Sur la loi de l'attraction

par N. NERONOFF (Leningrad - U. R. S. S.).

1. La représentation du potentiel de la force d'attraction par une série infinie. — Supposons la loi de l'attraction ayant telle forme que le potentiel de la force d'attraction agissant entre deux points matériels de masses M (le soleil) et m (une planète) s'exprime par la série

$$U = fmM\left(\frac{1}{\rho} + \frac{\lambda}{\rho^2} + \frac{\mu}{\rho^3} + \frac{\nu}{\rho^4} + \dots + \frac{\varkappa}{\rho^j} + \dots\right), \tag{1}$$

où ρ est leur distance et f désigne une constante. Cette série converge absolument et uniformément dans l'intervalle

$$\rho \geq \rho_0 > 0. \tag{2}$$

La force F d'attraction a l'expression

$$F = \frac{dU}{d\rho} = -fmM\left(\frac{1}{\rho^2} + \frac{2\lambda}{\rho^3} + \frac{3\mu}{\rho^4} + \frac{4\nu}{\rho^5} + \dots + \frac{j\varkappa}{\rho^{j+1}} + \dots\right). \tag{3}$$

Les coefficients $\lambda, \mu, \nu, \dots$ des séries précédentes peuvent être déterminés si nous prenons pour la fonction F une forme particulière admettant le développement suivant les puissances entières positives de $\frac{1}{\rho}$.

Si nous conservons la loi de l'attraction de NEWTON ($\lambda = \mu = \nu = \dots = 0$), la position relative d'une planète par rapport au soleil se détermine au bout du temps t par les équations connues

$$\begin{gathered} n = \sqrt{\frac{f(M+m)}{a^3}}, \quad \zeta = n(t-\tau). \quad u - e\sin u = \zeta, \\ r = a(1 - e\cos u), \\ \operatorname{tang}\frac{w}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\operatorname{tang}\frac{u}{2}, \quad r = \frac{p}{1+e\cos w}, \quad p = \frac{b^2}{a}, \end{gathered} \tag{4}$$

où sont introduites les notations suivantes: a le demi grand axe de l'orbite elliptique de la planète; b son demi petit axe; e l'excentricité; r la distance du centre de gravité du soleil à celui de la planète; w l'anomalie vraïe de la planète; u l'anomalie excentrique; ζ l'anomalie moyenne; τ le moment du passage de la planète par le périhélie. En conservant les notations de la Mécanique céleste et la terminologie correspondante, introduisons les angles suivants déterminant la position de la planète dans l'espace par rapport au soleil, avec seulement cette distinction que le plan de l'équateur du soleil jouera le rôle du plan de l'ecliptique au 1.er janvier 1850: θ la longitude du noeud ascendant du plan de l'orbite par rapport au plan de l'équateur du soleil; φ l'inclinaison de l'orbite par rapport au même plan; $\bar{\omega}$ la longitude du périhélie; $\bar{\nu}$ la longitude de la planète dans son orbite.

Alors les anomalies vraie et moyenne se présentent sous la forme

$$w = \bar{\nu} - \bar{\omega}, \quad \zeta = nt + \varepsilon - \bar{\omega} \tag{5}$$

si nous introduisons ε — la longitude moyenne de l'époque

$$\varepsilon = \bar{\omega} - n\tau. \tag{6}$$

Si la loi de l'attraction est différente de celle de NEWTON, les constantes a, e, φ, θ, $\bar{\omega}$, ε dans les équations (4) du mouvement elliptique de la planète peuvent être considérées comme des fonctions inconnues qu'on doit trouver.

En admettant que la force d'attraction entre deux points matériels s'exprime par la série (3), calculons le potentiel des forces d'attraction, en envisageant le soleil comme un corps continu et la planète comme un point matériel, puisque sa masse est très faible par rapport à la masse du soleil.

Prenons l'ellipsoide central d'inertie du soleil pour un ellipsoide de rotation. Nous avons

$$U = fm\int_M \left(\frac{1}{\rho} + \frac{\lambda}{\rho^2} + \frac{\mu}{\rho^3} + \frac{\nu}{\rho^4} + \dots + \frac{\varkappa}{\rho^j} + \dots\right) d\mathrm{m}, \tag{7}$$

où ρ, $\rho = PQ$, désigne la distance de la planète P à un point arbitraire Q du volume du soleil (voir fig. 1). Soit G son centre de gravité. Comme auparavant, désignons la distance PG par r. Présentons la série (7) dans sa nouvelle forme en l'ordonnant suivant les puissances entières positives de $\frac{1}{r}$

$$U = fm\left\{\frac{M}{r} + \frac{\lambda M}{r^2} + \frac{2\mu' M + 3i\sin^2(\bar{\nu} - \theta)\sin^2\varphi}{2r^3} + \left[\frac{1}{r}\right]_4\right\}, \tag{8}$$

où sont introduites les notations abrégées

$$\mu' = \mu - \frac{i}{2M}, \quad i = A - C. \tag{9}$$

Enfin, A, B, C désignent les moments d'inertie du soleil par rapport aux axes principaux d'inertie relatifs au centre de gravité G. Les deux premiers sont relatifs aux axes disposés dans le plan de l'équateur du soleil, A étant égal à B, et le troisième C est relatif à l'axe de rotation du soleil.

En appliquant la méthode des fonctions majorantes, on peut montrer que

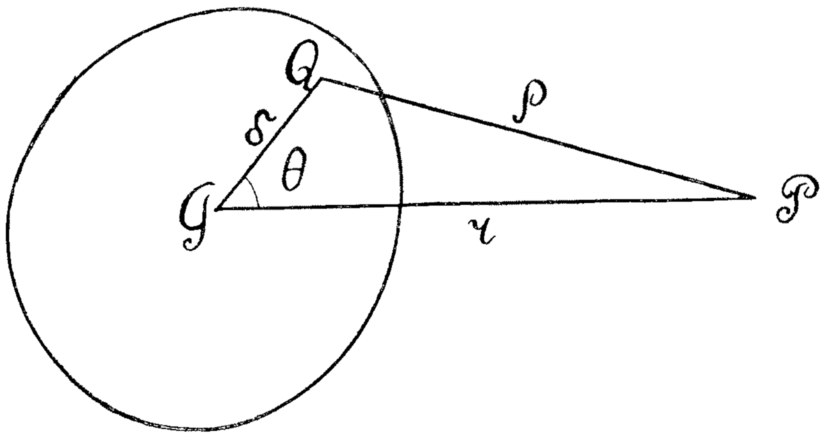

Fig. 1

la série (8) sera convergente absolument et uniformément si a lieu l'inégalité

$$r > \rho_0 + \delta_{\max}, \tag{10}$$

où $\delta_{\max}$ désigne le maximum de la distance du centre de gravité G du soleil à sa surface.

En effet, indiquons par δ la distance GQ du centre de gravité G du soleil à un point arbitraire Q de son volume et par Θ l'angle formé par les directions GP et GQ (voir fig. 1). Nous avons

$$\rho = \sqrt{r^2 - 2r\delta\cos\Theta + \delta^2}. \tag{11}$$

On sait que les coefficients du développement de $\frac{r}{\rho}$ suivant les puissances entières positives de $\frac{\delta}{r}$ sont les polynomes de LEGENDRE (en $\cos\Theta$) dont la valeur absolue ne dépasse pas l'unité, quel que soit la valeur de l'angle Θ. Cette remarque permet de signaler la fonction majorante pour le développement de $\frac{1}{\rho}$ et, par conséquent, celle pour le développement de $\frac{1}{\rho^j}$ suivant les puissances de $\frac{1}{r}$

$$\frac{1}{\rho^j} << \frac{1}{(r - \delta_{\max})^j}, \quad r > \delta_{\max}, \qquad j = 1, 2, 3, \ldots. \tag{12}$$

La valeur absolue du terme général de la série (1) convergeant dans l'intervalle $\rho \geq \rho_0 > 0$ satisfait à l'inégalité

$$\frac{|\varkappa|}{\rho_0^j} < \mathfrak{M},$$

où $\mathfrak{M}$ désigne un nombre déterminé positif. D'ici

$$|\varkappa| < \mathfrak{M}\rho_0^j. \tag{13}$$

Maintenant on peut trouver la fonction majorante pour le développement en $\frac{1}{r}$ du terme général de la série (7)

$$\int\limits_M \frac{|\varkappa|}{\rho^j}\, d\mathfrak{m} << \frac{M\mathfrak{M}\rho_0^j}{(r-\delta_{\max})^j} \tag{14}$$

et, par conséquent, celle pour la même série (7)

$$\frac{U}{fm} = \int\limits_M \left(\frac{1}{\rho} + \frac{\lambda}{\rho^2} + \frac{\mu}{\rho^3} + \frac{\nu}{\rho^4} + \dots\right) d\mathfrak{m} << M\mathfrak{M} \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{\rho_0}{r-\delta_{\max}}\right)^j. \tag{15}$$

C'est pourquoi la condition

$$\frac{\rho_0}{r-\delta_{\max}} < 1$$

ou la condition

$$r > \rho_0 + \delta_{\max}$$

est suffisante pour la convergence absolue et uniforme de la série (8).

De la même manière on démontre la convergence de la série obtenue de la série (8) par sa différentiation par rapport aux coordonnées rectangulaires de la planète ou à un paramètre dont ces coordonnées peuvent dépendre.

Dans le cas général, la force d'attraction cesse d'être centrale. Elle sera centrale si nous supposons que le soleil est limité par la surface de la sphère et que sa densité en chaque point ne dépend que de la distance de ce point au centre de la sphère ($i = 0$). Alors dans ce cas particulier le potentiel des forces d'attraction peut être représenté par la série semblable à la série (1), mais les coefficients λ, μ, ν,... seront maintenant remplacés par leurs fonctions dépendant aussi de la loi du changement de la densité.

Dans les deux paragraphes suivants nous examinons quelques cas particuliers de la force d'attraction centrale quand le mouvement de la planète par rapport au soleil peut être étudié à l'aide des fonctions élémentaires et elliptiques.

2. **Le premier cas particulier.** — Si dans les séries (1) et (2) tous les coefficients, excepté λ, sont égaux à zéro et à part cela le soleil et la planète sont considerés comme des points matériels, la force d'attraction étant centrale, on peut montrer d'après l'intégrale de la force vive et celle des aires que les équations du mouvement de la planète ne différeront des équations du mouvement elliptique que par un facteur

$$\sqrt{\frac{p}{p+2\lambda}}$$

que l'anomalie vraie recevra alors [1]. Si le dernier est un nombre rationnel, la trajectoire de la planète est une courbe fermée algébrique.

Le déplacement du périhélie à chaque révolution de la planète autour du soleil se présente par la série entière en λ, dont la valeur absolue est supposée petite,

$$2\pi\left(\sqrt{1+\frac{2\lambda}{p}}-1\right)=\frac{2\pi\lambda}{p}+\ldots.$$

3. **Le deuxième cas particulier.** — Tenons le soleil et la planète pour des points matériels et supposons que dans les séries (1) et (2) il n'y ait que les coefficients λ et μ qui soient différents de zéro. Déterminons le mouvement de la planète par les coordonnées polaires r et w. L'intégrale de la force vive et celle des aires dans notre cas ont la forme

$$\frac{m}{2}\left[\left(\frac{dr}{dt}\right)^2+r^2\left(\frac{dw}{dt}\right)^2\right]=U+\frac{mh}{2}, \quad r^2\frac{dw}{dt}=D, \tag{16}$$

en désignant par $\frac{mh}{2}$ et D des constantes arbitraires. Par l'élimination du temps t nous obtenons, après l'intégration, l'équation de la trajectoire de la planète en coordonnées polaires

$$r=\frac{b_0}{4\wp(\omega'+w)-b_1}, \tag{17}$$

où par $\wp(w)$ est indiquée comme d'ordinaire la fonction elliptique de WEIERSTRASS ayant les invariants

$$g_2=\frac{3}{4}(b_1^2-b_0b_2), \quad g_3=\frac{1}{16}(3b_0b_1b_2-2b_1^3-b_0^2b_3),$$

---

[1] Cette forme de la loi d'attraction ainsi que quelques autres ont été examinées par NEWTON: voir ROUTH, *A treatise on Dynamics of a particle*, 1898, § 359, p. 233.

où

$$b_0 = \frac{2f\mu}{D^2}(M+m), \quad 3b_1 = -1 + \frac{2f\lambda}{D^2}(M+m),$$

$$3b_2 = \frac{2f}{D^2}(M+m), \quad b_3 = \frac{h}{D^2}.$$

Enfin 2ω et $2\omega'$ sont les périodes, dont la première est réelle et la seconde purement imaginaire, de la fonction elliptique susmentionnée. Désignons par

$$e_1 = \wp(\omega), \quad e_2 = \wp(\omega+\omega'), \quad e_3 = \wp(\omega'), \quad e_1 > e_2 > e_3$$

les racines réelles du polynome

$$4x^3 - g_2 x - g_3 = 4(x-e_1)(x-e_2)(x-e_3).$$

Quand l'angle polaire w croît de zéro jusqu'à ω, la fonction $\wp(\omega'+w)$ croit de e_3 jusqu'à e_2. Avec l'accroissement ultérieur de w, la fonction $\wp(\omega'+w)$ varie entre les mêmes limites. La valeur correspondante du rayon r varie entre un minimum et un maximum ([1]).

L'équation de la trajectoire de la planète étant trouvée, déterminons maintenant la loi de son mouvement sur cette trajectoire. Dans ce but, nous revenons à l'intégrale des aires et y substituons la valeur de r trouvée de l'équation (17). En posant

$$u = \omega' + w, \quad \frac{b_1}{4} = \wp(v),$$

où v est une constante, nous aurons

$$\frac{16D}{b_0^2}\,dt = \frac{du}{[\wp(u) - \wp(v)]^2}.$$

Soit τ le temps du passage de la planète par la position pour laquelle $w=0$, c'est à dire $u=\omega'$. L'intégration donne

$$\frac{16D}{b_0^2}(t-\tau) = \int_{\omega'}^{\omega'+w} \frac{du}{[\wp(u) - \wp(v)]^2}.$$

En effectuant l'opération de l'intégration, nous obtenons une équation expri-

([1]) La théorie générale de la relativité donne pour la trajectoire une équation ayant la même forme, voir FORSYTH, « Proceedings of the Royal Society », Section A, vol. XCVII, 1920, p. 145; MORLEY, « American Journal of Mathematics », vol. XLIII, 1921, p. 29; JANS, « Académie Royale de Belgique », Classe des sciences, 1923, Mémoires, t. VII, fasc. 5.

mant la loi du mouvement de la planète sur sa trajectoire

$$\frac{16D\wp'(v)}{b_0^2}(t-\tau)=\frac{d}{dv}\left.\frac{\log\frac{\sigma(u-v)}{\sigma(u+v)}+2u\zeta(v)}{\wp'(v)}\right|_{u=\omega'}^{u=\omega'+w}, \tag{18}$$

où sont introduites les notations habituelles des fonctions de WEIERSTRASS.

Pour trouver le temps T s'écoulant entre les passages successifs de la planète par le périhélie, nous posons dans l'égalité (18) $w=2\omega$. Il vient

$$T=\frac{b_0^2}{4D\wp'(v)}\frac{d}{dv}\frac{\omega\zeta(v)-v\zeta(\omega)}{\wp'(v)}.$$

Si les valeurs des coefficients λ et μ sont petites, le déplacement du périhélie à chaque révolution de la planète autour du soleil peut être représenté par la série entière en λ et μ

$$2\omega-2\pi=\frac{2\pi\lambda}{p}+\frac{6\pi\mu}{p^2}+\dots.$$

La valeur du paramètre p dans le cas considéré diffère très peu de sa valeur dans le mouvement elliptique.

4. Sur l'application de la méthode des approximations successives à l'intégration des équations différentielles du mouvement de la planète. — En passant des cas particuliers examinés plus haut au cas général, employons la méthode de la variation des constantes arbitraires et admettons que les intégrales du mouvement étudié coïncident avec celles du mouvement elliptique, mais que les six constantes arbitraires a, e, φ, θ, $\bar{\omega}$, ε du dernier sont des fonctions inconnues du temps t. Intégrons le système obtenu d'équations différentielles par la méthode des approximations successives en admettant t_0 pour la valeur initiale de la variable indépendante t et a_0, e_0, φ_0, θ_0, $\bar{\omega}_0$, ε_0 pour les valeurs initiales des fonctions inconnues. Avant tout, nous cherchons l'intervalle de temps $(t_0,\ t_0+h)$ pour lequel cette méthode donne des séries convergentes, en supposant, pour simplifier les formules, que le soleil et la planète sont des points matériels et, par conséquent, la force d'attraction est centrale. Cette restriction ne s'étend pas au paragraphe suivant.

Introduisons la fonction pertubatrice R

$$R=k^2\left(\frac{\lambda}{r^2}+\frac{\mu}{r^3}+\frac{\nu}{r^4}+\dots\right), \tag{19}$$

où

$$k = \sqrt{f(M+m)} = na^{\frac{3}{2}}.$$

Alors nous aurons

(20) $$U = m\left(\frac{k^2}{r} + R\right).$$

Les équations différentielles déterminant les fonctions inconnues se présentent dans la forme bien connue [1]

$$(21)\quad \begin{aligned}
&(1)\quad \frac{da}{dt} = \frac{2}{na}\frac{\partial R}{\partial \varepsilon},\\
&(2)\quad \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin\varphi}\frac{\partial R}{\partial \varphi},\\
&(3)\quad \frac{d\overline{\omega}}{dt} = \frac{\operatorname{tang}\frac{\varphi}{2}}{na^2\sqrt{1-e^2}}\frac{\partial R}{\partial \varphi} + \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e}\frac{\partial R}{\partial e},\\
&(4)\quad \frac{de}{dt} = -\frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e}\frac{\partial R}{\partial \overline{\omega}} - \sqrt{1-e^2}\,\frac{1-\sqrt{1-e^2}}{na^2e}\frac{\partial R}{\partial \varepsilon},\\
&(5)\quad \frac{d\varphi}{dt} = -\frac{1}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin\varphi}\frac{\partial R}{\partial \theta} - \frac{\operatorname{tang}\frac{\varphi}{2}}{na^2\sqrt{1-e^2}}\left(\frac{\partial R}{\partial \overline{\omega}} + \frac{\partial R}{\partial \varepsilon}\right),\\
&(6)\quad \frac{d\varepsilon}{dt} = -\frac{2}{na}\frac{\partial R}{\partial a} + \frac{\operatorname{tang}\frac{\varphi}{2}}{na^2\sqrt{1-e^2}}\frac{\partial R}{\partial \varphi} + \sqrt{1-e^2}\,\frac{1-\sqrt{1-e^2}}{na^2e}\frac{\partial R}{\partial e}.
\end{aligned}$$

La fonction pertubatrice R ne dépendant pas explicitement des variables φ et θ, la deuxième équation et la cinquième du système précédent donnent $\varphi = \text{cost.}$, $\theta = \text{const.}$, c'est à dire le mouvement de la planète se produit dans un plan. Les équations différentielles (21) prennent la forme

$$(22)\quad \begin{aligned}
&\frac{da}{dt} = \frac{2}{na}\frac{\partial R}{\partial \varepsilon},\quad \frac{\partial \overline{\omega}}{dt} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e}\frac{\partial R}{\partial e},\\
&\frac{de}{dt} = -\frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e}\frac{\partial R}{\partial \overline{\omega}} - \sqrt{1-e^2}\,\frac{1-\sqrt{1-e^2}}{na^2e}\frac{\partial R}{\partial \varepsilon},\\
&\frac{d\varepsilon}{dt} = -\frac{2}{na}\frac{\partial R}{\partial a} + \sqrt{1-e^2}\,\frac{1-\sqrt{1-e^2}}{na^2e}\frac{\partial R}{\partial e}.
\end{aligned}$$

Au préalable nous examinerons un cas particulier quand la fonction pertu-

---

[1] TISSERAND, *Traité de Mécanique céleste*, t. I, chap. IX, X.

batrice a la forme

$$R = \frac{k^2\lambda}{r^2}. \tag{23}$$

Ce cas, déjà signalé antérieurement (§ 2) présente un certain intérêt, parce qu'ici comme la fonction pertubatrice on a pris le premier terme de son développement dans le cas général.

Nous avons

$$\begin{aligned} \frac{\partial R}{\partial a} &= -\frac{2k^2\lambda}{r^3}\frac{\partial r}{\partial a}, \quad \frac{\partial R}{\partial e} = -\frac{2k^2\lambda}{r^3}\frac{\partial r}{\partial e}, \\ \frac{\partial R}{\partial \varepsilon} &= -\frac{2k^2\lambda}{r^3}\frac{\partial r}{\partial \varepsilon}, \quad \frac{\partial R}{\partial \overline{\omega}} = -\frac{2k^2\lambda}{r^3}\frac{\partial r}{\partial \overline{\omega}}. \end{aligned} \tag{24}$$

Le rayon vecteur r est une fonction implicite de t, a, e, $\overline{\omega}$, ε déterminée par le système d'équations

$$r = a(1 - e\cos u), \quad u - e\sin u = nt + \varepsilon - \overline{\omega}, \quad n = ka^{-\frac{3}{2}}. \tag{25}$$

D'ici

$$\begin{aligned} \frac{\partial r}{\partial a} &= 1 - e\cos u - \frac{3net\sin u}{2(1 - e\cos u)}, \quad \frac{\partial r}{\partial e} = a\frac{e - \cos u}{1 - e\cos u}, \\ \frac{\partial r}{\partial \varepsilon} &= \frac{ae\sin u}{1 - e\cos u}, \quad \frac{\partial r}{\partial \overline{\omega}} = -\frac{ae\sin u}{1 - e\cos u}. \end{aligned} \tag{26}$$

D'après les égalités précédentes, calculons les valeurs des dérivées (24) de la fonction pertubatrice et substituons ces dernières dans les équations (22). On a

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= -\frac{4n\lambda e\sin u}{(1 - e\cos u)^4}, \\ \frac{d\overline{\omega}}{dt} &= -\frac{2n\lambda\sqrt{1-e^2}}{ae}\frac{e - \cos u}{(1 - e\cos u)^4}, \\ \frac{de}{dt} &= -\frac{2n\lambda(1-e^2)}{a}\frac{\sin u}{(1 - e\cos u)^4}, \\ \frac{d\varepsilon}{dt} &= \frac{2n\lambda}{a(1 - e\cos u)^3}\left[2(1 - e\cos u) - \frac{3net\sin u}{1 - e\cos u} - \frac{e\sqrt{1-e^2}}{1+\sqrt{1-e^2}}\frac{e - \cos u}{1 - e\cos u}\right]. \end{aligned} \tag{27}$$

Au lieu des variables a et e introduisons les variables x et y suivant les formules

$$a = a_0 x, \quad e = e_0 y.$$

Avec cela

$$x_0 = 1, \quad y_0 = 1.$$

En appliquant la méthode des approximations successives [1], il faut trouver un nombre positif $\mathfrak{M}_1$ dépassant les valeurs absolues des seconds membres des équations différentielles (27) quand les variables t, x, y, ω, ε varient dans les intervalles $(t_0,\ t_0+h)$,

$$(x_0-\Delta x,\ x_0+\Delta x),\quad (y_0-\Delta y,\ y_0+\Delta y),\quad (\bar\omega_0-\Delta\bar\omega,\ \bar\omega_0+\Delta\bar\omega),\quad (\varepsilon_0-\Delta\varepsilon,\ \varepsilon_0+\Delta\varepsilon)$$

toutes les quantités Δt, Δx, Δy, $\Delta\bar\omega$, $\Delta\varepsilon$ étant positives. Soient en outre $\Delta x<1$, $\Delta y<1$ et $t_0=0$.

Le nombre h est égal à la plus petite des quantités

$$\Delta t,\ \frac{\Delta x}{\mathfrak{M}_1},\ \frac{\Delta y}{\mathfrak{M}_1},\ \frac{\Delta\bar\omega}{\mathfrak{M}_1},\ \frac{\Delta\varepsilon}{\mathfrak{M}_1}.$$

Les variables t, ε, $\bar\omega$ entrent dans les seconds membres des équations (27) sous le signe des fonctions trigonométriques, excepté la dernière équation, où le temps t paraît comme un multiplicateur. C'est pourquoi les quantités $\Delta\bar\omega$ et $\Delta\varepsilon$ peuvent être prises aussi grandes que l'on voudra et les nombres $\frac{\Delta\bar\omega}{\mathfrak{M}_1}$, $\frac{\Delta\varepsilon}{\mathfrak{M}_1}$ n'influencent pas la valeur de h, qui se détermine par les inégalités

$$h\le\Delta t,\quad h\le\frac{\Delta x}{\mathfrak{M}_1},\quad h\le\frac{\Delta y}{\mathfrak{M}_1}. \tag{28}$$

Les équations (27) nous donnent

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{dx}{dt}\right|<\frac{4n_0\,|\lambda|\,e_0(1+\Delta y)}{a_0(1-\Delta x)^{\frac{3}{2}}[1-e_0(1+\Delta y)]^4},\\
&\left|\frac{d\bar\omega}{dt}\right|<\frac{4n_0\,|\lambda|}{a_0e_0(1-\Delta x)^{\frac{5}{2}}(1-\Delta y)[1-e_0(1+\Delta y)]^4},\\
&\left|\frac{dy}{dt}\right|<\frac{2n_0\,|\lambda|}{a_0e_0(1-\Delta x)^{\frac{5}{2}}[1-e_0(1+\Delta y)]^4},\\
&\left|\frac{d\varepsilon}{dt}\right|<\frac{4n_0\,|\lambda|\,(1+e_0+3n_0e_0\Delta t)}{a_0(1-\Delta x)^4[1-e_0(1+\Delta y)]^4},
\end{aligned} \tag{29}$$

où

$$n_0=ka_0^{-\frac{3}{2}}.$$

---

[1] Goursat, *Cours d'Analyse mathématique*, 1929, t. II, n° 388.

En considérant les seconds membres des inégalités (29), nous voyons que celui de la deuxième inégalité dépasse toujours le second membre de la première ainsi que celui de la troisième.

Plus loin nous envisageons deux variantes possibles: la première, quand la quantité $\mathfrak{M}_1$ se détermine au moyen de la deuxième inégalité et la seconde, quand dans ce but nous employons la quatrième inégalité.

1-re variante. - Déterminons la valeur de $\mathfrak{M}_1$ par la deuxième inégalité

$$\mathfrak{M}_1 = \frac{4n_0 \mid \lambda \mid}{a_0 e_0 (1 - \Delta x)^{\frac{5}{2}} (1 - \Delta y)[1 - e_0(1 + \Delta y)]^4}. \tag{30}$$

Les valeurs de Δx et de Δy sont limitées par les inégalités

$$0 < \Delta x < 1, \quad 0 < \Delta y < 1.$$

Si les valeurs de Δx, Δy, Δt sont données, le système suivant d'inégalités détermine h

$$\begin{gathered} h \leq \Delta t, \quad h \leq \frac{a_0 e_0}{4n_0 \mid \lambda \mid} (1 - \Delta x)^{\frac{5}{2}} (1 - \Delta y)[1 - e_0(1 + \Delta y)]^4 \Delta x, \\ h \leq \frac{a_0 e_0}{4n_0 \mid \lambda \mid} (1 - \Delta x)^{\frac{5}{2}} (1 - \Delta y)[1 - e_0(1 + \Delta y)]^4 \Delta y. \end{gathered} \tag{31}$$

Invertissons le problème et cherchons les valeurs de Δx, Δy, Δt correspondant au maximum de h. Les deux dernières des inégalités (31) permettent de conclure que ce maximum a lieu simultanément avec le maximum des fonctions $(1 - \Delta x)^{\frac{5}{2}} (1 - \Delta y)[1 - e_0(1 + \Delta y)]^4 \Delta x$ et $(1 - \Delta x)^{\frac{5}{2}} (1 - \Delta y)[1 - e_0(1 + \Delta y)]^4 \Delta x$.

La valeur de e_0 étant supposée petite, les valeurs correspondantes de Δx et de Δy

$$\Delta x = \Delta y = \frac{2}{9} - \frac{112}{729} e_0 + \ldots$$

diffèrent peu de celles-ci

$$\Delta x = \Delta y = \frac{2}{9}$$

que nous maintenons pour plus de simplification.

C' est pourquoi nons prenons

$$h = \frac{1}{18} \left(\frac{7}{9}\right)^{\frac{7}{2}} \frac{a_0 e_0}{n_0 \mid \lambda \mid} \left(1 - \frac{11}{9} e_0\right)^4. \tag{32}$$

Le résultat obtenu reste vrai à condition que la valeur (30) de $\mathfrak{M}_1$ dépasse la partie droite de la quatrième des inégalités (29) dans l'intervalle $(x_0 - \Delta x,\ x_0 + \Delta x)$, $(y_0 - \Delta y,\ y_0 + \Delta y)$, où

$$x_0 = y_0 = 1, \quad \Delta x = \Delta y = \frac{2}{9}.$$

Introduisons la condition mentionnée ci-dessus

$$\Delta t < \frac{\left(\frac{7}{9}\right)^{\frac{1}{2}} - e_0(1 + e_0)}{3n_0 e_0^2}.$$

En tenant compte de la dernière inégalité et de la première des inégalités (31), nous obtenons

$$(33) \qquad |\lambda| > \frac{1}{6}\left(\frac{7}{9}\right)^3 \frac{a_0 e_0^3 \left(1 - \frac{11}{9} e_0\right)^4}{1 - \left(\frac{7}{9}\right)^{\frac{1}{2}} e_0(1 + e_0)}.$$

Si l'inégalité (33) est satisfaite, l'intervalle de la convergence des séries données par la méthode des approximations successives se détermine par l'égalité (32).

2-me variante. — Revenons, pour la détermination de $\mathfrak{M}_1$, à la quatrième des inégalités (29). Admettons

$$(34) \qquad \mathfrak{M}_1 = \frac{4n_0 |\lambda| (1 + e_0 + 3n_0 e_0 \Delta t)}{a_0 (1 - \Delta x)^4 [1 - e_0(1 + \Delta y)]^4}.$$

Les inégalités suivantes déterminent h

$$(35) \qquad \begin{gathered} h \leq \Delta t, \quad h \leq \frac{a_0}{4n_0 |\lambda|} \frac{(1 - \Delta x)^4 [1 - e_0(1 + \Delta y)]^4 \Delta x}{1 + e_0 + 3n_0 e_0 \Delta t}, \\ h \leq \frac{a_0}{4n_0 |\lambda|} \frac{(1 - \Delta x)^4 [1 - e_0(1 + \Delta y)]^4 \Delta y}{1 + e_0 + 3n_0 e_0 \Delta t}, \end{gathered}$$

Δt, Δx, Δy étant envisagés comme des quantités données.

Comme antérieurement, nous invertissons le problème et cherchons le maximum simultané des fonctions $(1 - \Delta x)^4 [1 - e_0(1 + \Delta y)^4 \Delta x$ et $(1 - \Delta x)^4 [1 - e_0(1 + \Delta y)]^4 \Delta y$.

On peut admettre approximativement

$$\Delta x = \Delta y = \frac{1}{5}.$$

Après la substitution des valeurs trouvées de Δx et de Δy, nos inégalités (35) s'écrivent dans la forme de

$$h \leq \Delta t, \quad h \leq \frac{1}{20}\left(\frac{4}{5}\right)^4 \frac{a_0}{n_0 \,|\, \lambda \,|} \frac{\left(1-\frac{6}{5}e_0\right)^4}{1+e_0+3n_0 e_0 \Delta t},$$

d'où l'on peut déterminer la valeur de h et celle de Δt correspondant au maximum de h

$$h = \Delta t = \frac{1}{6n_0 e_0}\left[-(1+e_0)+\sqrt{(1+e_0)^2+\frac{3}{5}\left(\frac{4}{5}\right)^4 \frac{a_0 e_0}{|\lambda|}\left(1-\frac{6}{5}e_0\right)^4}\,\right]. \tag{36}$$

Notre raisonnement suppose que la valeur de $\mathfrak{M}_1$ mentionnée ci-dessus dépasse les parties droites des trois premières inégalités (29) dans l'intervalle $(t_0,\ t_0+\Delta t)$, $(x_0-\Delta x,\ x_0+\Delta x)$, $(y_0-\Delta y,\ y_0+\Delta y)$, où

$$t_0 = 0, \quad x_0 = y_0 = 1, \quad \Delta t = h, \quad \Delta x = \Delta y = \frac{1}{5}.$$

D'après la remarque faite antérieurement concernant la deuxième des inégalité (29), il suffit pour cela qu'une seule inégalité soit satisfaite

$$e_0\left[1+e_0+\sqrt{(1+e_0)^2+\frac{3}{5}\left(\frac{4}{5}\right)^4 \frac{a_0 e_0}{|\lambda|}\left(1-\frac{6}{5}e_0\right)^4}\,\right] > 2\left(\frac{4}{5}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{37}$$

Ayant étudié le cas particulier où la fonction pertubatrice se présente dans la forme

$$R = \frac{k^2\lambda}{r^2},$$

passons au cas général et considérons la force centrale d'attraction s'exprimant par la série (§ 1)

$$F = -mk^2\left(\frac{1}{r^2}+\frac{2\lambda}{r^3}+\frac{3\mu}{r^4}+\frac{4\nu}{r^5}+\ldots\right) = -mk^2\left[\frac{1}{r^2}+\frac{2\lambda}{r^3}+S(r)\right],$$

où

$$S(r) = \frac{3\mu}{r^4}+\frac{4\nu}{r^5}+\ldots.$$

Le potentiel aura la forme

$$U = mk^2\left[\frac{1}{r}+\frac{\lambda}{r^2}-\int_\infty^r S(r)dr\right].$$

L'expression de la fonction pertubatrice est la suivante:

$$R = k^2\left[\frac{\lambda}{r^2}-\int_\infty^r S(r)dr\right].$$

Nous devons calculer les dérivées partielles de la fonction R par rapport aux variables $a, e, \bar{\omega}, \varepsilon$ et substituer leurs valeurs dans les équations différentielles de mouvement (22). Désignons par z une quelconque des variables $a, e, \bar{\omega}, \varepsilon$. Alors

$$\frac{\partial R}{\partial z} = -k^2\left[\frac{2\lambda}{r^3} + S(r)\right]\frac{\partial r}{\partial z}$$

et

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{k^2\lambda}{r^2}\right) = -\frac{2k^2\lambda}{r^3}\frac{\partial r}{\partial z}.$$

Divisons la première des deux dernières égalités par la seconde

$$\frac{\partial R}{\partial z} = \left[1 + \frac{r^3}{2\lambda}S(r)\right]\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{k^2\lambda}{r^2}\right).$$

Si $\lambda \neq 0$, la fonction $\frac{r^3}{2\lambda}S(r)$ bornée dans un intervalle $(r \geq \rho_0)$ tend vers zéro quand r croît indéfiniment. Soit dans un intervalle

$$\left|\frac{r^3}{2\lambda}S(r)\right| < \chi,$$

où χ tend vers zéro avec la croissance de r.

Nous avons

$$\left|\frac{\partial R}{\partial z}\right| < (1+\chi)\left|\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{k^2\lambda}{r^2}\right)\right|. \tag{38}$$

Indiquons par $\mathfrak{M}_2$ la quantité analogue à la quantité $\mathfrak{M}_1$ du cas particulier précédent. De nos considérations il découle, d'après l'inégalité (38) et les équations (22),

$$\mathfrak{M}_2 = \mathfrak{M}_1(1+\chi).$$

Dans la première variante du cas particulier précédent nous avons eu les intervalles suivants de la variation des variables x et y: $(x_0 \pm \Delta x)$ et $(y_0 \pm \Delta y)$, où $x_0 = y_0 = 1$ et $\Delta x = \Delta y = \frac{2}{9}$.

Les intervalles de la variation des quantités a et e $(a = a_0 x,\ e = e_0 y)$ seront respectivement

$$a_0\left(1 \pm \frac{2}{9}\right),\quad e_0\left(1 \pm \frac{2}{9}\right).$$

Trouvons l'intervalle correspondant $(r_{\min}, r_{\max})$ de la variation de la variable r. En vertu de la formule

$$r = a(1 - e\cos u)$$

nous obtenons

$$r_{\min}=\frac{7}{9}a_0\left(1-\frac{11}{9}e_0\right),\quad r_{\max}=\frac{11}{9}a_0\left(1+\frac{11}{9}e_0\right).$$

Soit χ_1 satisfaisant à l'inégalité

$$\left|\frac{r^3}{2\lambda}S(r)\right|<\chi_1$$

dans l'intervalle

$$r_{\min}<r<r_{\max}.$$

De la même façon, aux intervalles de la variation des variables x et y dans la deuxième variante $\left(\Delta x=\Delta y=\frac{1}{5}\right)$ correspondra l'intervalle $(r_{\min},\ r_{\max})$ de la variation de r défini par les égalités

$$r_{\min}=\frac{4}{5}a_0\left(1-\frac{6}{5}e_0\right),\quad r_{\max}=\frac{6}{5}a_0\left(1+\frac{6}{5}e_0\right).$$

Soit χ_2 satisfaisant à l'inégalité

$$\left|\frac{r^3}{2\lambda}S(r)\right|<\chi_2,\quad r_{\min}<r<r_{\max}.$$

Le deuxième intervalle est renfermé dans le premier et $\chi_1\geq\chi_2$. En répétant tous les raisonnements antérieurs, nous aurons dans le cas général deux variantes:

1-ère variante. — Si

$$\frac{1}{6}\left(\frac{7}{9}\right)^3\frac{a_0e_0^3\left(1-\frac{11}{9}e_0\right)^4}{|\lambda|(1+\chi_1)\left[1-\left(\frac{9}{7}\right)^{\frac{1}{2}}e_0(1+e_0)\right]}<1,\tag{39}$$

nous aurons

$$h=\frac{1}{18}\left(\frac{7}{9}\right)^{\frac{7}{2}}\frac{a_0e_0\left(1-\frac{11}{9}e_0\right)^4}{n_0\,|\lambda|\,(1+\chi_1)}.\tag{40}$$

Les variables a et e seront comprises dans les intervalles

$$a_0\left(1\pm\frac{2}{9}\right),\quad e_0\left(1\pm\frac{2}{9}\right).$$

2-ème variante. — Si

$$e_0\left[1+e_0+\sqrt{(1+e_0)^2+\frac{3}{5}\left(\frac{4}{5}\right)^4\frac{a_0e_0\left(1-\frac{6}{5}e_0\right)^4}{|\lambda|(1+\chi_2)}}\right]>2\left(\frac{4}{5}\right)^{\frac{1}{2}},\tag{41}$$

on a

$$(42) \qquad h=\frac{1}{6n_0e_0}\left[-(1+e_0)+\sqrt{(1+e_0)^2+\frac{3}{5}\left(\frac{4}{5}\right)^4\frac{a_0e_0\left(1-\frac{6}{5}e_0\right)^4}{|\lambda|(1+\chi_2)}}\right].$$

Les valeurs des fonctions a et e varient respectivement entre les limites

$$a_0\left(1\pm\frac{1}{5}\right),\quad e_0\left(1\pm\frac{1}{5}\right).$$

L'intervalle de temps $(t_0,\ t_0+h)$ pour lequel le procédé des approximations successives donne des séries convergentes, se trouve dans le cas général naturellement plus petit que dans le cas particulier précédent. Si a_0 croît indéfiniment, les coefficients χ_1 et χ_2 tendent vers zéro et nous revenons anx résultats du cas particulier mentionné ci-dessus.

Dans ce qui précéde nous avons supposé que le coefficient λ n'est pas égal à zéro. S'il est égal à zéro, on doit, en suivant la méthode précédente, examiner d'abord le cas particulier, où la fonction pertubatrice a la forme $(\mu\neq 0)$

$$R=\frac{k^2\mu}{r^3}$$

et ensuite passer, per une voie analogue, au cas général de la force d'attraction centrale. La fonction $S(r)$ aura l'expression

$$S(r)=\frac{4\nu}{r^5}+\dots.$$

L'inégalité suivante détermine le coefficient χ_3 dans un intervalle $(r_{\min},\ r_{\max})$ de la variation de r

$$\left|\frac{r^4}{3\mu}S(r)\right|<\chi_3,\quad r_{\min}<r<r_{\max},$$

où

$$r_{\min}=\frac{9}{11}a_0\left(1-\frac{13}{11}e_0\right),\quad r_{\max}=\frac{13}{11}a_0\left(1+\frac{13}{11}e_0\right).$$

Déterminons le coefficient χ_4 au moyen de l'inégalité

$$\left|\frac{r^4}{3\mu}S(r)\right|<\chi_4,\quad r_{\min}<r<r_{\max},$$

où

$$r_{\min}=\frac{5}{6}a_0\left(1-\frac{7}{6}e_0\right),\quad r_{\max}=\frac{7}{6}a_0\left(1+\frac{7}{6}e_0\right).$$

Il est évident que $\chi_3\geq\chi_4$.

En définitive, nous aurons dans le cas général deux variantes:

1-ère variante. — Si

$$\frac{1}{11}\left(\frac{9}{11}\right)^4 \frac{a_0^2 e_0^3\left(1-\frac{13}{11}e_0\right)^5}{|\mu|(1+\chi_3)\left[1-\left(\frac{11}{9}\right)^{\frac{1}{2}} e_0(1+e_0)\right]} < 1, \tag{43}$$

nous avons

$$h = \frac{1}{33}\left(\frac{9}{11}\right)^{\frac{9}{2}} \frac{a_0^2 e_0\left(1-\frac{13}{11}e_0\right)^5}{n_0|\mu|(1+\chi_3)}. \tag{44}$$

Les variables a et e seront comprises dans les intervalles

$$a_0\left(1 \pm \frac{2}{11}\right), \quad e_0\left(1 \pm \frac{2}{11}\right).$$

2-ème variante. — Si

$$e_0\left[1+e_0+\sqrt{(1+e_0)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{5}{6}\right)^5 \frac{a_0^2 e_0\left(1-\frac{7}{6}e_0\right)^5}{|\mu|(1+\chi_4)}}\right] > 2\left(\frac{5}{6}\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{45}$$

on a

$$h = \frac{1}{6n_0 e_0}\left[-(1+e_0)+\sqrt{(1+e_0)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{5}{6}\right)^5 \frac{a_0^2 e_0\left(1-\frac{7}{6}e_0\right)^5}{|\mu|(1+\chi_4)}}\right]. \tag{46}$$

Les valeurs des fonctions a et e varient respectivement entre les limites

$$a_0\left(1 \pm \frac{1}{6}\right), \quad e_0\left(1 \pm \frac{1}{6}\right).$$

Pour les grandes valeurs de a_0 reste en force la remarque précédente, concernant les petites valeurs de χ_3 et de χ_4.

Si nous nous bornons à la première approximation, l'erreur, ayant lieu quand nous calculons une quelconque des fonctions cherchées (pour le moment du temps compris dans l'intervalle mentionné ci-dessus), sera en grandeur absolue plus petite que

$$\frac{M}{A+B+C+D}\left[e^{(A+B+C+D)(t-t_0)}-1-(A+B+C+D)(t-t_0)\right],$$

où e est la base des logarithmes naturels et M, A, B, C, D désignent certaines quantités positives [1].

---

[1] GOURSAT, *Cours d'Analyse mathématique*, 1929, t. II, n° 388.

Les expressions trouvées (40), (42), (44), (46) pour h nous montrent que l'intervalle de la convergence des séries obtenues par le procédé des approximations successives dépend de la relation $\frac{e_0}{|\lambda|}$ si $\lambda \neq 0$ ou de la relation $\frac{e_0}{|\mu|}$ si $\lambda = 0$, $\mu \neq 0$. Mais quelles que soient les valeurs des coefficients λ et μ, si l'excentricité initiale e_0 diffère peu de zéro, la valeur de h est très petite. Le cas $e_0 = 0$ n'est pas l'objet de nos considérations.

5. **Le cas général.** — Dans le cas général nous envisageons le soleil comme un corps continu. Ici la force d'attraction cesse d'être centrale et l'expression de son potentiel a été trouvée par nous dans le paragraphe 1-er sous la forme suivante

$$U = fm \left\{ \frac{M}{r} + \frac{\lambda M}{r^2} + \frac{2\mu' M + 3i \sin^2(\bar{v} - \theta) \sin^2 \varphi}{2r^3} + \left[\frac{1}{r}\right]_4 \right\},$$

où

$$\mu' = \mu - \frac{i}{2M}, \quad i = A - C.$$

Comme la masse m est très faible par rapport à la masse M, nous négligeons l'influence de la planète sur le mouvement du soleil et nous prenons

$$k = \sqrt{fM}.$$

Introduisons la notation abrégée $\delta = \frac{3}{2} fi$.

En vertu de l'équation $U = m\left(\frac{k^2}{r} + R\right)$, la fonction pertubatrice a la forme

$$R = k^2\left(\frac{\lambda}{r^2} + \frac{\mu'}{r^3}\right) + \frac{\delta}{r^3} \sin^2(\bar{v} - \theta) \sin^2 \varphi + \dots. \tag{47}$$

Revenons aux formules (4) du mouvement elliptique. De l'équation de Képler nous avons le développement bien connu de l'anomalie excentrique u de la planète suivant les puissances de l'excentricité e

$$u = \zeta + e \sin \zeta + \frac{e^2}{1 \cdot 2} \sin 2\zeta + \dots + \frac{e^j}{1 \cdot 2 \dots j} \frac{d^{j-1} \sin^j \zeta}{d\zeta^{j-1}} + \dots, \tag{48}$$

où

$$\zeta = nt + \varepsilon - \bar{\omega}.$$

Laplace a démontré que la série précédente est convergente pourvu que e soit inférieur à la limite 0,662743....

Outre le développement (48), nous obtenons aussi d'autres développements

$$(49)\qquad \begin{aligned} \frac{r}{a} &= 1 - e\cos\zeta + \frac{e^2}{2}(1 - \cos 2\zeta) + \ldots, \\ \left(\frac{r}{a}\right)^{-2} &= 1 + 2e\cos\zeta + \frac{e^2}{2}(1 + 5\cos 2\zeta) + \ldots, \\ \left(\frac{r}{a}\right)^{-3} &= 1 + 3e\cos\zeta + \frac{3e^2}{2}(1 + 3\cos 2\zeta) + \ldots, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

et enfin celui de l'anomalie vraie

$$w = \zeta + 2e\sin\zeta + \frac{5e^2}{2}\sin 2\zeta + \ldots .$$

D'après la dernière série il vient, en tenant compte de l'égalité $\bar{\nu} = w + \omega$,

$$(50)\qquad \begin{aligned} \sin^2(\bar{\nu} - \theta) &= \frac{1}{2}[1 - \cos(nt + \varepsilon - \theta)] + e[\cos(nt + \varepsilon + \bar{\omega} - 2\theta) - \\ &- \cos(3nt + 3e - \bar{\omega} - 2\theta)] + \frac{e^2}{4}[\cos 2(\bar{\omega} - \theta) + 8\cos 2(nt + \varepsilon - \theta) - \\ &- 9\cos 2(2nt + 2\varepsilon - \bar{\omega} - \theta)] + \ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

En faisant la substitution au moyen des égalités (49) et (50), nous obtenons l'expression (47) de la fonction pertubatrice R dans la forme d'une série entière en e

$$(51)\qquad \begin{aligned} R &= \frac{k^2\lambda}{a^2} + \frac{k^2\mu'}{a^3} + \frac{\delta\sin^2\varphi}{2a^3}[1 - \cos 2(nt + \varepsilon - \theta)] + \ldots\ldots\ldots \\ &+ e\left\{\left(\frac{2k^2\lambda}{a^2} + \frac{3k^2\mu'}{a^3}\right)\cos(nt + \varepsilon - \bar{\omega}) + \frac{\delta\sin^2\varphi}{4a^3}[6\cos(nt + \varepsilon - \bar{\omega}) - \right. \\ &\left. - 7\cos(3nt + 3\varepsilon - \bar{\omega} - 2\theta) + \cos(nt + \varepsilon + \bar{\omega} - 2\theta)] + \ldots\right\} + \\ &+ e^2\left\{\frac{k^2\lambda}{2a^2}[1 + 5\cos 2(nt + \varepsilon - \bar{\omega}) + \frac{3k^2\mu'}{2a^3}[1 + 3\cos 2(nt + \varepsilon - \bar{\omega})] + \right. \\ &+ \frac{\delta\sin^2\varphi}{8a^3}[6 + 5\cos 2(\bar{\omega} - \theta) + 18\cos 2(nt + \varepsilon - \bar{\omega}) + 10\cos 2(nt + \varepsilon - \theta) - \\ &\left. - 39\cos 2(2nt + 2\varepsilon - \bar{\omega} - \theta)] + \ldots\right\} + \ldots\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

ayant en vue que pour les grandes planètes l'excentricité varie de

$e_0 = \sin 0°23'31'',5$ (Vénus) jusqu'à $e_0 = \sin 11°51'53'',7$ (Mercure) et par conséquent reste petite [1].

Substituons les valeurs des dérivées partielles de la fonction pertubatrice par rapport aux variables a, e, φ, θ, $\bar{\omega}$, ε dans le système des équations différentielles (21) et intégrons les équations obtenues par la méthode des approximations successives.

Pour obtenir la première approximation, donnons aux variables a, e, φ, θ, $\bar{\omega}$, ε entrant dans les parties droites de nos équations leurs valeurs initiales a_0, e_0, φ_0, θ_0, $\bar{\omega}_0$, ε_0. Ces parties renfermeront des termes périodiques ayant les périodes $\frac{2\pi}{n_0}, \frac{2\pi}{2n_0}, \frac{2\pi}{3n_0}, \ldots$, où $n_0 = ka_0^{-\frac{3}{2}}$, ainsi que ceux non-périodiques. Dans le but de trouver les accroissements des fonctions a, e, φ, θ, $\bar{\omega}$, ε correspondant à une révolution de la planète sur son orbite, nous prenons t_0 et $t_0 + T$ pour les limites de l'intégration dans les quadratures de la première approximation $\left(\text{ici } T \text{ désigne la durée d'une révolution de la planète autour du soleil égale à } \frac{2\pi}{n_0}\right)$. C'est pourquoi nous omettons dans les équations différentielles de la première approximation les termes périodiques qui disparaîtraient également après la substitution des limites d'intégration. On a donc en première approximation

$$(52)\quad \begin{aligned}
&1)\ \frac{da}{dt} = \frac{2}{n_0 a_0}\{\ldots\ldots\},\\
&2)\ \frac{d\theta}{dt} = \frac{\delta\cos\varphi_0}{n_0 a_0^5\sqrt{1-e_0^2}}\left\{1 + \frac{e_0^2}{4}[6 + 5\cos 2(\bar{\omega}_0 - \theta_0)] + \ldots\right\},\\
&3)\ \frac{d\bar{\omega}}{dt} = \frac{2\delta\sin^2\frac{\varphi_0}{2}\cos\varphi_0}{n_0 a_0^5\sqrt{1-e_0^2}}\left\{1 + \frac{e_0^2}{4}[6 + 5\cos 2(\bar{\omega}_0 - \theta_0)] + \ldots\right\} +\\
&\qquad + \frac{\sqrt{1-e_0^2}}{n_0 a_0^2}\left\{2\left[\frac{k^2\lambda}{2a_0^2} + \frac{3k^2\mu'}{2a_0^3} + \frac{\delta\sin^2\varphi_0}{8a_0^3}(6 + 5\cos 2(\bar{\omega}_0 - \theta_0))\right] + \ldots\right\},\\
&4)\ \frac{de}{dt} = -\frac{\sqrt{1-e_0^2}}{n_0 a_0^2}\left\{-\frac{5\delta e_0}{4a_0^3}\sin^2\varphi_0\sin 2(\bar{\omega}_0 - \theta_0) + \ldots\right\} -\\
&\qquad - \sqrt{1-e_0^2}\,\frac{1-\sqrt{1-e_0^2}}{n_0 a_0^2 e_0}\{\ldots\ldots\},
\end{aligned}$$

---

[1] CHARLIER, *Die Mechanik des Himmels*, 1902, Band 1, Tafel 1.

$$5)\ \frac{d\varphi}{dt} = -\frac{1}{n_0 a_0^2 \sqrt{1-e_0^2}\sin\varphi_0}\left\{\frac{5\delta e_0^2}{4a_0^3}\sin^2\varphi_0 \sin 2(\bar{\omega}_0-\theta_0)+\ldots\right\} -$$

$$-\frac{\operatorname{tang}\frac{\varphi_0}{2}}{n_0 a_0^2\sqrt{1-e_0^2}}\left\{-\frac{5\delta e_0^2}{4a_0^3}\sin^2\varphi_0 \sin 2(\bar{\omega}_0-\theta_0)+\ldots\right\},$$

$$6)\ \frac{d\varepsilon}{dt} = -\frac{2}{n_0 a_0}\left\{-\frac{2k^2\lambda}{a_0^3}-\frac{3k^2\mu'}{a_0^4}-\frac{3\delta\sin^2\varphi_0}{2a_0^4}-\frac{3k\delta\sin^2\varphi_0}{2a_0^{\frac{11}{2}}}t\sin 2(n_0t+\varepsilon_0-\theta_0)+\right.$$

$$+\ldots-\frac{3ke_0t}{2a_0^{\frac{5}{2}}}\left[-\left(\frac{2k^2\lambda}{a^2}+\frac{3k^2\mu'}{a^3}\right)\sin(n_0t+\varepsilon_0-\bar{\omega}_0)+\right.$$

$$+\frac{\delta\sin^2\varphi_0}{4a_0^3}(-6\sin(n_0t+\varepsilon_0-\bar{\omega}_0)+21\sin(3n_0t+3\varepsilon_0-\bar{\omega}_0-2\theta_0)-$$

$$\left.-\sin(n_0t+\varepsilon_0+\bar{\omega}_0-2\theta_0))\right]+e_0^2\left[-\frac{k^2\lambda}{a_0^3}-\frac{9k^2\mu'}{2a_0^4}+\right.$$

$$(52)\qquad +\frac{15k^3\lambda t}{2a_0^{\frac{9}{2}}}\sin 2(n_0t+\varepsilon_0-\bar{\omega}_0)+\frac{27k^3\mu' t}{2a_0^{\frac{11}{2}}}\sin 2(n_0t+\varepsilon_0-\bar{\omega}_0)-$$

$$-\frac{3\delta\sin^2\varphi_0}{8a_0^4}(6+5\cos 2(\bar{\omega}_0-\theta_0))-\frac{3k\delta t\sin^2\varphi_0}{4a_0^{\frac{11}{2}}}(-9\sin 2(n_0t+\varepsilon_0-\bar{\omega}_0)-$$

$$\left.\left.-5\sin 2(n_0t+\varepsilon_0-\theta_0)+39\cos 2(2n_0t+2\varepsilon_0-\bar{\omega}_0-\theta_0))\right]+\ldots\right\}+$$

$$+\frac{2\delta\sin^2\frac{\varphi_0}{2}\cos\varphi_0}{n_0a_0^5\sqrt{1-e_0^2}}\left\{1+\frac{e_0^2}{4}(6+5\cos 2(\bar{\omega}_0-\theta_0))+\ldots\right\}+$$

$$+\sqrt{1-e_0^2}\,\frac{1-\sqrt{1-e_0^2}}{n_0a_0^2}\left\{2\left[\frac{k^2\lambda}{2a_0^2}+\frac{3k^2\mu'}{2a_0^3}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{\delta\sin^2\varphi_0}{8a_0^3}(6+5\cos 2(\bar{\omega}_0-\theta_0))\right]+\ldots\right\}.$$

Effectuons l'intégration de ces équations dans les limites mentionnées ci-dessus. L'opération de l'intégration demande la convergence uniforme des séries infinies par lesquelles s'expriment les dérivées partielles de la fonction pertubatrice. La question se simplifie dans le cas du paragraphe 4ème lorsque le soleil et la planète sont considérés comme des points matériels. En effet, envisageons par exemple la dérivée partielle $\frac{\partial R}{\partial a}$. La fonction R ne dépendant, d'après l'égalité (19), que d'une variable r, on a

$$\frac{\partial R}{\partial a}=\frac{dR}{dr}\frac{\partial r}{\partial a}.$$

D'après les formules (4) du mouvement elliptique de la planète,

$$\frac{\partial r}{\partial a} = 1 - e\cos u - \frac{3net\sin u}{2(1-e\cos u)}.$$

La dérivée $\dfrac{dR}{dr}$ se présente sous forme d'une série entière en r, convergente si $r \geq \rho_0$ (§ 1), dont tous les termes sont des fonctions holomorphes de l'excentricité e dans un domaine de la variation de e. En vertu du théorème connu de WEIERSTRASS ([1]), cette série est aussi une fonction holomorphe de e. Pareillement, de la considération de l'expression de la dérivée $\dfrac{\partial r}{\partial a}$ on peut conclure qu'elle est une fonction holomorphe de e. Comme les deux dérivées $\dfrac{dR}{dr}$ et $\dfrac{\partial r}{\partial a}$ s'expriment par des séries entières en e convergentes dans un certain domaine, quelle que soit la valeur finie du paramètre t, il est évident que leur produit, c'est à dire la dérivée $\dfrac{\partial R}{\partial a}$, présente aussi une série entière en e convergente dans un certain domaine, quelle que soit la valeur fiuie du temps t et, par conséquent, convergente uniformément par rapport à t.

Retournons donc à l'intégration des équations différentielles de la première approximation. Nous avons les expressions suivantes pour les accroissements des fonctions inconnues présentées sous la forme des séries infinies

$$\begin{aligned}
& a\Big|_{t_0}^{t_0+T} = 0, \qquad \theta\Big|_{t_0}^{t_0+T} = \frac{3\pi i\cos\varphi_0}{Ma_0^2} + \dots,\\
& \bar{\omega}\Big|_{t_0}^{t_0+T} = \frac{2\pi\lambda}{a_0} + \frac{6\pi\mu'}{a_0^2} + \frac{3\pi i\sin^2\varphi_0}{4Ma_0^2}\left[8 + 5\cos 2(\bar{\omega}_0 - \theta_0) - 2\,\mathrm{tg}^2\frac{\varphi_0}{2}\right] + \dots,\\
(53)\quad & e\Big|_{t_0}^{t_0+T} = \frac{15\pi i e_0\sin^2\varphi_0\sin 2(\bar{\omega}_0 - \theta_0)}{4Ma_0^2} + \dots,\\
& \varphi\Big|_{t_0}^{t_0+T} = -\frac{15\pi i e_0^2\sin 2\varphi_0\sin 2(\bar{\omega}_0 - \theta_0)}{8Ma_0^2} + \dots,\\
& \varepsilon\Big|_{t_0}^{t_0+T} = \frac{8\pi\lambda}{a_0} + \frac{12\pi\mu'}{a_0^2} + \frac{3\pi i\sin^2\varphi_0}{2Ma_0^2}\left[7 - \mathrm{tg}^2\frac{\varphi_0}{2} - 3\cos 2(n_0t_0 + \varepsilon_0 - \theta_0)\right] + \dots.
\end{aligned}$$

Dans le système héliocentrique, l'angle $\bar{\omega} - \theta$ est compris entre deux rayons dont l'un passe par le noeud ascendant et l'autre par le périhélie.

([1]) GOURSAT, ibidem, n° 290.

Le déplacement du périhélie à chaque révolution de la planète a la forme de

$$(54)\quad (\bar{\omega}-\theta)\Big|_{t_0}^{t_0+T} = \frac{2\pi\lambda}{a_0} + \frac{6\pi\mu'}{a_0^2} + \frac{3\pi i}{4Ma_0^2}\Big\{[6+5\cos 2(\bar{\omega}_0-\theta_0)]\sin^2\varphi_0 - 4\cos^2\varphi_0\Big\} + \dots .$$

En posant $i=0$, nous obtenons un résultat concordant avec les expressions (§§ 2, 3) trouvées par une autre voie et appliquées au cas particulier des orbites presque circulaires ($p=a_0$).

Les premiers termes des séries (53) et (54) montrent que:

1) la variation des angles θ et φ dépend du coefficient i caractérisant la distribution de la masse du soleil. C'est à cause de la variation de ces angles qu'a lieu le mouvement des noeuds du plan de l'orbite.

2) la variation de l'excentricité e dépend du même coefficient i.

3) le déplacement du périhélie dépend en même temps du coefficient i et des coefficients λ, μ, ν,... de la série (1).

Les valeurs exactes des coefficients λ, μ, ν,... peuvent être obtenues des calculs astronomiques. L'examen suivant ne permet de trouver que l'ordre de la grandeur du coefficient λ. C'est M. EINSTEIN qui a donné la formule suivante découlant de la théorie générale de la relativité pour le déplacement du périhélie à chaque révolution de la planète

$$\frac{24\pi^3 a^2}{T^2c^2(1-e^2)} = \frac{6\pi fM}{pc^2},$$

où c désigne la vitesse de la lumière, $p=\dfrac{b^2}{a}$ et pour les orbites presque circulaire $p=a_0$. Les autres notations coïncident avec les nôtres. Comme on sait, cette formule donne pour Mercure un résultat satisfaisant.

Si nous supposons que le coefficient λ n'est pas égal à zéro, on peut retenir seulement le premier terme dans la série (54) pour les valeurs de a_0 suffisamment grandes

$$(55)\qquad (\bar{\omega}-\theta)\Big|_{t_0}^{t_0+T} = \frac{2\pi\lambda}{a_0}$$

La comparaison de notre formule (55) avec celle de M. EINSTEIN donne la valeur approximative du coefficient λ

$$\lambda = \frac{3fM}{c^2}.$$