Sulla rappresentazione delle funzioni di variabile bicomplexa totalmente derivabili.

Memoria di NICOLÒ SPAMPINATO (a Catania).

Sunto. - *Si studiano le superficie e le trasformazioni caratteristiche dell' S_4 complesso. immagini dei legami e delle trasformazioni su due variabili bicomplesse, ottenute con funzioni totalmente derivabili.*

In una importante Memoria ⁽¹⁾, BENIAMINO SEGRE ha studiato geometricamente i *legami analitici* e le *trasformazioni analitiche* su due variabili complesse, che danno luogo, nell' S_4 rappresentativo di queste coppie di variabili, alle *superficie caratteristiche* e alle *trasformazioni pseudoconformi*.

L'idea semplificatrice che il SEGRE ha avuto è stata quella di non restringersi a considerare nell' S_4 soltanto elementi reali, ma anche quelli immaginari e ha ricordato, in proposito, che tale estensione nell' S_4 rappresentativo è stata fatta da CORRADO SEGRE, quando ha introdotto nel piano complesso i punti bicomplessi ⁽²⁾, ed equivale a prolungare nel corpo complesso le componenti reali delle coppie di variabili complesse, ovvero a considerare *coppie di variabili bicomplesse* anzichè coppie di variabili complesse ⁽³⁾.

Si osservi ora che se la variabile complessa y è funzione olomorfa della variabile complessa x , prolungando le componenti reali di x e y nel corpo complesso, cioè prolungando le variabili x e y nell'algebra dei numeri bicomplessi, si ottiene la variabile *bicomplexa* y funzione olomorfa secondo

⁽¹⁾ B. SEGRE. *Questioni geometriche legate alla teoria delle funzioni di due variabili complesse* [« Rendiconti del Seminario Matematico della R. Università di Roma », Vol. VII. Parte II, 1930-31-X, pp. 59-107].

⁽²⁾ C. SEGRE, *Sulle rappresentazioni reali delle forme complesse e gli enti iperalgebrici* [« Mathematische Annalen », XL Band (1892), pp. 413-467].

⁽³⁾ Si veda in proposito la mia nota: *I punti bicomplessi e le varietà iperalgebriche del SEGRE* [« Esercitazioni Matematiche », Vol. VIII, pp. 67-76, « Circolo Matematico di Catania »; 1935-XIII].

SCORZA DRAGONI ⁽⁴⁾ della variabile *bicomplexa* x . Ne segue che, corrispondentemente, i *legami analitici* e le *trasformazioni analitiche* su due variabili complesse si prolungano nei *legami* e nelle *trasformazioni su due variabili bicomplesse ottenute con funzioni oloforme secondo SCORZA DRAGONI*. Pertanto questi legami e queste trasformazioni danno luogo, nell' S_4 *complesso* rappresentativo, alle superficie e alle trasformazioni che generalizzano le superficie caratteristiche e le trasformazioni pseudoconformi dell' S_4 *reale*, e che chiameremo superficie caratteristiche e trasformazioni caratteristiche dell' S_4 *complesso*.

In una nota in corso di stampa nei « Rendiconti della R. Accademia dei Lincei » ho dimostrato che le funzioni di variabile bicomplexa oloforme secondo SCORZA DRAGONI coincidono con le funzioni, nell'algebra dei numeri bicompleksi, *totalmente derivabili* ovvero con le funzioni *a derivata caratteristica unica*. Da tale nota risulta manifesta la convenienza di usare nello studio di dette funzioni il sistema di unità che mette in evidenza la riducibilità dell'algebra dei numeri bicompleksi.

A riguardo si osservi che il SEVERI nell'applicare il *metodo* che chiama *del passaggio dal reale al complesso* ⁽⁵⁾ per la risoluzione generale del problema di DIRICHLET per le funzioni biarmoniche, eseguisce la seguente trasformazione sulle due coppie di variabili complesse (x_1, x_2) , $(x, \bar{x})$:

$$(1) \quad \begin{cases} x = x_1 + ix_2 \\ \bar{x} = x_1 - ix_2 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = (x + \bar{x})/2 \\ x_2 = (x - \bar{x})/2 \end{cases}$$

Ebbene, le (1) sono le relazioni che intercedono fra le coordinate x_1, x_2 e $x, \bar{x}$ di uno stesso numero bicomplesso nei due sistemi di unità u, v e v_1, v_2 con le seguenti tabelle di moltiplicazione:

$$(2) \quad u^2 = u, \quad uv = vu = v, \quad v^2 = -u$$

$$(3) \quad v_1^2 = v_1, \quad v_1 v_2 = v_2 v_1 = 0, \quad v_2^2 = v_2.$$

Sicchè quando dalle variabili complesse x_1 e x_2 si passa alle variabili complesse x e $\bar{x}$, si viene ad esprimere la variabile *bicomplexa* $z = x_1 u + x_2 v$ (*prolungamento* della variabile complessa $x_1 + ix_2$, corrispondente al prolungamento dei numeri reali x_1 e x_2 nel corpo complesso) nella forma $z = xv_1 + \bar{x}v_2$,

⁽⁴⁾ G. SCORZA DRAGONI, *Sulle funzioni oloforme di una variabile bicomplexa* [« Reale Accademia d'Italia », Memorie della Classe di Scienze, Vol. V, pp. 597-665].

⁽⁵⁾ F. SEVERI, *Risoluzione generale del problema di DIRICHLET per le funzioni biarmoniche* [« Rendiconti della R. Accademia dei Lincei », Vol. XIII, 1931, pp. 795-804].

cioè nel sistema di unità v_1, v_2 che è quello che mette in evidenza la riducibilità dell'algebra dei numeri bicomplexi.

Le superiori osservazioni spiegano perchè nello studio che faccio in questa Nota intorno alle superficie e alle trasformazioni caratteristiche dell' S_4 complesso, uso sistematicamente le unità v_1 e v_2 , ottenendo notevoli semplificazioni.

§ I.

1. Le superficie dell' S_4 complesso immagini delle funzioni di una variabile bicomplexa totalmente derivabili. — Sia C' l'algebra dei numeri bicomplexi

$$(1) \quad x = x_1 v_1 + x_2 v_2,$$

con v_1, v_2 unità soddisfacenti alle condizioni

$$(2) \quad v_1^2 = v_1, \quad v_1 v_2 = v_2 v_1 = 0, \quad v_2^2 = v_2$$

e x_1, x_2 numeri complessi. In corrispondenza ad una coppia di numeri bicomplexi (x, y) , posto per y

$$(3) \quad y = y_1 v_1 + y_2 v_2,$$

consideriamo in un S_4 complesso, dove si suppone fissato un sistema di coordinate non omogene, cartesiane, il punto $P(x_1, x_2, y_1, y_2)$, che si dirà immagine della coppia di numeri bicomplexi (x, y) .

Ciò posto, consideriamo una funzione $y(x)$ della variabile bicomplexa x , totalmente derivabile, cioè olomorfa secondo SCORZA DRAGONI, e quindi del tipo

$$[1] \quad y(x) = y_1(x_1) v_1 + y_2(x_2) v_2$$

con $y_1(x_1)$ e $y_2(x_2)$ funzioni olomorfe delle variabili complesse x_1 e x_2 rispettivamente.

Mentre x varia in un campo contenuto nel campo di esistenza della $y(x)$, il punto P dell' S_4 complesso immagine della coppia di numeri bicomplexi $(x, y(x))$ descriverà un pezzo della superficie, di equazioni

$$[2] \quad y_1 = y_1(x_1), \quad y_2 = y_2(x_2),$$

che si dirà la *superficie caratteristica dell' S_4 complesso*, immagine della funzione bicomplexa $y(x)$ totalmente derivabile.

In particolare, come immagini delle funzioni lineari totalmente derivabili

$$(4) \quad y(x) = (ax_1 + b)v_1 + (cx_2 + d)v_2$$

avremo i piani caratteristici dell' S_4 complesso di equazioni

$$(5) \quad y_1 = ax_1 + b, \quad y_2 = cx_2 + d.$$

2. Piani caratteristici dell' S_4 complesso. — Indichiamo con r' e r'' le rette improprie dei piani coordinati $\rho_1(x_1, y_1)$ e $\rho_2(x_2, y_2)$. La retta impropria del piano caratteristico di equazioni (5) s'appoggia alle rette sghembe r' e r'' e precisamente nei punti impropri delle due rette tracce, in detti piani, dei due iperpiani che le (5) rappresentano separatamente. Le stesse equazioni rappresentano nei due piani (x_1, y_1) e (x_2, y_2) tali tracce. Evidentemente il punto di appoggio in r' (r'') è distinto dal punto improprio Y_1 (Y_2) di y_1 (y_2). Viceversa ogni piano dell' S_4 , appoggiato ad r' e ad r'' in punti distinti da Y_1 e Y_2 , ha le equazioni del tipo (5) e quindi rappresenta una funzione lineare bicomplessa totalmente derivabile, cioè è un piano caratteristico. Si osservi che le eccezioni presentate da Y_1 e Y_2 provengono dal fatto che si considerano le funzioni $y(x)$ totalmente derivabili scritte sotto la forma esplicita [1]. Se alla [1] si sostituisce l'equazione

$$[1'] \quad H_1(x_1, y_1)v_1 + H_2(x_2, y_2)v_2 = 0$$

con H_1 e H_2 simboli di legami analitici fra x_1 e y_1 e fra x_2 e y_2 , e quindi alla (4) si sostituisce l'equazione

$$(4') \quad (a_1x_1 + b_1y_1 + c_1)v_1 + (a_2x_2 + b_2y_2 + c_2)v_2 = 0,$$

i casi di eccezione, che corrispondono ai valori $b_1 = 0$ e $b_2 = 0$ vengono ad essere eliminati. Abbiamo pertanto che:

I) *I piani caratteristici dell' S_4 complesso, cioè i piani immagini delle funzioni lineari della variabile bicomplessa x , derivabili totalmente, ovvero olomorfe secondo SCORZA DRAGONI, sono tutti e soli i piani appoggiati alle rette sghembe r' e r'' ⁽⁶⁾.*

3. Superficie caratteristiche dell' S_4 complesso. — Consideriamo nuovamente la superficie caratteristica F di equazioni [2], immagine della funzione $y(x)$, totalmente derivabile, data dalla [1]. La prima (seconda) delle equazioni [2] rappresenta nel piano coordinato $\rho_1(x_1, y_1)$ ($\rho_2(x_2, y_2)$) un pezzo di

⁽⁶⁾ Si noti che le rette r' e r'' , rette improprie dei piani coordinati ρ_1 e ρ_2 , coincidono con le rette r' e r'' , assi della congruenza K considerata dal SEGRE nella sua memoria citata in ⁽¹⁾, prefazione e n° 1. Nel sistema di coordinate usato dal SEGRE (che corrisponde alle unità u e v) le rette r' e r'' sono immaginarie coniugate. Nel sistema di coordinate considerato in questa nota (che corrisponde alle unità v_1 e v_2) le rette r' e r'' sono reali.

curva analitica f_1 (f_2). Se P_1 (P_2) è un punto qualunque di f_1 (f_2) i piani $P_1 r''$ e $P_2 r'$ si secano in un punto P di F . La F è pertanto intersezione di due pezzi di S_4 -coni, che si ottengono proiettando f_1 da r'' e f_2 da r' . Gli ∞^4 piani proiettanti i punti di f_1 da r'' secano F in un sistema, di dimensione complessa 1, di curve ciascuna delle quali è proiettata da r' sul piano ρ_2 nella curva f_2 .

Un secondo sistema di curve, di dimensione complessa 1, si ottiene secando la F con i piani proiettanti i punti di f_2 da r' . Ciascuna curva di questo secondo sistema è proiettata da r'' su ρ_1 nella curva f_1 . La proiezione della F da r'' (r') su ρ_1 (ρ_2) non è, pertanto, un pezzo di piano a 2 dimensioni, ma un pezzo di curva f_1 (f_2). Viceversa se si ha nello spazio complesso S_4 una superficie (o pezzo di superficie) F che è proiettata da r' (r'') su ρ_1 (ρ_2) in un pezzo di curva analitica f_1 (f_2), se questa è immagine di una funzione olomorfa $y_1(x_1)$ ($y_2(x_2)$), la F è caratteristica e precisamente è l'immagine della funzione bicomplexa totalmente derivabile avente per coefficienti di v_1 e v_2 le due funzioni $y_1(x_1)$ e $y_2(x_2)$. Concludendo si ha:

II) *Le superficie caratteristiche dell' S_4 complesso, cioè immagini delle funzioni di variabile bicomplexa totalmente derivabili, o olomorfe secondo SCORZA DRAGONI, sono tutte e sole le superficie dell' S_4 complesso proiettate da r' e r'' , rispettivamente sui piani coordinati ρ_2 e ρ_1 in curve analitiche immagini di funzioni olomorfe $y_1(x_1)$, $y_2(x_2)$ delle variabili complesse x_1 e x_2 rispettivamente.*

4. **Curve e piani seminulli dell' S_4 complesso.** — Ricordiamo che un numero bicomplexo $x = x_1 v_1 + x_2 v_2$ è nullo se è $x_1 = x_2 = 0$, è un *divisore dello zero* se è nulla una delle sue coordinate x_1 , x_2 . Se è $x_1 = 0$, x si dirà divisore dello zero del 1° sistema, se è $x_2 = 0$, x si dirà, invece, divisore dello zero del 2° sistema. I punti dello spazio complesso rappresentativo delle coppie di numeri bicompleksi (x, y) , con x e y divisori dello zero di uno stesso sistema o nulli sono, evidentemente i punti del piano ρ_1 e del piano ρ_2 . Per tal fatto i piani paralleli a ρ_1 o a ρ_2 si diranno *seminulli*. Essi sono i piani propri passanti per r' o per r'' ⁽⁷⁾.

Le curve appartenenti ad un piano seminullo si diranno *seminulle*. In base a quanto abbiamo detto nel n. precedente possiamo affermare che:

⁽⁷⁾ Pertanto i piani che qui si chiamano *seminulli* coincidono con i piani che B. SEGRE ha chiamato *nulli*. Essi derivano dalla presenza dei divisori dello zero nell'algebra C' dei numeri bicompleksi. Ne segue che le linee che qui vengono chiamate *seminulle* sono le linee *bicaratteristiche* di B. SEGRE (Loc. cit. (1), n° 6).

II') *Ogni superficie caratteristica dell' S_4 complesso contiene due sistemi di curve analitiche seminulle. Questa proprietà è caratteristica per dette superficie.*

5. **Un teorema dei fili analitici.** — Sia $f(t)$ una funzione olomorfa complessa della variabile reale t data da

$$(6) \quad f(t) = h(t) + g(t)i$$

con $h(t)$ e $g(t)$ funzioni reali olomorfe della variabile reale t , definite in un intervallo (t', t'') , e quindi sviluppabili in serie di potenze

$$(7) \quad h(t) = \sum_m a_m (t - t_1)^m$$

$$(8) \quad g(t) = \sum_m b_m (t - t_1)^m$$

nell'intorno di ogni punto t_1 di (t', t'') . In detto intorno per la $f(t)$ si ha lo sviluppo in serie

$$(9) \quad f(t) = \sum_m (a_m + b_m i)(t - t_1)^m.$$

Posto $z = t + iq$, consideriamo la serie, che si ottiene dalla (9) sostituendo alla variabile reale t la variabile complessa z .

$$(10) \quad \sum_m (a_m + b_m i)(z - t_1)^m.$$

Questa serie, al variare di t_1 in (t', t'') , fornisce infiniti elementi di una funzione analitica della variabile complessa z con i centri nei punti t_1 del segmento dell'asse reale t , posto nel piano di GAUSS (t, q) , avente per estremi i punti t' e t'' . I cerchi di convergenza di dette infinite serie costituiranno un campo C a cui appartiene il segmento $t't''$, e in C definiscono una funzione olomorfa (uniforme) $f(z)$ della variabile complessa z che lungo detto segmento si riduce alla data funzione $f(t)$. La $f(z)$ dicesi il *prolungamento* della $f(t)$ nel corpo dei numeri complessi.

Ciò ricordato, consideriamo quattro funzioni complesse olomorfe, non tutte costanti,

$$(11) \quad x_1(t), \quad x_2(t), \quad y_1(t), \quad y_2(t)$$

della variabile reale t , definite in uno stesso intervallo (t', t'') , e le funzioni loro prolungamento nel corpo complesso

$$(12) \quad x_1(z), \quad x_2(z), \quad y_1(z), \quad y_2(z).$$

Indichiamo con C un campo contenuto nei campi di esistenza delle funzioni (12) e contenente il segmento $t't''$.

Mentre la variabile reale t descrive l'intervallo (t', t'') , il punto P dell' S_4 complesso di coordinate (11) descrive un insieme continuo di dimensione reale 1, che dicesi un tratto di *filo analitico* dell' S_4 complesso. (Secondo una nomenclatura introdotta da CORRADO SEGRE, una varietà di uno spazio *complesso* di dimensioni *reali* 1, 2, 3 dicesi *filo*, *tela*, *trivarietà*, rispettivamente).

Mentre la variabile complessa z descrive il campo C , il punto di S_4 di coordinata (12) descrive un tratto di curva analitica (di dimensione complessa 1 e di dimensione reale 2). È evidente che questo tratto di curva, diciamo l_1 , contiene il tratto di filo l sopra considerato, dunque:

III) *Un tratto di filo analitico appartiene sempre ad un tratto di curva analitica determinato dal filo.*

Questa proposizione è l'estensione ai fili analitici di una proprietà dei fili iperalgebrici dovuta a CORRADO SEGRE.

Ciò posto, supponiamo che il tratto di filo l sia tale che l'intorno di ogni suo punto P non appartenga ad un piano seminullo, o, come diremo, che non sia *seminullo*. Anche il tratto di curva l_1 sarà di conseguenza non seminullo. Proiettando l_1 da r'' (r') sul piano ρ_1 (ρ_2) si ottiene un tratto di curva analitica f_1 (f_2). Precisamente f_1 (f_2) è rappresentata in ρ_1 (ρ_2) dalle prima e terza (seconda e quarta) delle equazioni (12). L'intersezione P di due piani $P_1 r''$ e $P_2 r'$, con P_1 (P_2) variabile in f_1 (f_2), descrive un pezzo di superficie caratteristica F contenente il tratto di curva l_1 e quindi il tratto di filo l .

Supponiamo ora che F_1 sia una superficie caratteristica contenente il tratto di filo l e quindi il tratto di curva l_1 determinato da l ; le proiezioni di un pezzo di F_1 contenente l_1 da r'' e r' su ρ_1 e ρ_2 dovranno essere due tratti di curve contenenti f_1 e f_2 perchè f_1 e f_2 sono le proiezioni di l_1 . Ma allora sarà $F = F_1$, perchè anche F è proiettata da r'' e r' su ρ_1 e ρ_2 in f_1 e f_2 . Dunque per un tratto di filo analitico passa un solo pezzo di superficie caratteristica.

Mettiamoci ora nell'ipotesi che il tratto di filo l sia seminullo, e per fissare le idee supponiamo che appartenga ad un piano seminullo passante per r'' , cioè del 2° sistema. Proiettando l da r'' su ρ_1 si ottiene un punto $P_1(a, 0, b, 0)$, il che equivale ad affermare che in questo caso le funzioni $x_1(t)$ e $y_1(t)$ sono due costanti a e b . Si conduca per P_1 , nel piano ρ_1 , un qualunque tratto di curva analitica f_1 . In corrispondenza ai due tratti di curve analitiche f_1 e f_2 , avremo una superficie caratteristica F , intersezione delle varietà che si ottengono proiettando f_1 e f_2 da r'' e r' , passante per il tratto di filo l . Concludendo si ha il teorema:

IV) *Per un tratto di filo analitico non seminullo passa una ed una sola superficie caratteristica dell' S_4 complesso.*

Per un tratto di filo analitico seminullo passano infinite superficie caratteristiche dell' S_4 complesso ⁽⁸⁾.

6. Le trasformazioni caratteristiche dell' S_4 complesso. — Una trasformazione bicomplessa su due variabili

$$[3] \quad X = X(x, y), \quad Y = Y(x, y)$$

si dirà *caratteristica* se le funzioni $X(x, y)$ e $Y(x, y)$ delle due variabili bicomplesse indipendenti x e y sono totalmente derivabili rispetto ad x e rispetto ad y e, applicate ad un campo convenientemente ristretto dell' S_4 complesso, risultano invertibili e tali da definire y e x come funzioni totalmente derivabili di X e Y . Se diciamo omologhi due punti di S_4 immagini di due coppie (x, y) e (X, Y) legate dalle [3], resta determinata fra due campi di S_4 una trasformazione biunivoca w che si dirà una *trasformazione caratteristica dell' S_4 complesso*.

Posto

$$(13) \quad \begin{cases} X = X_1 v_1 + X_2 v_2 \\ Y = Y_1 v_1 + Y_2 v_2 \end{cases}, \quad \begin{cases} x = x_1 v_1 + x_2 v_2 \\ y = y_1 v_1 + y_2 v_2 \end{cases},$$

le X_1, Y_1 saranno funzioni olomorfe delle sole variabili complesse indipendenti x_1 e y_1 ; invece X_2 e Y_2 saranno funzioni olomorfe delle sole variabili indipendenti x_2 e y_2 . Sicchè posto

$$[3'] \quad \begin{cases} X_1 = X_1(x_1, y_1) \\ Y_1 = Y_1(x_1, y_1) \end{cases} \quad \begin{cases} X_2 = X_2(x_2, y_2) \\ Y_2 = Y_2(x_2, y_2) \end{cases},$$

saranno le [3'] le equazioni della trasformazione caratteristica w dell' S_4 com-

⁽⁸⁾ B. SEGREG ha dimostrato nella sua memoria citata in ⁽⁴⁾, n° 5, p. 66. che *per un tratto regolare di linea analitica (reale) assegnata comunque in S_4 passa uno ed un solo pezzo di superficie caratteristica*. Nel seguente n° 6 il SEGREG ha osservato che la proposizione enunciata *vale anche nel campo complesso* per una linea analitica assegnata non reale, purchè non sia bicaratteristica e che *la superficie che si viene a determinare non sarà in generale reale* (Nota ⁽²⁴⁾ della pag. 68). Tenendo conto di quanto abbiamo osservato nella nota ⁽⁷⁾, si scorge che la prima parte del teorema IV) non è altro che la proposizione di B. SEGREG, su ricordata, nel campo complesso. La eccezionalità delle linee bicaratteristiche, cioè dei fili seminulli, che nella dimostrazione del SEGREG proveniva dall'annullarsi identicamente di una certa espressione, nella nostra dimostrazione proviene dal fatto che un filo seminullo è proiettato da r'' e r' , in uno dei piani coordinati ρ_1 e ρ_2 , in un punto. Da quanto sopra si è osservato si conclude che le superficie non reali dell' S_4 complesso a cui il SEGREG accenna nella citata nota ⁽²⁴⁾ di pag. 68, non sono altro che le superficie immagini delle funzioni di variabile bicomplessa olomorfe secondo SCORZA DRAGONI o totalmente derivabili.

plesso. Le [3'], separatamente, determinano nei piani coordinati $\rho_1(x_1, y_1)$ e $\rho_2(x_2, y_2)$ due trasformazioni w_1 e w_2 in cui si corrispondono le proiezioni P_1 e P_1' , P_2 e P_2' di due punti omologhi P e P' in w fatte, rispettivamente, da r'' e r' .

Un campo piano seminullo, cioè appartenente ad un piano seminullo del 1° o del 2° sistema, sarà trasformato da w evidentemente in un campo piano seminullo dello stesso sistema, perchè punti del piano seminullo $r''P_1$ ($r'P_2$) vengono trasformati da w in punti del piano seminullo $r''P_1'$ ($r'P_2'$). Viceversa se una trasformazione analitica invertibile dell' S_4 complesso deve trasformare campi seminulli in campi seminulli dello stesso sistema, subordinerà in convenienti insiemi di piani seminulli, cioè passanti per r' o r'' , una trasformazione analitica e quindi subordinerà una trasformazione analitica in ciascuno dei piani coordinati ρ_1 e ρ_2 , chiamando omologhi in ρ_1 (ρ_2) due punti sezioni di piani seminulli omologhi passanti per r'' (r'). Le equazioni di tali trasformazioni sono del tipo [3'] e quindi la trasformazione analitica assegnata è una trasformazione caratteristica. Si ha pertanto:

V) *Condizione necessaria e sufficiente affinché una trasformazione analitica invertibile dell' S_4 complesso sia una trasformazione caratteristica, è che trasformi campi seminulli in campi seminulli dello stesso sistema* ⁽⁹⁾.

Ne segue che: *una trasformazione caratteristica trasforma curve seminulle in curve seminulle dello stesso sistema*, e, quindi, tenendo conto del teorema II') del n. 4, si ricava che:

VI) *Una trasformazione caratteristica dell' S_4 complesso trasforma superficie caratteristiche in superficie caratteristiche, trasformando le curve seminulle dell'una nelle curve seminulle dell'altra appartenenti allo stesso sistema*.

Si osservi che se una trasformazione caratteristica w trasforma una superficie caratteristica F in una superficie (caratteristica) F' e f_1, f_2 e f_1', f_2' sono le proiezioni di F e F' su ρ_1 e ρ_2 da r'' e r' , le [3'] a sinistra (a destra) devono trasformare f_1 (f_2) in f_1' (f_2'). Se, in particolare, la F è un pezzo di piano caratteristico, nel qual caso le f_1 e f_2 sono segmenti rettilinei, perchè F' sia pur un pezzo di piano (caratteristico) occorre e basta che anche f_1' e f_2' siano segmenti rettilinei. Ora perchè le trasformazioni, in ρ_1 e ρ_2 , w_1 e w_2 , di equazioni [3'], trasformino segmenti rettilinei in segmenti

⁽⁹⁾ Questa proposizione generalizza la seguente proposizione di B. SEGRE: *Le trasformazioni pseudoconformi possono venire caratterizzate fra le trasformazioni puntuali analitiche (e reali) dell' S_4 in sè stesso dalla proprietà di trasformare piani nulli in piani nulli associando fra loro piani dello stesso sistema* (Loc. cit. ⁽¹⁾, p. 85).

rettilinei, occorre e basta che $X_1, Y_1 (X_2, Y_2)$ siano funzioni lineari fratte di $x_1, y_1 (x_2, y_2)$. Ne segue immediatamente che:

VI) *Le trasformazioni caratteristiche dell' S_4 complesso trasformanti regioni piane caratteristiche in regioni piane (caratteristiche) sono le immagini delle trasformazioni bicomplesse rappresentate da sostituzioni lineari fratte nelle due variabili bicomplesse x e y ⁽⁴⁰⁾.*

7. Superficie semicaratteristiche. — Una superficie o un pezzo di superficie dell' S_4 complesso si dirà *semicaratteristica del 1° (2°) sistema* se proiettata da r'' (r') su ρ_1 (ρ_2) dà, anzichè una regione a due dimensioni, un pezzo di curva che non si riduca ad un punto (nel qual caso la superficie è una regione piana seminulla).

Una superficie semicaratteristica del 1° (2°) sistema è secata da piani seminulli passanti per r'' (r') in curve seminulle, quindi ogni tale superficie o pezzo di superficie contiene un sistema di curve seminulle. È evidente che:

VII) *Una trasformazione caratteristica dell' S_4 complesso trasforma una superficie semicaratteristica del 1° (2°) sistema in una superficie semicaratteristica dello stesso sistema, trasformando le curve seminulle della prima nelle curve seminulle della seconda.*

8. Teorema fondamentale. — Sia G una regione superficiale analitica dell' S_4 complesso, cioè una superficie o un pezzo di superficie analitica, e diciamo G_1 e G_2 le proiezioni di G da r'' e r' su ρ_1 e ρ_2 rispettivamente. Se G_1 o G_2 si riduce ad un punto sarà G una regione piana posta in un piano seminullo, cioè una regione piana seminulla. Se G non è una regione piana seminulla nè G_1 nè G_2 potranno ridursi ad un punto. In questa ipotesi G_1 o G_2 si ridurrà ad un tratto di curva quando e solo quando la G è semicaratteristica. Ne segue che se G non è seminulla nè semicaratteristica, G_1 e G_2 saranno due regioni piane di ρ_1 e ρ_2 nessuna delle quali può ridursi ad un punto o ad un tratto di curva. In questa ipotesi il piano proiettante da r'' , o r' , un punto generico P di G , secherà G in un numero finito di punti e quindi, considerando la regione superficiale G convenientemente piccola, possiamo supporre che il piano proiettante da r'' , o r' , ogni punto P di G sechi G nel solo punto P . In tal caso la corrispondenza che nasce fra G e G_1 o G_2 , chiamando omologo di P il punto P_1 o P_2 sua proiezione

⁽⁴⁰⁾ Questa proposizione generalizza la proposizione di B. SEGRE del n° 25, p. 90 della memoria citata in ⁽⁴⁾.

da r'' o r' su ρ_1 o ρ_2 , è biunivoca senza eccezioni. Ciò posto vogliamo dimostrare il seguente teorema:

VIII) Se G e G' sono due regioni superficiali dell' S_4 complesso, non seminulle nè semicaratteristiche, sufficientemente piccole, e W è una corrispondenza biunivoca analitica fissata ad arbitrio fra esse, esiste una ed una sola trasformazione caratteristica fra due intorni quadrimensionali di G e G' che trasformi G in G' , subordinandovi la corrispondenza W assegnata ⁽¹¹⁾.

Infatti siano P_1, P_1', P_2, P_2' le proiezioni su ρ_1 e ρ_2 da r'' e r' di due punti P e P' di G e G' omologhi in W . Mentre P descrive G , e quindi P' descrive G' , i punti P_1 e P_1' del piano ρ_1 descriveranno le proiezioni G_1 e G_1' di G e G' su ρ_1 , e, per le ipotesi fatte, la corrispondenza biunivoca W esistente fra G e G' si proietterà in una corrispondenza biunivoca W_1 fra G_1 e G_1' in cui si corrisponderanno le proiezioni P_1 e P_1' . Analoga osservazione si può fare relativamente alle proiezioni G_2 e G_2' di G e G' , sul piano ρ_2 , da r' . Fra G_2 e G_2' avremo una corrispondenza biunivoca W_2 , proiezione di W , in cui si corrisponderanno P_2 e P_2' . Ciò posto diciamo D (D') la regione quadrimensionale dell' S_4 complesso costituita da tutti i punti P (P') le cui proiezioni da r'' e r' su ρ_1 e ρ_2 cadano rispettivamente in G_1 e G_2 (in G_1' e G_2').

Sia P un punto di D e P_1, P_2 le sue proiezioni da r'' e r' su ρ_1 e ρ_2 . Siano P_1' e P_2' i punti, di G_1' e G_2' , omologhi di P_1 e P_2 in W_1 e W_2 rispettivamente.

I piani $r''P_1'$ e $r'P_2'$ si segheranno in un punto P' di D' che diremo omologo di P in una corrispondenza w . La w risulta biunivoca e analitica perchè sono biunivoche e analitiche le corrispondenze W_1 e W_2 proiezioni della corrispondenza biunivoca analitica W assegnata fra G e G' . Inoltre la w trasforma evidentemente G in G' subordinandovi la corrispondenza W . Si osservi infine che se P descrive una sezione piana seminulla di D , fatta per es. col piano seminullo P_1r'' , il punto omologo P' di D' descriverà la sezione piana seminulla di D' fatta col piano seminullo $P_1'r''$, e quindi, per il teorema V), la trasformazione analitica w è una trasformazione caratteristica. Il teorema risulta pertanto dimostrato per la parte che riguarda l'esistenza della trasformazione caratteristica trasformante G in G' subordinandovi la W . Dimostriamo ora che una tale trasformazione è unica. Infatti

⁽¹¹⁾ Questa proposizione generalizza il teorema di B. SEGRE del n° 24, pag. 86 della memoria citata in (4). Il SEGRE impone che le due superficie G e G' (per il SEGRE F e G) non siano caratteristiche. Nel campo complesso questa condizione non è sufficiente: bisogna invece in questo caso imporre che non siano semicaratteristiche nè seminulle.

una trasformazione caratteristica che goda delle proprietà indicate subordinerà negl'insiemi di piani per r'' (r') proiettanti i punti di G e G' , la trasformazione analitica che si ottiene proiettando la W_1 (W_2) e quindi tale trasformazione coinciderà con la w .

9. Un teorema relativo alle V_3 analitiche. — Sia V_3 una varietà analitica di S_4 a 3 dimensioni. Se P è un suo punto, il piano seminullo $r''P$ la secherà in una curva analitica s_1 o, per posizioni particolari di V_3 rispetto alla retta r'' , in una regione piana σ_1 . In questo secondo caso diremo che la V_3 contiene una regione piana seminulla del 1° sistema.

Secando la V_3 con il piano seminullo $r'P$, si ottiene una curva analitica s_2 o, in casi particolari, una regione piana σ_2 , che si dirà una regione piana seminulla del 2° sistema.

E evidente che se si trasforma la V_3 con una trasformazione caratteristica w , la V_3' trasformata sarà priva di regioni piane seminulle se è tale la V_3 , perchè *ogni eventuale regione piana seminulla di V_3 sarà trasformata da w in una regione piana seminulla (dello stesso sistema), della V_3'* .

Mettiamoci nell'ipotesi che la V_3 sia priva di regioni piane seminulle. In tal caso per ogni punto P di V_3 passa una curva seminulla s_1 del 1° sistema ed una curva seminulla s_2 del 2° sistema. Queste due curve si ottengono secando la V_3 con i piani seminulli $r''P$ e $r'P$. La V_3 possiede due sistemi ∞^2 di curve seminulle che indicheremo con (s_1) e (s_2) . Mentre P descrive V_3 le sue proiezioni P_1 e P_2 da r'' e r' , su ρ_1 e ρ_2 , descriveranno due regioni σ_1 e σ_2 , nessuna delle quali può ridursi ad una curva, perchè se per es. fosse σ_1 una curva, i punti della V_3 dovrebbero essere distribuiti negl' ∞^1 piani proiettanti i punti di σ_1 da r'' , e quindi, per essere la V_3 a tre dimensioni, in ∞^1 di tali piani dovrebbe ammettere una regione piana, contro l'ipotesi che la V_3 sia priva di regioni piane seminulle.

Sia P_1 un punto di σ_1 . Il piano P_1r'' segherà la V_3 in una curva s_1 di (s_1) . Questa proiettata da r' su ρ_2 darà una curva f_2 di σ_2 che diremo omologa di P_1 in una trasformazione analitica λ che porta un punto P_1 di σ_1 in una curva f_2 di σ_2 . Viceversa è evidente che l'inversa di λ porta un punto P_2 di σ_2 in una curva f_1 di σ_1 , curva che si ottiene proiettando da r'' su ρ_1 la curva s_2 sezione di V_3 con il piano P_2r' . Se P_1 e P_2 sono le proiezioni di uno stesso punto P di V_3 , la curva f_2 passa per P_2 e la curva f_1 passa per P_1 . È evidente che la corrispondenza λ e la V_3 si determinano a vicenda.

Ciò posto, consideriamo in σ_1 una curva analitica g_1 . Mentre un punto P_1 descrive g_1 , la curva seminulla s_1 , sezione di V_3 con il piano P_1r'' , descrive

una superficie semicaratteristica G di V_3 , appartenente al 1° sistema, perchè è proiettata da r'' su ρ_1 nella curva g_1 data. Sicchè per ogni curva g_1 di σ_1 si ha in corrispondenza una superficie semicaratteristica G del 1° sistema appartenente a V_3 . (Analogamente si fa relativamente alle curve g_2 di σ_2 alle quali corrisponderanno superficie semicaratteristiche del 2° sistema appartenenti alla V_3). La superficie semicaratteristica G , di cui sopra, per essere caratteristica occorre e basta che sia semicaratteristica anche del 2° sistema, cioè che proiettata da r' su ρ_2 dia una curva g_2 . In questo caso le ∞^1 curve seminulle s_1 giacenti nei piani $P_1 r''$, con P_1 in g_1 , vengono tutte proiettate da r' su ρ_1 nella curva g_2 . Sicchè g_2 è la curva omologa in λ di ogni punto P_1 di g_1 . La G conterrà inoltre ∞^1 curve s_2 , quelle poste nei piani $P_2 r'$, con P_2 in g_2 , e tutte queste curve saranno proiettate da r'' su ρ_2 nella curva g_1 . Quindi ad ogni punto P_2 di g_2 corrisponde, per l'inversa di λ , la curva g_1 . Viceversa è evidente che se si hanno in σ_1 e σ_2 due curve analitiche g_1 e g_2 tali che ad ogni punto di g_1 (g_2) corrisponde per la λ (λ^{-1}) la curva g_2 (g_1), la superficie caratteristica riempita dai punti P aventi le proiezioni P_1 (P_2) [da r'' (r') su ρ_1 (ρ_2)] appartenenti a g_1 (g_2), appartiene alla V_3 . Dunque:

IX) *Condizione necessaria e sufficiente affinchè una V_3 analitica contenga una superficie caratteristica è che la corrispondente trasformazione λ ammetta due curve singolari g_1 e g_2 , cioè tali che ad ogni punto di g_1 (g_2) corrisponda g_2 (g_1).*

10. Ipersuperficie analitiche caratteristiche. — Una ipersuperficie analitica V_3 priva di regioni piane seminulle, si dirà caratteristica se è costituita da un sistema ∞^1 di superficie caratteristiche. Se la V_3 considerata nel n. 8 è caratteristica, la regione σ_1 (σ_2) dovrà contenere un sistema ∞^1 di curve analitiche g_1 (g_2) tali che la corrispondenza λ (λ^{-1}) deve far corrispondere ad ogni punto P_1 (P_2) di una assegnata curva g_1 (g_2) del sistema, una determinata curva g_2 (g_1), sicchè fra i due sistemi ∞^1 di curve g_1 e g_2 la trasformazione λ determina una corrispondenza biunivoca L . Alle varie coppie di curve (g_1 , g_2) corrispondentisi in L (coppie di curve singolari per la λ) corrispondono le superficie caratteristiche contenute nella V_3 caratteristica considerata, nel senso precisato nel n. 8.

Sia V_3' un'altra ipersuperficie caratteristica di S_4 e siano σ_1' , σ_2' , g_1' , g_2' , λ' e L' le regioni di ρ_1 e ρ_2 , le curve di σ_1 e σ_2 e le trasformazioni che per V_3' hanno lo stesso significato che per la V_3 hanno σ_1 , σ_2 , g_1 , g_2 , λ e L .

Sia n_1 (n_2) una trasformazione analitica invertibile nel piano ρ_1 (ρ_2) che trasformi σ_1 (σ_2) in σ_1' (σ_2') e tale che trasformi il sistema di curve anali-

tiche g_1 di σ_1 (g_2 di σ_2) nel sistema di curve g'_1 di σ'_1 (di curve g'_2 di σ'_2), portando coppie di curve omologhe in L in coppie di curve omologhe in L' .

Se diciamo D il campo quadridimensionale formato dai punti P con le proiezioni P_1 e P_2 da r'' e r' su ρ_1 e ρ_2 appartenenti rispettivamente a σ_1 e σ_2 , le trasformazioni analitiche w_1 e w_2 determinano una trasformazione caratteristica w che opera su D : un punto P di D è trasformato da w nel punto intersezione dei piani $r''P'_1$, $r'P'_2$, essendo P'_1 e P'_2 i trasformati di P_1 e P_2 in w_1 e w_2 . Se P appartiene a V_2 , P_1 e P_2 saranno due punti appartenenti a due curve g_1 e g_2 omologhe in L . Ne segue che i loro trasformati mediante w_1 e w_2 saranno due punti P'_1 e P'_2 appartenenti a due curve g'_1 e g'_2 omologhe in L' , e quindi il punto P' apparterrà a V'_3 . La w trasforma, pertanto, la V_3 nella V'_3 . Dunque:

X) *Date due ipersuperficie caratteristiche, è sempre possibile trasformarle una nell'altra mediante una trasformazione caratteristica.*

NOTA. — Si osservi che esistono infinite trasformazioni caratteristiche che portano la V_3 nella V'_3 , perchè esistono infinite trasformazioni w_1 e w_2 soddisfacenti alle condizioni poste nella dimostrazione del teorema X). Infatti per determinare due tali corrispondenze w_1 e w_2 si può procedere nel seguente modo: Si fissino, in primo luogo, due superficie analitiche H e H' non semicaratteristiche nè seminulle contenute rispettivamente in V_3 e V'_3 . Se P è un punto di H , e quindi di V_3 , le proiezioni P_1 e P_2 su σ_1 e σ_2 apparterranno a due curve g_1 e g_2 omologhe in L , sicchè chiamando omologhi due punti P_1 e P_2 proiezioni su ρ_1 e ρ_2 da r'' e r' di uno stesso punto P di H , resta determinata una trasformazione analitica h fra σ_1 e σ_2 che trasforma le curve g_1 nelle omologhe g_2 per la trasformazione L . Mentre P_1 descrive una curva g_1 , e quindi l'omologo P_2 in h descrive la curva g_2 omologa di g_1 in L , il punto P di H descriverà una curva g appartenente alla superficie caratteristica G corrispondente alla coppia di curve g_1 e g_2 . Analoghe osservazioni si facciano relativamente alla superficie H' di V'_3 , usando gli stessi simboli con gli apici.

Ciò posto, fra le superficie H ed H' fissiamo una corrispondenza analitica biunivoca W che trasformi il sistema di curve g di H nel sistema di curve g' di H' .

Proiettando da r'' su ρ_1 (da r' su ρ_2) le coppie (P, P') omologhe in W si ottengono coppie di punti (P_1, P'_1) , (P_2, P'_2) omologhe in una corrispondenza analitica w_1 (w_2) invertibile. Queste due trasformazioni soddisfano alle condizioni di cui sopra.

Si osservi, anzi, che la trasformazione caratteristica w determinata da w_1

e w_2 è la trasformazione che trasforma la H nella H' subordinandovi la W . Questa stessa trasformazione trasforma la V_3 nella V_3' .

11. Gli S_3 caratteristici. — Sia S_3 un iperpiano dell' S_4 complesso σ , distinto dall' S_3 improprio. Se S_3 passa per r' o r'' , conterrà un fascio di piani seminulli. Un tale S_3 non è pertanto caratteristico, perchè, per definizione, una V_3 caratteristica non deve contenere regioni piane seminulle.

Se S_3 non passa nè per r' nè per r'' , secherà queste due rette in due punti R' e R'' . Tutti i piani di S_4 passanti per R' e R'' sono piani caratteristici e di questi un fascio appartiene all' S_3 considerato. Un tale S_3 è, pertanto, una varietà V_3 caratteristica perchè contiene ∞^1 superficie caratteristiche. Dunque:

XI) *Gli S_3 caratteristici dell' S_4 complesso sono tutti e soli gli S_3 non passanti nè per r' nè per r'' .*

Dal teorema X) segue che:

XII) *Ogni V_3 caratteristica è trasformabile con una trasformazione caratteristica in un pezzo di iperpiano secante r' ed r'' in un punto ⁽¹²⁾.*

§ II.

1. Rappresentazione reale dei numeri bicomplexi. — Rappresentiamo la variabile bicomplexa $x = x_1v_1 + x_2v_2 = (x_1' + x_1''i)v_1 + (x_2' + x_2''i)v_2$ nel punto $X(x_1', x_1'', x_2', x_2'')$ di un S_4 reale euclideo. Questo punto si può considerare pure come l'immagine del punto (x_1, x_2) del piano coordinato $\sigma_1(x_1, x_2)$ dell' S_4 complesso considerato nel § I, per rappresentare le coppie di variabili bicomplesse (x, y) . Analogamente rappresentiamo la variabile bicomplexa $y = y_1v_1 + y_2v_2 = (y_1' + iy_1'')v_1 + (y_2' + iy_2'')v_2$ nel punto $Y(y_1', y_1'', y_2', y_2'')$ dello stesso S_4 reale euclideo. Questo punto si può considerare pure l'immagine del punto (y_1, y_2) del piano coordinato $\sigma_2(y_1, y_2)$ dell' S_4 complesso.

Ciò posto, osserviamo che assegnare nell' S_4 complesso un punto P , immagine di una coppia (x, y) di numeri bicomplexi, equivale ad assegnare due punti X e Y nell' S_4 reale, immagini dei due numeri bicomplexi x e y .

Consideriamo nell' S_4 complesso il tratto di filo analitico di equazioni

$$(1) \quad x_1 = x_1(t), \quad x_2 = x_2(t), \quad y_1 = y_1(t), \quad y_2 = y_2(t)$$

⁽¹²⁾ Per questa proprietà le V_3 caratteristiche si diranno pure *iperplanoidi* dell' S_4 complesso. Esse generalizzano gl'iperplanoidi dell' S_4' reale.

essendo x_1, x_2, y_1, y_2 funzioni complesse olomorfe della variabile reale t definite in un intervallo (t', t'') , non tutte e quattro costanti. In corrispondenza ad ogni punto P del tratto di filo considerato, diciamolo l , fissiamo nell' S_4 reale i due punti X e Y di cui sopra. Mentre P descrive l , i punti X e Y descriveranno due linee (reali) l_x e l_y . Può, in particolare, l_x (l_y) ridursi ad un punto: ciò avviene quando e solo quando le funzioni x_1, x_2 (y_1, y_2) sono entrambe costanti. Non possono però l_x ed l_y ridursi contemporaneamente ad un punto, perchè le funzioni (1) non sono, per ipotesi, tutte e quattro costanti. Per fissare le idee, supponiamo che l_x sia effettivamente un tratto di linea. In questa ipotesi *l'assegnare il filo l nell' S_4 complesso equivale ad assegnare la linea l nell' S_4 reale e una funzione bicomplexa $y^*(x)$ lungo questo tratto di linea*: quella che nel punto di l_x , rispondente ad un assegnato valore del parametro reale t , assume il valore bicomplexo $y_1(t)v_1 + y_2(t)v_2$.

Nel caso che anche l_y non si riduca ad un punto, chiamando omologhi due punti di l_x e l_y se corrispondono ad uno stesso valore del parametro reale t , si viene a stabilire fra l_x e l_y una corrispondenza analitica invertibile, e quindi, in questa ipotesi: *l'assegnare il tratto di filo l nell' S_4 complesso equivale ad assegnare due tratti di linee analitiche (regolari, aperte) dell' S_4 reale e una corrispondenza analitica invertibile fra detti tratti*.

Si osservi ora che l'assegnare nell' S_4 reale una regione superficiale (a due dimensioni complesse e a quattro dimensioni reali) equivale ad assegnare nell' S_4 reale una regione quadridimensionale ed una funzione $y(x)$ bicomplexa del punto variabile in detta regione; e se la regione superficiale assegnata nell' S_4 complesso è *caratteristica*, la funzione bicomplexa del punto variabile nella regione quadridimensionale dell' S_4 reale è *totalmente derivabile* o *olomorfa* secondo SCORZA DRAGONI.

Se la regione superficiale considerata contiene il tratto di filo l la funzione bicomplexa $y(x)$ assumerà lungo la linea l_x [che apparterrà alla regione quadridimensionale dell' S_4 reale dove $y(x)$ è definita] i valori della funzione bicomplexa $y^*(x)$ determinata lungo l_x dello stesso filo l , per quanto sopra è stato osservato.

Le osservazioni fatte bastano per poter affermare che la prima parte del teorema IV) equivale alla risoluzione del problema dell'*equivalenza di due tratti di linea reali dell' S_4 reale*, questione trattata e risolta nel modo più completo da G. SCORZA DRAGONI nel § 7 della sua memoria citata in (*), (ovvero al teorema conclusivo del n. 40 di p. 635). Si osservi che le *curve singolari* a cui accenna lo SCORZA nel n. 41 corrispondono ai *fili seminulli*.

2. Equivalenza di due superficie dell' S_4 reale. — Per interpretare nell' S_4 complesso il problema dell'equivalenza di due superficie reali dell' S_4 reale, risolto dallo SCORZA DRAGONI nel § 8 della sua memoria citata in (1), osserviamo quanto segue.

Siano date quattro funzioni complesse olomorfe

$$(2) \quad x_1 = x_1(t, p), \quad x_2 = x_2(t, p), \quad y_1 = y_1(t, p), \quad y_2 = y_2(t, p)$$

delle due variabili *reali* indipendenti t, p definite in un rettangolo R

$$(R) \quad t' \leq t \leq t'', \quad p' \leq p \leq p''.$$

Mentre il punto (t, p) descrive il rettangolo R , il punto $P(x_1, x_2, y_1, y_2)$ dell' S_4 complesso descriva ciò che si dice una *tela analitica* T , cioè una varietà complessa dell' S_4 complesso a due dimensioni *reali*. Ciò equivale a supporre che le funzioni (2) non sono tutte e quattro costanti, nè si possono ridurre a quattro funzioni olomorfe di un solo parametro reale, nel qual caso il punto P non descriverebbe una *tela*, ma un *filo*.

Mentre il punto P descrive la tela T i punti X e Y dell' S_4 reale, considerati nel n. precedente, descrivono due varietà analitiche reali T_x e T_y di dimensioni ≤ 2 (dimensioni reali).

La T_x (T_y) si riduce ad un punto quando e solo quando le prime (le ultime) funzioni (2) sono costanti. Questi due casi non si possono verificare contemporaneamente, anzi se T_x (T_y) si riduce ad un punto, T_y (T_x) deve essere a due dimensioni, altrimenti la T non potrebbe essere a due dimensioni.

La T_x (T_y) si riduce ad una linea quando e solo quando le prime (le ultime) due funzioni (2) si riducono a due funzioni olomorfe di un solo parametro reale. Può accadere che T_x e T_y siano entrambe linee. In questo caso le (2) sono del tipo

$$(2') \quad x_1 = x_1(s_1), \quad x_2 = x_2(s_1), \quad y_1 = y_1(s_2), \quad y_2 = y_2(s_2)$$

con s_1 e s_2 parametri reali, e la tela T è proiettata dalla retta impropria del piano coordinato $\sigma_2(y_1, y_2)$ [$\sigma_1(x_1, x_2)$] sul piano $\sigma_1, (\sigma_2)$ in un *filo* e precisamente in quello che è rappresentato dalle prime (ultime) equazioni (2'). La T viene ad essere l'immagine complessa delle coppie di punti dei due fili T_x e T_y e rappresenta pertanto la funzione bicomplessa che assume in ogni punto di T_x gl'infiniti valori bicomplessi rappresentati dai punti di T_y . Questo caso pertanto non offre alcun interesse.

Supporremo dunque che una almeno delle varietà T_x e T_y sia a due dimensioni, cioè una regione superficiale dell' S_4 reale. Per fissare le idee

supporremo che sia di dimensione 2 la T_x , cioè supporremo che le prime due funzioni (2) non si riducano a funzioni di un solo parametro reale. In quest'ipotesi l'assegnare la tela T dell' S_4 complesso equivale ad assegnare nell' S_4 reale una superficie reale T_x e una funzione bicomplessa $y^*(x)$ del punto variabile su T_x . Nel caso poi che anche la T_y sia a 2 dimensioni, l'assegnare nell' S_4 complesso la tela T equivale ad assegnare nell' S_4 reale due superficie T_x e T_y e una corrispondenza analitica invertibile fra di esse (chiamando omologhi due punti rispondenti agli stessi valori dei parametri t e p).

Ne segue che l'esistenza di una funzione $y(x)$ bicomplessa olomorfa secondo SCORZA DRAGONI, definita in un intorno quadridimensionale di T_x , che su T_x si riduca alla funzione $y^*(x)$, o, nell'altra ipotesi, l'equivalenza delle superficie T_x e T_y dell' S_4 reale, equivale, nell' S_4 complesso all'esistenza di una superficie caratteristica passante per la tela T .

Ora la tela T può essere *curvilinea* o *superficiale* secondo che le funzioni (2), *prolungate* nel corpo complesso, danno le funzioni olomorfe

$$(2'') \quad x_1 = x_1(z, q), \quad x_2 = x_2(z, q), \quad y_1 = y_1(z, q), \quad y_2 = y_2(z, q),$$

delle variabili indipendenti z e q , che si riducano o no a quattro funzioni olomorfe di una sola variabile complessa, cioè secondo che le (2'') rappresentino nell' S_4 complesso un tratto di curva f_T o una regione superficiale F_T . Nel primo caso la T essendo a due dimensioni reali, come la f_T , coinciderà con questo tratto di curva, cioè la tela T è un tratto di curva. Nel secondo caso la tela T non è un tratto di curva, ma appartiene ad una superficie F_T da essa determinata.

Nel primo caso:

a) se il tratto di curva $f_T = T$ è seminullo, per esso passano infinite superficie caratteristiche.

b) se il tratto di curva $f_T = T$ non è seminullo, per esso passa una sola superficie caratteristica.

Nel secondo caso:

c) se la superficie F_T determinata dalla tela T è caratteristica, per T passa una ed una sola superficie caratteristica: la F_T .

d) se la F_T non è caratteristica, per la tela T non passa alcuna superficie caratteristica.

Si ricordi che la condizione necessaria e sufficiente perchè la superficie F_T dell' S_4 complesso sia caratteristica è che la sua proiezione da r'' (r') su ρ_1 (ρ_2) sia una curva. Si osservi, pertanto, che nei casi b) e c) la proiezione della tela T su ρ_1 (ρ_2) da r'' (r') è *curvilinea*, cioè appartiene ad una curva. Concludendo si ha il teorema:

I) Sia T_x una superficie analitica reale dell' S_4 reale e $y^*(x)$ una funzione bicomplexa del punto variabile su T_x , e T la tela dell' S_4 complesso determinata da T_x e dalla funzione $y^*(x)$. Il problema della determinazione di una funzione bicomplexa totalmente derivabile, o olomorfa secondo SCORZA DRAGONI, definita in un intorno quadridimensionale di T_x che su T_x si riduca alla $y^*(x)$,

- 1) ammette infinite soluzioni se T è un tratto di curva seminulla;
- 2) ammette una e una sola soluzione se le proiezioni di T da r'' e r' su ρ_1 e ρ_2 appartengono ad un tratto di curva, senza ridursi ad un punto;
- 3) non ammette alcuna soluzione se T non presenta uno dei casi 1) e 2).

Sotto altro aspetto il teorema I) si può enunciare nel seguente modo.
Siano

$$(T_x) \quad x_1' = x_1'(t, p), \quad x_1'' = x_1''(t, p), \quad x_2' = x_2'(t, p), \quad x_2'' = x_2''(t, p)$$

quattro funzioni olomorfe reali delle due variabili reali t, p , rappresentanti una superficie T_x dell' S_4 reale, e

$$(3) \quad y^*(x) = y_1(t, p)v_1 + y_2(t, p)v_2$$

una funzione bicomplexa del punto variabile su T_x con $y_1(t, p)$ e $y_2(t, p)$ funzioni complesse olomorfe delle due variabili reali t e p definite, insieme alle (T_x) , in uno stesso rettangolo del piano reale (t, p) .

Siano

$$(4) \quad x_1 = x_1(z, q), \quad x_2 = x_2(z, q)$$

le funzioni che si ottengono prolungando nel corpo complesso le funzioni

$$(5) \quad x_1 = x_1'(t, p) + x_1''(t, p)i, \quad x_2 = x_2'(t, p) + x_2''(t, p)i$$

e siano $y_1 = y_1(z, q)$, $y_2 = y_2(z, q)$ le funzioni che si ottengono prolungando nel corpo complesso le funzioni $y_1 = y_1(t, p)$, $y_2 = y_2(t, p)$. Ciò posto:

I) *Condizione necessaria e sufficiente affinché esista una funzione bicomplexa totalmente derivabile, o olomorfa secondo SCORZA DRAGONI, definita in un intorno quadridimensionale di T_x , che su T_x si riduca alla funzione (3), è che le funzioni x_1 e y_1 (x_2 e y_2) delle due variabili complesse z e q si riducano a due funzioni di una sola variabile complessa z_1 (z_2). Nel caso particolare che x_1 e y_1 (o x_2 e y_2) siano costanti, esistono infinite funzioni bicomplesse soddisfacenti alle condizioni volute; se nessuna di queste due circostanze si verifica, esiste una sola funzione bicomplexa che soddisfa alle condizioni imposte.*

3. Equivalenza di due V_3 dell' S_4 reale. — Il problema dell'equivalenza di due V_3 reali dell' S_4 reale risolto dallo SCORZA DRAGONI nel § 9 della sua memoria citata in (1), interpretato nell' S_4 complesso, dà luogo a considerazioni del tutto analoghe a quelle svolte nel n. precedente relativamente al problema dell'equivalenza di due superficie.

L'assegnare nell' S_4 reale una varietà reale tridimensionale V_x rappresentata dalle quattro funzioni reali

$$(V_x) \quad x_1' = x_1'(r, t, p), \quad x_1'' = x_1''(r, t, p), \quad x_2' = x_2'(r, t, p), \quad x_2'' = x_2''(r, t, p)$$

olomorfe, delle variabili reali r, t, p , in un parallelepipedo dell' S_3 reale (r, t, p) , e una funzione bicomplessa del punto variabile su V_x , che nel punto rispondente ai valori r, t, p assume il valore bicompleso

$$(6) \quad y^*(x) = y_1(r, t, p)v_1 + y_2(r, t, p)v_2,$$

essendo $y_1(r, t, p)$ e $y_2(r, t, p)$ due funzioni complesse olomorfe definite nel detto parallelepipedo, equivale ad assegnare nell' S_4 complesso la *trivarietà* analitica V di equazioni

$$(V) \quad \left\{ \begin{array}{l} x_1 = x_1'(r, t, p) + x_1''(r, t, p)i \\ y_1 = y_1(r, t, p) \end{array} \right\}, \quad \left\{ \begin{array}{l} x_2 = x_2'(r, t, p) + x_2''(r, t, p)i \\ y_2 = y_2(r, t, p) \end{array} \right\}$$

Inoltre l'esistenza di una funzione bicomplessa $y(x)$ totalmente derivabile, o olomorfa secondo SCORZA DRAGONI, definita in un intorno quadridimensionale di V_x e che su V_x si riduca alla funzione bicomplessa (6), equivale all'esistenza di una superficie caratteristica dell' S_4 complesso passante per la trivarietà V .

Supponiamo che per la trivarietà V passi una superficie caratteristica F , e siano f_1 e f_2 le proiezioni di F da r'' e r' su ρ_1 e ρ_2 rispettivamente: le proiezioni V_1 e V_2 di V da r'' e r' su ρ_1 e ρ_2 dovranno appartenere a f_1 e f_2 , e quindi V_1 e V_2 non possono essere delle trivarietà, ma al più delle tele, anzi tele curvilinee, cioè coincidenti con f_1 o f_2 . In particolare V_1 o V_2 (ma non entrambe) possono ridursi ad un filo (di f_1 o f_2 rispettivamente). In ogni caso V_1 e V_2 prolungate nel corpo complesso, devono dare i due tratti di curve f_1 e f_2 , cioè le funzioni x_1, y_1 (x_2, y_2) date dalle (V), che rappresentano in ρ_1 (ρ_2) V_1 (V_2) prolungate nel corpo complesso, devono dare due funzioni complesse olomorfe di tre variabili complesse che devono ridursi a funzioni olomorfe di una sola variabile complessa z_1 (z_2).

Viceversa, se queste condizioni sono soddisfatte, le proiezioni V_1 e V_2 della trivarietà V apparterranno a due tratti di curve f_1 e f_2 e la V appar-

terrà alla superficie caratteristica F rispondente a f_1 e f_2 . Si ha pertanto il teorema:

II) Sia V_x una varietà reale tridimensionale dell' S_4 reale di equazioni (V_x) e $y^*(x)$ una funzione bicomplexa del punto variabile su V_x data dalla (6).

Sia inoltre V la trivarietà dell' S_4 complesso determinata da V_x e da $y^*(x)$. Condizione necessaria e sufficiente affinché esista una funzione bicomplexa $y(x)$ definita in un intorno quadridimensionale di V_x , che su V_x si riduca alla $y^*(x)$, e olomorfa secondo SCORZA DRAGONI, o totalmente derivabile, è che le proiezioni della trivarietà V da r'' e r' sui piani coordinati ρ_1 e ρ_2 siano curvilinee, ovvero che le prime (seconde) funzioni (V) , prolungate nel campo complesso, si riducano a due funzioni olomorfe di una sola variabile complessa. Se queste condizioni sono soddisfatte, la funzione $y(x)$ soddisfacente alle condizioni volute è unica.