Operatori lineari e numeri di Stirling generalizzati.

Memoria di LETTERIO TOSCANO (a Messina).

Sunto. - *L'Autore inizia lo studio degli operatori* A. X^n, *tali che*

$$AX - XA = 1,$$

e dei polinomi ad essi collegati (numeri di STIRLING *generalizzati).*

Nella recente Nota « *Sull'iterazione degli operatori* xD *e* Dx » [1], studiando gli operatori xD e Dx, siamo pervenuti a delle relazioni che riguardano tali operatori ed i numeri di STIRLING.

D'altra parte il prof. PINCHERLE, nella sua Nota « *Operatori lineari e coefficienti di fattoriali* » [2], ha mostrato che lo sviluppo di $(xD)^n$ con un polinomio di n termini in xD, $x^2D^2, \dots, x^nD^n$, i cui coefficienti sono i numeri di STIRLING di seconda specie, è caso particolare di una proprietà che si presenta in generale nella teoria degli operatori lineari associativi.

Sarebbe allora facile vedere che le altre relazioni note sugli operatori xD e Dx valgono per i generici operatori lineari associativi A, X.

Ma noi, qui, prendendo le mosse dal risultato del PINCHERLE, più in generale, intendiamo estendere tali relazioni agli operatori A, X^n, che applicheremo altrove, ed ai numeri di STIRLING generalizzati.

1. Numeri di Stirling generalizzati. — Chiamiamo numeri di STIRLING generalizzati di prima specie, i numeri $a_{n,i}^{(u)}$, $b_{n,i}^{(u)}$, $c_{n,i}^{(u)}$, definiti dalle relazioni

$$(1) \qquad \begin{cases} a_{n,1}^{(u)} = (-1)^{n-1}u(u+1)(u+2)\dots(u+n-2) \\ a_{n,n}^{(u)} = 1 \\ a_{n,i}^{(u)} = a_{n-1,i-1}^{(u)} - [n+i(u-1)-1]a_{n-1,i}^{(u)}, \end{cases}$$

---

(1) « Rend. R. Istituto Lombardo », vol. LXVII, fasc. XI-XV, 1934.

(2) « Rend. R. Accademia Lincei », serie VI, sem. II, vol. XVIII, 1934.

$$(2)\qquad \begin{cases} b_{n,1}^{(u)} = (-1)^{n-1}(n-1)! \\ b_{n,n}^{(u)} = 1 \\ b_{n,i}^{(u)} = b_{n-1,i-1}^{(u)} - [n-(i-1)(u-1)-1]b_{n-1,i}^{(u)}, \end{cases}$$

$$(3)\qquad \begin{cases} c_{n,1}^{(u)} = (u-1)(u-2)(u-3)\ldots.(u-n+1) \\ c_{n,n}^{(u)} = 1 \\ c_{n,i}^{(u)} = c_{n-1,i-1}^{(u)} - [n-i(u-1)-2]c_{n-1,i}^{(u)}; \end{cases}$$

e numeri di Stirling generalizzati di seconda specie (¹) i numeri $\alpha_{n,i}^{(u)}$, $\beta_{n,i}^{(u)}$, $\gamma_{n,i}^{(u)}$, definiti dalle relazioni

$$(4)\qquad \begin{cases} \alpha_{n,1}^{(u)} = u(2u-1)(3u-2)\ldots.[(n-1)u-(n-2)] \\ \alpha_{n,n}^{(u)} = 1 \\ \alpha_{n,i}^{(u)} = \alpha_{n-1,i-1}^{(u)} + [(n-1)(u-1)+i]\alpha_{n-1,i}^{(u)}, \end{cases}$$

$$(5)\qquad \begin{cases} \beta_{1,1}^{(u)} = 1,\ \beta_{2,1}^{(u)} = 1,\ \beta_{n,1}^{(u)} = \\ \qquad = (-1)^n(u-2)(2u-3)(3u-4)\ldots.[(n-2)u-(n-1)],\quad n>2 \\ \beta_{n,n}^{(u)} = 1 \\ \beta_{n,i}^{(u)} = \beta_{n-1,i-1}^{(u)} - [(n-2)(u-1)-i]\beta_{n-1,i}^{(u)}, \end{cases}$$

$$(6)\qquad \begin{cases} \gamma_{n,1}^{(u)} = (-1)^{n-1}(n-1)!\,(u-1)^{n-1} \\ \gamma_{n,n}^{(u)} = 1 \\ \gamma_{n,i}^{(u)} = \gamma_{n-1,i-1}^{(u)} - [(n-1)(u-1)-i+1]\gamma_{n-1,i}^{(u)}. \end{cases}$$

Introduciamo ancora i numeri $p_{n,i}^{(u)}$, $q_{n,i}^{(u)}$, $r_{n,i}^{(u)}$, definiti dalle relazioni

$$(7)\qquad \begin{cases} p_{n,1}^{(u)} = (n-1)!\,(u-1)^{n-1} \\ p_{n,n}^{(u)} = 1 \\ p_{n,i}^{(u)} = p_{n-1,i-1}^{(u)} + (n-1)(u-1)p_{n-1,i}^{(u)}, \end{cases}$$

(¹) I numeri $\alpha_{n,i}^{(u)}$ si trovano già nelle Note: L. Toscano, *Somma delle potenze simili fattoriali dei numeri naturali* (« Annuario del R. Liceo Ginnasio Galluppi » di Catanzaro, 1929-1930); *Sul triangolo di Tartaglia generalizzato* (« Rend. R. Istituto Lombardo », vol. LXIV, fasc. XI-XV, 1931).

Per i numeri di Stirling semplici si confronti la monografia, *On Stirling's Numbers*, di C. Jordan (« The Tôhoku Mathematical Journal », vol. 37, 1933).

$$(8)\qquad \begin{cases} q^{(u)}_{n,1} = (-1)^{n-1}u(2u-1)(3u-2)\dots[(n-1)u-(n-2)] \\ q^{(u)}_{n,n} = 1 \\ q^{(u)}_{n,i} = q^{(u)}_{n-1,i-1} - [(n-1)(u-1)+1]q^{(u)}_{n-1,i}, \end{cases}$$

$$(9)\qquad \begin{cases} r^{(u)}_{1,1} = 1,\ r^{(u)}_{2,1} = 1,\ r^{(u)}_{n,1} = \\ \qquad = (-1)^n(u-2)(2u-3)(3u-4)\dots[(n-2)u-(n-1)] \\ r^{(u)}_{n,n} = 1 \\ r^{(u)}_{n,i} = r^{(u)}_{n-1,i-1} - [(n-2)(u-1)-1]r^{(u)}_{n-1,i}. \end{cases}$$

Tutti i numeri introdotti li intendiamo definiti per $i \leq n$, mentre per $i > n$ li riteniamo nulli.

Esaminiamo particolarmente questi numeri per u uguale a 1 o 2.

Denotando con $h_{n,i}$ i numeri di STIRLING semplici di prima specie, definiti dalle relazioni

$$(10)\qquad \begin{cases} h_{n,1} = (-1)^{n-1}(n-1)! \\ h_{n,n} = 1 \\ h_{n,i} = h_{n-1,i-1} - (n-1)h_{n-1,i}, \end{cases}$$

e con $k_{n,i}$ i numeri di STIRLING semplici di seconda specie, definiti dalle relazioni

$$(11)\qquad \begin{cases} k_{n,1} = 1 \\ k_{n,n} = 1 \\ k_{n,i} = k_{n-1,i-1} + ik_{n-1,i}, \end{cases}$$

si deducono le relazioni

$$(12)\qquad \begin{aligned} a^{(1)}_{n,i} = b^{(1)}_{n,i} = c^{(1)}_{n+1,i+1} = h_{n,i} \\ \alpha^{(1)}_{n,i} = \beta^{(1)}_{n,i} = \gamma^{(1)}_{n+1,i+1} = k_{n,i}. \end{aligned}$$

Denotando infine con $\sigma_{n,i}$ la somma dei prodotti a $n-i$ a $n-i$, secondo le combinazioni semplici, degli $n-1$ numeri

$$l_1,\ l_2, \dots,\ l_{n-1},$$

definita dalle relazioni

$$(13)\qquad \begin{cases} \sigma_{n,1} = l_1 l_2 l_3 \dots l_{n-1} \\ \sigma_{n,n} = 1 \\ \sigma_{n,i} = \sigma_{n-1,i-1} + l_{n-1}\sigma_{n-1,i}, \end{cases}$$

si deduce

$$(14)\qquad \begin{aligned} p^{(u)}_{n,i} &= \sigma_{n,i} \quad \text{con} \quad l_j = j(u-1) \\ (-1)^{n-i}q^{(u)}_{n,i} &= \sigma_{n,i} \quad \text{con} \quad l_j = j(u-1)+1 \qquad (j = 1, 2, 3, \dots, n-1) \\ (-1)^{n-i}r^{(u)}_{n,i} &= \sigma_{n,i} \quad \text{con} \quad l_j = (j-1)(u-1)-1, \end{aligned}$$

e da queste

$$p^{(1)}_{n,i} = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases} \text{ per } i \begin{cases} = n \\ \neq n \end{cases}, \quad (-1)^{n-i} q^{(1)}_{n,i} = r^{(1)}_{n,i} = \binom{n-1}{i-1}. \tag{15}$$

Per $u = 2$ si trovano i risultati

$$\begin{aligned}
a^{(2)}_{n,i} &= (-1)^{n-i} \frac{n!}{i!} \binom{n-1}{i-1} \\
b^{(2)}_{n,i} &= (-1)^{n-i} (n-i)! \binom{n-1}{i-1} = (-1)^{n-i} \frac{(n-1)!}{(i-1)!} \\
c^{(2)}_{n,i} &= \begin{cases} 1 \\ n-1 \\ 0 \end{cases} \text{ per } i \begin{cases} = n \\ = n-1 \\ < n-1 \end{cases} \\
\alpha^{(2)}_{n,i} &= (-1)^{n-i} a^{(2)}_{n,i} = \frac{n!}{i!} \binom{n-1}{i-1} \\
\beta^{(2)}_{n,i} &= c^{(2)}_{n,i} = \begin{cases} 1 \\ n-1 \\ 0 \end{cases} \text{ per } i \begin{cases} = n \\ = n-1 \\ < n-1 \end{cases} \\
\gamma^{(2)}_{n,i} &= b^{(2)}_{n,i} = (-1)^{n-i} (n-i)! \binom{n-1}{i-1} = (-1)^{n-i} \frac{(n-1)!}{(i-1)!} \\
p^{(2)}_{n,i} &= (-1)^{n-i} h_{n,i} \\
(-1)^{n-i} q^{(2)}_{n,i} &= \sigma_{n,i} \quad \text{con} \quad l_j = j+1 \qquad (j = 1, 2, 3, \dots, n-1) \\
(-1)^{n-i} r^{(2)}_{n,i} &= \sigma_{n,i} \quad \text{con} \quad l_j = j-2.
\end{aligned} \tag{16}$$

2. **Operatori lineari.** — Siano A ed X due operatori lineari che intenderemo applicati agli elementi di uno spazio lineare ad infinite dimensioni e che, secondo una denominazione usata dal Pincherle [1] diremo associati, cioè soddisfacenti alla relazione

$$AX - XA = 1. \tag{17}$$

Da questa si deducono le altre

$$AX^u - X^u A = uX^{u-1}, \quad A^u X - XA^u = uA^{u-1}, \tag{18}$$

con u intero.

Se consideriamo ora gli operatori AX^u, $X^u A$, $A^s X^s$, $X^s A^s$, $Y = X^{-(u-1)}$, valgono le relazioni [2]

$$(-1)^{n-1} A^n X^n = \sum_{i=1}^{i=n} (-1)^{i-1} a^{(u)}_{n,i} (AX^u)^i Y^i \tag{19}$$

$$(-1)^n A^n X^n = \sum_{i=0}^{i=n} (-1)^i a^{(u)}_{n+1,i+1} (X^u A)^i Y^i \tag{20}$$

---

(1) « Memorie dell'Accad. delle Scienze dell'Istituto di Bologna », S. 8, T. IX, pag. 40, 1932. (Cfr. id., « Atti Società italiana per il Progresso delle Scienze », Milano 1931).

(2) Analoghe relazioni si potrebbero dedurre considerando gli operatori $A^u X$, XA^u, $A^{-(u-1)}$.

$$X^n A^n = \sum_{i=1}^{i=n} a_{n,i}^{(u)}\, Y^i (X^u A)^i \tag{21}$$

$$X^n A^n = \sum_{i=0}^{i=n} a_{n+1,i+1}^{(u)}\, Y^i (A X^u)^i \tag{22}$$

$$(-1)^n A^n X^n = \sum_{i=0}^{i=n} (-1)^i b_{n+1,i+1}^{(u)}\, Y^i (X^u A)^i \tag{23}$$

$$X^n A^n = \sum_{i=0}^{i=n} b_{n+1,i+1}^{(u)} (A X^u)^i\, Y^i \tag{24}$$

$$(-1)^n A^n X^n = \sum_{i=0}^{i=n} (-1)^i c_{n+1,i+1}^{(u)}\, Y^i (A X^u)^i \tag{25}$$

$$X^n A^n = \sum_{i=0}^{i=n} c_{n+1,i+1}^{(u)} (X^u A)^i\, Y^i \tag{26}$$

$$(-1)^{n-1} (A X^u)^n\, Y^n = \sum_{i=1}^{i=n} (-1)^{i-1} \alpha_{n,i}^{(u)}\, A^i X^i \tag{27}$$

$$(-1)^n (X^u A)^n\, Y^n = \sum_{i=0}^{i=n} (-1)^i \alpha_{n+1,i+1}^{(u)}\, A^i X^i \tag{28}$$

$$Y^n (X^u A)^n = \sum_{i=1}^{i=n} \alpha_{n,i}^{(u)}\, X^i A^i \tag{29}$$

$$Y^n (A X^u)^n = \sum_{i=0}^{i=n} \alpha_{n+1,i+1}^{(u)}\, X^i A^i \tag{30}$$

$$(-1)^n\, Y^n (X^u A)^n = \sum_{i=0}^{i=n} (-1)^i \beta_{n+1,i+1}^{(u)}\, A^i X^i \tag{31}$$

$$(A X^u)^n\, Y^n = \sum_{i=0}^{i=n} \beta_{n+1,i+1}^{(u)}\, X^i A^i \tag{32}$$

$$(-1)^n\, Y^n (A X^u)^n = \sum_{i=0}^{i=n} (-1)^i \gamma_{n+1,i+1}^{(u)}\, A^i X^i \tag{33}$$

$$(X^u A)^n\, Y^n = \sum_{i=0}^{i=n} \gamma_{n+1,i+1}^{(u)}\, X^i A^i \tag{34}$$

$$(-1)^{n-1} (A X^u)^n\, Y^n = \sum_{i=1}^{i=n} (-1)^{i-1} p_{n,i}^{(u)} (A X)^i \tag{35}$$

$$Y^n (X^u A)^n = \sum_{i=1}^{i=n} p_{n,i}^{(u)} (X A)^i \tag{36}$$

$$Y^n (A X^u)^n = \sum_{i=0}^{i=n} p_{n+1,i+1}^{(u)} (A X)^i \tag{37}$$

$$(-1)^n (X^u A)^n\, Y^n = \sum_{i=0}^{i=n} (-1)^i p_{n+1,i+1}^{(u)} (X A)^i \tag{38}$$

$$(-1)^n\, Y^n (A X^u)^n = \sum_{i=0}^{i=n} (-1)^i q_{n+1,i+1}^{(u)} (X A)^i \tag{39}$$

$$(X^u A)^n Y^n = \sum_{i=0}^{i=n} q^{(u)}_{n+1,i+1}(AX)^i \tag{40}$$

$$(AX^u)^n Y^n = \sum_{i=0}^{i=n} r^{(u)}_{n+1,i+1}(XA)^i \tag{41}$$

$$(-1)^n Y^n (X^u A)^n = \sum_{i=0}^{i=n} (-1)^i r^{(u)}_{n+1,i+1}(AX)^i. \tag{42}$$

Queste relazioni, verificate per i primi valori di n, si possono verificare in generale

moltiplicando le	(19)	e	(20)	a destra		per	$X^{-n}AX^{n+1}$
» »	(21)	»	(22)	a sinistra		»	$X^{n-1}AX^{-n}$
» »	(27)	»	(35)	»	destra	»	$-Y^{-n}(AX^u)Y^{n+1}$
» »	(28)	»	(38)	»	»	»	$-Y^{-n}(X^uA)Y^{n+1}$
» »	(29)	»	(36)	»	sinistra	»	$Y^{n+1}(X^uA)Y^{-n}$
» »	(30)	»	(37)	»	»	»	$Y^{n+1}(AX^u)Y^{-n}$
» »	(31)	»	(42)	»	»	»	$-Y^{n+1}(X^uA)Y^{-n}$
» »	(32)	»	(41)	»	destra	»	$Y^{-n}(AX^u)Y^{n+1}$
» »	(33)	»	(39)	»	sinistra	»	$-Y^{n+1}(AX^u)Y^{-n}$
» »	(34)	»	(40)	»	destra	»	$Y^{-n}(X^uA)Y^{n+1}$;

applicando per le (23) e (25) la relazione

$$A^{n+1}X^{n+1} = AXA^nX^n + nA^nX^n, \tag{43}$$

per le (24) e (26) la relazione

$$X^{n+1}A^{n+1} = X^nA^nXA - nX^nA^n; \tag{44}$$

e tenendo conto per tutte della prima delle (18) e delle leggi di formazione dei numeri $a^{(u)}_{n,i}$, $b^{(u)}_{n,i}$, $c^{(u)}_{n,i}$, $\alpha^{(u)}_{n,i}$, $\beta^{(u)}_{n,i}$, $\gamma^{(u)}_{n,i}$, $p^{(u)}_{n,i}$, $q^{(u)}_{n,i}$, $r^{(u)}_{n,i}$.

Le relazioni dalla (35) alla (42), per le (14), si possono scrivere

$(35)_1$ $\quad (AX^u)^n Y^n = [AX][AX-(u-1)][AX-2(u-1)]\ldots[AX-(n-1)(u-1)]$

$(36)_1$ $\quad Y^n(X^uA)^n = [XA][XA+(u-1)][XA+2(u-1)]\ldots[XA+(n-1)(u-1)]$

$(37)_1$ $\quad Y^n(AX^u)^n = [AX+(u-1)][AX+2(u-1)][AX+3(u-1)]\ldots$
$\ldots[AX+n(u-1)]$

$(38)_1$ $\quad (X^uA)^n Y^n = [XA-(u-1)][XA-2(u-1)][XA-3(u-1)]\ldots$
$\ldots[XA-n(u-1)]$

$(39)_1$ $\quad Y^n(AX^u)^n = [XA+(u-1)+1][XA+2(u-1)+1][XA+3(u-1)+1]\ldots$
$\ldots[XA+n(u-1)+1]$

$(40)_1$ $\quad (X^uA)^n Y^n = [AX-(u-1)-1][AX-2(u-1)-1][AX-3(u-1)-1]\ldots$
$\ldots[AX-n(u-1)-1]$

$$(41)_1 \quad (AX^u)^n Y^n = [XA+1][XA-(u-1)+1][XA-2(u-1)+1]\ldots$$
$$\ldots[XA-(n-1)(u-1)+1]$$
$$(42)_1 \quad Y^n(X^uA)^n = [AX-1][AX+(u-1)-1][AX+2(u-1)-1]\ldots$$
$$\ldots[AX+(n-1)(u-1)-1].$$

E queste, indipendentemente dalle (14), si possono dedurre direttamente applicando le relazioni

$$(45) \quad (AX^u)^n Y^n = (AX^u)^{n-1} Y^{n-1}[AX-(n-1)(u-1)] \text{ per le } (35)_1 \text{ e } (41)_1$$
$$(46) \quad Y^n(X^uA)^n = [XA+(n-1)(u-1)]Y^{n-1}(X^uA)^{n-1} \quad \text{» » } (36)_1 \text{ » } (42)_1$$
$$(47) \quad Y^n(AX^u)^n = [AX+n(u-1)]Y^{n-1}(AX^u)^{n-1} \quad \text{» » } (37)_1 \text{ » } (39)_1$$
$$(58) \quad (X^uA)^n Y^n = (X^uA)^{n-1} Y^{n-1}(XA-n(u-1)) \quad \text{» » } (38)_1 \text{ » } (40)_1.$$

Per $u=1$ le relazioni assegnate diventano

$$(19') \qquad (-1)^{n-1}A^nX^n = \sum_{i=1}^{i=n}(-1)^{i-1}h_{n,i}(AX)^i$$

$$(20') \qquad (-1)^nA^nX^n = \sum_{i=0}^{i=n}(-1)^i h_{n+1,i+1}(XA)^i$$

$$(21') \qquad X^nA^n = \sum_{i=1}^{i=n} h_{n,i}(XA)^i$$

$$(22') \qquad X^nA^n = \sum_{i=0}^{i=n} h_{n+1,i+1}(AX)^i$$

$$(27') \qquad (-1)^{n-1}(AX)^n = \sum_{i=1}^{i=n}(-1)^{i-1}k_{n,i}A^iX^i$$

$$(28') \qquad (-1)^n(XA)^n = \sum_{i=0}^{i=n}(-1)^i k_{n+1,i+1}A^iX^i$$

$$(29') \qquad (XA)^n = \sum_{i=1}^{i=n} k_{n,i}X^iA^i$$

$$(30') \qquad (AX)^n = \sum_{i=0}^{i=n} k_{n+1,i+1}X^iA^i$$

$$(39') \qquad (AX)^n = \sum_{i=0}^{i=n}\binom{n}{i}(XA)^i$$

$$(40') \qquad (XA)^n = \sum_{i=0}^{i=n}(-1)^{n-i}\binom{n}{i}(AX)^i;$$

le (19'), (20'), (21'), (22'), dato il significato di $h_{n,i}$, si possono ancora scrivere

$$(19')_1 \qquad A^nX^n = AX(AX+1)(AX+2)\ldots(AX+n-1)$$
$$(20')_1 \qquad A^nX^n = (XA+1)(XA+2)(XA+3)\ldots(XA+n)$$
$$(21')_1 \qquad X^nA^n = XA(XA-1)(XA-2)\ldots(XA-n+1)$$
$$(22')_1 \qquad X^nA^n = (AX-1)(AX-2)(AX-3)\ldots(AX-n),$$

e in questa ultima forma si possono dedurre direttamente con le relazioni già applicate (43) e (44)

$$A^n X^n = (AX + n - 1)A^{n-1}X^{n-1}, \quad X^n A^n = X^{n-1}A^{n-1}(XA - n + 1).$$

Per $u = 2$ si ottengono le altre relazioni

$$(19'') \qquad A^n X^n = n! \sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{i!}\binom{n-1}{i-1}(AX^2)^i X^{-i}$$

$$(20'') \qquad A^n X^n = (n+1)! \sum_{i=0}^{i=n} \frac{1}{(i+1)!}\binom{n}{i}(X^2A)^i X^{-i}$$

$$(21'') \qquad (-1)^{n-1} X^n A^n = n! \sum_{i=1}^{i=n} \frac{(-1)^{i-1}}{i!}\binom{n-1}{i-1} X^{-i}(X^2A)^i$$

$$(22'') \qquad (-1)^n X^n A^n = (n+1)! \sum_{i=0}^{i=n} \frac{(-1)^i}{(i+1)!}\binom{n}{i} X^{-i}(AX^2)^i$$

$$(23'') \qquad A^n X^n = n! \sum_{i=0}^{i=n} \frac{1}{i!} X^{-i}(X^2A)^i$$

$$(24'') \qquad (-1)^n X^n A^n = n! \sum_{i=0}^{i=n} \frac{(-1)^i}{i!}(AX^2)^i X^{-i}$$

$$(25'') \qquad X^{n-1}A^n X^n = (AX - n + 1)(AX^2)^{n-1}$$

$$(26'') \qquad X^n A^n X^{n-1} = (X^2A)^{n-1}(XA + n - 1)$$

$$(27'') \qquad (-1)^{n-1}(AX^2)^n X^{-n} = n! \sum_{i=1}^{i=n} \frac{(-1)^{i-1}}{i!}\binom{n-1}{i-1} A^i X^i$$

$$(28'') \qquad (-1)^n (X^2A)^n X^{-n} = (n+1)! \sum_{i=0}^{i=n} \frac{(-1)^i}{(i+1)!}\binom{n}{i} A^i X^i$$

$$(29'') \qquad X^{-n}(X^2A)^n = n! \sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{i!}\binom{n-1}{i-1} X^i A^i$$

$$(30'') \qquad X^{-n}(AX^2)^n = (n+1)! \sum_{i=0}^{i=n} \frac{1}{(i+1)!}\binom{n}{i} X^i A^i$$

$$(31'') \qquad X^{-n}(X^2A)^n = A^{n-1}X^n A \quad \text{o meglio} \quad (X^2A)^n = X^n A^{n-1} X^n A$$

$$(32'') \qquad (AX^2)^n X^{-n} = AX^n A^{n-1} \quad \text{»} \quad \text{»} \quad (AX^2)^n = AX^n A^{n-1} X^n$$

$$(33'') \qquad X^{-n}(AX^2)^n = n! \sum_{i=0}^{i=n} \frac{1}{i!} A^i X^i$$

$$(34'') \qquad (-1)^n (X^2A)^n X^{-n} = n! \sum_{i=0}^{i=n} \frac{(-1)^i}{i!} X^i A^i$$

$$(35'')_1 \qquad (AX^2)^n X^{-n} = AX(AX-1)(AX-2)\dots(AX-n+1)$$

$$(36'')_1 \qquad X^{-n}(X^2A)^n = XA(XA+1)(XA+2)\dots(XA+n-1)$$

$$(37'')_1 \qquad X^{-n}(AX^2)^n = (AX+1)(AX+2)(AX+3)\dots(AX+n)$$

$$(38'')_1 \qquad (X^2A)^n X^{-n} = (XA-1)(XA-2)(XA-3)\dots(XA-n)$$

$$(39'')_1 \qquad X^{-n}(AX^2)^n = (XA+2)(XA+3)(XA+4)\dots(XA+n+1)$$
$$(40'')_1 \qquad (X^2A)^n X^{-n} = (AX-2)(AX-3)(AX-4)\dots(AX-n-1)$$
$$(41'')_1 \qquad (AX^2)^n X^{-n} = (XA+1)XA(XA-1)\dots(XA-n+2)$$
$$(42'')_1 \qquad X^{-n}(X^2A)^n = (AX-1)AX(AX+1)\dots(AX+n-2).$$

3. **Applicazioni.** — In questo ultimo paragrafo vediamo come, confrontando le relazioni precedenti, sia possibile dedurne altre che legano gli operatori o i numeri di STIRLING.

Così, sottraendo dalla (30) la (29) e sommando la (27) con la (28) si ricavano le

$$(49) \qquad Y^n[(AX^u)^n - (X^uA)^n] = \sum_{i=1}^{i=n}[n(u-1)+i]\alpha_{n,i}^{(u)} X^{i-1}A^{i-1}$$

$$(50) \qquad (-1)^{n-1}[(AX^u)^n - (X^uA)^n]Y^n = \sum_{i=1}^{i=n}(-1)^{i-1}[n(u-1)+i]\alpha_{n,i}^{(u)} A^{i-1}X^{i-1}.$$

D' altra parte si dimostrano le relazioni

$$(51) \qquad Y^{n-1}\sum_{i=0}^{i=n-1}(AX^u)^{n-i-1}(X^uA)^i = \sum_{i=1}^{i=n} i\alpha_{n,i}^{(u)} X^{i-1}A^{i-1}$$

$$(52) \qquad (-1)^{n-1}\sum_{i=0}^{i=n-1}(AX^u)^{n-i-1}(X^uA)^i\cdot Y^{n-1} = \sum_{i=1}^{i=n}(-1)^{i-1} i\alpha_{n,i}^{(u)} A^{i-1}X^{i-1},$$

e combinando queste con le precedenti si ricavano le

$$(53) \qquad (AX^u)^n - (X^uA)^n = \frac{AX^u - X^uA}{u}\left\{ n(u-1)(AX^u)^{n-1} + \sum_{i=0}^{i=n-1}(AX^u)^{n-i-1}(X^uA)^i \right\}$$

$$(54) \qquad (AX^u)^n - (X^uA)^n = \left\{ n(u-1)(X^uA)^{n-1} + \sum_{i=0}^{i=n-1}(AX^u)^{n-i-1}(X^uA)^i \right\}\frac{AX^u - X^uA}{u},$$

che per $u=1$ e $u=2$ diventano

$$(53') \qquad (AX)^n - (XA)^n = \sum_{i=0}^{i=n-1}(AX)^{n-i-1}(XA)^i$$

$$(53'') \qquad (AX^2)^n - (X^2A)^n = \frac{AX^2 - X^2A}{2}\left\{ n(AX^2)^{n-1} + \sum_{i=0}^{i=n-1}(AX^2)^{n-i-1}(X^2A)^i \right\}$$

$$(54'') \qquad (AX^2)^n - (X^2A)^n = \left\{ n(X^2A)^{n-1} + \sum_{i=0}^{i=n-1}(AX^2)^{n-i-1}(X^2A)^i \right\}\frac{AX^2 - X^2A}{2}.$$

Combinando le $(19')_1$ e $(37'')_1$, le $(21')_1$ e $(38'')_1$ si ricavano le relazioni

$$(55) \qquad (AX^2)^n = X^{n-1}A^nX^{n+1}$$
$$(56) \qquad (X^2A)^n = X^{n+1}A^nX^{n-1}$$

che potrebbero pure dedursi dalle (32'') e (31'').

Uguagliando la (30) alla (39) e tenendo conto in quest'ultima della (29') si hanno dopo un certo sviluppo la relazione

$$\alpha^{(u)}_{n+1,\,i+1} = \sum_{j=0}^{j=n-i} (-1)^j q_{n+1,\,n-j+1} k_{n-j,\,i} \tag{57}$$

con le particolari

$$k_{n+1,\,i+1} = \sum_{j=0}^{j=n-i} \binom{n}{j} k_{n-j,\,i} \tag{57'}$$

$$\frac{(n+1)!}{(i+1)!}\binom{n}{i} = \sum_{j=0}^{j=n-i} h_{n+1,\,n-j+1} k_{n-j,\,i}\,. \tag{57''}$$

Sostituendo nel secondo membro della (21) la (29) e sviluppando, si hanno la relazione

$$\sum_{j=i}^{j=n} a^{(u)}_{n,j}\alpha^{(u)}_{j,\,i} = 0 \qquad (i<n) \tag{58}$$

e le particolari

$$\sum_{j=i}^{j=n} h_{n,\,j} k_{j,\,i} = 0 \qquad (i<n) \tag{58'}$$

$$\sum_{j=i}^{j=n} (-1)^j \frac{1}{i\,!}\binom{n-1}{j-1}\binom{j-1}{i-1} = 0 \qquad (i<n). \tag{58''}$$

Gli operatori s'intendano infine applicati al campo di base $1, x, x^2, \ldots$ e si prenda per A la derivazione ordinaria D rispetto ad x e per X la moltiplicazione per x [1].

---

[1] In tal caso particolare alcune relazioni sugli operatori Dx, xD, $D^s x^s$, $x^s D^s$, si possono ricavare con procedimento semplice e rapido che ci ha comunicato gentilmente il prof. A. Mambriani.

Così dalle

$$(Dx)^m x^n = (n+1)^m x^n = \sum_{i=0}^{i=m}\binom{m}{i} n^i x^n = \sum_{i=0}^{i=m}\binom{m}{i}(xD)^i x^n$$

$$(Dx)^m x^n - (xD)^m x^n = [(n+1)^m - n^m]x^n = \sum_{i=0}^{i=m-1}(n+1)^{m-i-1} n^i x^n = \sum_{i=0}^{i=m-1}(Dx)^{m-i-1}(xD)^i x^n$$

$$(x^m D^m)x^n = \sum_{i=1}^{i=m} h_{m,\,i} n^i x^n = \sum_{i=1}^{i=m} h_{m,\,i}(xD)^i x^n,$$

si ricavano le relazioni

$$(Dx)^m = \sum_{i=0}^{i=m}\binom{m}{i}(xD)^i$$

$$(Dx)^m - (xD)^m = \sum_{i=0}^{i=m-1}(Dx)^{m-i-1}(xD)^i$$

$$x^m D^m = \sum_{i=1}^{i=m} h_{m,\,i}(xD)^i.$$

Applicando gli operatori $(Dx^u)^n$, $(xD)^i$ alla funzione e^{x-1}, sostituendo nella (39) per $A = D$, $X = x$, e ponendo

$$x = 1, \quad S_i^{(u)} = \alpha_{i1}^{(u)} + \alpha_{i2}^{(u)} + \dots + \alpha_{ii}^{(u)},$$

si ha la relazione

$$S_{n+1}^{(u)} = \sum_{i=0}^{i=n} (-1)^{n-i} q_{n+1,i+1}^{(u)} S_i^{(1)}. \tag{59}$$

Posto sempre $A = D$, $X = x$, applicando la (21) alla funzione x^s, si ha dopo calcolo piuttosto luogo la relazione

$$\alpha_{n,i}^{(u)} = \begin{vmatrix} h_{1,1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \nu h_{2,1} & h_{2,2} & 0 & \dots & 0 \\ \nu^2 h_{3,1} & \nu h_{3,2} & h_{3,3} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \nu^{i-2} h_{i-1,1} & \nu^{i-3} h_{i-1,2} & \nu^{i-4} h_{i-1,3} & \dots & 0 \\ (-1)^{n-1} h_{n,1} & (-1)^{n-2} h_{n,2} & (-1)^{n-3} h_{n,3} & \dots & h_{n,n} \\ \nu^{i} h_{i+1,1} & \nu^{i-1} h_{i+1,2} & \nu^{i-2} h_{i+1,3} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \nu^{n-1} h_{n,1} & \nu^{n-2} h_{n,2} & \nu^{n-3} h_{n,3} & \dots & h_{n,n} \end{vmatrix}, \tag{60}$$

con $\nu = u - 1$; e per $u = 2$ l'altra relazione

$$\frac{n!}{i!}\binom{n-1}{i-1} = \begin{vmatrix} h_{1,1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ h_{2,1} & h_{2,2} & 0 & \dots & 0 \\ h_{3,1} & h_{3,2} & h_{3,3} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_{i-1,1} & h_{i-1,2} & h_{i-1,3} & \dots & 0 \\ (-1)^{n-1} h_{n,1} & (-1)^{n-2} h_{n,2} & (-1)^{n-3} h_{n,3} & \dots & h_{n,n} \\ h_{i+1,1} & h_{i+1,2} & h_{i+1,3} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_{n,1} & h_{n,2} & h_{n,3} & \dots & h_{n,n} \end{vmatrix} \tag{60'}$$

Con analoghi confronti si potrebbero dedurre delle relazioni per gli altri numeri introdotti, ed altre ancora mediante l'impiego delle relazioni notevoli

$$A^n X^n = \sum_{i=0}^{i=n} (n-i)! \binom{n}{i}^2 X^i A^i \tag{61}$$

$$(-1)^n X^n A^n = \sum_{i=0}^{i=n} (-1)^i (n-i)! \binom{n}{i}^2 A^i X^i. \tag{62}$$