Sulla geometria d'una superficie poco differente da un ellissoide con applicazione al caso della Terra.

Memoria di CORRADINO MINEO (a Palermo).

Sunto. - *Si assumono come punti corrispondenti, sulla superficie* S *e sull'ellissoide, due punti situati su una stessa normale di* S, *ammettendo che l'angolo delle normali alle superficie in due punti corrispondenti sia una piccola quantità della quale si possa trascurare il quadrato. Si confrontano in questa ipotesi gli elementi metrici di* S *con i corrispondenti ellissoidici, studiando in particolare le trasformate ellissoidiche delle geodetiche di* S. *Si fa una applicazione della teoria alla determinazione del « geoide » per mezzo delle deviazioni della verticale, ponendo questa determinazione su fondamenti più rigorosi.*

Dell'argomento mi occupai in un lavoro del 1911 (1). Più recentemente il TORTORICI vi ha dedicato una importante Memoria, giovandosi di alcune formole inedite del WEINGARTEN, pubblicate dal BIANCHI (2). Qui ci torno, perchè la questione della così detta *deviazione in azimut* va maggiormente approfondita. Già il POINCARÉ aveva richiamato l'attenzione sull'insufficienza della formola comunemente adoperata per l'anzidetta deviazione (3). In questa formola, invero, come in quella famosa di LAPLACE, che se ne deduce, la deviazione in discorso è soltanto una funzione del punto, non dipendendo dalla direzione uscente dal punto. Ora, se così fosse, la rappresentazione della superficie S (in particolare del « geoide ») sull'ellissoide sarebbe conforme; il che non è, salvo che non si trascurino quantità che possono andare fino a qualche decimo di secondo d'arco.

Non basta. Quand'anche la rappresentazione, limitata a una conveniente regione di S, si potesse considerare come conforme, quella formola non sa-

(1) Vedi MINEO, *Sulle formole fondamentali per il confronto della superficie geoidica con l'ellissoide besseliano,* « Giornale di Matematiche di Battaglini », Vol. XLIX, Napoli, 1911.

(2) Vedi TORTORICI, *Estensione di alcune formole di Weingarten ed applicazione al problema della forma della Terra,* « Atti della R. Accademia di Scienze, Lettere e Belle Arti di Palermo », Vol. XV, Palermo, 1928.

(3) Cfr. POINCARÉ, *Sur les déviations de la verticale en géodésie,* « Bulletin astronomique », Vol. XVIII, Paris, 1901.

rebbe per questo meno inesatta. Infatti, nella pratica non si considerano le deviazioni in azimut lungo curve corrispondenti, per es. lungo un arco geodetico della superficie S e lungo il corrispondente arco ellissoidico: a quest'ultimo arco, invece, si sostituisce l'arco di geodetica ellissoidica passante per gli stessi estremi. La formola, dunque, quand'anche valga per due archi corrispondenti, non può mai valere per due archi che non si corrispondono: occorrerebbe per ciò che la rappresentazione di S sull'ellissoide conservasse le geodetiche, cosa che non può avvenire.

Il POINCARÉ, nello scritto citato, fu condotto, con rapidi cenni, a stabilire una formola più esatta per la deviazione in discorso. Per una deduzione rigorosa della formola, è necessario uno studio delle trasformate ellissoidiche delle geodetiche di S e un confronto di queste curve con le geodetiche stesse dell'ellissoide. Nel mio lavoro citato, questo studio fu fatto e fu ritrovata la formola del POINCARÉ; ma, nel dedurla, si ammise, con un ragionamento intuitivo, che le due curve da confrontare (trasformata di una geodetica di S e geodetica ellissoidica), passanti per due punti dell'ellissoide *abbastanza vicini* (a un centinaio di chilometri di distanza, sull'ellissoide terrestre), si confondano *linearmente*, nel senso che le coordinate curvilinee in punti corrispondenti sono eguali (nell'ordine d'approssimazione prefissato): mentre, come fu dimostrato rigorosamente, gli azimut corrispondenti non sono eguali.

Nella presente Memoria la questione è completamente risoluta con uno studio più approfondito del sistema differenziale del prim'ordine delle trasformate ellissoidiche delle geodetiche di S; sistema i cui integrali (ottenuti per serie) ho potuto confrontare con gl'integrali delle geodetiche ellissoidiche. Sono così pervenuto a formole più approssimate e più generali: come caso particolare ho ritrovato la primitiva formola di deviazione in azimut, restando così confermata l'intuizione che mi servì a stabilirla nel lavoro del 1911.

Dei risultati ho fatto un'applicazione al caso della Terra, giustificando in parte i procedimenti in uso e mostrando come essi si debbano correggere al lume della teoria.

1. Supponendo riferito l'ellissoide di rotazione a coordinate geografiche φ e ω, le sue equazioni parametriche sono

$$(1) \qquad x=\frac{a\cos\varphi\cos\omega}{\sqrt{1-e^2\operatorname{sen}^2\varphi}},\quad y=\frac{a\cos\varphi\operatorname{sen}\omega}{\sqrt{1-e^2\operatorname{sen}^2\varphi}},\quad z=\frac{a(1-e^2)\operatorname{sen}\varphi}{\sqrt{1-e^2\operatorname{sen}^2\varphi}},$$

dove a è il semiasse maggiore ed e l'eccentricità.

Ne segue che i coseni direttori della normale nel punto (φ, ω) sono

$$L = \cos\varphi \cos\omega, \quad M = \cos\varphi \operatorname{sen}\omega, \quad N = \operatorname{sen}\varphi. \tag{2}$$

E per il quadrato dell'elemento lineare della superficie si ha la seguente espressione:

$$ds^2 = Ed\varphi^2 + Gd\omega^2, \tag{3}$$

essendo

$$E = \Sigma\left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\right)^2 = \frac{a^2(1-e^2)^2}{(1-e^2\operatorname{sen}^2\varphi)^3}, \quad G = \Sigma\left(\frac{\partial x}{\partial\omega}\right)^2 = \frac{a^2\cos^2\varphi}{1-e^2\operatorname{sen}^2\varphi}; \tag{4}$$

mentre i coefficienti della seconda forma differenziale quadratica sono i seguenti

$$\left\{\begin{aligned} D &= -\Sigma\frac{\partial L}{\partial\varphi}\frac{\partial x}{\partial\varphi} = -\frac{a(1-e^2)}{(1-e^2\operatorname{sen}^2\varphi)^{3/2}}, \\ D' &= -\Sigma\frac{\partial L}{\partial\varphi}\frac{\partial x}{\partial\omega} = -\Sigma\frac{\partial L}{\partial\omega}\frac{\partial x}{\partial\varphi} = 0, \\ D'' &= -\Sigma\frac{\partial L}{\partial\omega}\frac{\partial x}{\partial\omega} = -\frac{a\cos^2\varphi}{(1-e^2\operatorname{sen}^2\varphi)^{1/2}}. \end{aligned}\right. \tag{5}$$

2. Sia S una superficie poco differente dall'ellissoide, nel senso che ora diremo. Supporremo che della S sia assegnata la congruenza delle normali, rispetto all'ellissoide, preso come superficie di partenza. La retta della congruenza passante per il punto $M(\varphi, \omega)$ dell'ellissoide sarà individuata dall'angolo ε che essa forma con la normale ellissoidica passante per M *(deviazione totale)* e dall'angolo γ che il piano delle due normali *(piano di deviazione)* forma con il meridiano ellissoidico passante per M. Noi supporremo che l'angolo ε sia una quantità piccola, della quale si possa trascurare il quadrato. Teoricamente si può dire che ε è il nostro infinitesimo principale o del primo ordine, e che gl'infinitesimi d'ordine superiore saranno trascurati.

Chiamiamo M^* il punto di S che sta sul raggio della nostra congruenza passante per M: tra i punti M dell'ellissoide e i punti M^* di S si stabilisce così una corrispondenza, che supporremo biunivoca, e che si può chiamare *corrispondenza secondo le normali di* S, perchè due punti corrispondenti stanno su una normale di S.

Riferiamo anche la S a coordinate geografiche l e λ, rispetto all'asse di rotazione dell'ellissoide: l *(latitudine)* è il complemento dell'angolo che la normale alla S in M^* forma con l'asse z; λ *(longitudine)* è l'angolo che il piano meridiano di S passante per M^* (cioè il piano contenente la normale a S in M e la parallela per M all'asse z) forma con un piano fondamentale *(primo meridiano)* passante per l'asse z.

Posto

$$\xi = \varepsilon \cos\gamma, \quad \eta = \varepsilon \operatorname{sen}\gamma, \tag{6}$$

è facile dedurre (giovandosi della rappresentazione sferica delle direzioni) le seguenti relazioni

$$l = \varphi + \xi, \quad \lambda = \omega + \eta \sec\varphi, \tag{7}$$

che valgono, beninteso, a meno di ε^2 (e quindi di ξ^2, η^2, ecc.).

Da un punto di vista affatto teorico, considereremo ξ ed η come date funzioni di φ e ω; le quali funzioni determinano la nostra congruenza a partire dalla superficie ellissoidica. Supporremo inoltre che le (7) siano reversibili, cioè definiscano univocamente φ e ω come funzioni di l e λ: la corrispondenza tra i punti $M(\varphi, \omega)$ dell'ellissoide e i punti $M^*(l, \lambda)$ di S è allora biunivoca.

Segue quindi dalle (7):

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial\varphi}{\partial l} = 1 - \frac{\partial\xi}{\partial\varphi}, \quad \frac{\partial\omega}{\partial l} = -\frac{\partial}{\partial\varphi}(\eta\sec\varphi), \\ &\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda} = -\frac{\partial\xi}{\partial\omega}, \quad \frac{\partial\omega}{\partial\lambda} = 1 - \frac{\partial\eta}{\partial\omega}\sec\varphi. \end{aligned}\right. \tag{8}$$

Le funzioni ξ ed η di φ e ω si possono anche considerare come funzioni di l e λ, composte per mezzo di φ e ω; le quali, per ipotesi, sono funzioni di l e λ definite dalle (7). Indicheremo con $\bar{\xi}$ e $\bar{\eta}$ le funzioni di l e λ nelle quali si trasformano le funzioni ξ e η, quando φ e ω si considerano come funzioni di l e λ definite dalle (7).

Si deduce allora

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial\varphi}{\partial l} + \frac{\partial\bar{\xi}}{\partial l} = 1, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial\lambda} + \frac{\partial\bar{\xi}}{\partial\lambda} = 0, \\ &\frac{\partial\omega}{\partial l} + \frac{\partial}{\partial l}(\bar{\eta}\sec l) = 0, \quad \frac{\partial\omega}{\partial\lambda} + \frac{\partial\bar{\eta}}{\partial\lambda}\sec l = 1. \end{aligned}\right. \tag{9}$$

Infine si ha (sempre a meno d'infinitesimi d'ordine superiore):

$$\frac{\partial\bar{\xi}}{\partial l} = \frac{\partial\xi}{\partial\varphi}, \quad \frac{\partial\bar{\xi}}{\partial\lambda} = \frac{\partial\xi}{\partial\omega}, \quad \frac{\partial\bar{\eta}}{\partial l} = \frac{\partial\eta}{\partial\varphi}, \quad \frac{\partial\bar{\eta}}{\partial\lambda} = \frac{\partial\eta}{\partial\omega}. \tag{10}$$

3. Chiamando X, Y, Z i coseni direttori della normale alla superficie S in un punto $M^*(x^*, y^*, z^*)$, si ha

$$X = \cos l \cos\lambda, \quad Y = \cos l \operatorname{sen}\lambda, \quad Z = \operatorname{sen} l; \tag{11}$$

ovvero, tenendo presenti le (2) e le (7):

$$
(12) \qquad \begin{cases} X = L - \xi \operatorname{sen} \varphi \cos \omega - \eta \operatorname{sen} \omega, \\ Y = M - \xi \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \omega + \eta \cos \omega, \\ Z = N + \xi \cos \varphi. \end{cases}
$$

Indicando con h il segmento $\overline{MM^*}$ compreso tra il punto $M(x, y, z)$ dello ellissoide e il corrispondente $M^*(x^*, y^*, z^*)$ di S, abbiamo

$$
(13) \qquad x^* = x + hX, \quad y^* = y + hY, \quad z^* = z + hZ.
$$

E la condizione necessaria e sufficiente affinchè la superficie S esista, ovvero affinchè la congruenza definita dalle funzioni ξ e η sia normale, è che si abbia:

$$
Xdx^* + Ydy^* + Zdz^* = 0,
$$

ovvero, per le (13):

$$
dh = -(Xdx + Ydy + Zdz).
$$

Tenendo presenti le (1), (5) e (12), si trova

$$
(14) \qquad dh = D\xi d\varphi + D''\eta \sec \varphi \, d\omega.
$$

E quindi la condizione

$$
(15) \qquad \frac{\partial \xi}{\partial \omega} = \frac{D''}{D} \frac{\partial}{\partial \varphi} (\eta \sec \varphi) + \frac{1}{D} \frac{dD''}{d\varphi} \eta \sec \varphi,
$$

che è necessaria e sufficiente affinchè la nostra congruenza sia normale.

Quando si trascurino i termini in ξe^2, ηe^2, la (15) si riduce alla condizione

$$
\frac{\partial \xi}{\partial \omega} = \frac{\partial}{\partial \varphi} (\eta \cos \varphi),
$$

trovata dal VILLARCEAU.

Se la (14) è verificata, esiste una famiglia di superficie parallele, che ammettono come normali i raggi della nostra congruenza. *Noi supporremo che la* S *sia molto vicina all'ellissoide di partenza, e ammetteremo che* $\frac{\mathrm{h}}{\mathrm{a}}$ *sia una quantità piccola dell'ordine di* ε *(un infinitesimo del 1º ordine, dal punto di vista teorico).*

4. Riferita la S al sistema definito (nº 2) di coordinate curvilinee geografiche, calcoliamo i coefficienti D_*, D_*', D_*'' della seconda forma differenziale quadratica di S; dalla quale forma dipende più direttamente la determinazione di S [4].

Si trova:

$$(16)\quad \begin{cases} D_* = -\Sigma \dfrac{\partial X}{\partial l}\dfrac{\partial x^*}{\partial l} = D\left(1 - \dfrac{\partial \xi}{\partial \varphi}\right) - h, \\ D_*' = -\Sigma \dfrac{\partial X}{\partial l}\dfrac{\partial x^*}{\partial \lambda} = -\Sigma \dfrac{\partial X}{\partial \lambda}\dfrac{\partial x^*}{\partial l} = D\eta \sec\varphi - D''\dfrac{\partial}{\partial \varphi}(\eta \sec\varphi), \\ D_*'' = -\Sigma \dfrac{\partial X}{\partial \lambda}\dfrac{\partial x^*}{\partial \lambda} = D''\left(1 - \xi \operatorname{tang}\varphi - \dfrac{\partial \eta}{\partial \omega}\sec\varphi\right) - h\cos^2\varphi. \end{cases}$$

Avuti i coefficienti D_*, D_*', D_*'', quelli E_*, F_*, G_*, della prima forma fondamentale si deducono dalle formole generali [5]

$$E_* = D_*^2 + D_*'^2 \sec^2 l,$$
$$F_* = D_*'(D_* + D_*'' \sec^2 l),$$
$$G_* = D_*'^2 + D_*''^2 \sec^2 l;$$

e si trova (nell'ipotesi di h infinitesimo del 1° ordine) [6]:

$$(17)\quad \begin{cases} E_* = D^2\left(1 - 2\dfrac{\partial \xi}{\partial \varphi}\right) - 2Dh, \\ F_* = D^2\eta \operatorname{sen}\varphi - D''^2 \sec^2\varphi \dfrac{\partial}{\partial \varphi}(\eta \sec\varphi) - DD''\sec\varphi \dfrac{\partial \eta}{\partial \varphi}, \\ G_* = D''^2\left(1 - \dfrac{\partial \eta}{\partial \omega}\sec\varphi\right)\sec^2\varphi - 2D''h. \end{cases}$$

5. Sia c^* una curva, appartenente alla superficie S, di equazione

$$(18)\quad \lambda = \lambda(l).$$

L'equazione

$$(19)\quad \omega = \omega(\varphi)$$

della curva c corrispondente a c^* sull'ellissoide, si trova eliminando l e λ tra la (18) e le (7); e facilmente si stabilisce la relazione

$$(20)\quad \frac{d\lambda}{dl} = \frac{d\omega}{d\varphi}\left(1 - \frac{\partial \xi}{\partial \varphi} - \frac{\partial \eta}{\partial \omega}\sec\varphi - \frac{\partial \xi}{\partial \omega}\frac{d\omega}{d\varphi}\right) + \frac{\partial}{\partial \varphi}(\eta \sec\varphi).$$

---

(4) Cfr. MINEO, *Sulle superficie riferite a un sistema geografico e sulla determinazione intrinseca del Geoide*, « Giornale di Matematiche di Battaglini », Vol. XLVIII, 1910.

(5) Vedi MINEO, ibidem.

(6) Si tenga presente che è

$$\sec^2 l = \sec^2\varphi\ (1 + 2\xi \operatorname{tang}\varphi).$$

Per l'angolo A che la linea c^* di S forma con le *linee Nord*, si ha

$$\operatorname{tang} A = \sec l \frac{D_*' + D_*'' \dfrac{d\lambda}{dl}}{D_* + D_*' \dfrac{d\lambda}{dl}}. \tag{21}$$

E per l'angolo Θ che la corrispondente linea c forma con le linee Nord dell'ellissoide (linee coincidenti con i meridiani o linee $\omega =$ costante), si ha

$$\operatorname{tang} \Theta = \sec \varphi \frac{D''}{D} \frac{d\omega}{d\varphi}. \tag{22}$$

Con un facile calcolo, che per brevità omettiamo, si trova, tenendo presenti le relazioni (15), (16) e (20):

$$\operatorname{tang} A = \operatorname{tang} \Theta + \eta \operatorname{tang} \varphi \left\{ 1 \quad \frac{D''}{D}\left(1 + \frac{dD''}{d\varphi} \frac{1}{\operatorname{sen} \varphi \cos \varphi}\right)\left(\frac{d\omega}{d\varphi}\right)^2 \right\} - \tag{23}$$
$$- \frac{h}{D} \cos \varphi \left(1 - \frac{D''}{D} \sec^2 \varphi\right) \frac{d\omega}{d\varphi}.$$

E da questa si deduce:

$$A - \Theta = \eta \operatorname{tang} \varphi + \frac{e^2}{1 - e^2} \frac{hD \dfrac{d\omega}{d\varphi} \cos^3 \varphi}{D^2 + D''^2 \left(\dfrac{d\omega}{d\varphi}\right)^2 \sec^2 \varphi}, \tag{24}$$

o anche

$$A - \Theta = \eta \operatorname{tang} \varphi + \frac{e^2}{1 - e^2} \frac{h}{D} \frac{d\omega}{d\varphi} \cos^3 \varphi \cos^2 \Theta. \tag{24bis}$$

Si vede che soltanto se si trascurano le quantità dell'ordine di $e^2 \dfrac{h}{a}$ o di $e^2 \varepsilon$, le precedenti formole si riducono alla formola solita

$$A - \Theta = \eta \operatorname{tang} \varphi.$$

In quest'ultimo caso la deviazione in azimut è indipendente dalla direzione considerata; e quindi la rappresentazione della superficie S sull'ellissoide è conforme.

6. Dimostriamo l'importante proprietà, che, *nella corrispondenza* (7) *tra le due superficie, al sistema ortogonale dei meridiani e paralleli dell'ellissoide corrisponde un doppio sistema ortogonale sulla* S.

A questo scopo trasformiamo il quadrato

$$ds^{*2} = E_{*}dl^2 + 2F_{*}dld\lambda + G_{*}d\lambda^2$$

dell'elemento lineare di S per mezzo delle formole (7) e teniamo presente la condizione (15). Si trova, con un calcolo che non presenta alcuna difficoltà:

$$ds^{*2} = (E - 2Dh)d\varphi^2 + (G - 2D''h)d\omega^2. \tag{25}$$

La (25) prova la nostra asserzione.

Poichè il quadrato dell'elemento lineare dell'ellissoide è dato dalla (3), si vede subito che la rappresentazione (7) non è conforme, essendo

$$1 - 2\frac{D}{E}h \neq 1 - 2\frac{D''}{G}h.$$

Si ha, infatti,

$$h\left(\frac{D}{E} - \frac{D''}{G}\right) = \frac{e^2}{1-e^2}\frac{h}{D''}\cos^4\varphi = -\frac{e^2}{1-e^2}\frac{h}{a}(1 - e^2\,\mathrm{sen}^2\,\varphi)^{\frac{1}{2}}\cos^2\varphi;$$

e quindi la rappresentazione (7) non è conforme se non quando si trascurino le quantità dell'ordine di $\frac{h}{a}e^2$, come avevamo previsto per altra via (n° 5).

Nella rappresentazione di S sull'ellissoide, i meridiani e i paralleli di questo sono le *linee principali* della deformazione (lineare). I moduli principali di deformazione sono

$$m_\varphi^2 = \frac{E}{E - 2Dh}, \quad m_\omega^2 = \frac{G}{G - 2D''h};$$

donde, tenendo presenti le (4) e (5):

$$m_\varphi = 1 - \frac{h}{a}\frac{(1 - e^2\,\mathrm{sen}^2\,\varphi)^{\frac{3}{2}}}{1 - e^2}, \quad m_\omega = 1 - \frac{h}{a}(1 - e^2\,\mathrm{sen}^2\,\varphi)^{\frac{1}{2}}. \tag{26}$$

In generale, si ha

$$m^2 = \frac{ds^2}{ds^{*2}} = \frac{Ed\varphi^2 + Gd\omega^2}{(F - 2Dh)d\varphi^2 + (G - 2D''h)d\omega^2},$$

dalla quale si trae

$$m = 1 + h\,\frac{D + D''\left(\frac{d\omega}{d\varphi}\right)^2}{E + G\left(\frac{d\omega}{d\varphi}\right)^2}; \tag{27}$$

e quindi

$$(28)\qquad s = s^* + \int_{\varphi_a}^{\varphi_b} h \frac{D + D''\left(\frac{d\omega}{d\varphi}\right)^2}{\sqrt{E + G\left(\frac{d\omega}{d\varphi}\right)^2}},$$

essendo φ_a e φ_b i valori del parametro φ negli estremi dei due archi.

Facilmente si trova la deformazione angolare. Se β^* è l'angolo di due curve di S e β quello delle corrispondenti curve ellissoidiche, si ha

$$(29)\qquad \beta^* - \beta = h\left(\frac{D}{E} - \frac{D''}{G}\right)(\operatorname{sen}\gamma_2 \cos\gamma_2 - \operatorname{sen}\gamma_1 \cos\gamma_1),$$

essendo γ_1 e γ_2 gli angoli che le due curve ellissoidiche formano con il meridiano.

Tenendo conto delle (4) e (5), la (29) si scrive:

$$(29^{\text{bis}})\qquad \beta^* - \beta = \frac{e^2}{1 - e^2}\frac{h}{D''}(\operatorname{sen}\gamma_2 \cos\gamma_2 - \operatorname{sen}\gamma_1 \cos\gamma_1)\cos^4\varphi.$$

7. Torniamo ad adoperare snlla superficie S le coordinate geografiche. Le geodetiche di S verificano il sistema differenziale di primo ordine

$$(30)\qquad \begin{cases} \dfrac{dA}{dl} = \dfrac{d\lambda}{dl}\operatorname{sen} l, \\[2ex] \operatorname{tang} A = \sec l \dfrac{D_*' + D_*''\dfrac{d\lambda}{dl}}{D_* + D_*'\dfrac{d\lambda}{dl}}; \end{cases}$$

dove A (n° 5) è l'angolo che la curva forma con le linee Nord ([7]).

Per avere il sistema differenziale al quale verifica la curva corrispondente sull'ellissoide, trasformiamo la prima delle (30), giovandosi della (22) e tenendo presente la (20). La seconda delle (30) si muta manifestamente nella (22). Si ha:

$$(31)\qquad \begin{cases} \dfrac{d\Theta}{d\varphi} = \dfrac{d\omega}{d\varphi}(\operatorname{sen}\varphi + \xi\cos\varphi) - \eta - \dfrac{e^2}{1 - e^2}\dfrac{d}{d\varphi}\left(\dfrac{h}{D}\dfrac{d\omega}{d\varphi}\cos^3\varphi\cos^2\Theta\right), \\[2ex] \operatorname{tang}\Theta = \sec\varphi \dfrac{D''}{D}\dfrac{d\omega}{d\varphi}. \end{cases}$$

([7]) Cfr. Mineo, ibidem, § 8.

È questo il sistema differenziale delle curve ellissoidiche corrispondenti alle geodetiche di S. Com'è naturale, alle geodetiche di S non corrispondono geodetiche ellissoidiche: queste ultime verificano il sistema

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{d\alpha}{d\varphi}=\frac{d\omega}{d\varphi}\operatorname{sen}\varphi,\\ &\operatorname{tang}\alpha=\sec\varphi\frac{D''}{D}\frac{d\omega}{d\varphi};\end{aligned}\right. \tag{32}$$

denotando con α l'angolo della geodetica ellissoidica con i meridiani.

Ora, si tratta di confrontare una curva del sistema (31), passante per due punti dell'ellissoide, con la geodetica ellissoidica passante per gli stessi punti. Noi supporremo che i due punti siano abbastanza vicini in modo che le due curve si possano ritenere poco differenti nel senso che ora preciseremo. Supponiamo di partire da una geodetica ellissoidica, cioè da un sistema integrale

$$\omega=\omega(\varphi),\quad \alpha=\alpha(\varphi) \tag{33}$$

delle (32); e cerchiamo un sistema integrale $\bar{\omega}(\varphi)$ e $\Theta(\varphi)$ delle (31), *molto vicino* al sistema (33); cioè poniamo

$$\bar{\omega}=\omega+u,\quad \Theta=\alpha+v, \tag{34}$$

dove u e v sono incognite funzioni di φ dell'ordine di ε (n° 1), o infinitesime del 1° ordine, dal punto di vista teorico. Allora le funzioni incognite u e v devono verificare il sistema

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{dv}{d\varphi}=\frac{du}{d\varphi}\operatorname{sen}\varphi+\frac{d\omega}{d\varphi}\xi\cos\varphi-\frac{e^2}{1-e^2}\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{h}{D}\frac{d\omega}{d\varphi}\cos^3\varphi\cos^2\alpha\right),\\ &v\sec^2\alpha=\frac{D''}{D}\sec\varphi\frac{du}{d\varphi}.\end{aligned}\right. \tag{35}$$

Nelle (35) le funzioni

$$\xi(\varphi,\bar{\omega}),\quad \eta(\varphi,\bar{\omega}),\quad h(\varphi,\bar{\omega})$$

sono da riguardare come affatto note, perchè in esse al posto di $\bar{\omega}$ si può sostituire senz'altro la prima delle (33), cioè la funzione nota $\omega(\varphi)$. Non si dimentichi, infatti, che ξ, η, h sono del primo ordine; sicchè, per es.,

$$\xi(\varphi,\bar{\omega}(\varphi))=\xi(\varphi,\omega(\varphi)),$$

a meno di quantità del second'ordine.

È poi quasi superfluo avvertire che nelle (35) il parametro φ non deve essere vicino a $\frac{\pi}{2}$ (peraltro, per le stesse formole (7), restano escluse le regioni vicine ai poli terrestri); nè vicino a $\frac{\pi}{2}$ si può supporre l'azimut α della geodetica ellissoidica considerata: nel caso che si tratti di una geodetica ellissoidica che corra molto vicina a un parallelo dell'ellissoide, è ovvio come si debba modificare il procedimento; ecc., ecc.

L'integrazione del sistema (25) si riconduce facilmente a quadrature; ma gl'integrali generali si presenterebbero sotto una forma estremamente complicata. Per fare un'applicazione pratica della teoria al caso della Terra, noi integreremo per serie.

8. Nel caso della Terra, la superficie S è il così detto « geoide «, le cui normali geometriche sono le verticali. Noi supporremo che si abbia sempre

$$\varepsilon \leqq 0{\cdot}0001; \tag{36}$$

il che equivale a supporre che la deviazione totale della verticale non superi un angolo di 30″. Non già che non si siano riscontrate deviazioni maggiori; ma esse sono assai rare.

Ne viene che *le quantità dell'ordine di* εe^2 *non sono trascurabili*; giacchè si ha

$$\varepsilon e^2 \leqq 7 \times 10^{-7},$$

mentre sono trascurabili le quantità dell'ordine di 10^{-8}.

Nel paragonare un arco di curva del sistema (35), cioè delle trasformate ellissoidiche delle geodetiche geoidiche, con la geodetica ellissoidica che ne congiunge gli estremi, ci limiteremo ad archi la cui corda geodetica non superi i 100 chilometri sull'ellissoide terrestre; il che, tenendo presenti i valori dei parametri dell'anzidetto ellissoide, cioè

$$a \backsimeq 6377\ km, \quad e^2 \backsimeq 0{\cdot}0067,$$

porta a porre le seguenti limitazioni per le differenze $\Delta\varphi$ e $\Delta\omega$ di latitudine e di longitudine negli estremi dell'arco:

$$|\Delta\varphi|, \quad |\Delta\omega| \leqq 0{\cdot}0157. \tag{37}$$

Ne viene che sono trascurabili nel nostro studio, perchè dell'ordine di ε^2, *le quantità dell'ordine di*

$$(\Delta\varphi)^4, \quad (\Delta\omega)^4, \quad \varepsilon(\Delta\varphi)^2, \quad \varepsilon(\Delta\omega)^2, \quad \varepsilon e^2|\Delta\varphi|, \quad \varepsilon e^2|\Delta\omega|.$$

In quest'ordine d'approssimazione, per la geodetica ellissoidica passante per i punti $M_i(\varphi_i, \omega_i)$, $M_{i+1}(\varphi_{i+1}, \omega_{i+1})$ dell'ellissoide terrestre, si hanno le equazioni [8]:

$$(38)\quad \left\{\begin{aligned} \omega &= \omega_i + \frac{\rho_i}{r_i}\operatorname{tang}\alpha_i\,(\varphi-\varphi_i) + \\ &\quad + \frac{1}{2}\frac{\rho_i^2}{r_i^2}\operatorname{sen}\varphi_i\operatorname{tang}\alpha_i\left\{1+\sec^2\alpha_i+\frac{3e^2}{1-e^2}\cos^2\varphi_i\right\}(\varphi-\varphi_i)^2 + \\ &\quad + \frac{1}{6}\frac{\operatorname{tang}^2\varphi_i\operatorname{tang}\alpha_i}{\cos\varphi_i}\left\{(1+\sec^2\alpha_i)^2+\frac{1+\sec^2\alpha_i}{\operatorname{sen}^2\varphi_i}+\frac{2\operatorname{tang}^2\alpha_i}{\cos^2\alpha_i}\right\}(\varphi-\varphi_i)^3. \\ \alpha &= \alpha_i + \frac{\rho_i}{N_i}\operatorname{tang}\varphi_i\operatorname{tang}\alpha_i\,(\varphi-\varphi_i) + \\ &\quad + \frac{1}{2}\frac{\rho_i}{N_i}\operatorname{tang}\alpha_i\left\{\sec^2\varphi_i+\frac{\rho_i}{N_i}\operatorname{tang}^2\varphi_i\sec^2\alpha_i+2e^2\frac{N_i^2}{a^2}\operatorname{sen}^2\varphi_i\right\}(\varphi-\varphi_i)^2 + \\ &\quad + \frac{1}{6}\operatorname{tang}^3\varphi_i\operatorname{tang}\alpha_i\left\{\frac{2+3\sec^2\alpha_i}{\operatorname{sen}^2\varphi_i}+\frac{1+2\operatorname{sen}^2\alpha_i}{\cos^4\alpha_i}\right\}(\varphi-\varphi_i)^3; \end{aligned}\right.$$

dove ρ_i, N_i, r_i indicano rispettivamente il raggio di curvatura del meridiano, la gran normale e il raggio del parallelo relativi al punto (φ_i, ω_i). Poichè la geodetica considerata passa anche per il punto $(\varphi_{i+1}, \omega_{i+1})$, i secondi membri delle (38), per $\varphi = \varphi_{i+1}$, devono assumere i valori ω_{i+1} e α_{i+1}. Le (38), nell'approssimazione che ci siamo prefissi, sono integrali della (32).

Per avere la curva (34), passante per i punti (φ_i, ω_i), $(\varphi_{i+1}, \omega_{i+1})$, bisogna trovare le funzioni u e v, cioè integrare le (35) con le condizioni

$$u(\varphi_i) = u(\varphi_{i+1}) = 0.$$

Porremo dunque

$$(39)\quad \left\{\begin{aligned} u &= X_1(\varphi-\varphi_i) + X_2(\varphi-\varphi_i)^2 + X_3(\varphi-\varphi_i)^3, \\ v &= Y_0 + Y_1(\varphi-\varphi_i) + Y_2(\varphi-\varphi_i)^2 + Y_3(\varphi-\varphi_i)^3; \end{aligned}\right.$$

e cercheremo di determinare i coefficienti X_1, X_2, X_3, Y_0, Y_1, Y_2, Y_3, con la condizione

$$(40)\quad X_1(\varphi_{i+1}-\varphi_i) + X_2(\varphi_{i+1}-\varphi_i)^2 + X_3(\varphi_{i+1}-\varphi_i)^3 = 0.$$

---

[8] Cfr. MINEO, *Sui problemi della trigonometria sferoidica*, « Atti dell'Accademia Gioenia di scienze naturali in Catania ». Vol. VII, 1914.

Ora, nell'approssimazione stabilita, il sistema (35) si può scrivere

$$
(41)\quad \begin{cases}
\dfrac{dv}{d\varphi} = \dfrac{du}{d\varphi}[\operatorname{sen}\varphi_i + (\varphi - \varphi_i)\cos\varphi_i] + (1 - e^2\cos^2\varphi_i)\xi_i \operatorname{tang}\alpha_i + \\
\qquad + (\varphi - \varphi_i)\left[\xi_i \operatorname{tang}\alpha_i \sec^2\alpha_i + \left(\dfrac{\partial\xi}{\partial\varphi}\right)_i + \left(\dfrac{\partial\xi}{\partial\omega}\right)_i \dfrac{\operatorname{tang}\alpha_i}{\cos\varphi_i}\right]\operatorname{tang}\alpha_i \\
\qquad - \eta_i - (\varphi - \varphi_i)\left[\left(\dfrac{\partial\eta}{\partial\varphi}\right)_i + \left(\dfrac{\partial\eta}{\partial\omega}\right)_i \dfrac{\operatorname{tang}\alpha_i}{\cos\varphi_i}\right] - \\
\qquad\quad - e^2(\xi_i + \eta_i \operatorname{tang}\alpha_i)\cos^2\varphi_i \operatorname{sen}\alpha_i \cos\alpha_i - \\
\qquad - e^2\dfrac{h_i}{a}\operatorname{sen}\varphi_i\cos\varphi_i\operatorname{tang}\alpha_i, \\
v\sec^2\alpha_i[1 + 2\operatorname{tang}\varphi_i\operatorname{tang}^2\alpha_i\,(\varphi - \varphi_i)] = \\
\qquad = \dfrac{du}{d\varphi}[\cos\varphi_i(1 + e^2\cos^2\varphi_i) - (\varphi - \varphi_i)\operatorname{sen}\varphi_i];
\end{cases}
$$

essendo

$$
\xi_i = \xi(\varphi_i,\ \omega_i), \qquad \left(\frac{\partial\xi}{\partial\varphi}\right)_i = \left(\frac{\partial\xi}{\partial\varphi}\right)_{\varphi=\varphi_i,\ \omega=\omega_i}, \ \text{ecc.}
$$

Ponendo nelle (41) le espressioni (39) di u e v e identificando, si trova:

$$
(42)\quad \begin{cases}
Y_1 = X_1\operatorname{sen}\varphi_i + (1 - e^2\cos^2\varphi_i)\xi_i\operatorname{tang}\alpha_i - \eta_i - \\
\qquad - e^2(\xi_i + \eta_i\operatorname{tang}\alpha_i)\cos^2\varphi_i\operatorname{sen}\alpha_i\cos\alpha_i - \\
\qquad - e^2\dfrac{h_i}{a}\operatorname{sen}\varphi_i\cos\varphi_i\operatorname{tang}\alpha_i, \\
Y_0\sec^2\alpha_i = X_1(1 + e^2\cos^2\varphi_i)\cos\varphi_i, \\
2Y_2 = X_1\cos\varphi_i + 2X_2\operatorname{sen}\varphi_i + \\
\qquad + \left[\xi_i\operatorname{tang}\varphi_i\sec^2\alpha_i + \left(\dfrac{\partial\xi}{\partial\varphi}\right)_i + \left(\dfrac{\partial\xi}{\partial\omega}\right)_i\dfrac{\operatorname{tang}\alpha_i}{\cos\varphi_i}\right]\operatorname{tang}\alpha_i \\
\qquad - \left[\left(\dfrac{\partial\eta}{\partial\varphi}\right)_i + \left(\dfrac{\partial\eta}{\partial\omega}\right)_i\dfrac{\operatorname{tang}\alpha_i}{\cos\varphi_i}\right], \\
(2Y_0\operatorname{tang}\varphi_i\operatorname{tang}^2\alpha_i + Y_1)\sec^2\alpha_i = 2X_2(1 + e^2\cos^2\varphi_i)\cos\varphi_i - X_1\operatorname{sen}\varphi_i.
\end{cases}
$$

Poichè, per ipotesi, Y_0 è dell'ordine di ε, la 2^a delle (42) mostra che anche X_1 è dell'ordine di ε; ne segue, per la prima delle (42), che Y_1 è dell'ordine di ε; ecc. Com'era da prevedere, *tutti i coefficienti degli sviluppi di* u *e* v *sono (almeno) dell'ordine di* ε.

Epperò, essendo trascurabili nella nostra approssimazione i termini dell'ordine di $\varepsilon\,|\,\Delta\varphi\,|^2$, basterà scrivere

$$
(43)\qquad u = X_1(\varphi - \varphi_i), \quad v = Y_0 + Y_1(\varphi - \varphi_i),
$$

limitandoci a dedurre Y_0, Y_1, X_1 dalle (42). Inoltre, nel calcolo di X_1 e Y_1, si potrà prescindere dai termini dell'ordine di εe^2, essendo trascurabili i termini dell'ordine di $\varepsilon e^2 \mid \Delta\varphi \mid$.

La (40), allora, dà

$$X_1 = - X_2(\varphi_{i+1} - \varphi_i): \tag{44}$$

quindi dalle (42) segue

$$\begin{aligned} Y_0 &= - X_2(\varphi_{i+1} - \varphi_i) \cos\varphi_i \cos^2\alpha_i, \\ Y_1 &= - X_2(\varphi_{i+1} - \varphi_i) \operatorname{sen}\varphi_i + \xi_i \operatorname{tang}\alpha_i - \eta_i, \\ 2X_2(\varphi_{i+1} - \varphi_i) \operatorname{sen}\varphi_i \operatorname{sen}^2\alpha_i &+ X_2(\varphi_{i+1} - \varphi_i) \operatorname{sen}\varphi_i - \xi_i \operatorname{tang}\alpha_i + \eta_i = \\ &= [- 2X_2 \cos\varphi_i - X_2(\varphi_{i+1} - \varphi_i) \operatorname{sen}\varphi_i] \cos^2\alpha_i. \end{aligned}$$

Dall'ultima di queste equazioni si deduce

$$X_2 = \frac{(\xi_i \operatorname{tang}\alpha_i - \eta_i) \sec^2\alpha_i}{2\cos\varphi_i \left[1 + \frac{1}{2}(\varphi_{i+1} - \varphi_i) \operatorname{tang}\varphi_i (2 + \operatorname{sen}^2\alpha_i) \sec^2\alpha_i\right]},$$

cioe, nella nostra approssimazione:

$$X_2 = \frac{(\xi_i \operatorname{tang}\alpha_i - \eta_i) \sec^2\alpha_i}{2\cos\varphi_i}. \tag{45}$$

Epperò le (43) diventano:

$$u = 0, \quad v = \left(\varphi - \frac{1}{2}(\varphi_i + \varphi_{i+1})\right)(\xi_i \operatorname{tang}\alpha_i - \eta_i). \tag{46}$$

In conclusione, *i due archi (di geodetica ellissoidica e di trasformata ellissoidica d'una geodetica geoidica) passanti per i punti* $M_i(\varphi_i, \omega_i)$ *e* $M_{i+1}(\varphi_{i+1}, \omega_{i+1})$, *si confondono linearmente, nel senso che sono incontrati dalle curve* $\varphi =$ *costante in punti le cui differenze di longitudine sono dell'ordine di* $\varepsilon(\Delta\varphi)^2$ *e quindi trascurabili* ($u = 0$); *mentre gli azimut, negli anzidetti punti, differiscono per quantità dell'ordine di* $\varepsilon \mid \Delta\varphi \mid$, *avendosi* [9]:

$$\alpha - \Theta = \left(\frac{1}{2}(\varphi_i + \varphi_{i+1}) - \varphi\right)(\xi_i \operatorname{tang}\alpha_i - \eta_i). \tag{47}$$

---

[9] Nel lavoro citato del 1911, mi son limitato a paragonare la curva (31), passante per M_i e M_{i+1}, con la geodetica ellissoidica passante per M_i e tangente ivi all'anzidetta curva. In questo caso, il calcolo precedente è da modificare. Ora, in fatti, si ha

$$u = A_1(\varphi - \varphi_i) + \dots, \quad v = B_1(\varphi - \varphi_i) + \dots,$$

come soluzione di (41); e facilmente si deduce

$$A_1 = 0, \quad B_1 = \xi_i \operatorname{tang}\alpha_i - \eta_i.$$

Dunque, le due curve *linearmente* si confondono; gli azimut sono ora legati dalla relazione

$$\alpha - \Theta = -(\varphi - \varphi_i)(\xi_i \operatorname{tang}\alpha_i - \eta_i);$$

e naturalmente coincidono nell'origine M_i dell'arco (vedi formola (52) del citato lavoro).

9. Veniamo ora alla formola della deviazione in azimut. Nelle applicazioni geodetiche, alla trasformata ellissoidica della geodetica passante per due punti del geoide M_i^* e M_{i+1}^* (vertici della rete geodetica) si sostituisce la geodetica ellissoidica passante per i punti M_i e M_{i+1} dell'ellissoide; quindi all'angolo Θ si sostituisce l'angolo α. La formola (24^{bis}) della deviazione in azimut va dunque modificata, tenendo conto della formola (47).

Siano M_0^*, M_1^*, $M_2^*, \ldots$ i vertici successivi d'una *poligonale geodetica* (i cui lati sono gli archi geodetici $M_0^*M_1^*$, $M_1^*M_2^*, \ldots$) e siano M_0, M_1, $M_2, \ldots$ i punti corrispondenti (n° 2) sull'ellissoide. Considerato un arco geodetico generico $M_i^*M_{i+1}^*$ sul geoide, chiamiamo $A_{i,i+1}$ e $A_{i+1,i+1}$ gli azimut di esso arco (percorso positivamente da M_i^* a M_{i+1}^*) nei vertici M_i^* e M_{i+1}^*. Similmente, consideriamo l'arco M_iM_{i+1} di geodetica ellissoidica (arco non corrispondente all'arco $M_i^*M_{i+1}^*$) e chiamiamo $\alpha_{i,i+1}$ e $\alpha_{i+1,i+1}$ gli azimut di esso (contato positivamente da M_i a M_{i+1}) negli estremi M_i e M_{i+1}. Tenendo presenti la (24^{bis}) e le (47), si può scrivere, *nell'approssimazione presente*:

$$
(48)\quad \left\{
\begin{aligned}
A_{i,i+1} - \alpha_{i,i+1} &= \eta_i \operatorname{tang} \varphi_i - e^2 \frac{h_i}{a} \cos^2 \varphi_i \operatorname{sen} \alpha_{i,i+1} \cos \alpha_{i,i+1} - \\
&\quad - \frac{1}{2} (\varphi_{i+1} - \varphi_i)(\xi_i \operatorname{tang} \alpha_{i.i+1} - \eta_i), \\
A_{i+1,i+1} - \alpha_{i+1,i+1} &= \eta_{i+1} \operatorname{tang} \varphi_{i+1} - e^2 \frac{h_{i+1}}{a} \cos^2 \varphi_{i+1} \operatorname{sen} \alpha_{i+1.i+1} \cos \alpha_{i+1,i+1} + \\
&\quad + \frac{1}{2} (\varphi_{i+1} - \varphi_i)(\xi_i \operatorname{tang} \alpha_{i,i+1} - \eta_i);
\end{aligned}
\right.
$$

le quali sono le formole generali della deviazione in azimut (nei vari vertici della rete).

Ora si ha, in generale, per la (14):

$$
h_{i+1} - h_i = \int_{\varphi_i}^{\varphi_{i+1}} \left(D\xi + D''\eta \sec \varphi \frac{d\omega}{d\varphi} \right) d\varphi,
$$

dove l'integrale si può intendere calcolato lungo l'arco geodetico M_iM_{i+1}.

Si può anche scrivere

$$
h_{i+1} - h_i = (\varphi_{i+1} - \varphi_i) \left(D\xi + D''\eta \sec \varphi \frac{d\omega}{d\varphi} \right)_{\varphi^*},
$$

dove φ^* è un punto dell'intervallo $(\varphi_i,\ \varphi_{i+1})$. Ma poichè, nella presente approssimazione, i termini dell'ordine di $\varepsilon e^2 \,|\, \Delta\varphi \,|$ sono trascurabili, e così pure quelli dell'ordine di $\varepsilon(\Delta\varphi)^2$, si potrà prescindere dai termini in e^2 nella precedente: e al punto φ^* della teoria si potrà sostituire il punto φ_{i+1}. Epperò si può scrivere

$$h_{i+1} - h_i = -a(\varphi_{i+1} - \varphi_i)(\xi_{i+1} + \eta_{i+1} \operatorname{tang} \alpha_{i+1,i+1}); \tag{49}$$

o anche, nella stessa approssimazione, per le (48):

$$h_{i+1} - h_i = -a(\varphi_{i+1} - \varphi_i)(\xi_{i+1} + \eta_{i+1} \operatorname{tang} A_{i+1,i+1}). \tag{49^{\text{bis}}}$$

Supponiamo che nel punto M_0 si abbia

$$\xi_0 = \eta_0 = h_0 = 0. \tag{50}$$

Si può allora scrivere

$$-\frac{h_{i+1}}{a} = \sum_{r=1}^{r=i+1} (\varphi_r - \varphi_{r-1})(\xi_r + \eta_r \operatorname{tang} A_{r,r}), \tag{51}$$

per valori, s'intende, non molto grandi di i, se non si vuole che l'accumularsi degli errori *teorici* (derivanti dai termini trascurati) ci allontani dall'approssimazione desiderata.

La (51), con le avvertenze fatte, ci mostra che $\frac{h_i}{a}$ è dell'ordine di $\varepsilon|\Delta\varphi|$; ne viene che $e^2 \frac{h_i}{a}$ è trascurabile nella presente approssimazione, essendo dell'ordine di $\varepsilon e^2 |\Delta\varphi|$. Le (48), dunque, si possono ridurre alle seguenti:

$$\left\{ \begin{aligned} A_{i,i+1} - \alpha_{i,i+1} &= \eta_i \operatorname{tang} \varphi_i - \frac{1}{2}(\varphi_{i+1} - \varphi_i)(\xi_i \operatorname{tang} \alpha_{i,i+1} - \eta_i), \\ A_{i+1,i+1} - \alpha_{i+1,i+1} &= \eta_{i+1} \operatorname{tang} \varphi_{i+1} + \frac{1}{2}(\varphi_{i+1} - \varphi_i)(\xi_i \operatorname{tang} \alpha_{i,i+1} - \eta_i). \end{aligned} \right. \tag{52}$$

E la (24) diventa semplicemente

$$A - \Theta = \eta \operatorname{tang} \varphi,$$

cioè la rappresentazione (7) è conforme in quest'ordine di approssimazione.

10. Conviene ora paragonare le lunghezze di due archi

$$\overset{*}{s}_{i+1} = \overset{*}{M}_i \overset{*}{M}_{i+1}, \quad s_{i+1} = M_i M_{i+1},$$

corrispondenti nella trasformazione (7). A questo effetto, adopereremo la formola (28), che, nell'approssimazione presente (n° 8), si può scrivere così:

$$\overset{*}{s}_{i+1} - s_{i+1} = \tag{53}$$

$$= a(\varphi_{i+1} - \varphi_i)^2(\xi_{i+1} + \eta_{i+1} \operatorname{tang} A_{i+1,i+1}) \frac{1 + \cos\varphi_{i+1} \operatorname{tang} A_{i+1,i+1}}{\sqrt{\cos^2\varphi_{i+1} + \operatorname{tang}^2 A_{i+1,i+1}}} \cos\varphi_{i+1}.$$

Segue

$$\frac{\overset{*}{s}_{i+1}}{a} = \frac{s_{i+1}}{a},$$

perche la differenza dei due rapporti è dell'ordine di $\varepsilon(\Delta\varphi)^2$ e quindi trascurabile (n° 8).

Ma anche i due archi s_{i+1} e $\overset{*}{s}_{i+1}$ si possono, il più delle volte, ritenere eguali, perchè, nell'ipotesi che siano compresi dentro i 100 chilometri e con le avvertenze fatte alla fine del n° 7, si ha

$$|\overset{*}{s}_{i+1} - s_{i+1}| \leqq \text{cm } 16.$$

11. Veniamo, in fine, al paragone degli angoli $M_i^* M_{i+1}^* M_{i+2}^*$ e $M_i M_{i+1} M_{i+2}$ delle due poligonali geodetiche (n° 9), situate rispettivamente sul geoide e sull'ellissoide. Nel presente ordine di approssimazione, la rappresentazione (7) è conforme (n° 9); ma i due angoli predetti non si corrispondono nella rappresentazione in discorso.

Intendendo che l'angolo $M_i M_{i+1} M_{i+2}$ venga generato dalla rotazione positiva che deve compiere la tangente in M_{i+1} al lato $M_{i+1} M_i$ per sovrapporsi alla tangente in M_{i+1} al lato $M_{i+1} M_{i+2}$, si può scrivere, con le nostre notazioni (n° 9):

$$M_i \widehat{M_{i+1}} M_{i+2} \equiv \alpha_{i+1,i+2} - \pi - \alpha_{i+1,i+1} \qquad (\text{mod. } 2\pi).$$

E similmente:

$$M_i^* \widehat{M_{i+1}^*} M_{i+2}^* \equiv A_{i+1,i+2} - \pi - A_{i+1,i+1} \qquad (\text{mod. } 2\pi).$$

E quindi per le (52):

$$(54) \quad M_i \widehat{M_{i+1}} M_{i+2} = M_i^* \widehat{M_{i+1}^*} M_{i+2}^* + \frac{1}{2}(\varphi_{i+1} - \varphi_i)(\xi_i \operatorname{tang} \alpha_{i,i+1} - \eta_i) + \\ + \frac{1}{2}(\varphi_{i+2} - \varphi_{i+1})(\xi_{i+1} \operatorname{tang} \alpha_{i+1,i+2} - \eta_{i+1}).$$

Come si vede, i due angoli hanno una differenza dell'ordine di $\varepsilon|\Delta\varphi|$, quindi non trascurabile (potendo raggiungere 0″3 e più).

12. Vediamo, ora, rapidamente, fino a qual punto si possa giustificare il procedimento pratico con il quale la rete geoidica, determinata con le osservazioni astronomico-geodetiche, si attribuisce e si distende sull'ellissoide. Qui non tocchiamo il problema della riduzione delle misure al geoide, supponendo che lati e angoli della rete appartengano addirittura al geoide (come se la superficie di questo fosse accessibile e su di essa si compissero le misure). Ma il modo con il quale questa rete si distende sull ellissoide ha in ogni caso capitale importanza, perchè dà luogo a una corrispondenza *di fatto* tra i vertici della rete geoidica e quelli ellissoidici; e bisogna vedere se e fino a qual punto tale corrispondenza sia una corrispondenza per normali geoidiche o per verticali, giusta le (7).

A questo effetto, partiamo dal punto origine M_0^* della rete geoidica, nel qual punto sono verificate le (50). Dalle (52), per $i = 0$, tenendo presenti le (50), segue:

$$A_{01} = \alpha_{01}, \quad A_{11} = \alpha_{11} + \eta_1 \operatorname{tang} \varphi_1. \tag{55}$$

Dalle (53), dove ora possiamo intendere che s_{i+1} sia la lunghezza dell'$(i+1)^{mo}$ lato $M_i M_{i+1}$ della poligonale geodetica, situata sull'ellissoide [perchè esso si confonde linearmente (n° 8) con il trasformato ellissoidico dell'arco $M_i^* M_{i+1}^*$ di geodetica geoidica], si deduce, per $i = 0$, badando alla seconda delle (55):

$$s_1 = s_1^* - a(\varphi_1 - \varphi_0)^2(\xi_1 + \eta_1 \operatorname{tang} A_{11}) \frac{1 + \cos\varphi_1 \operatorname{tang} A_{11}}{\sqrt{\cos^2\varphi_1 + \operatorname{tang}^2 A_{11}}} \cos\varphi_1. \tag{56}$$

Potendosi prendere $s_1 = s_1^*$, si vede che distendendo il primo lato $M_0^* M_1^*$ della rete sull'ellissoide, a partire dal punto M_0, dove $\varphi_0 = l_0$, in modo che nel punto M_0 l'azimut ellissoidico α_{01} coincida con quello astronomico A_{01}, si perviene proprio al punto M_1, che è il corrispondente ellissoidico di M_1^*, giusta la (7). Il procedimento pratico resta quindi giustificato, per questo primo lato della rete.

Se si dovesse tener conto della correzione da apportare a s_1^* per avere s_1 giusta la (56), bisognerebbe procedere per approssimazioni successive: il valore *provvisorio* s_1^* potrebbe servire al trasporto delle coordinate ellissoidiche lungo l'arco geodetico $M_0 M_1$; avuti φ_1 e ω_1 dal detto trasporto e conoscendo le coordinate astronomiche l_1 e λ_1 del punto M_1^*, si dedurrebbero ξ_1 e η_1; ecc. ecc.

Passiamo al secondo lato $M_1^* M_2^*$ della rete geoidica. Dalle (54) abbiamo, per $i = 0$:

$$M_0 \widehat{M_1} M_2 = M_0^* \widehat{M_1^*} M_2^* + \frac{1}{2}(\varphi_2 - \varphi_1)(\xi_1 \operatorname{tang} \alpha_{12} - \eta_1). \tag{57}$$

E questa mostra che non è lecito, come si fa in pratica, confondere l'angolo misurato $M_0^* \widehat{M_1^*} M_2^*$ con l'angolo $M_0 \widehat{M_1} M_2$: il secondo lato della rete ellissoidica deve formare con il primo l'angolo $M_0 M_1 M_2$, dato dalla (57). Il termine correttivo possiamo procurarcelo, giacchè la (57), nella stessa approssimazione, si può scrivere:

$$M_0 \widehat{M_1} M_2 = M_0^* \widehat{M_1^*} M_2^* + \frac{1}{2}(l_2 - l_1)(\xi_1 \operatorname{tang} A_{12} - \eta_1); \tag{57$^{\text{bis}}$}$$

e nel secondo membro tutto è noto, posto che si siano determinati i due elementi astronomici l_2 e A_{12}. Riportando, sulla geodetica ellissoidica uscente da M_1 e formante l'angolo predetto con la geodetica $M_1 M_0$, un arco di lunghezza s_2^* (10), si ottiene il punto M_2, corrispondente al punto M_2^*, secondo le (7).

Così continuando, si vede che per distendere convenientemente sull'ellissoide la poligonale geoidica $M_0^* M_1^* M_2^* \ldots$, in modo che i vertici $M_0, M_1, M_2 \ldots$ siano, sull'ellissoide, i corrispondenti secondo le (7) dei punti $M_0^*, M_1^*, M_2^*, \ldots$, bisogna avere, da misure geodetiche, gli elementi

$$s_1^*,\ s_2^*, \ldots;\quad M_0^* \widehat{M_1^*} M_2^*,\ M_1^* \widehat{M_2^*} M_3^*, \ldots,$$

e, da determinazioni astronomiche, gli elementi

$$l_0,\ \lambda_0,\ A_{01};\quad l_1,\ \lambda_1,\ A_{12}; \ldots$$

Quando manchino alcuni di questi dati o quando non siano verificate sufficientemente le condizioni volute dalla teoria, il procedimento pratico in uso non costituisce se non una prima approssimazione; sarebbe poi necessaria una seconda approssimazione della quale non vogliamo qui occuparci.

---

(10) Riteniamo pure che sia $s_{i+1}^* = s_{i+1}$. Nell'ordine d'approssimazione fissato, i due intorni considerati, del geoide e dell'ellissoide, appaiono applicabili e può sembrare quindi contradittorio che le geodetiche non si corrispondano o che gli angoli non siano conservati. In verità, l'eguaglianza $s_{i+1}^* = s_{i+1}$ è soltanto approssimata e quindi non è lecito dedurne le conseguenze alle quali porta l'applicabilità rigorosa. È lecito soltanto fare le seguenti affermazioni: la differenza di due archi corrispondenti è dell'ordine di $a\varepsilon(\Delta\varphi)^2$; l'arco geodetico $M_i^* M_{i+1}^*$ e il trasformato ellissoidico dell'arco geodetico $M_i^* M_{i+1}^*$ sono incontrati dalle linee $\varphi =$ *costante* in punti in cui le longitudini differiscono per quantità dell'ordine di $\varepsilon(\varphi_{i+1} - \varphi_i)^2$, mentre gli azimut negli stessi punti differiscono per quantità dell'ordine di $\varepsilon \,|\, \varphi_{i+1} - \varphi_i \,|$; ecc. ecc.