(\varphi^n)_{n\in N}$ converge vers φ au sens de Mosco:

Soit $A^n = \partial\psi^n$, $A = \partial\varphi$ et $f \in \partial\varphi(u)$; par hypothèse, il existe une suite $(u_n, f_n) \in \partial\psi^n$ telle que $u_n \to u$ et $f_n \to f$; posons

$$\varphi^n(x) = \psi^n(x) + \varphi(u) - \psi^n(u_n)\,.$$

On a bien $\partial\varphi^n = \partial\psi^n \xrightarrow{R} \partial\varphi$, $f_n \in \partial\varphi^n(u_n)$, $f \in \partial\varphi(u)$ tels que $u_n \to u$, $f_n \to f$ et $\varphi^n(u_n) = \varphi(u)$; par conséquent, $((b) \Rightarrow (a)$ du Théorème 1.2$)$ φ^n converge vers φ au sens de Mosco.

A partir de l'équivalence $(a) \Leftrightarrow (b)$ du théorème 2.1, on retrouve très simplement un résultat de Mosco [22] établissant la continuité de la transformation de Young-Fenchel $(\varphi \to \varphi^*)$ pour la M-convergence:

COROLLAIRE 1.5. – Soit $(\varphi^n)_{n\in N}$, φ une suite de fonctions convexes, sci, propres de H dans $]-\infty, +\infty]$; il y a équivalence entre

i) $\varphi^n \xrightarrow{M} \varphi$;

ii) $\varphi^{n^*} \xrightarrow{M} \varphi^*$.

DÉMONSTRATION. – Tenant compte du fait que $(\varphi^*)^* = \varphi$, il suffit de montrer (i) $\Rightarrow$ (ii): soit $(f, u) \in \partial\varphi^*$; on a donc $(u, f) \in (\partial\varphi^*)^{-1} = \partial\varphi$; puisque $\varphi^n \xrightarrow{M} \varphi$ il existe $(u_n, f_n) \in \partial\varphi^n$ tels que $u_n \to u$, $f_n \to f$, $\varphi^n(u_n) \to \varphi(u)$ et $\varphi^{n^*}(f_n) \to \varphi^*(f)$; on a alors $(f_n, u_n) \in (\partial\varphi^n)^{-1} = \partial\varphi^{n^*}$, $f_n \to f$, $u_n \to u$ et $\varphi^{n^*}(f_n) \to \varphi^*(f)$; par conséquent $\varphi^{n^*} \xrightarrow{M} \varphi^*$

On aurait pu également démontrer ce résultat en se servant de l'équivalence $(a) \Leftrightarrow (d)$ du théorème 2.1: on utilise alors la formule

$$\forall\lambda > 0,\ \forall x \in H \qquad (\varphi^*)_\lambda(x) = \frac{1}{2\lambda}|x|^2 - \varphi_{1/\lambda}\left(\frac{x}{\lambda}\right).$$

Nous allons à présent interpréter le Th. 1.2 dans le cas où les fonctions φ^n sont des fonctions indicatrices de convexes fermés non vides; on notera I_K la fonction indicatrice d'un tel ensemble K.

COROLLAIRE 1.6. – Soient K_n, K une suite de convexes fermés non vides dans H espace de Hilbert; sont équivalents:

$$(a)\begin{cases} \forall x \in K, \ \exists x_n \in K_n, \ x_n \to x, \\ \forall (n(k))_{k\in N} \text{ suite extraite, } \forall (x_k)_{k\in N} \ x_k \in K_{n(k)} \ (x_k \rightharpoonup x) \Rightarrow (x \in K). \end{cases}$$

$$(b) \quad \forall x \in H \ \operatorname{proj}_{K_n} x \to \operatorname{proj}_K x.$$

$$(c)\begin{cases} \forall x \in H, \ \operatorname{proj}_{K_n} x \xrightarrow{w-H} \operatorname{proj}_K x, \\ \exists x_0 \in K, \ \exists x_n \in K_n, \ x_n \to x. \end{cases}$$

$$(d) \quad \forall x \in H, \ d(x, K_n) \to d(x, K).$$

DÉMONSTRATION. – On considère la suite $\varphi^n = I_{K_n}$, $\varphi = I_K$; il suffit de remarquer que: $\forall \lambda > 0$, $\forall x \in H$, $(I + \lambda \partial\varphi^n)^{-1}x = \operatorname{proj}_{K_n} x$, $\varphi^n_\lambda(x) = (1/2\lambda)\, d^2(x, K_n)$ $\big($où $d(x, K_n)$ désigne la distance de x à $K_n\big)$, et d'appliquer le théorème 2.1.

Nous allons à présent étudier plus en détail l'équivalence $(b) \Leftrightarrow (c)$ du théorème 1.2, à savoir l'équivalence entre la convergence forte et la convergence faible des résolvantes pour une suite de sous-différentiels.

Lien entre convergence forte et faible des résolvantes.

PROPOSITION 1.4. – Soit $(\partial\varphi^n)_{n\in N}$, $\partial\varphi$ une suite de sous-différentiels dans H Hilbert; sont équivalents

$$\text{(i)} \quad \forall \lambda > 0, \ \forall x \in H, \ (I + \lambda\partial\varphi^n)^{-1}x \to (I + \lambda\partial\varphi)^{-1}x.$$

$$\text{(ii)}\begin{cases} \text{(ii)}_1 \ \forall \lambda > 0, \ \forall x \in H, \ (I + \lambda\partial\varphi^n)^{-1}x \xrightarrow{w-H} (I + \lambda\partial\varphi)^{-1}x, \\ \text{(ii)}_2 \ \exists (u, v) \in \partial\varphi, \ \exists (u_n, v_n) \in \partial\varphi^n, \ u_n \to u \text{ et } v_n \to v. \end{cases}$$

DÉMONSTRATION. – (i) $\Rightarrow$ (ii). L'implication (i) $\Rightarrow$ (ii)_1 est évidente; l'implication (i) $\Rightarrow$ (ii)_2 résulte du Corollaire 1.1.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Comme dans la Remarque 1.6 posons $\psi^n(x) = \varphi^n(x) - \varphi^n(u_n) + \varphi(u)$; on a alors

$$\begin{cases} \forall \lambda > 0 \quad \forall x \in H \quad (I + \lambda\partial\psi^n)^{-1}x \xrightarrow{w-H} (I + \lambda\partial\varphi)^{-1}x \\ \exists (u, v) \in \partial\varphi \quad \exists (u_n, v_n) \in \partial\varphi^n \quad u_n \to u, \quad v_n \to v, \quad \psi^n(u_n) \to \varphi(u) \end{cases}$$

d'où, d'après l'implication $(c) \Rightarrow (a)$ du théorème 1.2, $\psi^n \xrightarrow{M} \varphi$ et $\partial\psi^n = \partial\varphi^n \xrightarrow{R} \partial\varphi$.

REMARQUE 1.7. – La condition $(\mathrm{ii})_1$ n'entraîne pas à elle seule (i): il suffit de prendre dans un espace de Hilbert H une suite $(x_n)_{n\in N}$ convergeant faiblement et non fortement vers x, et poser:

$$\varphi^n(\xi) = \langle \xi, x_n \rangle , \qquad \varphi(\xi) = \langle \xi, x \rangle .$$

Dans le cas de sous-différentiels linéaires, la condition $(\mathrm{ii})_2$ de la Proposition 1.4 est automatiquement vérifiée puisque $\partial\varphi^n(0) = \partial\varphi(0) = 0$; l'énoncé prend alors la forme plus simple suivante; on constate d'autre part que la propriété d'équivalence entre convergence simple et convergence forte des résolvantes n'est pas propre au cas auto-adjoint:

PROPOSITION 1.5. – Soit $(A^n)_{n\in N}$, A une suite d'opérateurs maximaux monotones linéaires univoques auto-adjoints, (resp. anti-adjoints); il y *a* équivalence entre

(i) $\forall\lambda > 0,\ \forall x \in H,\ (I + \lambda A^n)^{-1}x \to (I + \lambda A)^{-1}x,$

(ii) $\forall\lambda > 0,\ \forall x \in H,\ (I + \lambda A^n)^{-1}x \xrightarrow{w-H} (I + \lambda A)^{-1}x.$

DÉMONSTRATION. – (i) $\Rightarrow$ (ii) évident.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Nous allons redonner (dans le cas auto-adjoint) une démonstration directe de ce résultat, la démonstration dans le cas anti-adjoint étant voisine quoique, plus simple. Puisque par hypothèse $J_\lambda^n x \xrightarrow{w-H} J_\lambda x$, il suffit de montrer pour obtenir la convergence forte des résolvantes que $|J_\lambda^n x| \xrightarrow[n\to+\infty]{} |J_\lambda x|$; or

$$|J_\lambda^n x|^2 = \langle J_\lambda^n x, J_\lambda^n x\rangle = \langle x, (J_\lambda^n)^* J_\lambda^n x\rangle$$

et $\big((I + \lambda A^n)^{-1}\big)^* = (I + \lambda A^{n^*})^{-1}$; on est donc amené à montrer que

$$\forall\lambda > 0 \quad \forall x \in H \quad (I + \lambda A^{n^*})^{-1}(I + \lambda A^n)^{-1}x \xrightarrow[n\to+\infty]{(w-H)} (I + \lambda A^*)^{-1}(I + \lambda A)^{-1}x .$$

A cet effet on utilise l'équation résolvante; notons $\varrho(A)$ l'ensemble des $\lambda \in \boldsymbol{R}$ tels que $(I + \lambda A)^{-1}$ soit une contraction partout définie sur H (puisque A est maximal monotone $\varrho(A) \supset \boldsymbol{R}^+$); dans le cas linéaire l'équation résolvante (lemma 1.4) s'écrit

$$\forall\lambda \in \varrho(A^n),\ \forall\mu \in \varrho(A^n) \qquad J_\lambda^n x = J_\mu^n\left(\frac{\mu}{\lambda}x + \left(1 - \frac{\mu}{\lambda}\right)J_\lambda x\right) = \frac{\mu}{\lambda}J_\mu^n x + \left(1 - \frac{\mu}{\lambda}\right)J_\mu^n J_\lambda^n x$$

soit

$$\forall\lambda \in \varrho(A^n) \qquad \forall\mu \in \varrho(A^n) \qquad \lambda J_\lambda^n x - \mu J_\mu^n x = (\lambda - \mu)\, J_\mu^n J_\lambda^n x$$

et

$$\forall\lambda \in \varrho(A^n) \qquad \frac{d}{d\lambda}\big(\lambda J_\lambda^n(x)\big) = J_\lambda^n J_\lambda^n x = (J_\lambda^n)^2 x .$$

a) *Cas auto-adjoint*: on a $A^{n^*} = A^n$; il s'agit donc de montrer que

$$\forall \lambda > 0 \qquad \forall x \in H \qquad J_\lambda^n J_\lambda^n x \xrightarrow{w-H} J_\lambda J_\lambda x .$$

Soit $\xi \in H$ fixé; on est amené à poser $f_n(\lambda) = \langle \lambda J_\lambda^n(x), \xi \rangle$, $f(\lambda) = \langle \lambda J_\lambda(x), \xi \rangle$. Montrons que la suite $(f_n')_{n\in N}$ satisfait aux conditions du théorème d'Ascoli sur tout intervalle de la forme $[\lambda_0, \lambda_1]$, $\lambda_0 > 0$;

$$f_n'(\lambda) = \langle (J_\lambda^n)^2 x, \xi \rangle , \qquad f'(\lambda) = \langle (J_\lambda)^2 x, \xi \rangle .$$

D'autre part, $g_n(\lambda) = f_n(1/\lambda) = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} \langle S_n(t) x, \xi \rangle \, dt$ où $\big(S_n(t)\big)_{t\geq 0}$ est le semi-groupe engendré par A^n; par conséquent

$$g(_n''\lambda) = \int_0^{+\infty} t^2 e^{-\lambda t} \langle S_n(t) x, \xi \rangle \, dt$$

et

$$\forall \lambda \in [\lambda_0, \lambda_1] , \qquad \forall n \in N \qquad |g_n''(\lambda)| \leq |x| \cdot |\xi| \cdot \int_0^{+\infty} t^2 e^{-\lambda_0 t} dt < +\infty .$$

On en déduit immédiatement que la suite $(g_n')_{n\in N}$ et donc la suite $(f_n')_{n\in N}$ est relativement compacte dans $\mathcal{C}_u([\lambda_0, \lambda_1]; \boldsymbol{R})$; or

$$\begin{cases} f_n(\lambda) \to f(\lambda) & \forall \lambda \in [\lambda_0, \lambda_1] \\ f_{n_k}' & \to \text{uniformément sur } [\lambda_0, \lambda_1] ; \end{cases}$$

d'après le théorème de dérivation, on conclut que f_n' converge vers f' uniformément sur tout intervalle compact de $]0, +\infty[$, ce qui est le résultat cherché.

b) *Cas anti-adjoint*: on a $(A^n)^* = -A^n$, ce qui entraîne que $-A^n$ est maximal monotone et donc que $J_\lambda^n = (I + \lambda A^n)^{-1}$ est défini pour tout $\lambda \in \boldsymbol{R} - \{0\}$; par conséquent

$$\forall \lambda, \mu \in \boldsymbol{R} - \{0\} , \qquad \lambda J_\lambda^n x - \mu J_\mu^n x = (\lambda - \mu) J_\mu^n J_\lambda^n x ;$$

d'autre part $(J_\lambda^n)^* = \big((I + \lambda A^n)^{-1}\big)^* = (I + \lambda A^{n^*})^{-1} = J_{-\lambda}^n$; soit à montrer que $J_{-\lambda}^n J_\lambda^n x \xrightarrow{w-H} J_{-\lambda} J_\lambda x$; faisant $\mu = -\lambda$ dans l'équation résolvante précédente, on obtient

$$\forall \lambda \in \boldsymbol{R} \setminus \{0\} \qquad J_\lambda^n x + J_{-\lambda}^n x = 2 J_{-\lambda}^n J_\lambda^n x ;$$

or étant donné $\xi \in H$, $\langle J_{-\lambda}^n x, \xi \rangle = \langle (J_\lambda^n)^* x, \xi \rangle = \langle x, J_\lambda^n \xi \rangle \xrightarrow[n\to+\infty]{} \langle x, J_\lambda \xi \rangle = \langle J_{-\lambda} x, \xi \rangle$, et donc, $J_\lambda^n x + J_{-\lambda}^n x \xrightarrow[(n\to+\infty)]{w-H} J_\lambda x + J_{-\lambda} x$, ce qui entraîne que $J_{-\lambda}^n J_\lambda^n x \xrightarrow{w-H} J_{-\lambda} J_\lambda x$.

REMARQUE 1.8. – Soit $H = L^2(0, 1; \boldsymbol{C})$ muni du produit scalaire $\langle u, v \rangle = \int_0^1 u(t) \cdot \overline{v(t)} \, dt$, qui en fait un espace de Hilbert complexe.

Soit

$$A^n u = a_n(\cdot)\, u\,, \qquad D(A^n) = \{u \in L^2(0,1;\, \boldsymbol{C})/a_n(\cdot)\, u \in L^2(0,1;\, \boldsymbol{C})\}\,,$$

où l'on suppose $a_n(\cdot)$ mesurable et $\operatorname{Re} a_n(\cdot) \geqslant 0$.

L'opérateur A^n est maximal monotone linéaire dans H:

$$\forall u \in D(A^n) \qquad \operatorname{Re}\langle A^n u, u\rangle \geqslant 0$$

et

$$\forall v \in H,\ \forall \lambda > 0 \qquad J_\lambda^n v = (I + \lambda A^n)^{-1} v = \frac{1}{1+\lambda a_n} v$$

appartient à H: on vérifie en effet que

$$\left|\frac{1}{1+\lambda a_n}\cdot v\right|^2 = |v|^2 \cdot \frac{1}{1 + 2\lambda \operatorname{Re} a_n + \lambda^2 |a_n|^2} \leqslant |v|^2,$$

puisque $\operatorname{Re} a_n \geqslant 0$.

D'autre part;

$$(A^n)^* u = \overline{a_n}(\cdot)\, u\,, \qquad D(A^{n^*}) = \{u \in L^2(0,1;\, \boldsymbol{C})/\overline{a_n}(\cdot)\, u \in L^2(0,1;\, \boldsymbol{C})\} = D(A^n)\,.$$

Dans le cas $a_n(\cdot)$ réel, A^n est auto-adjoint, dans le cas $a_n(\cdot)$ imaginaire pur A^n est anti-adjoint; supposons à présent que $a_n(\cdot)$ ne prenne que deux valeurs α et β complexes ($\operatorname{Re}\alpha > 0$, $\operatorname{Re}\beta > 0$):

$$a_n(x) = \left|\begin{array}{l} \alpha \text{ si } x \text{ appartient à un intervalle de la forme} \left[\dfrac{2k}{n},\ \dfrac{2k+1}{n}\right], \\ \beta \quad \text{ailleurs.} \end{array}\right.$$

On a alors:

$$\forall v \in H,\ \forall \lambda > 0 \qquad (I + \lambda A^n)^{-1} v \xrightarrow[(n\to+\infty)]{w-H} \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1+\lambda\alpha} + \frac{1}{1+\lambda\beta}\right] v = f(\lambda, v)\,.$$

Nous allons vérifier que la famille $(f(\lambda,\cdot))_{\lambda>0}$ est une famille résolvante si et seulement si la convergence précédente est forte: supposons qu'il existe A maximal monotone tel que $\forall \lambda > 0$, $\forall v \in H$, $(I + \lambda A)^{-1} v = f(\lambda, v)$; on a alors

$$A_\lambda v = \frac{1}{\lambda}[v - f(\lambda, v)] = \frac{\alpha + \beta + 2\lambda\alpha\beta}{2(1+\lambda\alpha)(1+\lambda\beta)} v$$

et donc $Av = \lim\limits_{\lambda\to 0} A_\lambda v = \big((\alpha+\beta)/2\big) v$; par conséquent:

$$\forall \lambda > 0,\ \forall v \in H \qquad f(\lambda, v) = \frac{1}{1 + \lambda\big((\alpha+\beta)/2\big)} v\,,$$

et

$$\forall \lambda > 0, \quad \frac{1}{2}\cdot\frac{2+\lambda(\alpha+\beta)}{(1+\lambda\alpha)(1+\lambda\beta)} = \frac{2}{2+\lambda(\alpha+\beta)};$$

en développant

$$\forall \lambda > 0 \qquad \lambda^2(\beta+\alpha)^2 = 4\lambda^2\alpha\beta, \qquad \text{soit} \qquad (\beta-\alpha)^2 = 0 \qquad \text{et} \qquad \beta = \alpha;$$

la suite $a_n(\cdot)$ est donc stationnaire et la convergence est forte, $A^n \equiv A$; cet exemple contient le cas auto-adjoint et le cas anti-adjoint étudiées précédemment; il apparaît naturel de conjecturer de façon générale, pour toute suite $(A^n)_{n\in N}$, A d'opérateurs maximaux monotones dans un espace de Hilbert et tels que $A^n o \ni o$, $Ao \ni o$, l'équivalence entre

(i) $\forall \lambda > 0$, $\forall x \in H$, $(I+\lambda A^n)^{-1}x \xrightarrow{w-H} (I+\lambda A)^{-1}x$ et

(ii) $\forall \lambda > 0$, $\forall x \in H$, $(I+\lambda A^n)^{-1}x \longrightarrow (I+\lambda A)^{-1}x$.

Remarque 1.9. – On a vu (lemme 1.3) que si $(A^n)_{n\in N}$ est une suite d'opérateurs maximaux monotones tels que:

$$\forall \lambda > 0 \qquad \forall x \in H \qquad (I+\lambda A^n)^{-1}x \to f(\lambda, x),$$

alors $\big(f(\lambda,\cdot)\big)_{\lambda>0}$ est une famille résolvante et il existe un unique opérateur maximamonotone A tel que pour tout $\lambda > 0$, $f(\lambda,\cdot) = (I+\lambda A)^{-1}$; c'est ce résultat qui perl mettait de montrer que $\mathcal{M}$ muni de la structure uniforme associée à la famille d'écarts $\big(|(I+\lambda A)^{-1}x - (I+\lambda B)^{-1}x|\big)_{\substack{\lambda>0\\ x\in H}}$ était complet; l'exemple de la remarque 1.8 montre que ces résultats tombent en défaut si l'on remplace convergence forte par convergence faible, ce qui explique la moindre intérêt pratique de la topologie sur $\mathcal{M}$ associée à la convergence faible des résolvantes; ceci explique aussi la formulation du problème posé dans la remarque 1.8:

si la suite des résolvantes converge faiblement, et *si* la famille limite est une famille résolvante, y-a-t-il alors convergence forte des résolvantes (la réponse, on l'a vue est affirmative pour les linéaires auto-adjoints et anti-adjoints)?

Nous allons revenir sur l'exemple de la remarque 1.8, dans le cas auto-adjoint, i.e. $a_n(\cdot) \geqslant 0$, (ce qui correspond à α et $\beta \geqslant 0$).

Dans $H = L^2(0,1;\boldsymbol{R})$, $A^n u = a_n(\cdot)u$ est alors le sous-différentiel de la fonctionnelle φ^n définie par:

$$\varphi^n(u) = \tfrac{1}{2}\int_0^1 a_n(t)\,u(t)^2\,dt\,.$$

On a:

$$\forall \lambda > 0,\ \forall v \in H \qquad A^n_\lambda(v) = \frac{a_n}{1+\lambda a_n}v$$

et donc

$$\varphi_\lambda^n(v) = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{a_n}{1+\lambda a_n} v^2(t)\,dt;$$

par conséquent,

$$\forall\lambda > 0,\ \forall v \in H \qquad \varphi_\lambda^n(v) \xrightarrow[(n\to+\infty)]{} \frac{1}{4}\left(\frac{\alpha}{1+\lambda\alpha} + \frac{\beta}{1+\lambda\beta}\right)\int_0^1 v^2(t)\,dt = \varphi^\lambda(v)\,.$$

Soit

$$\varphi = \sup_{\lambda>0}\varphi^\lambda\colon \varphi(v) = \frac{1}{4}(\alpha+\beta)\int_0^1 v(t)^2\,dt \qquad \text{et} \qquad \varphi_\lambda(v) = \frac{1}{2}\cdot\frac{\alpha+\beta}{2+\lambda(\alpha+\beta)}\int_0^1 v(t)^2\,dt\,.$$

On a donc si $\alpha \neq \beta$, $\varphi_\lambda \neq \varphi^\lambda$ (ce qui confirme les conclusions de la remarque 1.8); on constate cependant une relation entre φ_λ et φ^λ à savoir $\varphi^\lambda \leqslant \varphi_\lambda$; (on vérifie que

$$\frac{1}{4}\left(\frac{\alpha}{1+\lambda\alpha} + \frac{\beta}{1+\lambda\beta}\right) \leqslant \frac{1}{2}\,\frac{\alpha+\beta}{2+\lambda(\alpha+\beta)}\,.$$

Cette relation est générale; en effet suppons de façon générale que l'on ait une suite de fonctions convexes, sci, propres $(\varphi^n)_{n\in N}$ ayant une minorante affine (en fait quadratique suffit) commune et telles que:

$$\forall\lambda > 0 \qquad \forall x \in H \qquad \varphi_\lambda^n(x) \xrightarrow[(n\to+\infty)]{} \varphi^\lambda(x)\,;$$

posons $\varphi = \sup\varphi^\lambda$ et montrons que

$$\forall\lambda > 0 \qquad \forall x \in H \qquad \varphi^\lambda(x) \leqslant \varphi_\lambda(x)$$

(si φ n'est pas propre la relation est évidente); la suite $(\varphi^\lambda)_{\lambda>0}$ croît vers φ lorsque λ décroît vers zéro et donc

$$\varphi^\lambda \xrightarrow[(\lambda\downarrow 0)]{M} \varphi\,;$$

par conséquent $\forall\mu > 0$, $\forall x \in H$, $(\varphi^\lambda)_\mu(x) \xrightarrow[\lambda\downarrow 0]{} \varphi_\mu(x)$ et

$$\varphi_\mu(x) = \sup_{\lambda>0}\ \operatorname*{Min}_{y\in H}\left\{\varphi^\lambda(y) + \frac{1}{2\mu}|x-y|^2\right\};$$

or

$$\forall y \in H \qquad \varphi^\lambda(y) + \frac{1}{2\mu}|x-y|^2 = \lim_{n\to+\infty}\left\{\varphi_\lambda^n(y) + \frac{1}{2\mu}|x-y^2\right\}$$

$$\geqslant \overline{\lim_{n\to+\infty}}\ \operatorname*{Min}_{y\in H}\left\{\varphi_\lambda^n(y) + \frac{1}{2\mu}|x-y|^2\right\} \geqslant \overline{\lim_{n\to+\infty}}\,(\varphi_\lambda^n)_\mu(x)$$

d'où

$$\underset{y\in H}{\mathrm{Min}}\left\{\varphi^\lambda(y)+\frac{1}{2\mu}|x-y|^2\right\}\geqslant \overline{\lim_{n\to+\infty}}\ \varphi^n_{\lambda+\mu}(x)=\varphi^{\lambda+\mu}(x)$$

$$\forall\mu>0,\ \forall x\in H\qquad \varphi^\lambda_\mu(x)\geqslant \underset{\lambda>0}{\mathrm{Sup}}\ \varphi^{\lambda+\mu}(x)\,.$$

Or l'application $\lambda\mapsto\varphi^\lambda(x)$ est décroissante continue sur $]0,+\infty[$, décroissante comme limite simple de fonctions décroissantes et continue car limite simple d'une suite de fonctions équicontinues sur tout compact de $]0,+\infty[$: de façon équivalente la suite $\lambda \overset{f_n}{\longmapsto} \lambda\varphi^n_\lambda(x)$ est équicontinue sur tout $[\lambda_0,\lambda_1]$ $0<\lambda_0<\lambda_1<\infty$ car $f_n'(\lambda)=$ $=\varphi^n(J^n_\lambda x)\leqslant\varphi^n_\lambda(x)\leqslant\varphi^n_{\lambda_0}(x)$, l'inégalité dans l'autre sens résultant de l'existence d'une minorante affine commune aux fonctions $(\varphi^n)_{\in N}$; on obtient finalement $\forall\mu>0$, $\forall x\in H$, $\varphi_\mu(x)\geqslant\varphi^\mu(x)$.

A l'aide du théorème 1.2, nous allons pouvoir définir une topologie sur l'ensemble des fonctions convexes, sci, propres de H dans $]-\infty,+\infty]$, telle que les suites convergentes soient précisément les suites M-convergentes.

Topologie de la M-convergence sur l'ensemble des fonctions convexes.

On notera $\mathcal{C}$ le cône convexe des fonctions convexes, sci, propres de H dans $]-\infty,+\infty]$, $\mathcal{C}^+$ le cône positif de $\mathcal{C}$.

DEFINITION 1.5. – On munit le cône $\mathcal{C}$ de la structure uniforme associée à la famille d'écarts $(e_{\lambda,x})_{\substack{\lambda>0\\x\in H}}$ et $(f_{\lambda,x})_{\substack{\lambda>0\\x\in H}}$:

$$\begin{cases} e_{\lambda,x}(\varphi,\psi)=|(I+\lambda\,\partial\varphi)^{-1}x-(I+\lambda\,\partial\psi)^{-1}x| \\ f_{\lambda,x}(\varphi,\psi)=|\varphi_\lambda(x)-\psi_\lambda(x)|\,. \end{cases}$$

On notera $\mathcal{C}_M$ le cône $\mathcal{C}$ muni de la topologie associée à cette famille d'écarts; cette topologie sera dite topologie de la M-convergence.

PROPOSITION 1.6. – $\mathcal{C}$ muni de la structure uniforme associée à la famille d'écarts $(e_{\lambda,x};f_{\lambda,x})_{\substack{\lambda>0\\x\in H}}$ est complet; si H est séparable, cette structure uniforme est associée à une famille dénombrable d'écarts et $\mathcal{C}_M$ est un espace polonais (métrisable, séparable, complet pour une métrique induisant la topologie); de plus

$$\varphi^n\to\varphi\quad\text{dans}\quad \mathcal{C}_M\Leftrightarrow\varphi^n\overset{M}{\to}\varphi$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\partial\varphi^n\overset{M}{\to}\partial\varphi\\ \exists\lambda_0>0,\quad\exists x_0\in H,\quad \varphi^n_{\lambda_0}x\to\varphi_{\lambda_0}x.\end{cases}$$

DÉMONSTRATION. – Soit $(\varphi^n)_{n\in N}$ une suite de Cauchy dans $(\mathcal{C}, e_{\lambda,x}; f_{\lambda,x})$; alors

$$\forall\lambda > 0\,, \quad \forall x \in H\,, \quad (I + \lambda\,\partial\varphi^n)^{-1}x \to f(\lambda, x)$$

et

$$\forall\lambda > 0\,, \quad \forall x \in H\,, \quad \varphi^n_\lambda(x) \to \varphi^\lambda(x)\,;$$

par conséquent, $\partial\varphi^n$ converge dans $\mathcal{M}_R$ vers un certain $\partial\psi$ et $\varphi^n_{\lambda_0}(x_0)$ converge dans $\boldsymbol{R}$ vers un certain $\varrho(\lambda_0 > 0$ et $x_0 \in H$ arbitrairement fixés); posons $\varphi(x) = \psi(x) + \big(\varrho - \psi_{\lambda_0}(x_0)\big)$; on obtient que

$$\partial\varphi^n \xrightarrow{R} \partial\varphi\,, \quad \varphi^n_{\lambda_0}(x_0) \to \varrho = \varphi_{\lambda_0}(x_0)\,.$$

Montrons que φ^n converge alors vers φ au sens de Mosco: on a

$$\partial\varphi^n_{\lambda_0} \xrightarrow{R} \partial\varphi_{\lambda_0} \qquad \text{et} \qquad \varphi^n_{\lambda_0}(x_0) \to \varphi_{\lambda_0}(x_0)$$

ce qui d'après le théorème 1.2 appliqué à la suite $(\varphi^n_{\lambda_0})_{n\in N}$ entraîne que $\varphi^n_{\lambda_0} \xrightarrow{M} \varphi_\lambda$ et donc $\varphi^n \xrightarrow{M} \varphi$.

Si H est séparable, notant $(x_p)_{p\in N}$ une suite dense dans H, $\lambda_0 > 0$ et $x_0 \in H$ étant fixés, la structure uniforme est définie à l'aide des écarts $(e_{1,x_p})_{p\in N}$ et f_{λ_0,x_0}; $\mathcal{C}_M$ est alors métrisable, en prenant comme distance par exemple

$$d(\varphi, \psi) = |\varphi_{\lambda_0}(x_0) - \psi_{\lambda_0}(x_0)| + \sum_{p=0}^{\infty} 1/2_p \inf\big(1, |(I + \partial\varphi)^{-1}x_p - (I + \partial\psi)^{-1}x_p|\big)\,.$$

On termine comme dans la proposition 1.1 en notant que l'application

$$\varphi \mapsto (\partial\varphi, \varphi_{\lambda_0}(x_0)) \qquad \text{est injective;}$$

en effet $(\partial\varphi = \partial\psi) \Rightarrow (\varphi = \psi + \text{cste}) \Rightarrow (\varphi_{\lambda_0} = \psi_{\lambda_0} + \text{cste})$; si $\varphi_{\lambda_0}(x_0) = \psi_{\lambda_0}(x_0)$ cette constante est nécessairement nulle.

REMARQUE 1.10. – La topologie induite par la topologie de la M-convergence sur le cône $\mathcal{C}$ peut être définie, d'après le Th. 1.2, uniquement à l'aide de la famille d'écarts $(f_{\lambda,x})_{\substack{\lambda>0\\ x\in H}}$; mais la structure uniforme associée, d'après la remarque 1.9, n'est plus complète. Remarquons enfin que l'application $\varphi \mapsto \varphi^*$ est un homéomorphisme de $\mathcal{C}_M$ sur lui-même.

Nous allons à présent examiner le lien entre la convergence au sens de Mosco et la convergence simple.

Convergence au sens de Mosco et convergence simple.

a) Donnons tout d'abord un exemple montrant qu'en général la convergence simple n'entraîne pas la convergence au sens de Mosco:

Dans H Hilbert, soit $x_n \xrightarrow{w-H} x \neq 0$, x_n ne convergeant pas fortement vers x; posons $\varphi^n(\xi) = \frac{1}{2}\langle \xi, x_n\rangle^2$ et $\varphi(\xi) = \frac{1}{2}\langle \xi, x\rangle^2$; les φ^n, φ sont convexes, continues (partout définies) positives et même de classe $\mathcal{C}^\infty$; de plus

$$\forall \xi \in H \qquad \varphi^n(\xi) \to \varphi(\xi)\ ;$$

montrons que φ^n ne converge pas au sens de Mosco vers φ; nous allons même constater que les résolvantes $\big((I + \lambda\,\partial\varphi^n)^{-1}\big)_{\lambda>0}$ ne convergent pas faiblement vers les résolvantes $\big((I + \lambda\partial\varphi)^{-1}\big)_{\lambda>0}$ (ce qui est bien en accord avec la proposition 1.4, puisque $\partial\varphi^n(0) = \partial\varphi(0) = 0\big)$.

Soit $\lambda > 0$ et $f \in H$ et $u_n = (I + \lambda\,\partial\varphi^n)^{-1}f$:

$$u_n + \lambda\langle u_n, x_n\rangle x_n = f\ .$$

Multipliant scalairement par x_n:

$$\langle u_n, x_n\rangle(1 + \lambda|x_n|^2) = \langle f, x_n\rangle\ ,$$

d'où

$$(I + \lambda\,\partial\varphi^n)^{-1}f = f - \lambda\frac{\langle f, x_n\rangle}{1 + \lambda|x_n|^2}x_n;$$

$(I + \lambda\,\partial\varphi^n)^{-1}x$ ne converge pas faiblement vers $(I + \lambda\,\partial\varphi)^{-1}x$, car on aurait alors

$$\frac{\langle x, x_n\rangle^2}{1 + \lambda|x_n|^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{|x|^4}{1 + \lambda|x|^2}$$

et donc $|x_n| \to |x|$ (car $x \neq 0$), soit $x_n \to x$, ce qui est contraire à l'hypothèse.

b) Donnons à présent un exemple où, la convergence au sens de Mosco d'une suite de fonctions convexes, sci, de même domaine, n'entraîne pas la convergence simple.

Soit $H = L^2(0, 1)$ l'espace de Hilbert des fonctions de carré sommable sur $\Omega = (0, 1)$ et φ^n, φ les fonctionnelles convexes, sci, sur $L^2(\Omega)$ de domaine $H_0^1(\Omega)$, définies par

$$\varphi^n(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^1 a_n(x)\left(\frac{du}{dx}\right)^2 dx & \text{si } u \in H_0^1(\Omega) \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\varphi(u) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^1 a(x)\left(\frac{du}{dx}\right)^2 dx & \text{si } u \in H_0^1(0, 1) \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

avec

$$a_n(x) = \left| \begin{array}{l} \alpha \text{ si } \exists k \text{ tq } x \in \left[\dfrac{2k}{n}, \dfrac{2k+1}{n}\right] \\ \beta \text{ sinon} \end{array} \right. (\alpha \text{ et } \beta \text{ constants strictement positives données}),$$

et a définie par $1/a^n \rightharpoonup 1/a$ dans L^∞_* faible, soit

$$a \equiv \frac{1}{2}\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta} \text{(a moyenne harmonique de } \alpha \text{ et } \beta);$$

la suite $(a_n)_{n\in N}$ converge dans L^∞_* faible vers la fonction constante $(\alpha+\beta)/2 \neq \frac{1}{2}\cdot$ $\cdot(\alpha\beta/(\alpha+\beta))$; par conséquent,

$$\forall u \in H^1_0(\Omega) \qquad \varphi^n(u) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\alpha+\beta}{2}\dot{u}(x)^2\,dx \neq \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{2}\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}\dot{u}(x)^2\,dx = \varphi(u)$$

l'égalité n'ayant lieu que si $u \equiv 0$.

Montrons à présent que $\varphi^n \xrightarrow{M} \varphi$ (cf. L. TARTAR [30]), soit d'après le Th. 1.2:

$$\forall f \in L^2(\Omega) \qquad (I + \partial\varphi^n)^{-1} f \xrightarrow{L^2(0,1)} (I + \partial\varphi)^{-1} f\,.$$

Fixons $f \in L^2(\Omega)$, $u_n = (I+\partial\varphi^n)^{-1}f$ vérifie

(1) $$u_n + \partial\varphi^n(u_n) = f$$

soit

(2) $$u_n - \frac{d}{dx}\left(a_n(x)\frac{du_n}{dx}\right) = f \text{ avec } u_n \in H^1_0(\Omega) \text{ et } \frac{d}{dx}\left(a_n\frac{du_n}{dx}\right) \in L^2(\Omega)\,.$$

Multipliant (2) par u_n dans $L^2(\Omega)$

$$|u_n|^2 + \langle \partial\varphi_n(u_n), u_n\rangle = \langle f, u_n\rangle$$

et tenant compte de l'inégalité $\langle\partial\varphi_n(u_n), u_n\rangle \geqslant \varphi_n(u_n) \geqslant \frac{1}{2}\inf(\alpha,\beta)|\nabla u_n|^2_{L^2}$, on conclut que $(u_n)_{n\in N}$ reste bornée dans $H^1_0(\Omega)$; soit u une valeur d'adhérence faible de $(u_n)_{n\in N}$ dans $H^1_0(\Omega)$; posons $v_n = a_n(du_n/dx)$; $(v_n)_{n\in N}$ est bornée dans $H^1(\Omega)$ et donc dans $L^2(\Omega)$; soit $v_n \xrightarrow{w-L^2} v$; il s'agit de montrer que $v = a(du/dx)$. Par définition de v_n,

(3) $$\forall \varphi \in D(\Omega) \qquad \int_\Omega \frac{du_n}{dx}\varphi = \int_\Omega \frac{1}{a_n} v_n\varphi\,,$$

or $1/a_n \xrightarrow{L^\infty_* \text{faible}} 1/a$ et $(v_n\varphi)_{n\in N}$ est bornée dans $H^1_0(\Omega)$ donc relativement compact dans $L^2(\Omega)$; on a donc $v_n\varphi \xrightarrow{L^2(\Omega)} v\cdot\varphi$ et passant à la limite sur (3) on obtient:

$$\forall\varphi\in D(\Omega)\qquad \int_\Omega \frac{du}{dx}\varphi = \int \frac{1}{a} v\cdot\varphi \qquad \text{soit } v = a\frac{du}{dx};$$

par conséquent,

$$u - \frac{d}{dx}\left(a\frac{du}{dx}\right) = f \qquad \text{et} \qquad u\in H^1_0(\Omega)\,,\ -\frac{d}{dx}\left(a\frac{du}{dx}\right) = f - u \in L^2(\Omega);$$

on a donc $u = (I+\partial\varphi)^{-1}f$ et $(I+\partial\varphi^n)^{-1}f \xrightarrow{L^2(\Omega)} (I+\partial\varphi)^{-1}f$.

c) Dans l'exemple 1, les φ^n n'étaient pas coercives, mais leurs conjuguées φ^{n^*} étaient uniformément coercives; en effet

$$\varphi^{n*}(x) \geqslant \langle x, x\rangle - \varphi^n(x) = |x|^2 - \tfrac{1}{2}\langle x, x_n\rangle^2 \qquad \text{or} \qquad \tfrac{1}{2}\langle x, x_n\rangle \leqslant \tfrac{1}{2}|x|^2 + \tfrac{1}{2}|x_n|^2\,,$$

d'où

$$\varphi^{n*}(x) \geqslant \tfrac{1}{2}|x|^2 - \tfrac{1}{2}|x_n|^2 \geqslant \tfrac{1}{2}|x|^2 - c\,.$$

Dans l'exemple 2, les φ^n étaient uniformément coercives, mais leurs conjuguées φ^{n*} ne l'étaient pas (car φ^{n*} coercive $\Rightarrow \partial\varphi^{n*}$ surjectif $\Rightarrow (\partial\varphi^n)^{-1}$ sujectif $\Rightarrow \partial\varphi^n$ partout définie $\Rightarrow \varphi^n$ partout définie, or les φ^n sont définies sur $H^1_0 \not\subset L^2$).

On est ainsi amené à étudier les suites de fonctionnelles $(\varphi^n)_{n\in N}$ coercives ainsi que leurs conjuguées: (on dira que les φ_n sont uniformément coercives si $\lim_{|x|\to\infty} \varphi^n(x)/|x| = +\infty$ uniformément en $n\in N$).

PROPOSITION 1.7. – Soit φ^n, $\varphi\colon H \to]-\infty, +\infty[$ convexes continues uniformément coercives ainsi que leurs conjuguées; il y *a* équivalence entre

(*a*) $\varphi^n \to \varphi$;

$$(b)\begin{cases} \text{(i)}\ \forall x\in H,\ \varphi^n(x)\to\varphi(x),\\ \text{(ii)}\ \forall x\in H,\ \varphi^{n*}(x)\to\varphi^*(x).\end{cases}$$

DÉMONSTRATION. – (*a*) $\Rightarrow$ (*b*). Nous allons montrer que *la convergence au sens de Mosco de la suite* $(\varphi^n)_{n\in N}$ *et l'uniforme coercivité des* $((\varphi^{n^*}))_{n\in N}$ *entraîne la convergence simple des* $(\varphi_n)_{n\in N}$.

Soit $x\in H$ fixé; puisque $\varphi^n \to \varphi$, d'après la propriété (w-scs)

$$\varphi(x) \leqslant \underline{\lim}\ \varphi^n(x)\ ;$$

d'après la propriété (s-sci) il existe $x_n \to x$ dans H telle que

$$\varphi(x) \geqslant \overline{\lim}\ \varphi^n(x_n)\,.$$

Ecrivons que (1) $\varphi^n(x_n) \geqslant \varphi^n(x) + \langle \partial\varphi^n(x), x_n - x\rangle$ et montrons que (2) $\forall B$ borné de H, $\sup_{n\in N} \sup_{x\in B} |\partial\varphi^n(x)| < +\infty$: supposons en effet que l'on ait une suite (en fait une sous-suite) $(x_n) \in B$, B borné de H, telle que

$$|\partial\varphi^n(x_n)| \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty ;$$

notons $y_n \in \partial\varphi^n(x_n)$ telle que $|y_n| \to +\infty$; soit x_0 fixé dans H et $x_{0,n} \to x_0$, $\varphi^{*n}(x_{0n}) \to \to \varphi^*(x_0)$:

$$\varphi^{*n}(x_{0,n}) \geqslant \varphi^{n*}(y_n) + \langle x_{0,n} - y_n, x_n\rangle$$

puisque $x_n \in (\partial\varphi^n)^{-1}(y_n)$ et que $(\partial\varphi^n)^{-1} = \partial(\varphi^n)^*$; divisant cette inégalité par $|y_n|$, faisant tendre n vers $+\infty$, et tenant compte de l'uniforme coercivité des φ^{n*}, on arrive à une contradiction.

Revenant à (1), on obtient lorsque $n \to +\infty$

$$\varphi(x) \geqslant \overline{\lim}\, \varphi^n(x)$$

et donc $\varphi^n(x) \to \varphi(x)$; utilisant l'uniforme coercivité des $(\varphi^n)_{n\in N}$ et la M-convergence de $(\varphi^n)^*$ vers φ^* on obtient de même la convergence simple de $(\varphi^n)^*$ vefs φ^*.

b) $\Rightarrow$ *a*). D'après le th. 2.1, il suffit de montrer que $\partial\varphi^n \to \partial\varphi$: en effet, étant donné $(u, f) \in \partial\varphi$ il existera $(u_n, f_n) \in \partial\varphi^n$ tels que $u_n \to u$, $f_n \to f$;

$$\begin{aligned}|\varphi^n(u_n) - \varphi(u)| &\leqslant |\varphi^n(u_n) - \varphi^n(u)| + |\varphi^n(u) - \varphi(u)| \\ &\leqslant \operatorname{Sup}\{|\partial\varphi^n(\xi)|\}\cdot|u_n - u| + |\varphi^n(u) - \varphi(u)| \qquad \xi \in B(u, \varrho) .\end{aligned}$$

Or, pour établir (2) nous avons utilisé l'uniforme coercivité des $(\varphi^n)^*$ et la convergence d'une suite $(\varphi^{n^*}(x_n), x_n)_{n\in N}$; nous sommes bien dans cette situation, et par conséquent, $|\varphi^n(u_n) - \varphi(u)| \leqslant C|u_n - u| + |\varphi^n(u) - \varphi(u)| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Soit donc $(u, f) \in \partial\varphi$ donné; de façon équivalente:

$$\varphi(u) + \varphi^*(f) - \langle f, u\rangle = 0$$

et donc

$$\varphi^n(u) + (\varphi^*)^n(f) - \langle f, u\rangle = \varepsilon_n \qquad \text{avec } \varepsilon_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 .$$

D'après les propriétés du sous-différentiel à ε-près, il existe $(u_n, f_n) \in \partial\varphi^n$ tels que $|u_n - u| \leqslant \sqrt{\varepsilon_n}$ et $|f^n - f| \leqslant \sqrt{\varepsilon_n}$; par conséquent, $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} u$, $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} f$ et $\partial\varphi^n \xrightarrow{R} \partial\varphi$.

REMARQUE 1.11. – Soit $(\varphi^n)_{n\in N}$ une suite de fonctions convexes uniformément coercives ainsi que leurs conjuguées; on n'a pas équivalence pour une telle suite entre M-convergence et convergence simple: pour remonter de la convergence simple à la M-convergence il faut supposer en centre la convergence simple des conjugués.

EXEMPLE:

$$\varphi^n(\xi) = \langle \xi, x_n \rangle + \tfrac{1}{2}|\xi|^2 \qquad \text{où } x_n \xrightarrow{w-H} x$$
$$\varphi(\xi) = \langle \xi, x \rangle + \tfrac{1}{2}|\xi|^2 \qquad (\text{et } x_n \text{ ne converge pas dans } H).$$

Les $(\varphi^n)_{n\in N}$ sont continues, uniformément coercives:

$$\varphi^n(\xi) \geqslant \tfrac{1}{2}|\xi|^2 - C|\xi| \geqslant -|\xi|^2 - 4C^2$$

Les $(\varphi^n)^*_{n\in N}$ sont uniformément coercifs:

$$\begin{aligned}(\varphi^n)^*(\xi) &= \sup_{y\in H}\{\langle \xi, y\rangle - \langle y, x_n\rangle - \tfrac{1}{2}|y|^2\}\\ &= \sup_{y\in H}\{\langle \xi - x_n, y\rangle - \tfrac{1}{2}|y|^2\}\\ &= \tfrac{1}{2}|\xi - x_n|^2\\ &\geqslant 1/4\,|\xi|^2 - \beta\,.\end{aligned}$$

On a bien $\forall \xi \in H$, $\varphi^n(\xi) \to \varphi(\xi)$ mais φ^n ne converge pas vers φ au sens de Mosco, sinon, d'après la proposition précédente, on aurait

$$\forall \xi \in H \qquad (\varphi^n)^*(\xi) \to \varphi^*(\xi)\,,$$

et donc

$$\forall \xi \in H \qquad |\xi - x_n| \to |\xi - x|\,;$$

prenant $\xi = 0$, $|x_n| \to |x|$ et $x_n \to x$, d'où la contradiction.

REMARQUE 1.12. – En dimension finie, compte tenu des propriétés de relative compacité des bornés, on a « équivalence » entre les deux notions (cf. SALINETTI et WETS [29]).

Soit φ^n, φ convexes continues de H dans $]-\infty, +\infty[$; alors

$$\varphi^n \xrightarrow{M} \varphi \iff \forall x \in H \qquad \varphi^n(x) \to \varphi(x)$$

donnons une démonstration de ce dernier résultat.

$\Leftarrow$ Soit B une boule de H; B est contenue dans un N-simplexe de sommets $(a_i)_{i=1}^{N+1}$; soit $B \subset [a_1, \ldots, a_{N+1}]$ (H de dimension N); étant donné φ convexe et $x \in [a_1, \ldots, a_{N+1}]$

$$\varphi(x) = \varphi\Big(\sum_{k=1}^{N+1} \lambda_k a_k\Big) \leqslant \sum_{k=1}^{N+1} \lambda_k \varphi(a_k) \leqslant \sup_{1\leqslant k\leqslant N+1} \varphi(a_k)\,.$$

La suite $(\varphi^n)_{n\in N}$ convergeant en chaque point de H est donc localement uniformément majorée; soit $\xi \in B(x_0, \varrho)$

$$C_\varrho \geqslant \varphi^n(\xi) \geqslant \varphi^n(x_0) + \langle \xi - x_0, \partial\varphi^n(x_0)\rangle \qquad \text{et} \qquad \varphi^n(x_0) \to \varphi(x_0)\,;$$

il existe donc $C \geqslant 0$ telle que $\forall u \in H$, $|u| < \varrho\ \langle \partial\varphi^n(x_0), u\rangle \leqslant C$; cela entraîne que

$$\forall x \in H, \quad \sup_{n\in N} |\partial\varphi^n(x)| < +\infty.$$

Pour montrer que $\varphi^n \xrightarrow{M} \varphi$, compte tenu de l'hypothèse, il suffit de montrer que

$$(x_n \to x) \Rightarrow \varphi(x) \leqslant \underline{\lim}\, \varphi^n(x_n)$$

écrivons que

$$\varphi^n(x_n) \geqslant \varphi^n(x) + \langle x_n - x, \partial\varphi^n(x)\rangle \qquad \varphi^n(x_n) \geqslant \varphi^n(x) - C|x_n - x|$$

et donc

$$\underline{\lim}\, \varphi^n(x_n) \geqslant \underline{\lim}\, \varphi^n(x) = \varphi(x)\,.$$

Remarquons que la suite φ^n converge vers φ uniformément sur les bornés de H; en effet, puisque $\varphi^n \xrightarrow{M} \varphi$, cela entraîne l'existence d'une minorante affine commune aux φ_n; reprenant l'argument précédent, on montre que $(\partial\varphi^n)_{n\in N}$ est localement uniformément bornée; la suite $(\varphi^n)_{n\in N}$, d'après Ascoli, converge alors uniformément vers φ sur tout borné de H.

$\Rightarrow$ On suppose que φ^n M-converge vers φ; soit $B(x_0, \varrho)$ une boule dans H et $[a_1, \ldots, a_{N+1}]$ un N-simplexe de H tel que $B(x_0, \varrho) \subset B(x_0, 2\varrho) \subset [a_1, \ldots, a_{N+1}]$. Par hypothèse $\forall k$, $k = 1, \ldots, N+1$, $\exists (x_n^k)_{n\in N}$, $x_n^k \to a_k$ et $\varphi^n(x_n^k) \to \varphi(a_k)$; à partir d'un certain rang, on aura $B(x_0, \varrho) \subset [x_n^1, \ldots, x_n^{N+1}]$ et comme précédemment on conclut que la suite $(\varphi^n)_{n\in N}$ est localement uniformément majorée; d'autre part, la suite $(\varphi^n)_{n\in N}$ étant M-convergente admet une minorante affine commune (Lemme 1.5), et la suite $(\varphi^n)_{n\in N}$ est localement uniformément bornée; comme précédemment, on montre alors que les $(\partial\varphi^n)_{n\in N}$ sont localement bornés et par Ascoli, on conclut à la convergence uniforme sur tout borné de la suite $(\varphi^n)_{n\in N}$ vers φ.

3.2. *Lien entre la convergence des semi-groupes $S^{\partial\varphi^n}(t)$ et la convergence des φ^n.*

Soit $\varphi\colon H \to]-\infty, +\infty]$ convexe, s.c.i, propre; rappelons que pour $x \in D(\partial\varphi)$, $(\partial\varphi)^0(x)$ désigne l'unique élément de norme minimum du convexe fermé non vide $\partial\varphi(x)$.

Soient $a_0, a_1, \ldots, a_{l-1}$ dans $D(\partial\varphi)$ et $x \in H$;

$$\begin{aligned}
&\varphi(x) \geqslant \varphi(a_{l-1}) + \langle x - a_{l-1}, (\partial\varphi)^0(a_{l-1})\rangle \\
&\varphi(a_{l-1}) \geqslant \varphi(a_{l-2}) + \langle a_{l-1} - a_{l-2}, (\partial\varphi)^0(a_{l-2})\rangle \\
&\ \vdots \\
&\varphi(a_1) \geqslant \varphi(a_0) + \langle a_1 - a_0, (\partial\varphi)^0(a_0)\rangle
\end{aligned}$$

d'où, en additionnant membre à membre

$$(1)\qquad \begin{cases} \varphi(x) \geqslant \varphi(a_0) + \langle x - a_{l-1}, (\partial\varphi)_0(a_{l-1})\rangle + \sum_{k=1}^{l-1} \langle a_k - a_{k-1}, (\partial\varphi)_0(a_{k-1})\rangle\,, \\ \varphi(x) \geqslant \operatorname{Sup}\{\varphi(a_0) + \sum_{k=1}^{l} \langle a_k - a_{k-1}, (\partial\varphi)_0(a_{k-1})\rangle\} \end{cases}$$

où l'on a posé $a_l = x$, le sup étant pris sur les chaînes de longueur finie joignant a_0 à x.

THÉORÈME 1.3. – Soit $\varphi\colon H \to]-\infty, +\infty]$ convexe, s.c.i, propre; on pose

$$\forall x \in H \qquad \varphi_{\min}(x) = \operatorname{Sup}\{\varphi(a_0) + \sum_{k=1}^{l} \langle a_k - a_{k-1}, (\partial\varphi)_0(a_{k-1})\rangle\}$$

où a_0 est fixé dans $D(\partial\varphi)$, le sup. étant pris sur l'ensemble des suites finies

$$\{a_0, a_1, \ldots, a_{l-1},\ a_l = x;\ \forall k < l,\ a_k \in D(\partial\varphi);\ l \in \boldsymbol{N}\}\,.$$

Alors, $\varphi_{\min}$ est convexe, sci, propre, ne dépend pas du point a_0 choisi dans $D(\partial\varphi)$ et $\varphi = \varphi_{\min}$ sur $\overline{D(\varphi)}$; de plus:

$$\forall u \in H \qquad \varphi(\operatorname{proj}_{\overline{D(\varphi)}} u) \leqslant \varphi_{\min}(u) \leqslant \varphi(u)\,.$$

DÉMONSTRATION. – Soit a_0 fixé dans $D(\partial\varphi)$; la fonction $\varphi_{\min}$ définie comme enveloppe supérieure de fonctions affines continues est convexe, s.c.i; d'après (1)

$$\forall x \in H \qquad \varphi(x) \geqslant \varphi_{\min}(x)$$

et $\varphi_{\min}$ est propre; d'autre part:

$$\varphi_{\min}(a_0) \geqslant \varphi(a_0) \qquad \text{d'où } \varphi(a_0) = \varphi_{\min}(a_0).$$

Montrons que $(\partial\varphi)^0 \subset \partial\varphi_{\min}$; cela revient à montrer que

$$(2)\qquad \forall x \in D(\partial\varphi) \qquad \forall \xi \in H \qquad \varphi_{\min}(\xi) \geqslant \varphi_{\min}(x) + \langle(\partial\varphi)^0(x), \xi - x\rangle\,;$$

d'après la définition de $\varphi_{\min}(x)$, cela équivaut à montrer que

$$\forall \xi \in H \qquad \varphi_{\min}(\xi) \geqslant \varphi(a_0) + \sum_{k=1}^{l} \langle a_k - a_{k-1}, (\partial\varphi)^0(a_{k-1})\rangle + \langle \xi - x, (\partial\varphi)^0(x)\rangle$$

pour toute chaîne finie $a_0, \ldots, a_{l-1}, a_l = x$ $(l \in \boldsymbol{N})$; tenant compte de $x \in D(\partial\varphi)$, cela découle de la définition de $\varphi_{\min}(\xi)$.

Par conséquent $\forall x \in D(\partial\varphi)$, $\forall \xi \in H$, $(\varphi_{\min} + I_{\overline{D(\varphi)}})(\xi) \geqslant (\varphi_{\min} + I_{\overline{D(\varphi)}})(x) + \langle(\partial\varphi)^0(x), \xi - x\rangle$ et $(\partial\varphi)^0 \subset \partial(\varphi_{\min} + I_{\overline{D(\varphi)}})$; or d'après H. BREZIS [8], si deux maximaux monotones A et B sont tels que $A^0 \subset B$ et $D(A) \subset D(B) \subset \overline{D(A)}$, alors $A = B$; les deux opérateurs $\partial\varphi$ et $\partial(\varphi_{\min} + I_{\overline{D(\varphi)}})$ satisfont à ces deux propriétés, et par conséquent, $\partial\varphi = \partial(\varphi_{\min} + I_{\overline{D(\varphi)}})$ et tenant compte de l'égalité $\varphi(a_0) = \varphi_{\min}(a_0)$

$$\varphi = \varphi_{\min} + I_{\overline{D(\varphi)}} \,. \tag{3}$$

Soit $\varphi^1_{\min}$ et $\varphi^2_{\min}$ deux «primitives» de $(\partial\varphi)^0$, définies respectivement à partir de deux points a_{01} et a_{02} de $D(\partial\varphi)$;

$$\forall x \in H \qquad \varphi^1_{\min}(x) \geqslant \varphi(a_{01}) + \sum_{a_{01} \frown a_{02}} \langle a_k - a_{k-1}, (\partial\varphi)^0(a_{k-1})\rangle + \sum_{a_{02} \frown x} \langle b_k - b_{k-1}, (\partial\varphi)^0(b_{k-1})\rangle$$

d'où, $\forall x \in H$, $\varphi^1_{\min}(x) \geqslant \varphi^1_{\min}(a_{02}) + \varphi^2_{\min}(x) - \varphi^2_{\min}(a_{02})$.

Or $\varphi^1_{\min}(a_{02}) = \varphi(a_{02})$ et $\varphi^2_{\min}(a_{02}) = \varphi(a_{02})$, puisque $a_{02} \in D(\partial\varphi)$, et donc $\forall x \in H$, $\varphi^1_{\min}(x) \geqslant \varphi^2_{\min}(x)$; par symétrie, on obtient l'égalité.

Prenons à présent dans (2), $x = J_\lambda\xi \in D(\partial\varphi)$:

$$\forall \xi \in H \qquad \forall \lambda > 0 \qquad \varphi_{\min}(\xi) \geqslant \varphi_{\min}(J_\lambda\xi) + \langle \xi - J_\lambda\xi, (\partial\varphi)^0(J_\lambda\xi)\rangle \,;$$

or $\varphi_{\min}(J_\lambda\xi) = \varphi(J_\lambda\xi)$ et

$$\langle \xi - J_\lambda\xi, (\partial\varphi)_0(J_\lambda\xi)\rangle = \frac{1}{\lambda}\langle(\partial\varphi)_\lambda(\xi), (\partial\varphi)_0(J_\lambda\xi)\rangle \geqslant 0 \qquad (\text{car } (\partial\varphi)_\lambda(\xi) \in (\partial\varphi)(J_\lambda\xi))\,;$$

par conséquent,

$$\forall \xi \in H \qquad \forall \lambda > 0 \qquad \varphi(\xi) \geqslant \varphi_{\min}(\xi) \geqslant \varphi(J_\lambda\xi)$$

et faisant tendre λ vers zéro

$$\forall \xi \in H \qquad \varphi(\xi) \geqslant \varphi_{\min}(\xi) \geqslant \varphi(\operatorname{proj}_{\overline{D(\varphi)}}\xi) \,.$$

THÉORÈME 1.4. – Soient φ^n, $\varphi: H \to]-\infty, +\infty]$ convexes, s.c.i, propres; sont équivalents:

(*a*) φ^n converge vers φ au sens suivant:

(W-SCS) $\forall (n(k))_{k\in N}$ suite extraite, $\forall (x_k)_{k\in N}$ $(x_k \xrightarrow{w-H} x) \Rightarrow (\varphi_{\min}(x) \leqslant \varliminf \varphi^{n(k)}_{\min}(x_k))$.

(S-SCI) $\forall x \in D(\varphi)$ $\exists (x_n)_{n\in N}$ $x_n \in D(\varphi^n)$: $x_n \to x$ et $\varphi(x) \geqslant \varlimsup \varphi^n(x_n)$.

(*b*) $\forall \lambda > 0$ $\quad \forall x \in \overline{D(\varphi)}$ $\quad (I + \lambda\,\partial\varphi^n)^{-1}x \to (I + \lambda\,\partial\varphi)^{-1}x$

$\exists u^n \to u$, $\quad (\partial\varphi^n)^0(u^n) \to (\partial\varphi)^0(u)$ $\quad$ et $\quad \varphi^n(u^n) \to \varphi(u)$.

(*c*) $\forall \lambda > 0$ $\quad \forall x \in \overline{D(\varphi)}$ $\quad \varphi^n_\lambda \to \varphi_\lambda(x)$.

On a alors, $\forall x \in D(\partial\varphi)$, $\exists x_n \in D(\partial\varphi^n)$, $x^n \to x$, $(\partial\varphi^n)^0 x_n \to (\partial\varphi)^0 x$ et $\varphi^n(x_n) \to \varphi(x)$.

DÉMONSTRATION. – Nous allons montrer les implications

$$(a) \Leftrightarrow (b) \Rightarrow (c) \Rightarrow (b)$$

$(a) \Rightarrow (b)$. On montre tout d'abord, comme dans le lemme 1.5, l'existence de constantes c_1 et c_2 positives telles que

$$\forall n \in N \quad \forall x \in H \quad \varphi^n_{\min}(x) + c_1|x| + c_2 \geqslant 0 \quad \text{et, puisque } \varphi^n \geqslant \varphi^n_{\min}\,,$$
$$\forall n \in N \quad \forall x \in H \quad \varphi^n(x) + c_1|x| + c_2 \geqslant 0\,.$$

Soit $x \in \overline{D(\varphi)}$ fixé; posons $y_n = (I + \partial\varphi^n)^{-1}x$ et montrons que $y_n \to (I + \partial\varphi)^{-1}x$. Soit z_0 fixé dans $D(\varphi)$; il existe $(z_n)_{n\in N}$, $z_n \to z_0$ et $\varphi^n(z_n) \to \varphi(z_0)$:

$$\begin{aligned}\varphi^n(z_n) &\geqslant \varphi^n(y_n) + \langle z_n - y_n, x - y_n\rangle\\ &\geqslant - c_1|y_n| - c_2 + \langle z_n - y_n, x - y_n\rangle\end{aligned}$$

d'où l'on déduit que la suite $(y^n)_{n\in N}$ reste bornée; soit $y_n(k) \xrightarrow{w-H} y$; notons $n(k) = k$. Etant donné $\xi \in H$, il existe $\xi_k \to \xi$, $\varphi(\xi) \geqslant \overline{\lim}\, \varphi^k(\xi^k)$; de l'inégalité

$$\varphi^k(\xi^k) \geqslant \varphi^k(y_k) + \langle \xi^k - y_k, x - y_k\rangle$$

on déduit, par passage à la limite:

(1) $$\forall \xi \in H \quad \varphi(\xi) \geqslant \varphi_{\min}(y) + \langle \xi - y, x - y\rangle\,.$$

Prenant $\xi = J_\lambda y$ et tenant compte de l'inégalité $\varphi_{\min}(y) \geqslant \varphi(J_\lambda y)$, on obtient

$$\forall \lambda > 0 \quad \langle J_\lambda y - y, x - y\rangle \leqslant 0\,;$$

faisant tendre λ vers zéro

$$\langle \operatorname{proj}_{\overline{D(\varphi)}} y - y, x - y\rangle \leqslant 0$$

et tenant compte du fait que $x \in \overline{D(\varphi)}$, on en déduit que $y \in \overline{D(\varphi)}$.

Revenant à (1) et tenant compte, puisque $y \in \overline{D(\varphi)}$, de l'inégalité $\varphi(y) = \varphi_{\min}(y)$, on obtient

$$\forall \xi \in H \quad \varphi(\xi) \geqslant \varphi(y) + \langle \xi - y, x - y\rangle\,.$$

Par conséquent, $y = (I + \partial\varphi)^{-1}x$ et $(I + \partial\varphi^n)^{-1}x \xrightarrow{w-H} (I + \partial\varphi)^{-1}x$; on montre alors comme dans le th. 1.2 que la convergence est forte.

La convergence des résolvantes sur $\overline{D(\varphi)}$ entraîne la convergence des sections minimales; pour tout $x \in D(\partial\varphi)$ il existe $x_n \to x$, $(\partial\varphi^n)^0(x_n) \to (\partial\varphi)^0(x)$; on vérifie alors (cf. th. 1.2) que $\varphi^n(x_n) \to \varphi(x)$.

$b) \Rightarrow a)$. 1) Vérifions que la propriété w-scs est satisfaite.

Soit $x_{n(k)} \to x$; montrons que $\varphi_{\min}(x) \leqslant \underline{\lim}\, \varphi^{n(k)}_{\min}(x_{n(k)})$; notons $n(k) = n$.

Soit (u, f), $(u_1, f_1), \ldots, (u_l, f_l)$ une chaîne finie d'éléments de $(\partial\varphi)^0$; par hypothèse, pour tout i $(i = 1, \ldots, l)$ il existe une suite (u_i^n, f_i^n) telle que:

$$\forall n \in N \quad f_i^n = (\partial\varphi^n)^0(u_i^n)\,, \qquad u_i^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} u_i\,, \qquad f_i^n = (\partial\varphi^n)^0(u_i^n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f_i = (\partial\varphi)^0(u_i)\,;$$

de plus, il existe $u^n \to u$ telle que $(\partial\varphi^n)^0(u^n) \to (\partial\varphi)^0(u)$ et $\varphi^n(u^n) \to \varphi(u)$. Par définition de $\varphi^n_{\min}$:

$$\varphi^n_{\min}(x_n) \geqslant \varphi^n(u^n) + \langle u_1^n - u^n, (\partial\varphi^n)^0(u^n)\rangle + \ldots + \langle u_l^n - u_{l-1}^n, (\partial\varphi^n)^0(u_{l-1}^n)\rangle + \\ + \langle x_n - u_l^n, (\partial\varphi^n)^0(u_l^n)\rangle$$

et par passage à la limite inférieure:

$$\underline{\lim}\, \varphi^n_{\min}(x_n) \geqslant \varphi(u) + \langle u_1 - u, (\partial\varphi)^0(u)\rangle + \ldots + \langle u_l - u_{l-1}, (\partial\varphi)^0(u_{l-1})\rangle + \\ + \langle x - u_l, (\partial\varphi)^0(u_l)\rangle$$

et passant à la borne supérieure sur les suites finies:

$$\underline{\lim}\, \varphi^n_{\min}(x_n) \geqslant \varphi_{\min}(x)\,.$$

2) Montrons à présent la propriété s-sci.

Il suffit de montrer que $\forall x \in D(\partial\varphi)$, $\exists x_n \in D(\partial\varphi^n)$, $x_n \to x$ et $\varphi(x) \geqslant \overline{\lim}\, \varphi^n(x^n)$: remarquant que si $x \in D(\varphi)$ $J_\lambda x \xrightarrow[\lambda\to 0]{} x$ et $\varphi(J_\lambda x) \to \varphi(x)$ on concluera à l'aide du lemme 1.6.

Soit donc $x \in D(\partial\varphi)$ fixé; la convergence des résolvantes sur $\overline{D(\varphi)}$ entraînant la convergence des sections minimales (au sens des graphes)

$$\exists x_n \in D(\partial\varphi^n), \qquad x_n \to x \qquad \text{et} \qquad (\partial\varphi^n)^0(x_n) \to (\partial\varphi)^0(x)\,;$$

montrons que $\varphi^n(x_n) \to \varphi(x)$.

Soit $(u_l, f_l), \ldots, (u_1, f_1)$ une chaîne finie d'éléments de $(\partial\varphi)^0$ et (u_l^n, f_i^n) les suites approchantes correspondantes: $u_l^n \to u_i$ et $(\partial\varphi^n)^0(u_i^n) \to (\partial\varphi)^0(u_i)$. Ecrivons

$$\begin{aligned} &\varphi^n(u_l^n) \geqslant \varphi^n(x_n) + \langle(\partial\varphi^n)^0(x_n), u_l^n - x_n\rangle \\ &\varphi^n(u_{l-1}^n) \geqslant \varphi^n(u_l^n) + \langle(\partial\varphi^n)^0(u_l^n), u_{l-1}^n - u_l^n\rangle \\ &\quad\vdots \\ &\varphi^n(u_n) \geqslant \varphi^n(u_1^n) + \langle(\partial\varphi^n)^0(u_1^n), u_n - u_1^n\rangle\,, \end{aligned}$$

et ajoutons membre à membre:

$$\varphi^n(u_n) \geqslant \varphi^n(x_n) + \langle(\partial\varphi^n)^0(x_n), u_l^m - x_n\rangle + \langle(\partial\varphi^n)^0(u_l^n), u_{l-1}^n - u_l^n\rangle + \dots + \\ + \langle(\partial\varphi^n)^0(u_1^n), u_n - u_1^n\rangle .$$

Passant à la limite supérieure ($n \to +\infty$):

$$\varphi(u) \geqslant \overline{\lim}\, \varphi^n(x_n) + \langle(\partial\varphi)^0(x), u_l - x\rangle + \langle(\partial\varphi)^0(u_l), u_{l-1} - u_l\rangle + \dots + \\ + \langle(\partial\varphi)^0(u_1), u - u_1\rangle$$

et prenant le sup sur les chaînes finies allant de x à u

$$\varphi(u) \geqslant \overline{\lim}\, \varphi^n(x_n) + \varphi_{\min}(u) - \varphi(x)$$

or $\varphi_{\min}(u) = \varphi(u)$ puisque $u \in D(\partial\varphi)$ et donc $\varphi(x) \geqslant \overline{\lim}\, \varphi^n(x_n)$.

$(a, b) \Rightarrow (c)$. Compte tenu de l'égalité

$$\varphi_\lambda^n(x) = \varphi^n(J_\lambda^n x) + \frac{1}{2\lambda}|x - J_\lambda^n x|^2$$

il suffit de montrer que: $\forall x \in \overline{D(\varphi)}$, $\varphi^n(J_\lambda^n x) \xrightarrow[(n\to+\infty)]{} \varphi(J_\lambda x)$; soit $x \in \overline{D(\varphi)}$ fixé; on a d'une part, puisque $J_\lambda^n x \to J_\lambda x$, d'après la propriété ($w$-scs):

$$\varphi(J_\lambda x) = \varphi_{\min}(J_\lambda x) \leqslant \underline{\lim}\, \varphi^n(J_\lambda^n x) .$$

Soit, compte tenu de la propriété (s-sci), une suite $\xi^n \xrightarrow[(n\to+\infty)]{} J_\lambda x$ avec $\varphi^n(\xi^n) \to \varphi(J_\lambda x)$;

$$\varphi^n(\xi^n) \geqslant \varphi^n(J_\lambda^n x) + \langle \xi^n - J_\lambda^n x, A_\lambda^n x\rangle$$

d'où, à la limite $\varphi(J_\lambda x) \geqslant \overline{\lim}\, \varphi^n(J_\lambda^n x)$; on a donc bien $\varphi^n(J_\lambda^n x) \to \varphi(J_\lambda x)$.

$(c) \Rightarrow (b)$. Soit $x \in \overline{D(\varphi)}$ fixé; nous allons dans une première étape, montrer que: $\forall\lambda > 0$, $\varphi^n(J_\lambda^n x) \to \varphi(J_\lambda x)$; la démonstration de ce résultat est en tout point semblable à celle du théorème 1.2: on montre tout d'abord, utilisant la majoration

$$\forall 0 < \lambda < \mu \qquad \varphi_\lambda^n(x) - \varphi_\mu^n(x) \geqslant \tfrac{1}{2}(\mu - \lambda)\cdot|A_\mu^n(x)|^2$$

que: $\forall\lambda_0 > 0$, $\sup\limits_{\substack{\lambda_0 \leqslant \lambda \\ n \in \boldsymbol{N}}} |A_\lambda^n x| < +\infty$; on en déduit que la suite de fonctions $\lambda \to \varphi^n(J_\lambda^n x)$ est relativement compacte dans $\mathcal{C}_u(]0, +\infty[; \boldsymbol{R})$ muni de la topologie de la convergence uniforme sur les compacts. Compte tenu de la relation $(d/d\lambda)(\lambda\varphi_\lambda^n(x)) = \varphi^n(J_\lambda^n x)$, d'après le théorème de dérivation, on conclut que $\varphi^n(J_\lambda^n x) \to \varphi(J_\lambda x)$ uniformément sur les compacts de $]0, +\infty[$; de l'égalité

$$\lambda/2\, |A_\lambda^n x|^2 = \varphi_\lambda^n(x) - \varphi^n(J_\lambda^n x) ,$$

on déduit alors que

$$\forall \lambda > 0\,, \quad \forall x \in \overline{D(\varphi)} \quad |A_\lambda^n x| \to |A_\lambda x|\,.$$

Soit à présent $\lambda > 0$, $x \in \overline{D(\varphi)}$ et $\xi \in \overline{D(\varphi)}$ fixés; posons

$$f^n : t \in [0, 1] \to f^n(t) = \langle A_\lambda^n(x + t(\xi - x)), \xi - x\rangle\,.$$

La suite $(f^n)_{n\in \boldsymbol{N}}$ est relativement compacte dans $\mathcal{C}_u([0, 1]; \boldsymbol{R})$:

a) $|f^n(t)| \leqslant |\xi - x| \cdot [|A_\lambda^n(x)| + 1/\lambda |\xi - x|]$

et donc $\forall t \in [0, 1]$ $\sup\limits_{n\in \boldsymbol{N}} |f^n(t)| < + \infty$;

b) $\forall s, t \in [0, 1] \quad |f^n(t) - f^n(s)| \leqslant \dfrac{1}{\lambda} |\xi - x|^2 \cdot |t - s|$

et $(f^n)_{n\in\boldsymbol{N}}$ satisfait aux conditions du théorème d'Ascoli.

Posons $h_n(t) = \varphi_\lambda^n(x + t(\xi - x))$, $h(t) = \varphi_\lambda(x + t(\xi - x))$:

$$\forall t \in [0, 1] \quad x + t(\xi - x) = t\xi + (1 - t)x \in \overline{D(\varphi)} \quad \text{et donc } h_n(t) \to h(t).$$

D'autre part, $h_n'(t) = \langle A_\lambda^n(x + t(\xi - x)), \xi - x\rangle = f_n(t)$; d'après le théorème de dérivation, on conclut que

$$\forall t \in [0, 1] \quad \langle A_\lambda^n(x + t(\xi - x)), \xi - x\rangle \xrightarrow[n\to+\infty]{} \langle A_\lambda(x + t(\xi - x)), \xi - x\rangle\,,$$

cette convergence étant même uniforme en t; prenant $t = 0$, on obtient

$$\forall \lambda > 0\,, \quad \forall x \in \overline{D(\varphi)}\,, \quad \forall \xi \in \overline{D(\varphi)}\,, \quad \langle A_\lambda^n(x), \xi - x\rangle \xrightarrow[(n\to+\infty)]{} \langle A_\lambda(x), \xi - x\rangle\,;$$

prenant $\xi = J_\lambda x$:

$$\langle A_\lambda^n x, A_\lambda x\rangle \xrightarrow[(n\to+\infty)]{} |A_\lambda x|^2\,; \quad \text{or} \quad |A_\lambda^n x|^2 \to |A_\lambda x|^2\,;$$

par conséquent

$$|A_\lambda^n x - A_\lambda x|^2 = |A_\lambda^n x|^2 + |A_\lambda x|^2 - 2\langle A_\lambda^n x, A_\lambda x\rangle \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

et

$$\forall x \in \overline{D(\varphi)}\,, \quad \forall \lambda > 0\,, \quad (I + \lambda\,\partial\varphi^n)^{-1} x \xrightarrow[(n\to+\infty)]{} (I + \lambda\,\partial\varphi)^{-1} x\,.$$

Il reste à montrer l'existence d'une suite $y_n \to y$ telleque $(\partial\varphi^n)^0 y_n \to (\partial\varphi)^0 y$ et $\varphi^n(y_n) \to \varphi(y)$; soit $y \in D(\partial\varphi)$, on a vu que

$$(J_\lambda^n y, A_\lambda^n y, \varphi^n(J_\lambda^n y)) \xrightarrow[n\to+\infty]{} (J_\lambda y, A_\lambda y, \varphi(J_\lambda y))\,;$$

tenant compte du fait que

$$(J_\lambda y, A_\lambda y, \varphi(J_\lambda y)) \xrightarrow[\lambda\to 0]{} (y, (\partial\varphi)^0(y), \varphi(y)) ,$$

on déduit d'après le lemme 1.6, l'existence d'une suite $\lambda(n)$ $\big(\lambda(n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0\big)$ telle que

$$\big(J^n_{\lambda(n)}y, A^n_{\lambda(n)}y, \varphi^n(J^n_{\lambda(n)}y)\big) \to \big(y, (\partial\varphi)^0 y, \varphi(y)\big) .$$

Posons $y_n = J^n_{\lambda(n)}y$, $z_n = (\partial\varphi^n)^0(y_n)$; on a $|z_n| \leqslant |A^n_{\lambda(n)}y| \leqslant C$.

Soit $z_{n_k} \xrightarrow{w-H} z$; on a d'une part $|z| \leqslant \underline{\lim}\ z_{n_k}| = |(\partial\varphi)^0(y)|$, d'autre part

$$\forall v \in D(\partial\varphi) \quad \langle A^n_\lambda v - z_n, J^n_\lambda v - y_n\rangle \geqslant 0 \quad \text{d'où}$$

$$\forall v \in D(\partial\varphi) \quad \langle A_\lambda v - z, J_\lambda v - y\rangle \geqslant 0 \quad \text{et faisant tendre } \lambda \text{ vers zéro}$$

$$\forall v \in D(\partial\varphi) \quad \langle (\partial\varphi)^0 v - z, v - y\rangle \geqslant 0$$

et donc $z \in \partial\varphi(y)$ puisque $y \in D(\partial\varphi)$ et que $(\partial\varphi)^0$ est une section principale de $\partial\varphi$; des deux relations $\big(z \in \partial\varphi(y)\big)$ et $|z| \leqslant |(\partial\varphi)^0(y)|$ on déduit que

$$z = (\partial\varphi)^0(y) \qquad \text{et} \qquad (\partial\varphi^n)^0(y_n) \xrightarrow{w-H} (\partial\varphi)^0(y) ;$$

or

$$|(\partial\varphi_n)^0(y_n)| \leqslant |A^n_{\lambda(n)}y| , \qquad \text{d'où} \qquad |(\partial\varphi)^0(y)| \geqslant \overline{\lim}\ |(\partial\varphi^n)^0(y_n)|$$

et l'on a bien

$$\big(y_n, (\partial\varphi^n)^0(y_n), \varphi^n(y_n)\big) \xrightarrow[(n\to+\infty)]{} \big(y, (\partial\varphi)^0(y), \varphi(y)\big) .$$

REMARQUE 1.13. – De la même façon que dans le théorème 1.2, on montre l'équivalence, étant donnée une suite de sous-différentiels $(\partial\varphi_n)_{n\in N}$, $\partial\varphi$ tels que $\partial\varphi^n(0) \ni 0$, $\partial\varphi(0) \ni 0$, entre

$$(d)\ \ \forall\lambda > 0, \quad \forall x \in \overline{D(\varphi)}, \quad (I + \lambda\,\partial\varphi^n)^{-1}x \to (I + \lambda\,\partial\varphi)^{-1}x$$

$$\Updownarrow$$

$$(e)\ \ \forall\lambda > 0, \quad \forall x \in \overline{D(\varphi)}, \quad (I + \lambda\,\partial\varphi^n)^{-1}x \xrightarrow{w-H} (I + \lambda\,\partial\varphi)^{-1}x .$$

En effet, pour adapter la démonstration du théorème 1.2, on a uniquement besoin pour remonter de la convergence faible à la convergence forte des résolvantes, d'une condition de normalisation du type:

$$\exists u_n \to u , \qquad (\partial\varphi^n)^0(u_n) \to (\partial\varphi)^0(u) , \qquad \varphi^n(u_n) \to \varphi(u) ,$$

pour un u tel que $\forall\lambda > 0$, $u + \lambda(\partial\varphi)^0(u) \in D(\partial\varphi)$.

REMARQUE 1.14. – La propriété (w-scs) entraîne

$$(*) \qquad \left(x_k \xrightarrow{w-H} x \text{ et } x \in \overline{D(\varphi)}\right) \Rightarrow \left(\varphi(x) \leqslant \varliminf \varphi^{n(k)}(x_k)\right).$$

Mais cette propriété, plus la propriété (s-sci) n'entraîne pas (b) en général:

$$\text{prendre } H = \boldsymbol{R} \qquad \varphi^n(x) = -x \qquad \text{et} \qquad \varphi(x) = \begin{cases} -x & \text{si } -1 \leqslant x \leqslant +1 \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

On pourrait penser que si on impose en outre aux fonctions $(\varphi^n)_{n\in N}$ de rester positives, on peut affaiblir la condition (w-scs) en la condition ($*$); il n'en est rien: Soit φ convexe, continue, positive, $\varphi(0) = 0$ et K un convexe fermé contenant l'origine; posons $\psi^n = \varphi$ et $\psi = \varphi + I_K$:

1) $\forall x \in D(\psi) \quad \psi^n(x) \to \psi(x)$,

2) $\forall x_n \xrightarrow{w-H} x \quad \varliminf \psi^n(x) = \varphi(x) = \varphi(x) + I_K(x) \quad \text{si } x \in K = \overline{D(\varphi)}$.

Montrons que en général, la suite constante φ ne converge pas vers $\varphi + I_K$ au sens (a): raisonnons par l'absurde, on aurait alors d'après le th. 1.3 d'après la propriété (w-scs)

$$\forall u \in H \qquad (\varphi + I_K)(\operatorname{proj}_K u) \leqslant (\varphi + I_K)_{\min}(u) \leqslant \varphi(u),$$

soit

$$\forall u \in H \qquad \varphi(\operatorname{proj}_K u) \leqslant \varphi(u).$$

Or cette propriété est fausse en général: prendre $H = \boldsymbol{R}^2$ muni de la norme euclidienne

$$K = \{(x_1, x_2) \in \boldsymbol{R}^2 / x_2 - x_1 = 0\} \qquad \text{et} \qquad \varphi(x) = x_2^2$$

on n'a pas en général

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^2 \leqslant x_2^2.$$

REMARQUE 1.15. – La recherche d'une topologie sur l'ensemble des maximaux monotones telle que les suites convergentes sont celles pour lesquelles les semi-groupes (où de façon équivalentes les sections minimales) convergent ne semble pas très intéressant, cette topologie n'étant pas séparée: une même suite peut avoir une infinité de limites!

CHAPITRE II

MESURABILITÉ D'UNE FAMILLE D'OPERATEURS MONOTONES

1. – Lien entre les différentes notions de mesurabilité pour une famille d'opérateurs maximaux monotones.

Dans toute cette partie H (resp. X), sauf spécification explicite, désigne un espace de Hilbert séparable (resp. Banach séparable), $\mathcal{M}_R$ (resp. $\mathcal{A}_R$) l'ensemble des maximaux monotones (resp. des m-accrétifs) muni de la topologie de la R-convergence (cf. Définition 1.1). On désignera par $(T, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré, $\mu \geqslant 0$, σ-finie, avec $\mathcal{T}$ μ-complète.

THÉORÈME A (Castaing [15], Théorème 30). – *Soit $(T, \mathcal{T}, \mu)$ un epsace mesuré, $\mu \geqslant 0$ σ-finie, $\mathcal{T}$ μ-complète, X un espace métrique séparable complet et Γ une multiapplication à valeurs fermées non vides de T dans X; ily a équivalence:*

a) $\Gamma^{-1}(U) \in \mathcal{T}$ *pour tout ouvert* U *de* X.

b) $\Gamma^{-1}(F) \in \mathcal{T}$ *pour tout fermé* F *de* X.

c) $\Gamma^{-1}(B) \in \mathcal{T}$ *pour tout borélien* B *de* X.

d) Le graphe de Γ *appartient à* $\mathcal{T} \otimes \mathcal{B}$ *où* $\mathcal{B}$ *désigne la tribu borélienne de* X.

e) Pour tout x *de* X, *l'application* $t \to d(x, \Gamma(t))$ *est mesurable.*

f) La multiapplication Γ *possède une famille dénombrable de sections mesurables* $(\sigma_n)_{n\in N}$ *telles que pour tout* t *de* T, $\Gamma(t) = \overline{\bigcup_{n\in N} \{\sigma_n(t)\}}$.

Ce théorème est l'outil principal dont nous nous servirons dans les problèmes de mesurabilité. Citons en outre les travaux DEBREU, IOFFE and LEVIN, ROCKAFELLAR relatifs à ce théorème.

THÉORÈME B. (Théorème de projection). – *Soit $(T, \mathcal{T}, \mu)$, $\mu \geqslant 0$, $\mathcal{T}$ μ-complète et S un espace souslinien; si G appartient à $\mathcal{T} \otimes \mathcal{B}(S)$, sa projection $\mathrm{pr}_T(G)$ appartient à $\mathcal{T}$.*

Sous cette forme ce théorème est dû à M. F. SAINTE BEUVE [28]; il généralise des énoncés précédents de Aumann, Valadier, Von Neumann.

DÉFINITION 2.1. – Soit $(T, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré, avec $\mu \geqslant 0$, σ-finie, $\mathcal{T}$ μ-complète soit X un espace métrique séparable complet; nous dirons qu'une multiapplication à valeurs fermées de T dans X est mesurable si $T_0 = \{t \in T; \Gamma(t) \neq \emptyset\}$ appartient à $\mathcal{T}$ et si Γ restreint à T_0 possède une des propriétés équivalentes du Théorème A.

LEMME 2.1. – *Soit $(T, \mathcal{T})$ un espace mesurable, et A une application de T dans $\mathcal{A}$ il y a équivalence:*

(i) $t \to A(t)$ *mesurable de* T *dans* $\mathcal{A}_R$.

(ii) $\forall \lambda > 0$, $\forall x \in H$, $t \to (I + \lambda A(t))^{-1}x$ *mesurable de* T *dans* X.

(iii) $\exists \lambda_0 > 0$, $\forall x \in H$, $t \to (I + \lambda_0 A(t))^{-1}x$ *mesurable de* T *dans* X.

(iv) $\exists \lambda_0 > 0$, $\exists (x_n)_{n\in N}$ *dense dans* H, $t \to (I + \lambda_0 A(t))^{-1}x_n$ *mesurable de* T *dans* X.

DÉMONSTRATION. – (i) $\Rightarrow$ (ii). L'application $t \to (I + \lambda A(t))^{-1}x$ est la composée de l'application $t \to A(t)$ mesurable et de l'application $A \to (I + \lambda A)^{-1}x$ continue de $\mathcal{A}_R$ dans X; la composée est donc mesurable.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (iv) évident.

Soit d la distance associée à λ_0 et $(x_n)_{n\in N}$, induisant la topologie de la R-convergence (cf. Proposition 1.1); étant donné B élément de $\mathcal{A}$ on a

$$d(A(t), B) = \sum_{n=1}^{\infty} 1/2^n \inf\left(1, |(I + \lambda_0 A(t))^{-1}x_n - (I + \lambda_0 B)^{-1}x_n|\right)$$

et donc pour tout B dans $\mathcal{A}$, l'application $t \mapsto d(A(t), B)$ est mesurable; l'espace $\mathcal{A}_R$ étant un polonais (en particulier tout ouvert est réunion dénombrable de boules ouvertes) on en déduit immédiatement que l'application $t \to A(t)$ est mesurable de T dans $\mathcal{A}_R$.

THÉORÈME 2.1. – *Soient $(T, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré, $\mu \geqslant 0$ σ-finie, $\mathcal{T}$ μ-complète; soit A une application de T dans $\mathcal{A}$; il y a équivalence:*

(i) $\forall \lambda > 0$, $\forall x \in H$ $t \to (I + \lambda A(t))^{-1}x$ *est mesurable de* T *dans* X.

(ii) $t \to G(A(t))$ (*graphe de* $A(t)$) *est multivoque mesurable de* T *dans* $X \times X$.

DÉMONSTRATION. – (i) $\Rightarrow$ (ii). Notant que la graphe de $A(t)$ est fermé dans $X \times X$, nous allons montrer, suivant le Théorème A, que la multiapplication $t \to G(A(t))$ possède une famille dénombrable, dense, de sections mesurables.

Soit $(x_n)_{n\in N}$ une suite dense dans X; posons $\sigma_n(t) = (J_1^t x_n, A_1^t x_n)$. Compte tenu de la relation $A_\lambda^t x \in A^t(J_\lambda^t x)$ et de l'hypothèse i), $\sigma_n(t)$ est une section mesurable de la multiapplication $t \to G(A(t))$; montrons que pour t fixé dans T, $\{\sigma_n(t)\}_{n\in N}$ est dense dans $G(A^t)$.

Soit $(x, y) \in A^t$, on a $x = J_1^t(x + y)$, $y = A_1^t(x + y)$ d'où

$$|x - J_1^t x_n| = |J_1^t(x + y) - J_1^t x_n| \leqslant |(x + y) - x_n|$$
$$|y - A_1^t x_n| = |A_1^t(x + y) - A_1^t x_n| \leqslant |(x + y) - x_n| .$$

Choisissant $n \in N$ tel que $|x + y - x_n| \leqslant \varepsilon$ on obtient le résultat désiré.

(ii) $\Rightarrow$ (i). La multiapplication $t \to G(A(t))$ étant mesurable possède une famille dénombrable dense de sections mesurables, $t \mapsto \sigma_n(t) = (x_n(t), y_n(t))$. L'application $(x, y) \to (x + y, x)$ étant un homéomorphisme de $X \times X$ sur $X \times X$ et transformant le graphe de A en le graphe de $(I + A)^{-1}$ on déduit que $t \mapsto \omega_n(t) = (x_n(t) + y_n(t), x_n(t))$ est une famille dénombrable dense de sections mesurables de l'application $t \to G((I + A^t)^{-1})$; la multiapplication $t \to G((I + A^t)^{-1})$ est donc mesurable de T dans $X \times X$ (d'après le Théorème A); montrons que cela entraîne que pour x fixé dans X, $t \to (I + A^t)^{-1}x$ mesurable.

Soit $B \in \mathcal{B}(X)$ donné:

$$\{t \in T\colon (I + A^t)^{-1}x \cap B \neq \emptyset\} = \{t \in T/(I + A^t)^{-1} \cap \{x\} \times B \neq \emptyset\} .$$

Or ce dernier ensemble appartient à $\mathcal{C}$ d'après l'équivalence $f) \Leftrightarrow e)$ du Théorème A.

REMARQUE 2.1. – On a montré en fait un résultat un peu plus général, à savoir: Soit $(T, \mathcal{C}, \mu)$ un espace mesuré avec $\mu \geqslant 0$, σ-finie, $\mathcal{C}$ μ-complète et A une multiapplication mesurable à valeurs dans les parties fermées de $X \times X$ où X est un Fréchet on a les implications (i) $\Leftrightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii):

(i) $t \to G(A(t))$ multivoque mesurable.

(ii) $t \to G((I + A(t))^{-1})$ multivoque mesurable de $\mathcal{C}$ dans $X \times X$.

(iii) $\forall x \in H$, $E_x = \{t\colon x \in D((I + A(t))^{-1})\} \in \mathcal{C}$ et $t \in E_x \to (I + A(t))^{-1}x$ mesurable.

Si l'on suppose en outre que $\forall t \in \mathcal{C}$, $(I + A(t))^{-1}$ est univoque continue partout définie, on a les équivalences (i) $\Leftrightarrow$ (ii) $\Leftrightarrow$ (iii): en effet on voit alors que si $(x_n)_{n \in N}$ est une suite dense dans X, $t \to (x_n, (I + A(t))^{-1}x_n)$ forme une famille dénombrable dense de sections mesurables de la multiapplication $t \to G((I + A(t))^{-1})$.

Nous sommes donc amenés à poser la définition suivante:

DÉFINITION 2.2. – Soit $(T, \mathcal{C}, \mu)$ un espace mesuré, avec $\mu \geqslant 0$, σ-finie, $\mathcal{C}$ μ-complète et X un espace de Banach séparable; on dira qu'une famille $(A(t))_{t \in T}$ d'opérateurs m-accrétifs dans X est mesurable si l'une des propriétés équivalentes du Théorème 2.1 est vérifiée.

Jusqu'à présent nous sommes intéressés au lien entre la mesurabilité des résolvantes et la mesurabilité des graphes des opérateurs; le problème qui se pose naturellement est de voir si ces notions sont équivalentes à la mesurabilité pour tout x de X de l'application $t \to A(t)x$.

PROPOSITION 2.1. – Soit $(A(t))_{t \in T}$ une famille mesurable d'opérateurs maximaux monotones; alors, l'application $t \mapsto \overline{D(A(t))}$ est multivoque mesurable et pour toute sélection mesurable $t \mapsto x(t)$ de la multiapplication $t \mapsto D(A(t))$, la multiapplication $t \mapsto A(t, x(t))$ est mesurable ainsi que l'application $t \mapsto A^0(t, x(t))$.

DÉMONSTRATION. – *a*) Soit B un borélien de H; montrons que $\{t \in T/D(A(t)) \cap \cap B \neq \emptyset\}$ appartient à $\mathcal{T}$.

$$\{t \in T/D(A(t)) \cap B \neq \emptyset\} = \text{proj}_T \{G(\mathcal{A}) \cap (\mathcal{T} \times B \times H)\}$$

où

$$G(\mathcal{A}) = \{(t, x, y) \in T \times H \times H/(x, y) \in A(t)\} .$$

Or $G(\mathcal{A})$ appartient à $\mathcal{T} \otimes \mathcal{B}(H \times H)$ puisque par hypothèse $t \mapsto A(t)$ est mesurable, de même $\mathcal{T} \times B \times H$ appartient à $\mathcal{T} \otimes \mathcal{B}(H \times H)$; on conclut à l'aide du théorème de projection; la multiapplication $t \mapsto D(A(t))$ est donc mesurable (en ce sens); on en déduit immédiatement la mesurabilité de la multiapplication $t \mapsto \overline{D(A(t))}$, puisque, si $B(x, r)$ désigne la boule ouverte de centre x et de rayon r,

$$\left\{t \in T: d\left(x, \overline{D(A(t))}\right) < r\right\} = \{t \in T: D(A(t)) \cap B(x, r) \neq \emptyset\}$$

qui appartient bien à $\mathcal{T}$ d'après ce qui précède. Donc, pour tout x de H, l'application $t \mapsto d(x, D(A(t)))$ est mesurable et l'on conclut à l'aide du théorème A.

b) Soit à présent $t \mapsto x(t)$ une section mesurable de la multiapplication $t \mapsto \mapsto D(A(t))$. Posons $\Gamma(t) = A(t, x(t))$; on a l'égalité

$$\begin{aligned} G(\Gamma) &= \{(t, y) \in T \times H: (t, x(t), y) \in G(\mathcal{A})\} \\ &= \alpha^{-1}(G(\mathcal{A})) \end{aligned}$$

où $\alpha: (t, y) \mapsto (t, x(t), y)$ est mesurable de $(T \times H, \mathcal{T} \otimes \mathcal{B}(H))$ dans $(T \times H \times H, \mathcal{T} \otimes \otimes \mathcal{B}(H) \otimes \mathcal{B}(H))$ puisque $x(\cdot)$ est mesurable; tenant compte du fait que $G(\mathcal{A})$ appartient à $\mathcal{T} \otimes \mathcal{B}(H) \otimes \mathcal{B}(H)$, on en déduit que $G(\Gamma)$ appartient à $\mathcal{T} \otimes \mathcal{B}(H)$, et donc que la multiapplication Γ est mesurable.

D'autre part, pour tout $\lambda > 0$, l'application $(t, x) \mapsto A_\lambda(t, x)$ est de Carathéodory; on en déduit, que l'application $t \mapsto A_\lambda(t, x(t))$ est mesurable et par passage à la limite $(\lambda \to 0)$ la mesurabilité de l'application $t \mapsto A^0(t, x(t))$.

REMARQUE. – Nous avons montré la mesurabilité de la multiapplication $t \mapsto D(A(t))$ au sens suivant:

$$\forall B \in \mathcal{B}(H) \qquad \{t \in T: D(A(t)) \cap B \neq \emptyset\} \in \mathcal{T} .$$

Par conséquent, étant donné $x \in H$,

$$E_x = \{t \in T: D(A(t)) \cap \{x\} \neq \emptyset\} \in \mathcal{T}$$

et la multiapplication $t \mapsto A(t, x)$ ainsi que l'application $t \mapsto A^0(t, x)$ sont mesurables de E_x dans H.

Le problème qui se pose à présent et celui de la réciproque à la proposition précédente: étant donné $(A(t))_{t\in T}$ une famille d'opérateurs maximaux monotones, la mesurabilité de la multiapplication $t\mapsto D(A(t))$ ainsi que pour tout x de H de l'application $t\mapsto A^0(t,x)$, entraîne-t-elle la mesurabilité de la famille $(A(t))_{t\in T}$? Pour l'instant nous ne connaissons la réponse que dans le cas où les domaines des opérateurs $A(t)$ sont d'intérieur non vide; pour montrer ce résultat, nous aurons besoin de quelques lemmes préliminaires.

LEMME 2.3. – *A maximal monotone, D dense dans $D(A)$.*

$$\forall x\in \operatorname{Int} D(A) \qquad Ax=\overline{\operatorname{Conv}}\,\{\omega-\lim y_n;\ y_n=A^0x_n,\ x_n\to x,\ x_n\in D\}\,.$$

DÉMONSTRATION. – 1) De façon générale $\forall x\in D(A)$

$$\overline{\operatorname{Conv}}\,\{\omega-\lim y_n;\ y_n\in Ax_n;\ x_n\to x;\ x_n\in D\}\subset Ax\,.$$

En effet A est demi fermé et $\forall x\in D(A)$ Ax est un convexe fermé.

2) Supposons $x\in\operatorname{Int} D(A)$; alors Ax est borné et donc Ax est un convexe faiblement compact dans H; raisonnons par l'absurde.

Soit $y\notin Ax$, $y-Bx=\overline{\operatorname{Conv}}\,\{\omega-\lim y_n;\ y_n=A^0x_n;\ x_n\to x;\ x_n\in D\}$. D'après le Théorème de Hahn-Banach, on va pouvoir séparer strictement y du convexe faiblement compact Bx:

$$\exists z\in H \qquad \langle z,y\rangle>\sup_{\xi\in Bx}\langle z,\xi\rangle$$

soit

$$\langle z,y-\xi\rangle>0 \qquad \forall\xi\in Bx \qquad (*)\,.$$

Construisons une suite $x_n\in D$, $x_n\to x$ telle que $(x_n-x)/|x_n-x|\to z$.

Soit $z_n=x+(1/n)z$, pour n suffisamment grand, x étant dans l'intérieur de $D(A)$, on pourra trouver un $x_n\in D\cap B(z_n,1/n^2)$; on vérifie immédiatement qu'une telle suite $(x_n)_{n\in N}$ satisfait à la condition précédente.

La suite x_n pour n suffisamment grand sera dans l'intérieur de $D(A)$ et donc $\{A^0x_n\}_{n\in N}$ est borné; soit $A^0x_n\rightharpoonup u$.

D'après la monotonie de A: $\langle A^0x_{n_k}-y,\ x_{n_k}-x\rangle\geqslant 0$; divisant par $|x_{n_k}-x|$ $(\neq 0)$ et faisant tendre k vers l'infini on obtient $\langle z,y-u\rangle\leqslant 0$ pour un $u\in Bx$ d'où la contradiction avec $(*)$.

LEMME 2.4. – *A maximal monotone,* $\operatorname{Int} D(A)\neq\emptyset$; *$D$ dense dans $D(A)$; alors*

$$A=\{(x,y)\in\overline{D(A)}\times H;\ \langle y-A^0\xi,\ x-\xi\rangle\geqslant 0 \qquad \forall\xi\in D\}\,.$$

DÉMONSTRATION. – L'une des inclusions étant évidente, il s'agit de montrer que

$$\big((x, y) \in \overline{D(A)} \times H \quad \text{et} \quad \langle y - A^0\xi, x - \xi\rangle \geqslant 0 \quad \forall \xi \in D\big) \Rightarrow y \in Ax\,;$$

d'après le Lemme 2.3 on se ramène à monter que $A = M$ où

$$M = \{(x, y) \in \overline{D(A)} \times H;\ \langle y - A^0\xi, x - \xi\rangle \geqslant 0 \quad \forall \xi \in \operatorname{Int} D(A)\}\,.$$

a) $A \subset M$ évident.

b) M est monotone; tenant compte de la maximale monotonie de A, il s'en suivra bien l'égalité $A = M$.

Soit (x_1, y_1), $(x_2, y_2) \in M$; notant $x = (x_1 + x_2)/2$ on a $x_1 = x + (x_1 - x_2)/2$ et $x_2 = x - (x_1 - x_2)/2$:

$$\langle y_1 - A^0\xi, x_1 - \xi\rangle \geqslant 0$$

$$\langle y_2 - A^0\xi, x_2 - \xi\rangle \geqslant 0$$

d'où, en ajoutant

$$\langle y_1 + y_2 - 2A_0\xi, x - \xi\rangle + \left\langle y_1 - y_2, \frac{x_1 - x_2}{2}\right\rangle \geqslant 0$$

$$\frac{1}{2}\langle y_1 - y_2, x_1 - x_2\rangle \geqslant \langle y_1 + y_2, \xi - x\rangle + 2\langle A^0\xi, x - \xi\rangle \qquad \forall \xi \in \operatorname{Int} D(A)\,.$$

Tout revient à montrer que $\overline{\lim\limits_{\substack{\xi \in \operatorname{Int} D(A) \\ \xi \to x}}} \langle A^0\xi, x - \xi\rangle \geqslant 0$.

Soit $\xi_0 \in \operatorname{Int} D(A) = \operatorname{Int} \overline{D(A)}$; si $x \in \operatorname{Int} D(A) = \operatorname{Int} \overline{D(A)}$ c'est terminé; sinon

$$\forall 0 < t \leqslant 1 \qquad x + t(\xi_0 - x) = (1 - t)x + t\xi_0 \in \operatorname{Int} \overline{D(A)}$$

Prenons $\xi_n = x + t_n(\xi_0 - x)$; $t_n \downarrow 0$, on a bien $\xi_n \to x$:

1) $\langle A^0\xi_n - A^0\xi_{n+1}, \xi_n - \xi_{n+1}\rangle \geqslant 0$ soit

$$(t_n - t_{n+1})[\langle A^0\xi_n, \xi_0 - x\rangle - \langle A^0\xi_{n+1}, \xi_0 - x\rangle] \geqslant 0\,.$$

Donc $\langle A^0\xi_n, \xi_0 - x\rangle$ est une suite décroissante.

Supposons $\overline{\lim} \langle A^0\xi_n, x - \xi_n\rangle = \alpha < 0$ on aura alors

$$\langle A^0\xi_n, -t_n(\xi_0 - x)\rangle \leqslant \frac{\alpha}{2} \qquad \text{(pour } n \text{ suffisamment grand)}$$

$$\langle A^0\xi_n, \xi_0 - x\rangle \geqslant -\frac{\alpha}{2t_n} \qquad (n \text{ suffisamment grand})$$

et donc $\langle A^0\xi_n, \xi_0 - x\rangle \to +\infty$ ce qui est contradictoire avec la décroissance de cette suite.

2) Nous sommes en mesure à présent de démontrer le théorème suivant:

THÉORÈME 2.2. – Soit H un espace de Hilbert séparable et $(T, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré, avec $\mu \geqslant 0$, σ-finie, $\mathcal{T}\mu$-complète. Soit $(A(t))_{t\in T}$ une famille d'opérateurs maximaux monotones tels que $\forall t \in T$, $\operatorname{Int} D(A(t)) \neq \emptyset$. Il y a équivalence:

(i) La famille $(A(t))_{t\in T}$ est mesurable.

(ii) L'application $t \mapsto D(A(t))$ est mesurable $\big($i.e. $\forall B \in \mathcal{B}(H)$, $\{t \in T: D(A(t)) \cap \cap B \neq \emptyset\} \in \mathcal{T}\big)$ et, pour toute section mesurable $x(\cdot)$ de cette application, $t \mapsto A^0(t, x(t))$ est mesurable.

(iii) L'application $t \mapsto D(A(t))$ est mesurable et, pour tout x de H, $t \to A^0(t, x)$ est mesurable.

DÉMONSTRATION. – i) $\Rightarrow$ ii). Résulte de la proposition précédente.

ii) $\Rightarrow$ iii). Il suffit de noter que la mesurabilité de la multiapplication $t \mapsto D(A(t))$ entraîne l'existence d'une section mesurable $\sigma(\cdot)$; étant donné x dans H, $E_x = \{t \in T: x \in D(A(t))\}$ appartient à $\mathcal{T}$ et l'application $x(\cdot)$ définie par

$$x(t) = \begin{cases} x & t \in E_x \\ \sigma(t) & t \notin E_x \text{ est une section mesurable de } t \to D(A(t)) \end{cases}$$

Par conséquent, l'application $t \mapsto A^0(t, x(t))$ est mesurable et l'application $t \mapsto A^0(t, x)$ est mesurable de E_x dans H.

iii) $\Rightarrow$ i). Nous allons construire une famille $(x_n(\cdot))_{n\in N}$ de fonctions étagées telles que, pour tout t de T, la suite $(x_n(t))_{n\in N}$ soit dense dans $D(A(t))$:

Soit $(x_n)_{n\in N}$ une suite dense dans H; par hypothèse, l'ensemble $E_n = \{t \in T: x_n \in D(A(t))\}$ est mesurable et $t \in E_n \mapsto A^0(t, x_n)$ est mesurable; $\big($notons que $\operatorname{Int} D(A(\cdot)) \neq \emptyset$ entraîne que $\bigcup_{n\in N} E_n = T\big)$.

Posons

$$x_n(t) = \begin{cases} x_n & t \in E_n \\ x_1 & t \in E_1 \setminus E_n \\ x_2 & t \in E_2 \setminus (E_1 \cup E_n) \\ \vdots & \\ x_k & t \in E_k \setminus (E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_{k-1} \cup E_n) \\ \vdots & \end{cases}$$

Alors $x_n(\cdot)$ est mesurable étagée et, pour tout t de T, $x_n(t)$ appartient à $D(A(t))$; pour tout n de N, $t \mapsto A^0(t, x_n(t))$ est mesurable, ceci découlant directement de l'hypothèse et du fait que $x_n(\cdot)$ est mesurable étagée.

De plus, pour tout t de T, $(x_n(t))_{n\in N}$ est un sous-ensemble dense de $D(A(t))$: $D(A(t))$ étant d'intérieur non vide, on a $\overline{D(A(t))} = \overline{\mathrm{Int}\, D(A(t))}$ (cf. [8]) et $D(A(t)) \cap (x_n)_{n\in N} = (x_{n(k)})_{k\in N}$ est dense dans $D(A(t))$; d'autre part, t appartient à $E_{n(k)}$, et donc, $x_{n(k)}(t) = x_{n(k)}$ par construction des $(x_n(\cdot))_{n\in N}$.

D'après le lemme 2.4, on a:

$$A(t) = \{(x, y) \in \overline{D(A(t))} \times H : \forall n \in N \langle y - A^0(t, x_n(t)), x - x_n(t)\rangle \geq 0\}$$

et donc

$$G(A) = \{(t, x) \in T \times H : x \in \overline{D(A(t))}\} \times H \bigcap_{n\in N} \{(t, x, y) \in T \times H \times H : \langle y - A^0(t, x_n(t)), x - x_n(t)\rangle \geq 0\}$$

appartient à $\mathcal{T} \otimes \mathcal{B}(H) \otimes \mathcal{B}(H)$, ce qui entraîne la mesurabilité de la famille $(A(t))_{t\in T}$.

COROLLAIRE 2.1. – Soit H un espace de Hilbert séparable et $(T, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré avec $\mu \geq 0$, σ-finie, $\mathcal{T}$ μ-complète. Soit $(A(t))_{t\in T}$ une famille d'opérateurs maximaux monotones dans H tels que, pour tout t de T, $D(A(t))$ soit d'intérieur relatif (²) non vide; sont équivalents:

(i) L'application $t \mapsto D(A(t))$ est multivoque mesurable et pout toute section mesurable de cette application, l'application $t \mapsto A(t, x(t))$ est multivoque mesurable.

(ii) La famille $(A(t))_{t\in T}$ est mesurable.

DÉMONSTRATION. – On se ramène tout d'abord au cas où $\forall t \in T$, $D(A(t)) \ni 0$; notant $t \mapsto \sigma(t)$ une section mesurable de la multiapplication $t \to D(A(t))$ il suffit de remplacer la famille $(A(t))_{t\in T}$ par la famille $(B(t))_{t\in T}$ où $B(t, x) = A(t, x + \sigma(t))$: $\forall t \in T$ $B(t)$ est maximal monotone et de la relation $(I + \lambda B(t))^{-1}x = (I + \lambda A(t))^{-1} \cdot (x + \sigma(t)) - \sigma(t)$ on déduit que la mesurabilité de la famille $(B(t))_{t\in T}$ est équivalente à la mesurabilité de la famille $(A(t))_{t\in T}$; on suppose donc que $\forall t \in T$, $D(A(t)) \ni 0$; on se ramène alors au cas où $\mathrm{Int}\, D(A(t)) \neq \emptyset$ en décomposant $A(t)$ comme suit: Etant donné A maximal monotone $(D(A) \ni 0)$, notons $\overline{D(A)}$ le sous-espace fermé engendré par $D(A)$ et $[D(A)]^\perp$ le sous-espace orthogonal; on a:

$$\forall u \in D(A) \qquad Au = \{\operatorname*{proj}_{[D(A)]} y + \operatorname*{proj}_{[D(A)]^\perp} y / y \in Au\};$$

(²) Il s'agit de l'intérieur relatif au sous-espace affine engendré.

Or, $Au = Au + [D(A)]^{\perp}$ d'après la maximalité de A, et donc:

$$\forall u \in D(A) \qquad Au = \operatorname*{proj}_{\overline{[D(A)]}} Au + \overline{[D(A)]}^{\perp}.$$

L'opérateur défini par $\hat{A}u = \operatorname*{proj}_{\overline{[D(A)]}} Au$ de domaine égal à $D(A)$ est maximal monotone dans $\overline{[D(A)]}$:

a) $\forall u_1, u_2 \in D(A) \qquad \langle \operatorname{proj} Au_1 - \operatorname{proj} Au_2,\, u_1 - u_2\rangle =$
$$= \langle \operatorname{proj} Au_1 - Au_1 + Au_2 - \operatorname{proj} Au_2,\, u_1 - u_2\rangle + \langle Au_1 - Au_2,\, u_1 - u_2\rangle \geqslant 0$$

(le premier terme du second membre étant nul).

b) Soit $f \in \overline{[D(A)]}$ et $\lambda > 0$; d'après la maximalité de A dans H, il existe $u \in D(A)$ tel que

$$u + \lambda Au \ni f\,;$$

par conséquent,

$$Au \ni \frac{f-u}{\lambda} \in \overline{[D(A)]} \qquad \text{et} \qquad \hat{A}u \ni \frac{f-u}{\lambda}\,,$$

soit, $u + \lambda\hat{A}u \ni f$.

Montrons que l'application $t \to \overline{[D(A(t))]}$ est mesurable. Soit $(x_n(\cdot))_{n\in N}$ une famille dénombrable dense de sections mesurables de la multiapplication $t \to D(A(t))$. L'ensemble des applications de la forme $t \mapsto \sigma_n(t) = \sum_{i\in I \text{ fini}} \lambda_i x_{n_i}(t)$, où $\lambda_i \in \mathbf{Q}$, forme une famille dénombrable dense de sections mesurables de la multiapplication $t \to \overline{[D(A(t))]}$; cette dernière est donc mesurable.

D'après le lemme 2.4, puisque l'intérieur du domaine de $D(\hat{A}(t)) = D(A(t))$ relativement au sous-espace fermé engendré est non vide,

$$\hat{A}(t) = \left\{(x, y) \in \overline{[D(A(t))]} \times \overline{[D(A(t))]} \colon \forall n \in N \langle y - \hat{A}^0(t, x_n(t)),\; x - x_n(t)\rangle \geqslant 0\right\}\,;$$

$\big($en effet $(x_n(t))_{n\in N}$ est dense dans $D(A(t)) = D(\hat{A}(t))\big)$.

La multiapplication $t \to A(t, x_n(t))$ est multivoque mesurable par hypothèse; il en est de même de la multiapplication $t \to \hat{A}(t, x_n(t)) = A(t, x_n(t)) \cap \overline{[D(A(t))]}$, comme intersection des deux multiapplications mesurables $t \to A(t, x_n(t))$ et $t \mapsto \overline{[D(A(t))]}$. Par conséquent, l'application $t \mapsto \hat{A}^0(t, x_n(t))$ est mesurable, et l'on en déduit, comme dans la démonstration du théorème 2.2, que la multiapplication $t \to \hat{A}(t)$ a son graphe dans $\mathcal{C} \otimes \mathcal{B}(H) \otimes \mathcal{B}(H)$ ce qui exprime sa mesurabilité; revenons à l'expression

$$A(t)\,u = \hat{A}(t)\,u + [D(A(t))]^{\perp}\,; \qquad [D(A(t))]^{\perp} = \{x \in H \colon \forall n \in N \;\langle x, \sigma_n(t)\rangle = 0\}$$

et donc $t \to [D(A(t))]^{\perp}$ est mesurable. On en déduit l'existence d'une famille mesurable de sections mesurables de l'application $t \to [D(A(t))]^{\perp}$: $[D(A(t))]^{\perp} = \overline{\bigcup_{n\in N} \{\alpha_n(t)\}}$.

Notant par ailleurs $\hat{A}(t) = \overline{\bigcup_{n\in N} \{\gamma_n(t), \beta_n(t)\}}$, avec $\gamma_n(\cdot)$ et $\beta_n(\cdot)$ mesurables, on a $A(t) = \overline{\bigcup_{n,m} \{\gamma_n(t), \beta_n(t) + \alpha_m(t)\}}$, puisque $A(t)$ est fermé dans $H\times H$; par conséquent, $t \to A(t)$ est multivoque mesurable.

2. – Familles mesurables de sous-différentiels et intégrandes convexes normales.

Nous supposons à présent $A(t) = \partial\varphi^t$ où φ^t est convexe, sci, propre de H dans $]-\infty, +\infty]$:

THÉORÈME C. (Rockafellar [27]). – *Soit H un espace de Hilbert séparable et $(T, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré, $\mu \geqslant 0$ σ-finie, $\mathcal{T}$ μ-complète; soit $\varphi\colon T\times H \to]-\infty, +\infty]$ telle que pour tout t de T, l'application $x \to \varphi(t, x)$ est convexe, sci, propre, il y a équivalence*:

(i) *φ est $\mathcal{T}\otimes B$ mesurable (B tribu borélienne de H)*;

(ii) *La multiapplication $t \to \operatorname{Epi}\varphi(t,\cdot)$ est mesurable (où $\operatorname{Epi}\varphi(t,\cdot) = \{(x, \lambda) \in H\times \boldsymbol{R}\colon \lambda \geqslant \varphi(t, x)\}$).*

On dira que φ est une intégrande convexe normale si l'une des propriétés équivalentes ci-dessus est vérifiée; on désigne toujours par $\mathcal{M}_\varphi$ le cône des sous-différentiels de fonctions convexes, sci, propres de H dans $]-\infty, +\infty]$ et par $\mathcal{M}_{\varphi_0}$ le sous-cône de $\mathcal{M}_\varphi$ formé par les fonctions positives nulles à l'origine.

THÉORÈME 2.3. – *Soit $(T, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré, $\mu \geqslant 0$ σ-finie, $\mathcal{T}$ μ-complète et $(\varphi^t)_{t\in N}$ une famille de fonctionnelles convexes sci, propres de H dans $]-\infty, +\infty]$; il y a équivalence*

(i) *$(t, x)\in T\times H \to \varphi(t, x)$ est une intégrande convexe normale*;

(ii) *$\forall\lambda > 0$, $\forall x\in H$, $t \to (I + \lambda\partial\varphi^t)^{-1}x$ mesurable et il existe $t \to x_0(t)$ mesurable ainsi que $t \mapsto \varphi(t, x_0(t))$*;

(iii) *$\forall\lambda > 0$, (resp. $\exists\lambda$), $(t, x) \mapsto \varphi_\lambda(t, x)$ est une intégrande convexe normale.*

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 2.3. – i) $\Rightarrow$ ii). Le graphe de la multiapplication $t \to \partial\varphi^t$ est égal à

$$G(\partial\varphi) = \{(t, x, y) \in T\times H\times H;\ \varphi(t, x) + \varphi^*(t, y) - \langle x, y\rangle = 0\}\,.$$

Or φ étant une intégrande normale, φ^* l'est également: la démonstration de ce résultat repose sur la remarque suivante: soit $t \to (r_n(t), \sigma_n(t))$ une famille dénombrable dense de sections mesurables de l'application $t \to \operatorname{Epi} \varphi(t)$; alors

$$\varphi^*(t, x) = \sup_{n \in N} \{\langle x, \sigma_n(t)\rangle - r_n(t)\} \quad \text{et } \varphi^* \text{ est une intégrande normale;}$$

l'application $(t, x, y) \mapsto \varphi(t, x) + \varphi^*(t, y) - \langle x, y\rangle$ est donc $\mathcal{T} \otimes B(H \times H)$ mesurable, (tenant compte de l'égalité $B(H) \otimes B(H) = B(H \times H)$ car H est séparable).

L'application $t \to \partial\varphi^t$ étant de graphe mesurable, est donc mesurable.

D'après le Théorème 2.1, les résolvantes dépendent mesurablement de $t \in T$; de plus posant $x_0(t) = J_1^t x_0$ et $y_0(t) = A_1^t x_0$ on a bien $t \to x_0(t)$, $t \to y_0(t)$ mesurables, pour tout t de T $y_0(t) \in \partial\varphi(t, x_0(t))$, et $t \to \varphi(t, x_0(t))$ est mesurable comme composée d'applications mesurables.

ii) $\Rightarrow$ i). Nous allons passer par l'intermédiaire des approximations Yosida. Soit $\lambda > 0$, $x \in H$ et $t \in T$ fixés; écrivons que l'application $\tau \mapsto \varphi_\lambda(t, \tau x + (1-\tau) x_0(t))$ est l'intégrale de sa dérivée:

$$\varphi_\lambda(t, x) - \varphi_\lambda(t, x_0(t)) = \int_0^1 \langle A_\lambda(t, \tau x + (1-\tau) x_0(t)), \ x - x_0(t)\rangle \, d\tau$$

où A_λ est la différentielle Fréchet de φ_λ. Remarquant que l'intégrale ci-dessus est limite simple de sommes de Riemann, on conclut à la mesurabilité, pour tout $\lambda > 0$ et tout x dans H, de l'application $t \mapsto \varphi_\lambda(t, x) - \varphi_\lambda(t, x_0(t))$; compte tenu de la continuité de l'application $x \mapsto \varphi_\lambda(t, x)$ pour tout t de T, l'application $(t, x) \mapsto \varphi_\lambda(t, x) - \varphi_\lambda(t, x_0(t))$ est de Carathéodory; elle est donc mesurable de $T \times H$ muni de la tribu $\mathcal{T} \otimes \mathcal{B}$ dans $\boldsymbol{R}$ (cf. [15]). En passant à la limite lorsque λ tend vers zéro, on en déduit la mesurabilité de l'application $(t, x) \mapsto \varphi(t, x) - \varphi(t, x_0(t))$; tenant compte de la mesurabilité de l'application $(t, x) \mapsto \varphi(t, x_0(t))$; on conclut que l'application $(t, x) \mapsto \varphi(t, x)$ est $\mathcal{T} \otimes \mathcal{B}$ mesurable et donc que φ est une intégrande normale.

i) $\Leftrightarrow$ iii). Compte tenu de la relation

$$\varphi_\lambda = \left(\varphi \nabla \frac{1}{2\lambda} |\cdot|^2\right)^{**} = \left(\varphi^* + \frac{\lambda}{2} |\cdot|^2\right)^*$$

on conclut que si φ est une intégrande normale, φ_λ l'est également.

D'autre part $\varphi = \sup_{n \in N} \varphi_{1/n}$; si φ_λ est une intégrande normale pour tout λ, φ l'est donc également. Cette conclusion reste vraie si l'on suppose que φ_λ est une intégrande normale pour seulement un $\lambda_0 > 0$: cela découle immédiatement de la relation

$$\varphi = \left(\varphi_{\lambda_0}^* - \frac{\lambda_0}{2} |\cdot|^2\right)^* .$$

A l'aide du théorème 2.3, nous allons définir, dans la proposition suivante, d'une nouvelle façon, la notion d'intégrande convexe normale, cette présentation se révélant d'un emploi assez souple dans de nombreuses questions (corollaires 2.2, 2.3, 2.4).

PROPOSITION 2.2. – Soit $(T, \mathcal{C}, \mu)$ un espace mesuré, $\mu \geqslant 0$ σ-finite, μ-complète. Soit Φ une intégrande convexe. Il y a équivalence:

(i) Φ est une intégrande normale.

(ii) L'application $t \mapsto \Phi(t, \cdot)$ est mesurable de T dans $\mathcal{C}_M$ (cf. Déf. 1.5).

DÉMONSTRATION. – (i) $\Leftrightarrow$ (ii). On suppose que Φ est une intégrande normale; d'après le théorème 2.3, les applications $t \mapsto \partial\Phi(t, \cdot)$ et $t \mapsto \Phi_\lambda(t, x)$ $(\lambda > 0,\ x \in H)$ sont mesurables ce qui entraîne, par définition de la topologie de la M-convergence, la mesurabilité de l'application $t \to \Phi(t, \cdot)$ de T dans $\mathcal{C}_M$.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Soit $\lambda_0 > 0$ et $x_0 \in H$ fixés; par hypothèse, les application $t \mapsto \partial\Phi(t, \cdot)$ et $t \mapsto \Phi_{\lambda_0}(t, x_0)$ sont mesurables; il en est de même des applications $t \mapsto \partial\Phi_{\lambda_0}(t, x_0)$ et $t \mapsto \Phi_{\lambda_0}(t, x_0)$, ce qui entraîne d'après le théorème 2.3, $\big($(ii) $\Rightarrow$ (i)$\big)$ que l'application $(t, x) \mapsto \Phi_{\lambda_0}(t, x)$ est une intégrande normale. Toujours d'après le théorème 2.3, $\big($(iii) $\Rightarrow$ (i)$\big)$, on déduit que $(t, x) \to \Phi(t, x)$ est une intégrande normale.

COROLLAIRE 2.2. – Soit $(t, x) \in T \times H \to \Phi^n(t, x)$ une suite d'intégrandes convexes normales et $\big(\Phi(t, \cdot)\big)_{t \in T}$ une famille de fonctions convexes, sci, propres; on suppose

$$\mu \text{ p.p. } t \in T \qquad \Phi^n(t, \cdot) \to \Phi(t, \cdot) \qquad \text{au sens de Mosco.}$$

Alors $(t, x) \to \Phi(t, x)$ est une intégrande convexe normale.

DÉMONSTRATION. – D'après la proposition 2.2, les applications $t \to \Phi^n(t, \cdot)$ sont mesurables de T dans $\mathcal{C}_M$, et, presque pour tout t, $\Phi^n(t, \cdot)$ converge vers $\Phi(t, \cdot)$ dans $\mathcal{C}_M$ lorsque n tend vers $+\infty$; par conséquent, l'application $t \to \Phi(t, \cdot)$, comme limite simple d'applications mesurables, est mesurable, ce qui signifie, d'après la proposition 2.2, que l'application $(t, x) \to \Phi(t, x)$ est une intégrande normale.

COROLLAIRE 2.3. – Soit T compact, μ mesure de Radon positive sur T et Φ une intégrande convexe sur $T \times H$, il y a équivalence

(i) Φ intégrande normale;

(ii) $\forall \varepsilon > 0$, $\exists K_\varepsilon$ compact, $K_\varepsilon \subset T$, $\mu(T \setminus K_\varepsilon) \leqslant \varepsilon$ et $\big(t_n \to t$ dans K_ε, $x_n \xrightarrow{w-H} x\big) \Rightarrow$
$\Rightarrow \big(\Phi(t, x) \leqslant \underline{\lim}\ \Phi(t_n, x_n)\big)$.

DÉMONSTRATION – (i) $\Rightarrow$ (ii). On suppose que Φ est une intégrande normale; d'après la proposition 2.2, l'application $t \to \Phi(t, \cdot)$ est mesurable de T dans $\mathcal{C}_M$; d'après la propriété de Lusin pour tout $\varepsilon > 0$, il esiste $K_\varepsilon \subset T$, $\mu(T \setminus K_\varepsilon) \leqslant \varepsilon$ tel que l'application $t \to \Phi(t, \cdot)$ soit continue de K_ε dans $\mathcal{C}_M$; par conséquent, si $t_n \to t$ dans K_ε, $\Phi(t_n, \cdot)$ converge au sens de Mosco vers $\Phi(t, \cdot)$ ce qui entraîne (ii).

(ii) $\Rightarrow$ (i). Evident.

COROLLAIRE 2.4. – Soit T compact muni d'une de Radon positive μ; soit $t \to \Gamma(t)$ une multiapplication mesurable de T dans H, à valeurs convexes, fermées non vides; Alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe K_ε compact, $K_\varepsilon \subset T$, $\mu(T \setminus K_\varepsilon) \leqslant \varepsilon$ tel que l'application $t \to \Gamma(t)$ soit de graphe séquentiellement fermé dans $K_\varepsilon \times \omega - H$ (i.e. si $t_n \to t$ dans K_ε, $x_n \to x$ dans $\omega - H$, $x_n \in \Gamma(t_n)$ pour tout $n \in \boldsymbol{N}$, alors $x \in \Gamma(t)$).

DÉMONSTRATION. – Posons $\Phi(t, x) = I_{\Gamma(t)}(x)$ où $I_{\Gamma(t)}$ est la fonction indicatrice de $\Gamma(t)$; notant que $\operatorname{Epi} \Phi(t, \cdot) = [0, +\infty[\times \Gamma(t)$, la mesurabilité de la multiapplication $t \to \Gamma(t)$ entraîne, d'après le théorème C, que Φ est une intégrande normale; il suffit alors d'appliquer le corollaire 2.3 pour conclure.

Nous allons donner par ailleurs une démonstration directe de ce résultat:

Puisque la multiapplication $t \to \Gamma(t)$ est mesurable, pour tout x de H l'application $t \mapsto d(x, \Gamma(t))$ est mesurable et l'application

$$t \mapsto \operatorname{proj}_{\Gamma(t)} x = \Gamma(t) \cap \bar{B}\big(x, d(x, \Gamma(t))\big) \qquad \text{est mesurable}$$

(cf. [14] pour le résultat concernant la mesurabilité de $t \to \bigcap_{i \in I} \Gamma_i(t)$); étant donné $(x_n)_{n \in \boldsymbol{N}}$ dense dans H, par application de la propriété de Lusin, pour chaque $\varepsilon > 0$, on pourra trouver K_ε compact, $K_\varepsilon \subset K$, $m(K \setminus K_\varepsilon) \leqslant \varepsilon$ tel que:

$$\forall n \in \boldsymbol{N} \quad t \mapsto \operatorname{proj}_{\Gamma(t)} x_n \quad \text{est continue de } K_\varepsilon \text{ dans } H\,.$$

Or $\forall (n, m) \in \boldsymbol{N} \times \boldsymbol{N}$, $\forall t$, $|\operatorname{proj}_{\Gamma(t)} x_n - \operatorname{proj}_{\Gamma(t)} x_m| < |x_n - x_m|$ et par conséquent l'application $t \mapsto \operatorname{proj}_{\Gamma(t)} x$ est continue de K_ε dans H pour tout x de H; soit alors $t_n \to t$ dans K_ε et $x_n \rightharpoonup x$, $x_n \in \Gamma(t_n)$; puisque $x_n \in \Gamma(t_n)$, $\forall \xi \in H$

$$\langle \xi - \operatorname{proj}_{\Gamma(t_n)} \xi,\ \operatorname{proj}_{\Gamma(t_n)} \xi - x_n \rangle \geqslant 0\ ;$$

par passage à la limite $\forall \xi \in H$

$$\langle \xi - \operatorname{proj}_{\Gamma(t)} \xi,\ \operatorname{proj}_{\Gamma(t)} \xi - x \rangle \geqslant 0\ ;$$

prenant $\xi = x$, on obtient $x = \operatorname{proj}_{\Gamma(t)} x$, soit $x \in \Gamma(t)$.

3. – Somme de familles mesurables.

Dans ce paragraphe on étudie le problème suivant: étant données deux familles mesurables $t \to A(t)$ et $t \to B(t)$ d'opérateurs maximaux monotones dans un Hilbert séparable H, l'application $t \to A(t) + B(t)$ est-elle encore mesurable? Pour rester dans le cadre où nous sommes placés, nous ferons l'hypothèse $A(t) + B(t)$ maximal monotone.

Dans le cas où $A(t) = \partial\varphi^t$ et $B(t) = \partial\psi^t$ sont des sous-différentiels de fonctions convexes sci, la condition $A(t) + B(t)$ maximal monotone se traduit par l'égalité $\partial\varphi^t + \partial\psi^t = \partial(\varphi^t + \psi^t)$. D'après le Théorème 2.3, Remarque 2.4 on peut supposer que φ et ψ sont des intégrandes normales; il s'ensuit que $\varphi + \psi$ est une intégrande normale et toujours d'après le même Théorème que la famille $(\partial\varphi^t + \partial\psi^t)$, $t \in T$, est mesurable.

Dégageons tout d'abord le lemme suivant:

LEMME 2.5. – *Soient A, B, $A + B$ des opérateurs maximaux monotones. Alors*

$$A + B_\lambda \to A + B \quad \textit{dans } \mathcal{M}_R .$$

DÉMONSTRATION. – On sait déjà que $B_\lambda \to B$; soit $x_\lambda = (I + A + B_\lambda)^{-1} y$ où y est donné dans X; on a donc $x_\lambda + Ax_\lambda + B_\lambda x_\lambda \in y$; or d'après le Théorème de Brezis-Crandall-Pazy, la condition $A + B$ maximal monotone entraîne que x_λ tend vers x solution de $x + Ax + Bx \in y$, soit $x = (I + A + B)^{-1} y$.

THÉORÈME 2.4. – *Soit $(T, \mathcal{C}, \mu)$ un espace mesuré, $\mu \geqslant 0$ σ-finie et $\mathcal{C}$ μ-complète et soit $(A(t))_{t\in T}$ et $(B(t))_{t\in T}$ deux familles mesurables d'opérateurs maximaux monotones telles que pour tout t de T, $A(t) + B(t)$ soit encore maximal monotone; alors la famille $(A(t) + B(t))_{t\in T}$ est mesurable.*

DÉMONSTRATION. – Soit $\lambda > 0$ fixé; montrons que la famille $(A(t) + B_\lambda(t))_{t\in T}$ est mesurable: soit $(\sigma_n(t))_{n\in N}$ une famille dénombrable dense de sections mesurables de l'application $t \to A(t)$, $\sigma_n(t) = (x_n(t), y_n(t))$; on vérifie que $(x_n(\cdot), y_n(\cdot) + B_\lambda(\cdot, x_n(\cdot)))_{n\in N}$ est une famille dénombrable dense de sections mesurables de l'application $t \to A(t) + B_\lambda(t)$; en effet soit $(x, y) \in A(t) + B_\lambda(t)$ alors $y - B_\lambda(t)x \in A(t)x$ et l'on peut trouver un indice n tel que $|x - x_n(t)| \leqslant \varepsilon$, $|y - B_\lambda(t)x - y_n(t)| \leqslant \varepsilon$.

Par conséquent

$$|y - y_n(t) - B_\lambda(t, x_n(t))| \leqslant |y - y_n(t) - B_\lambda(t, x)| + |B_\lambda(t, x_n(t)) - B_\lambda(t, x)|$$
$$\leqslant \varepsilon + \frac{1}{\lambda}|x - x_n(t)| < \varepsilon\left(1 + \frac{1}{\lambda}\right).$$

Toujours d'après le Théorème A, on en déduit la mesurabilité de la famille d'opérateurs maximaux monotones $(A(t) + B_\lambda(t))_{t\in T}$, c'est-à-dire la mesurabilité de l'application $t \to A(t) + B_\lambda(t)$ de T dans $\mathcal{M}_R$; et donc d'après le Lemme 2.5, l'application $t \to A(t) + B(t)$ comme limite simple d'applications mesurables, est mesurable de T dans $\mathcal{M}_R$.

Nous dégageons de la démonstration du Théorème 2.4, un lemme général dont nous nous servirons par la suite:

LEMME 2.6. – *Soient $(A^n)_{n\in N}$, $(B^n)_{n\in N}$, A^n, B^n m-accrétif. On suppose que $A^n \to A$ et $B^n \to B$ dans $\mathcal{C}_R$; alors $\forall\lambda > 0$, $A^n + B^n_\lambda \to A + B_\lambda$.*

DÉMONSTRATION. – Soit $(x, y) \in A + B_\lambda$, $y - B_\lambda x \in Ax$; il existe donc $(x^n, z^n) \in A^n$ $x^n \to x$, $z^n \to y - B_\lambda x$.

Posons $y_n = z^n + B_\lambda^n x_n \in (A^n + B_\lambda^n) x_n$; on a d'une part $x^n \to x$ et d'autre part

$$\begin{aligned}|y_n - y| &= |z^n + B_\lambda^n x_n - y| \\ &\leqslant |z^n - (y - B_\lambda x)| + |B_\lambda x - B_\lambda^n x| + |B_\lambda^n x - B_\lambda^n x_n| \\ &\leqslant |z^n - (y - B_\lambda x)| + |B_\lambda x - B_\lambda^n x| + \frac{1}{\lambda}|x_n - x|\end{aligned}$$

et donc

$$y_n \to y .$$

REMARQUE 2.2. – 1) La démonstration du Théorème 2.4 ne se généralise pas directement au cas accrétif car la première partie utilise le Théorème de Brezis-Crandall-Pazy qui sous sa version accrétive (cf. BÉNILAN [6]) ne permet pas de conclure ici;

2) Le résultat du Théorème 2.4 se généralise trivialement en prenant $(A_i(t))_{i=1,\dots,n}$ une suite de familles mesurables d'opérateurs maximaux monotones et $(\alpha_l)_{l=1,\dots,n}$ une suite de réels $\geqslant 0$; alors la famille $\sum_{l=1}^{n} \alpha_i A_i(t)$ est encore mesurable (sous réserve que soient encore dans $\mathcal{M}$ toutes les sommes partielles).

CHAPITRE III

APPLICATION A L'ÉTUDE D'EQUATIONS D'ÉVOLUTION

Dans ce chapitre, on se propose d'établir le théorème abstrait 3.2 établissant l'existence de solution forte au problème

$$\text{(I)} \qquad \frac{du}{dt}(t) + A\big(t, u(t)\big) + B\big(t, u(t)\big) \ni f(t)$$

où $\big(A(t)\big)_{t\in[0,T]}$ désigne une famille d'opérateurs maximaux monotones et $\big(B(t)\big)_{t\in[0,T]}$ désigne une famille d'opérateurs monotones, dépendant mesurablement de t en un sens que l'on précisera, chaque $B(t)$ étant « dominé » par le $A(t)$ correspondant. Ce modèle est celui auquel conduit l'étude du problème de la chaleur non linéaire dans un domaine variable (cf. [3]).

La méthode consiste à prolonger chaque $B(t)$ en un opérateur maximal monotone $\tilde{B}(t)$ tout en préservant la mesurabilité de la famille prolongée $\big(\tilde{B}(t)\big)_{t\in[0,T]}$ (théorème 3.1); on étudie alors le problème (I) en passant par l'intermédiaire de

$$(\tilde{\text{I}}) \qquad \frac{du}{dt} + A\big(t, u(t)\big) + \tilde{B}\big(t, u(t)\big) \ni f(t) .$$

1. – Prolongement mesurable de familles mesurables d'opérateurs monotones.

Dans cette partie, on s'attache au problème suivant: étant donnée une famille $(B^t)_{t\in T}$ d'opérateurs monotones, dépendant mesurablement de t, en un sens à préciser, peut-on la prolonger en une famille mesurable $(\tilde{B}^t)_{t\in T}$ d'opérateurs maximaux monotones; c'est l'objet du Théorème 2.5, à l'élaboration duquel ont activement participé P. Bénilan et A. Damlamian.

DÉFINITION 3.1. – 1) Soit $(T, \mathcal{T})$ un espace mesurable et Γ une multiapplication à valeurs non vides de T dans un espace topologique X; on dira que Γ est mesurable si

$$\forall \mathcal{O} \text{ ouvert de } X, \qquad \{t \in T: \Gamma(t) \cap \mathcal{O} \neq \emptyset\} \in \mathcal{T}.$$

2) Une famille de multiapplication $(\Gamma(t))_{t\in T}$ de X dans X est dite mesurable si la multiapplication $t \to G(\Gamma(t))$ est mesurable de T dans $X \times X$; $\big(G(\Gamma(t)) = \{(x, y) \in X \times X;\ y \in \Gamma(t)x\}\big)$.

Remarquons que cette définition est compatible avec la définition 2.2.

REMARQUE 3.1. – Soit $(T, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré, μ positive σ-finie, $\mathcal{T}$ μ-complète et $t \to \Gamma(t)$ une multiapplication mesurable de T dans X espace métrique séparable alors $t \to \overline{\Gamma(t)}$ est mesurable (et satisfait à toutes les conditions équivalentes du Théorème A).

En effet, soit $x \in X$ fixé, $d(x, \overline{\Gamma(t)}) = d(x, \Gamma(t))$ donc

$$\begin{aligned}\{t \in T: d(x, \overline{\Gamma(t)}) < r\} &= \{t \in T: d(x, \Gamma(t)) < r\}\\ &= \{t \in T: \Gamma(t) \cap B(x, r) \neq \emptyset\} \in \mathcal{T}\end{aligned}$$

ce qui signifie $t \to d(x, \overline{\Gamma(t)})$ mesurable et donc $t \to \overline{\Gamma(t)}$ mesurable (Théorème A).

LEMME 3.1. – *Soit $(T, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré, μ positive σ-finie, $\mathcal{T}$ μ-complète et (X, d) espace métrique séparable complet. On se donne une famille d'applications continues $(F(t))_{t\in T}$, $F(t): D^t \to X$, D^t fermé dans X. On a les implications*:

(i) *La famille $(F(t))_{t\in T}$ est mesurable.*

(ii) *L'application $t \to D(t)$ est mesurable et pour toute application h univoque mesurable de T dans H telle que pour presque tout t, $h(t) \in D^t$, l'application $t \to F(t, h(t))$ est mesurable.*

(iii) *L'application $t \to D(t)$ est mesurable et pour tout x de X, l'application $t \to F(t, x)$ est mesurable $\big($i.e. $E_x = \{t \in T: x \in D^t\}$ est mesurable et $t \to F(t, x)$ est mesurable de E_x dans $X\big)$.*

(i) $\Leftrightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii).

Démonstration. – (i) $\Rightarrow$ (ii). Notons tout d'abord que, D^t fermé, entraîne que F^t est de graphe fermé dans $H \times H$; soit $\mathcal{O}$ borélien de X:

$$\{t \in T\colon D^t \cap \mathcal{O} \neq \emptyset\} = \mathrm{proj}_T\, \{G(F) \cap T \times \mathcal{O} \times X\}$$

et d'après le théorème de projection cet ensemble appartient à $\mathcal{C}$, ce qui exprime la mesurabilité de la multiapplication $t \to D^t$ (d'après le Théorème A).

La famille $(F(t))_{t\in T}$ étant mesurable, il existe une famille dénombrable $t \to (x_n(t), y_n(t))_{n\in N}$ d'applications mesurables de T dans $X \times X$ telles que pour tout t de T

$$G(F(t)) = \overline{\bigcup_{n\in N} (x_n(t),\, y_n(t))}\,.$$

Soit h une sélection mesurable de la multiapplication $t \mapsto D^t = \operatorname{dom} F(t)$; pour tout $n \in N$ posons

$$A_{k,n} = \left\{t \in T\colon d(h(t),\, x_k(t)) < \frac{1}{n}\right\}.$$

On a $T = \bigcup_{k\in N} A_{k,n}$; par un procédé standard, on fabrique à partir des $(A_{k,n})_{n\in N}$, une partition mesurable $(C_{k,n})_{k\in N}$ de T, avec

$$\forall t \in C_{k,n} \qquad d(h(t),\, x_k(t)) < \frac{1}{n}\,.$$

Posons $z_n(t) = x_k(t)$ si $t \in C_{k,n}$:

Alors $\forall t \in T$, $d(h(t), z_n(t)) < 1/n$ et par conséquent $\forall t \in T$, $z_n(t) \to h(t)$ dans X; d'autre part pour tout t on a $z_n(t) \in D^t$ et $F(t)$ étant continue sur D^t,

$$F(t,\, h(t)) = \lim_{n\to+\infty} F(t,\, z_n(t))\,.$$

La fonction $t \mapsto F(t, h(t))$, comme limite simple de fonctions mesurables, est donc mesurable.

(ii) $\Rightarrow$ (i). La multiapplication $t \to D^t$ étant mesurable à valeurs fermées, il existe $(x_n)_{n\in N}$ famille dénombrable d'applications mesurables de T dans X telles que $\forall t \in T$, $D^t = \overline{\bigcup x_n(t)}$; les applications $t \to F(t, x_n(t))$ sont mesurables par hypothèse et $t \mapsto h_n(t) = (x_n(t), F(t, x_n(t)))$ est mesurable de T dans $X \times X$; tenant compte du fait que $G(F^t) = \overline{\bigcup h_n(t)}$, on déduit la mesurabilité de la famille $(F(t))_{t\in T}$:

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Par définition $E_x = \{t \in T\colon D^t \cap \{x\} \neq \emptyset\}$ et donc (Théorème A), E_x appartient à $\mathcal{C}$; soit d'autre part $t \to h(t)$ une section mesurable de $t \to D^t$; la fonction g_x qui vaut $h(t)$ sur $\complement E_x$ et x sur E_x, est donc mesurable de T dans X et $g_x(t)$ appartient à D^t pour tout t de T; la function $t \to F(t, g_x(t))$ est donc mesurable; sa restriction à E_x, soit $t \to F(t, x)$, est donc mesurable.

REMARQUE 2.7. – 1) Dans le cas où $\forall t \in T$, Int $D^t \neq \emptyset$, où dans le cas $D^t = D$ indépendant de t on a (i) $\Leftrightarrow$ (ii) $\Leftrightarrow$ (iii); il suffit de reprendre le début de la démonstration du Théorème 2.2: on met en évidence une famille $(x_n(\cdot))_{n\in N}$ d'applications mesurables de T dans H telles que

$$\forall t \in T\,, \quad D^t = \overline{\bigcup \{x_n(t)\}} \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \boldsymbol{N}\,, \quad t \to F(t, x_n(t)) \text{ mesurable}\,.$$

On en déduit la mesurabilité de la famille $(F(t))_{t\in T}$.

2) Dans le cas où les $(F(t))_{t\in T}$ sont continue partout définies, on a (i) $\Leftrightarrow$ (ii) $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \forall x \in X$, $t \to F(t, x)$ mesurable.

3) L'implication (iii) $\Rightarrow$ (ii) est fausse en général: prenons $X = \boldsymbol{R}$, et $F(t)$ la fonction constante égale à $\alpha(t)$ sur un domaine réduit à deux points $\{t, t+1\}$, avec $t \to \alpha(t)$ non mesurable.

L'application $t \to \operatorname{dom} F(t) = \{t, t+1\}$ est bien mesurable; pour tout x de $\boldsymbol{R}$ l'application $t \to F(t, x)$ est définie sur un ensemble réduit à deux points $\{x, x-1\}$ et est donc continue; prenant $h(t) = t$, h est bien une section mesurable de $t \to \operatorname{dom} F(t)$ et pourtant $t \to F(t, h(t)) = \alpha(t)$ n'est pas mesurable.

PROPOSITION 3.1. – *Soit $(T, \mathcal{C}, \mu)$ μ positive σ-finie, $\mathcal{C}$ μ-complète, H un espace de Hilbert séparable et soit $(F(t))_{t\in T}$ une famille mesurable de contractions (non partout définies) de H dans H. Il existe alors une famille $(\tilde{F}(t))_{t\in T}$, mesurable, de contractions partout définies telle que pour tout t de T, $\tilde{F}(t)$ soit un prolongement de $F(t)$.*

DÉMONSTRATION. – Tout d'abord pour $x \in \overline{D(F(t))} = \overline{D^t}$ on pose $\overline{F(t)}(x) = \lim_{y\in D^t, y\to x} F(t)\,x$ qui est bien définie.

On a $G(\overline{F(t)}) = \overline{G(F(t))}$ et d'après la remarque 2.6 la famille $(\overline{T}(t))_{t\in T}$ est une famille mesurable de contractions, prolongeant la famille $(F(t))_{t\in T}$; on se ramène donc au cas où $F(t)$ est de graphe fermé.

Soit $(x_n)_{n\in N}$ dense dans H; il suffit de prolonger la famille $(F(t))_{t\in T}$ à $(x_n)_{n\in N}$ de telle sorte que $\forall n \in \boldsymbol{N}$, $t \to F(t, x_n)$ soit mesurable; on se donne donc un x_0 fixé dans X.

Nécessairement la valeur prise en x_0 par un prolongement de $F(t)$ doit appartenir à l'ensemble

$$U^t(x_0) = \{z \in H \colon d(z, F(t, \xi)) \leqslant d(x_0, \xi) \quad \forall \xi \in D^t\}\,.$$

D'après le Théorème VALENTINE-KINZBRAUN [18], l'ensemble $U^t(x_0)$ est non vide; notre problème consiste à montrer l'existence d'une section mesurable à la multiapplication $t \to U^t(x_0)$, ce qui revient à montrer, remarquant que $U^t(x_0)$ est un fermé, que la multiapplication $t \to U^t(x_0)$ est mesurable (Théorème A). Or la famille $(F(t))_{t\in T}$ étant mesurable, et $F(t)$ étant de graphe fermé pour tout t, il existe une famille $(x_n(\cdot))_{n\in N}$ d'applications mesurables telles que les applications $t \to F(t, x_n(t))$ soient mesurables, plus généralement, on peut considérer une famille mesurable $(T(t))_{t\in T}$ d'applications α-höldériennes d'un espace métrique séparable complet X dans un espace métrique séparable complet Y, pour lesquels on ait la propriété de prolongement (cf. référence communiquée par C. CASTAING, L. WILLIAMS, J. H. WELLS et J. L. HAYDEN [31]).

THÉORÈME 3.1. (H. Attouch, P. Benilan, A. Damlamian). – *Soit* $(T, \mathcal{T}, \mu)$ *un espace mesuré,* μ *positive* σ*-finie,* $\mathcal{T}$ μ*-complète et* H *un Hilbert séparable. Soit* $(B^t)_{t\in T}$ *une famille mesurable d'opérateurs monotones (dans* H*); il existe alors une famille* $(\tilde{B}^t)_{t\in T}$ *mesurable, d'opérateurs maximaux monotones (dans* H*), telle que pour tout* t *de* T, $\tilde{B}^t$ *soit un prolongement de* B^t.

DÉMONSTRATION. – On se ramène tout d'abord au cas B^t fermé, en prenant sa fermeture, opération qui conserve la monotonie et la mesurabilité de la famille B^t (Remarque 2.6); on utilise alors la méthode de Minty, (utilisant la transformation de Cayley); on pose

$$F^t = \{(x+y,\, x-y)/(x,y)\in B^t\}\,.$$

On vérifie aisément que F^t est, pour tout t, une contraction de graphe fermé définie sur $R(I+B^t)$. La famille $(F^t)_{t\in T}$ est mesurable: soit $(x_n(\cdot),\, y_n(\cdot))_{n\in N}$ une famille dénombrable d'applications mesurables de T dans $H\times H$ telle que

$$\forall t\in T \qquad B^t = \overline{\bigcup_{n\in N}\{(x_n(t),\, y_n(t))\}}\,;$$

posons $z_n(\cdot) = (x_n(\cdot)+y_n(\cdot),\, x_n(\cdot)-y_n(\cdot))$; les applications $z_n(\cdot)$ sont mesurables et

$$\forall t\in T \qquad F^t = \overline{\bigcup_{n\in N}\{z_n(t)\}}\,.$$

D'après la Proposition 2.2, il existe une famille $(\tilde{F}^t)_{t\in T}$ mesurable de contractions partout définies telle que pour tout t de T, $\tilde{F}^t$ prolonge F^t. On pose

$$\tilde{B}^t = \{(\tfrac{1}{2}(u+\tilde{F}^t u),\, \tfrac{1}{2}(u-\tilde{F}^t u));\, u\in H\}\,.$$

On vérifie que $\tilde{B}^t$ est un opérateur monotone et que pour tout t de T, $(I+\tilde{B}^t)^{-1} = \frac{1}{2}(I+\tilde{F}^t)$. D'après le Théorème 2.1, la famille $\tilde{B}^t$ est une famille mesurable d'opérateurs maximaux monotones; enfin $\tilde{B}^t$ prolonge B^t puisque

$$\begin{aligned}(x,y)\in B^t &\Rightarrow (x+y,\, x-y)\in F^t\\ &\Rightarrow (x+y,\, x-y)\in \tilde{F}^t\\ &\Rightarrow (x,y)\in \tilde{B}^t\,.\end{aligned}$$

2. – Théorèmes de perturbation.

DÉFINITION 3.2. – Soit $(A(t))_{t\in[0,T]}$ une famille d'opérateurs maximaux monotones; on dira que u est solution forte de $du/dt + A(t)u \ni f$; $u(0) = u_0$ où $f \in L^1(0, T; H)$ et $u_0 \in H$ si $u \in \mathcal{C}([0, T]; H) \cap W^{1,1}_{\mathrm{loc}}(]0, T[; H)$, $u(0) = u_0$ et p.p. $t \in]0, T[$ $(du/dt)(t) + A(t)\, u(t) \in f(t)$. Le graphe de l'opérateur solution faible est défini comme étant la fermeture du graphe de l'opérateur solution forte dans $\mathcal{C}([0, T]; H) \times L^1([0, T]; H)$.

Nous utiliserons l'estimation suivante (cf. BREZIS [8], Lemme 3.1).

Soient u et v solutions faibles de $du/dt + A(t)u \ni f$, $dv/dt + A(t)v \ni g$; on a

$$|u(t) - v(t)| \leqslant |u(s) - v(s)| + \int_s^t |f(\tau) - g(\tau)|\, d\tau \qquad \forall 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T.$$

On établit cette estimation pour des solutions fortes, et ensuite on passe trivialement à la limite. Nous allons tout d'abord énoncer un résultat concernant les perturbations lipschitziennes, qui sera utile pour la suite.

PROPOSITION 3.2. – *Soit $(A(t))_{t\in[0,T]}$ une famille d'opérateurs maximaux monotones dans H, espace de Hilbert réel et u_0 donné dans H tels que*

H_1) $\forall f \in L^1([0, T]; H)$, *il existe u unique solution forte (resp. faible) de*

$$\frac{du}{dt} + A(t)u \ni f; \qquad u(0) = u_0\,.$$

Soit d'autre part $(B(t))_{t\in]0,T]}$ une famille d'applications de H dans H telles que

H_2) *Pour presque tout $t \in [0, T]$, $D(B(t)) = \overline{D(A(t))}$, et il existe $k \in L^1(0, T)$ telle que $|B(t)x - B(t)y| \leqslant k(t)|x - y|$ p.p. $t \in]0, T[$, $\forall x, y \in \overline{D(A(t))}$.*

H_3) *L'application $t \to B(t)$ est mesurable.*

H_4) $\exists \omega \in L^\infty(0, T; H)$, $\omega(t) \in \overline{D(A(t))}$ p.p. t, *et* $t \to B(t, \omega(t)) \in L^1(0, T; H)$.

Alors $\forall f \in L^1(0, T; H)$, il existe u unique solution forte (resp. faible) de

$$\text{(I)} \qquad \frac{du}{dt} + A(t)u + B(t)u \ni f; \qquad u(0) = u_0\,.$$

REMARQUE 3.4. – On a supposé $D(B(t)) = \overline{D(A(t))}$ et $t \to B(t)$ mesurable; on aurait pu supposer, ce qui paraît plus naturel: H_2') $B(t)$ est lipschitzien de rapport $k(t)$ sur un domaine $D(B(t))$ contenant $\overline{D(A(t))}$ et l'application $t \to B(t)$ est mesurable; mais cette hypothèse se ramène en général à l'hypothèse H_2) puisque (I) est équivalent à

$$\frac{du}{dt} + A(t)u + B(t)/\overline{D(A^t)}\, u \ni f$$

et que le graphe dans $[0, T]\times(H\times H)$ de $B(t)/\overline{D(A^t)}$ est la trace du graphe de $B(t)$ sur le graphe de $t\to\overline{D(A^t)}\times H$ dans $[0, T]\times H\times H$.

Donc lorsque $t\to\overline{D(A^t)}$ est mesurable (ce qui est le cas lorsque $t\to A(t)$ est mesurable) l'hypothèse $\mathrm{H}_3')$, $\mathrm{H}_2)$ se ramène à l'hypothèse $\mathrm{H}_2)$, $\mathrm{H}_3)$.

Remarquons enfin, compte tenu du Lemme 2.7, que $\mathrm{H}_3)$ équivaut à:

$\forall x\colon [0, T]\to H$ mesurable univoque, telle que p.p. $t\in\,]0, T[$ $x(t)\in\overline{D(A(t))}$, l'application $t\to B(t, x(t))$ est mesurable.

Dans le cas où $\overline{D(A(t))}=\overline{D}$ est fixe, $\mathrm{H}_3)$ est équivalent à:

$\forall x\in\overline{D}$ $t\to B(t, x)$ est mesurable, et donc la Proposition 3.6 apparaît comme une généralisation partielle de la Proposition 1.12 P. BÉNILAN [5], et du Théorème 1.20 A. DAMLAMIAN [16].

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION 3.2. – On utilise une méthode de point fixe dans l'espace $E=\{u\in \mathcal{C}([0, T]; H)\colon \text{p.p. } t\in[0, T],\ u(t)\in\overline{D(A(t))}\}$ muni de la métrique de la convergence uniforme; soit S l'application de E dans E qui à u associe la solution forte (resp. faible) de

$$\frac{dv}{dt}+A(t)v\ni -B(t)u(t); \qquad u(0)=u_0$$

(on remarque que l'on peut se ramener au cas $f=0$); cette équation a bien une solution puisque $t\to B(t)\,u(t)$ est mesurable (d'après H_3 et le Lemme 2.7) et est majoré par:

$$|B(t)\,u(t)|\leqslant |B(t, \omega(t))|+k(t)|u(t)-\omega(t)|\,.$$

Il s'agit de montrer que l'application S admet un point fixe unique:

Soient u_1, $u_2\in E$, on a

$$\begin{aligned}|Su_1(t)-Su_2(t)|&\leqslant\int_0^t|B(\tau, u_1(\tau))-B(\tau, u_2(\tau))|\,d\tau\\&\leqslant\int_0^t k(\tau)|u_1(\tau)-u_2(\tau)|\,d\tau\end{aligned}$$

et donc par un argument classique

$$|S^n u_1(t)-S^n u_2(t)|\leqslant\frac{\|k\|_{L^1}^n}{n!}\|u_1-u_2\|_{L^\infty}\qquad \forall t\in[0, T]\,.$$

Il existe donc $n\in \boldsymbol{N}$ tel que S^n soit lipschitzienne de rapport strictement inférieur à un, de l'espace métrique complet E dans lui-même; d'où la conclusion.

THÉORÈME 3.2. – *Soit H un espace de Hilbert réel et $(A(t))_{t\in[0,T]}$ une famille d'opérateurs maximaux monotones dans H, tels que:*

H_1) *Il existe une mesure $dm = p\,dt$, p majorée et minorée par des constantes strictement positives, et ω continue telles que:*

$$\forall g \in L^2([0, T]; H), \qquad \forall u_0 \in D(A(0)),$$

il existe v unique, solution forte de

$$\frac{dv}{dt} + A(t, v(t)) \ni g(t); \qquad v(0) = u_0$$

avec en outre

$$\left|\frac{dv}{dt}\right|_{L^2(dm;H)} \leqslant |g|_{L^2(dm;H)} + \omega(|u_0|, |A(0)u_0|).$$

On se donne d'autre part une famille $(B(t))_{t\in[0,T]}$ d'opérateurs vérifiant:

H_2) *Pour presque tout t de $[0, T]$, $B(t)$ est un opérateur hémicontinu, de domaine convexe et il existe $k \in L^2(0, T; \boldsymbol{R}^+)$ telle que:*

$$\text{p.p. } t \in [0, T], \qquad \forall x, y \in D(B^t) \qquad \langle B(t)x - B(t)y, x - y\rangle + k(t)|x - y|^2 \geqslant 0.$$

H_3) *L'applisation $t \to \overline{B(t)}$ est mesurable.*

H_4) *On suppose enfin $B(t)$ dominé par $A(t)$:*

Il existe $\alpha < \frac{1}{2}$, $c \in L^2(0, T; \boldsymbol{R}^+)$ et d numérique croissante telles que

$$\text{p.p. } t \in [0, T], \qquad \forall x \in D(A^t) \qquad |B(t)x| \leqslant \alpha |A^0(t)x| + c(t)\, d(|x|).$$

CONCLUSION. – 1) Pour tout $f \in L^2(0, T; H)$ et $u_0 \in D(A(0))$, il existe u unique, solution de

$$\text{(I)} \qquad \begin{cases} \dfrac{du}{dt} + A(t)u(t) + B(t)u(t) \ni f(t) \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

De plus $du/dt \in L^2(0, T; H)$.

2) Supposons en outre que pour le problème non perturbé, il y a effet régula-

risant i.e.:

$$(H_1')\left\{\begin{array}{l}\text{Il existe une mesure } dm_1 = p_1\,dt, \text{ avec } p_1 \text{ positive bornée, minorée sur} \\ \text{tour } [\delta, T],\ \delta > 0 \text{ telle que:} \\ \qquad \forall g \in L^2(0, T; H)\,, \quad \forall v_0 \in \overline{D(A(0))}\,, \quad \exists v \in \mathcal{C}([0, T]; H) \\ \text{telle que } v(0) = v_0,\ \left(dv/dt \in L^1_{\text{pc}}(]0, T[; H)\right) \\ \qquad \dfrac{dv}{dt}(t) + A(t)v(t) \ni g(t) \qquad \text{p.p.}\,t \in [0, T] \\ \text{et} \\ \qquad \left|\dfrac{dv}{dt}\right|_{L^2([0,T];dm_1;H)} \leqslant |g|_{L^2([0,T];dm_1;H)} + \omega_1(|v_0|) \\ (\omega_1 \text{ continue fixée}).\end{array}\right.$$

Alors pour tout $f \in L^2(0, T; H)$ et $u_0 \in \overline{D(A(0))}$ il existe u unique solution de (I) avec $du/dt \in L^2(dm_1)$.

DÉMONSTRATION. – 1) On se ramène tout d'abord au cas $B(t)$ monotone: on écrit (I) sous la forme

$$\frac{dt}{du} + A(t)\,u(t) + B(t)\,u(t) + k(t)\,u(t) \ni f(t) + k(t)\,u(t)$$

et notant $B_1(t)x = B(t)x + k(t)x$, appliquant la Proposition 3.6, on se ramène à étudier

$$\frac{du}{dt} + A(t)u(t) + B_1\big(t, u(t)\big) \ni f(t)\,.$$

La famille d'opérateur $\big(B_1(t)\big)_{t\in[0,T]}$ est une famille d'opérateurs monotones vérifiant encore H_2), H_4); montrons que H_3) est encore satisfaite: on note tout d'abord que $\overline{B_1(t)} = \overline{B(t)} + k(t)I$.

En effet $(x, y) \in \overline{B_1(t)} \Leftrightarrow \exists (x_n, y_n) \in B_1(t)\ x_n \to x$,

$$y_n \to y \Leftrightarrow \exists (x_n, z_n) \in B(t) \qquad x_n \to x\,,$$

$$z_n \to y - k(t)x \Leftrightarrow \big(x, y - k(t)x\big) \in \overline{B(t)} \Leftrightarrow (x, y) \in \overline{B(t)} + k(t)I\,.$$

D'autre part l'application $t \to \overline{B(t)} + k(t)I$ est mesurable $\big($puisque si $(x_n(\cdot),$ $y_n(\cdot))_{n\in N}$ est une famille dénombrable dense de sections mesurables de l'application $t \to \overline{B(t)}$, la famille $\big(x_n(\cdot), y_n(\cdot) + k(\cdot)x_n(\cdot)\big)_{n\in N}$ forme encore une famille dénombrable dense de sections mesurables de l'application $t \to \overline{B(t)} + k(t)I\big)$.

2) On suppose donc $B(t)$ monotone; l'application $t \to \overline{B(t)}$ étant mesurable, on peut d'après le Théorème 3.1 la prolonger en une famille mesurable $\tilde{B}(t)$, d'opérateurs maximaux monotones.

3) On va étudier le problème $(\tilde{\mathrm{I}})$

$$(\tilde{\mathrm{I}}) \qquad \begin{cases} \dfrac{du}{dt} + A(t)u(t) + \tilde{B}(t)u(t) \ni f(t) \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

et montrer l'existence et l'unicité d'une solution u à $(\tilde{\mathrm{I}})$; on vérifiera ensuite que u est bien solution de (I); nous allons tout d'abord montrer la partie (1) de la conclusion. (On a $dm = p\,dt$ avec $O < c_1 \leqslant p(t) \leqslant c_2$, $\forall t \in [0, T]$) u_0 est fixé dans $D(A(0))$. A cet effet nous allon nous placer dans l'espace $\mathcal{H} = L^2([0, T]; H)$ le problème $(\tilde{\mathrm{I}})$ s'écrit:

$$\mathcal{A}u + \mathcal{B}u \ni f$$

où les opérateurs $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ de $\mathcal{H}$ sont définis par

$$a) \quad (u, g) \in \mathcal{A} \Leftrightarrow u \in W^{1,2}(0, T; H) \quad \left| \begin{array}{l} \dfrac{du}{dt}(t) + A(t)u(t) \ni g(t) \qquad \text{p.p.t;} \\ u(0) = u_0 \end{array} \right.$$

$$b) \quad (u, g) \in \mathcal{B} \Leftrightarrow \text{p.p.t} \in [0, T] \qquad g(t) \in \tilde{B}(t)u(t) .$$

L'unicité est évidente d'après la monotonie des opérateurs $A(t)$, $B(t)$; il s'agit de montrer que l'opérateur $\mathcal{A} + \mathcal{B}$ est surjectif dans $\mathcal{H}$; à cet effet, nous allons montrer que cet opérateur est maximal monotone, d'inverse localement borné; d'après H. BREZIS ([8], Théorème 2.3) on concluera à la surjectivité de cet opérateur.

1) $\mathcal{A}$ est maximal monotone: soient $(u_i, f_i) \in \mathcal{A}$ $(i = 1, 2)$:

$$\int_0^T \langle f_2 - f_1, u_2 - u_1 \rangle\, dt \geqslant \int_0^T \left\langle \frac{d}{dt}(u_2 - u_1),\ u_2 - u_1 \right\rangle dt \qquad \text{d'après la monotonie de } A(t)$$
$$\geqslant \frac{1}{2}\,|u_2(T) - u_1(T)|^2$$

et $\mathcal{A}$ est monotone.

Soit $f \in \mathcal{H}$; on cherche $u \in \mathcal{H}$, $u + \mathcal{A}u = f$, soit $u + du/dt + A(t)\,u \in f$; $u(0) = u_0$.

On écrit $du/dt + A(t)\,u \in f(t) - u$ que l'on résoud par point fixe toujours d'après la Proposition 3.6.

2) $\mathcal{B}$ est maximal monotone.

$\mathcal{B}$ est évidemment monotone; soit $f \in \mathcal{H}$, on cherche $u \in \mathcal{H}$, $u + \mathcal{B}u = f$ soit

$$\text{p.p. } t \in [0, T] \qquad u(t) + \tilde{B}(t, u(t)) \ni f(t) .$$

Nécessairement $u(t) = (I + \tilde{B}(t,\cdot))^{-1}f(t)$ et $u(t)$ est mesurable; pour vérifier que $u \in \mathcal{H}$ il suffit en fait de montrer que $\mathcal{B}$ est non vide; puisque si $g_0 \in \mathcal{B}v_0$, $v_0 + \mathcal{B}v_0 \ni g_0 + v_0$ i.e. $(I + \mathcal{B})^{-1}(g_0 + v_0) = v_0$, l'on aura p.p. $t \in [0, T]$ $|u(t) - v_0(t)| \leqslant |f(t) - (g_0(t) + v_0(t))|$ et donc u sera dans $\mathcal{H}$. Or d'après H_1) il existe $b \in W^{1,2}(0, T; H)$ et $h \in L^2(0, T; H)$ tels que p.p. $t \in [0, T]$ $h(t) \in A(t)b(t)$. Il suffit de prendre $h = -db/dt$ où $db/dt + A(t)\,b \in 0$; d'après H_4) on aura

$$\begin{aligned}|\tilde{B}^0(t, b(t))| &\leqslant |B(t, b(t))|\\ &\leqslant \alpha|A(t)^0 b(t)| + c(t)\,d(|b|_\infty)\\ &\leqslant \alpha|h(t)| + c(t)\,d(|b|_\infty)\,.\end{aligned}$$

Or $t \to \tilde{B}^0(t, b(t))$ est mesurable (comme limite lorsque $\lambda \to 0$ de $t \to \tilde{B}_\lambda(t, b(t))$).

3) $\mathcal{A} + \mathcal{B}$ est maximal monotone ($\mathcal{B}$ est dominé par $\mathcal{A}$).

On ne peut pas montrer directement que $\mathcal{B}$ est dominé par $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{H} = L^2(0, T; H)$, ceci à cause de la généralité des hypothèses H_1 et H_4): si l'on suppose $dm = dt$ et d lipschitzienne, étant donné $f \in \mathcal{A}$, on aura:

Tout d'abord on note que $(\mathcal{B}^0 u)(t) = \tilde{\mathcal{B}}^0(t)\,u(t)$ p.p. $t \in [0, T]$ et donc p.p. $t \in [0, T]$,

$$\begin{aligned}|\mathcal{B}^0 u(t)| = |\tilde{B}^0(t)u(t)| \leqslant |B(t)u(t)| \quad &\text{puisque } u(t) \in D(A(t)) \subset D(B(t))\\ &\leqslant \alpha|A^0(t)u(t)| + c(t)d(|u(t)|) \qquad \text{d'après } \mathrm{H}_4)\\ &\leqslant \alpha\left|f(t) - \frac{du}{dt}\right| + c(t)\,d(|u(t)|)\,.\end{aligned}$$

On obtient alors en intégrant et tenant compte de H_1):

$$|\mathcal{B}^0 u|_{\mathcal{H}} \leqslant 2\alpha|f|_{\mathcal{H}} + d_1(|u|_{\mathcal{H}}) \qquad \forall f \in Au$$

et donc

$$|\mathcal{B}^0 u|_{\mathcal{H}} \leqslant 2\alpha|A^0\, u|_{\mathcal{H}} + d_1(|u|_{\mathcal{H}})\,.$$

Sinon, dans le cas général on montre que $(\mathcal{B}_\lambda u_\lambda)_{\lambda>0}$ reste borné dans $\mathcal{H}$ où

$$u_\lambda + \mathcal{A}u_\lambda + \mathcal{B}_\lambda u_\lambda \ni f\,.$$

$$\begin{aligned}\text{p.p.t} \in]0, T[, \quad |\tilde{B}_\lambda(t, u_\lambda(t)(| &\leqslant |\tilde{B}^0(t, u_\lambda(t))|\\ &\leqslant |B(t, u_\lambda(t))| \quad (\text{puisque } u_\lambda(t) \in D(A(t)) \subset D(B(t)) \text{ p.p.t.})\\ &\leqslant \alpha|A^0(t, u_\lambda(t))| + c(t)d(|u_\lambda(t)|)\\ &\leqslant \alpha\left|f(t) - \tilde{B}_\lambda(t, u_\lambda(t)) - \frac{du_\lambda}{dt}(t) - u_\lambda(t)\right| + c(t)\,d(|u_\lambda(t)|)\end{aligned}$$

$$|\tilde{B}_\lambda(t, u_\lambda(t))| \leqslant \frac{\alpha}{1-\alpha}\left[|f(t)| + |u_\lambda(t)| + \left|\frac{du_\lambda}{dt}\right|\right] + \frac{1}{1-\alpha}c(t)\,d(|u_\lambda(t)|)\,.$$

Or $(du_\lambda/dt) + A(t, u_\lambda(t)) \ni f(t) - u_\lambda(t) - \tilde{B}_\lambda(t, u_\lambda(t))$ et d'après H_1), (ω_0 réel fixé):

$$\left|\frac{du_\lambda}{dt}\right|_{L^2(dm)} \leqslant |f - u_\lambda - \tilde{B}_\lambda(\cdot, u_\lambda(\cdot))|_{L^2(dm)} + \omega_0$$

$$|\tilde{B}_\lambda(t, u_\lambda(t))|_{L^2(dm)} \leqslant \frac{\alpha}{1-\alpha}[2|f|_{L^2(dm)} + 2|u_\lambda|_{L^2(dm)} + |\tilde{B}_\lambda(t, u_\lambda(t))|_{L^2(dm)} + \omega_0] + \frac{1}{1-\alpha}|c(\cdot)\, d(|u_\lambda(\cdot)|)_{L^2(dm)}.$$

Soit

$$c_1|\tilde{B}_\lambda(t, u_\lambda(t))|_{\mathcal{H}} \leqslant \frac{\alpha}{1-2\alpha}[2|f|_{L^2(dm)} + 2|u_\lambda|_{L^2(dm)} + \omega_0] + \frac{1}{1-2\alpha}\,|c(\cdot)\, d(|u_\lambda(\cdot)|)|_{L^2(dm)}.$$

Reste à montrer que $\{u_\lambda(t)\}_{\substack{t\in[0,T]\\ \lambda>0}}$ reste borné: notant toujours, $b \in W^{1,2}$,

$$\left|\begin{array}{l} \dfrac{db}{dt} + A(t)\,b \ni 0 \\ b(0) = u_0\,, \end{array}\right.$$

on a

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_\lambda(t) - b(t)|^2 + \langle A(t, u_\lambda(t)) - A(t, b(t)), u_\lambda(t) - b(t)\rangle + \\ + \langle \tilde{B}_\lambda(t, u_\lambda(t)) + u_\lambda(t), u_\lambda(yt) - b(t)\rangle \leqslant |f(t)||u_\lambda(t) - b(t)|$$

d'où utilisant la monotonie de $A(t)$ et $\tilde{B}_\lambda(t)$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_\lambda(t) - b(t)|^2 \leqslant |u_\lambda(t) - b(t)|[|f(t)| + |\tilde{B}_\lambda(t, b(t))| + |b(t)|]$$

et l'on conclut en notant

$$|\tilde{B}_\lambda(t, b(t))| \leqslant |\tilde{B}^0(t, b(t))| \leqslant \alpha\left|\frac{db}{dt}\right| + c(t)\, d(|b|_\infty)\,.$$

4) $(\mathcal{A} + \mathcal{B})^{-1}$ est localement borné.

Soit donc $\mathcal{A}u + \mathcal{B}u \ni f$; il s'agit d'obtenir une estimation sur $|u|_{\mathcal{H}}$ ne faisant intervenir que $|f|_{\mathcal{H}}$: il suffit de reprendre le calcul précédent

$$\left\{\begin{array}{ll} \dfrac{du}{dt} + A(t, u(t)) + \tilde{B}(t, u(t)) \ni f(t) & u(0) = u_0 \\ \dfrac{db}{dt} + A(t, b(t)) \ni 0 & b(0) = u_0 \end{array}\right.$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u(t) - b(t)|^2 + \langle A(t, u(t)) - A(t, b(t)), u(t) - b(t)\rangle + \\ + \langle \tilde{B}(t, u(t)) - B(t, b(t)), u(t) - b(t)\rangle \leqslant |u(t) - b(t)|[|f(t)| + |B(t, b(t))|]\,.$$

Soit

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u(t)-b(t)|^2 \leqslant |u(t)-b(t)|\left[|f(t)|+\alpha\left|\frac{db}{dt}\right|+c(t)\,d(|b|_\infty)\right].$$

D'où

$$|u|_\infty \leqslant |b|_\infty + |f|_1 + \alpha\left|\frac{db}{dt}\right|_1 + d(|b|_\infty)\,|c|_1 .$$

On conclut donc que $\mathcal{A}+\mathcal{B}$ est surjectif dans $\mathcal{H}=L^2([0,T];H)$ et pour tout f dans $L^2([0,T];H)$, on trouve donc $u\in W^{1,2}(0,T;H)$, $u(0)=u_0$, unique solution de

$$\frac{du}{dt}+A(t,u(t))+\tilde{B}(t,u(t))\ni f(t)\,.$$

5) On revient au problème initial et l'on conclut à l'aide du lemme suivant:

LEMME 3.2. – *Soit A maximal monotone et B monotone hémicontinu de domaine convexe, $D(B)\supset D(A)$. Alors pour tout prolongement monotone $\tilde{B}$ de B on a $A+\tilde{B}=A+B$.*

DÉMONSTRATION. – On a $A+\tilde{B}\supset A+B$; montrons l'inclusion inverse; soit $x\in D(A)$ et $y\in Ax+\tilde{B}x$; alors $y=y_1+y_2$, $y_1\in Ax$, $y_2\in\tilde{B}x$.

D'après le monotonie de $\tilde{B}$

$$\langle y_2-B\xi, x-\xi\rangle\geqslant 0 \qquad \forall\xi\in D(B)\,.$$

Posons $\xi=x+t(\xi_1-x)$ où $\xi_1\in D(B)$; remplaçant ξ par sa valeur et divisant par $t>0$,

$$\langle y_2-B(x+t(\xi_1-x)), x-\xi_1\rangle\geqslant 0 \qquad \forall\xi_1\in D(B)$$

et faisant tendre t vers zéro

$$\langle y_2-Bx, x-\xi_1\rangle\geqslant 0 \qquad \forall\xi_1\in D(B)\;;$$

d'autre part, d'après la monotonie de A

$$\langle y_1-\eta_1, x-\xi_1\rangle\geqslant 0 \qquad \forall(\xi_1,\eta_1)\in D(A)\;;$$

ajoutant ces deux inégalités, d'après la maximalité de A, $y\in Ax+Bx$.

REMARQUE 3.5. – *a*) On trouve $u\in W^{1,2}(0,T;H)$ telle que p.p. $t\in[0,T]$ $du/dt+A(t,u(t))+B(t,u(t))\ni f(t)$. Mais a priori on ne sait rien sur l'application $t\to B(t,u(t))$; il y a cependant un cas où l'on peut affirmer que cette application est dans

$L^2(0, T; H)$: si l'on suppose que presque pour tout t, $B(t)$ est de domaine dense dans H alors p.p. t $B(t, u(t)) = \tilde{B}(t, u(t))$. En effet soit $x \in D(B(t))$ et $y \in \tilde{B}(t)x$: d'après le calcul précédent $\langle y - B(t)x, x - \xi\rangle \geqslant 0$ pour tout $\xi \in D(B(t))$, si $D(B(t))$ est dense cela entraîne $y = B(t)x$.

Sinon dans le cas général si l'on veut que l'application $t \to B(t, u(t))$ soit dans $L^2(0, T; H)$ il faut faire l'hypothèse supplémentaire:

H_3') $\forall u \in W^{1,2}(0, T; H)$, telle que presque pour tout t de $[0, T]$ $u(t) \in D(A(t))$,

l'application $t \to B(t, u(t))$ est mesurable. En effet, on a en plus l'estimation

$$|B(t, u(t))| \leqslant \alpha |A^0(t, u(t))| + c(t)\, d(|u|_\infty)$$
$$\leqslant \alpha \left[|f(t)| + |B(t, u(t))| + \left|\frac{du}{dt}\right|\right] \leqslant \frac{\alpha}{1-\alpha}\left[|f(t)| + \left|\frac{du}{dt}\right|\right].$$

b) L'hypothèse H_4) est assez facile à vérifier dans la pratique: il suffit de montrer l'existence d'une famille dénombrable dense de sections mesurables à l'application $t \to B(t)$; dans la pratique (cf. [3], ATTOUCH-DAMLAMIAN; problème de la chaleur non linéaire) on prendra souvent $H = L^2(\Omega)$ et des applications constantes à valeurs dans $D(\Omega)$.

6) On fait donc en plus l'hypothèse H_1').

Soit $u_0 \in \overline{D(A(0))}$ et $u_{0n} \in D(A(0))$, $u_{0n} \to u_0$ dans H; soit u_n la solution de

$$\left|\begin{array}{l} \dfrac{du_n}{dt} + A(t)u_n(t) + B(t)u_n(t) \ni f(t)\,. \\ u_n(0) = u_{0n} \end{array}\right.$$

Utilisant la monotonie des opérateurs $A(t)$ et $B(t)$ on obtient

$$|u_n - u_m|_\infty \leqslant |u_{0n} - u_{0m}|$$

et donc

$$u_n \to u \qquad \text{dans} \qquad \mathcal{C}([0, T]; H)\,.$$

D'autre part

$$\left|\begin{array}{l} \dfrac{du_n}{dt} + A(t)u_n(t) \ni f(t) - \tilde{B}(t)u_n(t) \\ u_n(0) = u_{0n} \end{array}\right.$$

Reprenant le calcul du 3), notant $d = \sup\limits_{\substack{n\in N \\ t\in[0,T]}} d(|u_n(t)|)$ et $\omega_1 = \sup\limits_{n\in N} \omega_1(|u_{0n}|)$, on obtient

$$\left|\frac{du_n}{dt}\right|_{L^2(dm_1)} \leqslant |f(t) - \tilde{B}(t)u_n(t)|_{L^2(dm_1)} + \omega_1$$

et

$$|\tilde{B}(t)u_n(t)|_{L^2(dm_1)} \leqslant \frac{\alpha}{1-2\alpha}[2|f|+\omega_1] + \frac{d}{1-2\alpha}|c|_{L^2(dm_1)}$$

d'où

$$\left|\frac{du_n}{dt}\right|_{L^2(dm_1)} \leqslant C \quad \text{et donc} \quad \left|\frac{du_n}{dt}\right|_{L^2([\delta,T];H)} \leqslant C.$$

On termine alors de façon classique en utilisant la demi-fermeture de l'opérateur prolongement à $L^2([\delta, T]; H)$ de la famille de maximaux monotones $(A(t)+B(t))_{t\in[0,T]}$.

REMARQUE 3.5. – Comme dans la Proposition 3.6, on aurait pu faire l'hypothèse H_3') $t \to \overline{B(t)}/\overline{D(A^t)}$ mesurable; la démonstration aurait été en tout point identique; on remarque encore que H_3') est conséquence de H_3) lorsque $t \to \overline{D(A^t)}$ est mesurable.

BIBLIOGRAPHIE

[0] H. ATTOUCH, *Thèse: E.D.P. associées à des familles de sous-différentiels*, Paris VI (1976).

[1] H. ATTOUCH, *Méthode du produit scalaire variable*, Séminaire sur les semi-groupes et les équations d'évolution (1972-74), Publications Mathématiques d'Orsay.

[2] H. ATTOUCH, *Convergence de fonctions convexes, des sous-différentiels et semi-groupes associés*, Compt. Rend. Acad. Sci. (1976).

[3] H. ATTOUCH - A. DAMLAMIAN, *Problèmes d'évolution dans les Hilberts et applications*, Journal de Mathématiques pures et appliquées, **54** (1975), pp. 53-74.

[4] P. BENILAN, *Equations d'évolution dans un espace de Banach quelconque et applications*, Thèse, Publications Mathématique d'Orsay no. 25 (1972).

[5] P. BENILAN, *Cours de 3e cycle*, Paris VI, 1973-74 et 1974-75.

[6] C. BERGE, *Espaces topologiques. Fonctions multivoques*, Dunod.

[7] H. BERLIOCCHI - J. M. LASRY, *Integrandes normales et mesures paramétrées en calcul des variations*, Bull. Soc. Math. France, **101** (1973), pp. 129-184.

[8] H. BREZIS, *Opérateurs maximaux monotones et semi-groupes de contractions dans les espaces de Hilbert*, Lecture Notes 5, North-Holland (1972).

[9] H. BREZIS, *New results concerning monotone opérators and nonlinear semi-groups*, RIMS, Kyoto University (1975).

[10] H. BREZIS, *Cours de 3e cycle*, Paris VI, 1974-75 et 1971-72.

[11] H. BREZIS - A. PAZY, *Convergence and approximation of nonlinear semi-groups in Banach spaces*, J. Funct. Anal. (1971).

[12] C. CASTAING, *Sur les multi-applications mesurables*, Revue Inf. Rech. Op., **1** (1967), pp. 91-126.

[13] C. CASTAING, *Intégrandes convexes duales*, Séminaire d'Analyse Convexe, Montpellier, 1973, exposé no. 6.

[14] C. CASTAING, *Problèmes de mesurabilité liés aux opérateurs monotones*, Séminaire d'Analyse Convexe, Montpellier, 1975, exposé no. 1.

[15] C. CASTAING - M. VALADIER, *Livre de synthèse sur les multiapplications mesurables et leurs applications*, à paraître.

[16] A. DAMLAMIAN, *Nonlinear evolution equations with variable norm*, Thesis Harvard.

[17] J. L. JOLY, *Une famille de topologies et de convergences sur l'ensemble des fonctionnelles convexes*, Thèse, Grenoble (1970).
[18] G. MINTY, *On the extension of Lipschitz-Hölder continuous and monotone functions*, Bull. Amer. Math. Soc., **76** (1970), pp. 334-339.
[19] J. J. MOREAU, *Fonctionnelles convexes*, Séminaire sur les équations aux dérivées partielles II, Collège de France, 1966-67.
[20] J. J. MOREAU, *Proximité et dualité dans un espace Hilbertien*, Bull. Soc. Math. France, **93** (1965), pp. 273-299.
[21] U. MOSCO, *Convergence of convex sets and of solutions of variational inequalities*, Advances Math., **3** (1969), pp. 510-585.
[22] U. MOSCO, *On the continuity of the Young-Fenchel transformation*, Journal of Math. Analysis and Appl., **35** (1971), pp. 518-535.
[23] U. MOSCO, *Cours au C.I.M.E.*
[24] R. ROBERT, *Généralisation aux opérateurs monotones des théorèmes de différentiabilité d'Asplund et application à la dépendance continue des solutions de certaines équations non linéaires*, à paraître.
[25] R. T. ROCKAFELLAR, *Integrals which are convex functionals*, Pacific J. Math., **24** (1968), pp. 525-539.
[26] R. T. ROCKAFELLAR, *Mesurable dependance of convex sets and functions on parameters*, J. Math. Anal. Appl., **28** (1969), pp. 4-25.
[27] R. T. ROCKAFELLAR, *Convex-integral-functionals and duality*, Contributions to nonlinear functional analysis, Academic Press (1971), pp. 215-236.
[28] M. F. SAINTE-BEUVE, *Sur la généralisation d'un théorème de section mesurable de Von Neumann-Aumann*, Compt. Rend. Acad. Sci., **276** (1973), pp. 1297-1300.
[29] G. SALINETTI - R. WETS, *On the relations between two types of convergence for convex functions*, à paraître.
[30] L. TARTAR, *Convergence d'opérateurs différentiels.*
[31] L. WILLIAMS - J. H. WELLS - T. L. HAYDEN, *On the existence of Lipschitz-Hölder maps on L^p spaces*, Studia Mathematica, **39** (1971).