Sull'equazione biarmonica non lineare a due variabili indipendenti in un'area generale semplicemente connessa.

Memoria di ALFREDO ROSENBLATT (Kraków - Polonia).

1. In due Note recenti dei « Comptes Rendus » ⁽¹⁾ ho studiato l'equazione biarmonica non lineare

$$(1) \quad \Delta \Delta u = F(x, y, u, u_x, \dots, u_{xy})$$

in un cerchio K_i di raggio R nonchè in un dominio D che si rappresenta sopra il cerchio. Ho supposto verificata una *condizione generalizzata* di LIPSCHITZ. Il dominio era sottoposto a qualche restrizione concernente lo « Schwarziano »

$$(2) \quad S(z) = \frac{z_i'''}{z_i'} - \frac{3}{2} \left(\frac{z_i''}{z_i'} \right)^2$$

della funzione analitica $z = \omega_i(z_i)$ che rappresenta il dominio D del piano complesso z sul cerchio K_i di centro O_i nel piano complesso z_i .

Ora vorrei mostrare che si può anche nel caso di un dominio arbitrario ottenere un integrale $u(x, y)$ dell'equazione (1) che si annulla colla sua derivata normale $\frac{du}{dn}$ sul contorno C del dominio D . Il procedimento è lo stesso delle approssimazioni successive del sig. E. PICARD, ma il punto di partenza è un'equazione integrale con un nucleo singolare.

2. Sia dunque

$$(3) \quad z = \omega_i(z_i)$$

la funzione che rappresenta D sul K_i . Sia

$$(4) \quad z_i = \omega(z)$$

⁽¹⁾ *Sur l'application de la méthode des approximations successives de M. Picard à l'étude de certaines équations non linéaires du quatrième ordre*, p. 197, 1933; *Sur l'équation biharmonique à deux variables indépendantes*. Ibid., t. 198, 1934.

Veggasi anche la mia Nota: *Sur les équations m-harmoniques non linéaires à deux variables indépendantes*. Ibid., p. 198, 1934.

Gli sviluppi dei risultati di queste Note saranno esposti in alcuni lavori di prossima pubblicazione.

la funzione inversa. Supponiamo che il contorno C di D sia formato da una curva chiusa semplice di JORDAN, della quale D è il campo interno. Questa curva è supposta dotata di una tangente t continua e delle proprietà concernenti le derivate delle funzioni $x(s)$, $y(s)$, s arco di C . Queste proprietà sono tali che assicurano la continuità e limitazione delle derivate z'' e z'''

$$z'' = \omega_1''(z_1), \quad z''' = \omega_1'''(z_1)$$

nel dominio chiuso $D + C$. Si hanno dunque le disuguaglianze

$$(5) \quad 0 < \alpha < |\omega_1'(z_1)| < \beta, \quad |\omega_1''| \leq \frac{\gamma}{R}, \quad |\omega_1'''| \leq \frac{\delta}{R^2}.$$

Denotiamo $|\omega_1'(z_1)|$ con H .

Noi supponiamo che la funzione F sia una funzione continua degli argomenti indicati nel dominio $\bar{D}$ seguente: $P(x, y)$ in $D + C$, e u colle derivate soddisfacenti alle disuguaglianze

$$(6) \quad |u| \leq L; \quad |u_x|, |u_y| \leq \frac{L'}{d}; \quad |u_{xx}|, |u_{xy}|, |u_{yy}| \leq \frac{L''}{d^2},$$

d essendo il diametro di D . Sia N il modulo massimo di F in $\bar{D}$.

Noi supponiamo, di più, che la funzione F soddisfi come funzione degli argomenti x, y ad una condizione di LIPSCHITZ in tutto il dominio $D + C$. Come funzione di u e delle derivate di u , F soddisfa per tutti i valori di questi argomenti dati dalle disuguaglianze (6) alla seguente condizione *generalizzata di Lipschitz*

$$(7) \quad |F(x, y, u', \dots) - F(x, y, u, \dots)| \leq \frac{A_0}{\delta^4} |u' - u| + \\ + \frac{A_1}{\delta^3} [|u_x' - u_x| + |u_y' - u_y|] + \frac{A_2}{\delta^2} [|u_{xx}' - u_{xx}| + |u_{xy}' - u_{xy}| + |u_{yy}' - u_{yy}|]$$

nella quale A_i sono numeri positivi, e δ è la distanza PM del punto $P(x, y)$ del contorno C di D , M essendo uno dei punti di C prossimi a P .

3. Sia $P_i(x_i, y_i)$ il punto del cerchio K_i trasformato di P e sia $\delta_i = P_i N_i$ la distanza di P_i della circonferenza C_i di K_i , N_i essendo il punto (o uno dei punti) prossimo a P_i . Si hanno allora le seguenti disuguaglianze

$$(8) \quad \delta_i \leq \frac{\delta}{\alpha}, \quad \delta_i \geq \frac{\delta}{\beta}.$$

Sia $u_i(x_i, y_i)$ la funzione trasformata della funzione $u(x, y)$. Abbiamo

$$x_i = x_i(x, y), \quad y_i = y_i(x, y),$$

e si ottiene la relazione

$$(9) \quad \Delta u = \Delta' u \cdot \frac{1}{H^2}$$

nella quale Δ' è l'operatore di LAPLACE nelle variabili x_1, y_1 .

Per il bi-operatore $\Delta\Delta u$ si ottiene l'espressione seguente

$$(10) \quad \Delta\Delta u = \frac{1}{H^4} \left\{ \Delta_2' u_1 - 2 \left(\frac{\partial \Delta' u_1}{\partial x_1} \frac{\partial \log H^2}{\partial x_1} + \frac{\partial \Delta' u_1}{\partial y_1} \frac{\partial \log H^2}{\partial y_1} \right) + \right. \\ \left. + \Delta_1' u_1 \cdot \left[\left(\frac{\partial \log H^2}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial \log H^2}{\partial y_1} \right)^2 \right] \right\},$$

nella quale Δ_2' è il bi-operatore $\Delta_1 \Delta_1 u_1$.

L'equazione (1) si trasforma dunque nell'equazione seguente per la funzione $u_1(x_1, y_1)$

$$(11) \quad \Delta_2' u_1 - 2 \left[\frac{\partial \Delta' u_1}{\partial x_1} \frac{\partial \log H^2}{\partial x_1} + \frac{\partial \Delta' u_1}{\partial y_1} \frac{\partial \log H^2}{\partial y_1} \right] + \\ + \Delta_1' u_1 \left[\left(\frac{\partial \log H^2}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial \log H^2}{\partial y_1} \right)^2 \right] = H^4 F(x, y, u, \dots) = H^4 \Phi(x_1, y_1, u_1, \dots).$$

4. Poniamo adesso

$$(12) \quad u_1 = u_2 H.$$

Si ottiene l'equazione

$$\Delta_2' (u_2 H) = H \left\{ \Delta_2' u_2 + u_{2x_1 x_1} \left[\frac{2\Delta' H}{H} + 4 \frac{H_{x_1 x_1}}{H} - 8 \left(\frac{H_{x_1}}{H} \right)^2 \right] + \right. \\ + u_{2y_1 y_1} \left[\frac{2\Delta' H}{H} + 4 \frac{H_{y_1 y_1}}{H} - 8 \left(\frac{H_{y_1}}{H} \right)^2 \right] + 8u_{2x_1 y_1} \left[\frac{H_{x_1 y_1}}{H} - 2 \frac{H_{x_1}}{H} \frac{H_{y_1}}{H} \right] + \\ \left. + u_2 \left[\frac{\Delta_2' H}{H} - 4 \frac{\Delta' H_{x_1} \cdot H_{x_1} + \Delta' H_{y_1} \cdot H_{y_1}}{H^2} + 4\Delta' H \frac{H^2_{x_1} + H^2_{y_1}}{H^3} \right] \right\}.$$

Introducendo k al posto di $\log H$ otteniamo l'equazione

$$\Delta_2' u_2 + 2u_{2x_1 x_1} (2k_{x_1 x_1} + k^2_{y_1} - k^2_{x_1}) + 2u_{2y_1 y_1} (2k_{y_1 y_1} + k^2_{x_1} - k^2_{y_1}) + \\ + 8u_{2x_1 y_1} (k_{x_1 y_1} - k_{x_1} k_{y_1}) + u_2 [(k^2_{x_1} + k^2_{y_1})^2 + 2(k^2_{x_1 x_1} + k^2_{y_1 y_1} + 2k^2_{x_1 y_1}) - \\ - 4(k^2_{x_1} k_{x_1 x_1} + k^2_{y_1} k_{y_1 y_1} + 2k_{x_1} k_{y_1} k_{x_1 y_1})] = H^3 F.$$

Ora si vede facilmente che, denotando con R e con I la parte reale ed il coefficiente dell'immaginaria di $S(z)$, si ha

$$4k_{x_1 x_1} + 2k^2_{y_1} - 2k^2_{x_1} = 4R, \\ 4k_{y_1 y_1} + 2k^2_{x_1} - 2k^2_{y_1} = -4R, \\ 8(k_{x_1 y_1} - k_{x_1} k_{y_1}) = -8I, \\ (k^2_{x_1} + k^2_{y_1})^2 + 2(k^2_{x_1 x_1} + k^2_{y_1 y_1} + 2k^2_{x_1 y_1}) - \\ - 4(k^2_{x_1} k_{x_1 x_1} + k^2_{y_1} k_{y_1 y_1} + 2k_{x_1} k_{y_1} k_{x_1 y_1}) = 4|S|^2.$$

Si ottiene così l'equazione seguente

$$(13) \quad \Delta_2' u_2 + 4(u_{2x_1x_1} - u_{2y_1y_1})R - 8u_{2x_1y_1}I + 4u_2 |S|^2 = H^3 F = H^3 \Phi.$$

In un lavoro precedente (cfr. la seconda delle Note dei « C. R. » citate) ho applicato a questa equazione il procedimento delle approssimazioni successive, scrivendo $T(x_1, y_1, u_2, \dots)$ al posto di

$$H^3 \Phi(x_1, y_1, u_2, \dots) - 4(u_{2x_1x_1} - u_{2y_1y_1})R + 8u_{2x_1y_1}I - 4u_2 |S|^2$$

e formando le approssimazioni successive

$$u_2^0, u_2^1, \dots$$

date dalle espressioni integrali

$$(14) \quad u_2^n = \frac{1}{8\pi} \int_{K_1} G_2(x_1, y_1; \xi_1, \eta_1) T[\xi_1, \eta_1, u_2^{n-1}(\xi_1, \eta_1), \dots] d\xi_1 d\eta_1. \quad n=1, 2, \dots$$

Le serie ottenute erano convergenti solamente per *piccoli valori* del prodotto $|R^2 S(z)|$. Ponendo dunque

$$(15) \quad |S(z)| \leq \frac{\varepsilon}{R^2},$$

si doveva supporre ε *piccolo*. Si può prendere

$$(16) \quad \varepsilon = \frac{\delta}{\alpha} + \frac{3}{2} \left(\frac{\gamma}{\alpha} \right)^2.$$

G_2 è la funzione di GREEN dell'equazione biarmonica data dal LAURICELLA. Il prof. T. LEVI-CIVITA ha già mostrato che solamente per le trasformazioni lineari il bilaplaciano $\Delta\Delta$ gode della proprietà d'invarianza.

5. Adesso il nostro punto di partenza sarà l'*equazione integrale*

$$(17) \quad u_2(x_1, y_1) - \frac{1}{8\pi} \int_{K_1} G_2(x_1, y_1; \xi_1, \eta_1) \{-4(u_{2\xi_1\xi_1} - u_{2\eta_1\eta_1})R + 8u_{2\xi_1\eta_1}I - 4u_2 |S|^2\} d\xi_1 d\eta_1 = \\ = \frac{1}{8\pi} \int_{K_1} G_2(x_1, y_1; \xi_1, \eta_1) \Psi[\xi_1, \eta_1, u_2(\xi_1, \eta_1), \dots] d\xi_1 d\eta_1.$$

Le derivazioni sono secondo ξ_1, η_1 , che sono anche gli argomenti di R, I, S, u_2 , ecc., a destra. Scriveremo P, P' al posto delle coordinate x_1, y_1 et ξ_1, η_1 . Ψ è la funzione

$$(18) \quad \Psi[x_1, y_1, u_2(x_1, y_1), \dots] = H^3(x_1, y_1) F[x, y, u(x, y), \dots].$$

Segue dalle relazioni che intercedono tra u e le sue derivate e tra u_2 e le sue derivate che Ψ soddisfa anche come funzione di x_1, y_1 ad una con-

dizione di LIPSCHITZ in uno dominio chiuso interno allo cerchio K_1 . Come funzione di u_2 e delle derivate, Ψ soddisfa ad una condizione generalizzata di LIPSCHITZ della forma analoga alla (7)

$$(19) \quad |\Psi[x_1, y_1, u_2', \dots] - \Psi[x_1, y_1, u_2, \dots]| \leq \frac{\bar{A}_0}{\delta_1^4} |u_2' - u_2| + \\ + \frac{\bar{A}_1}{\delta_1^3} \{ |u_{2x_1}' - u_{2x_1}| + |u_{2y_1}' - u_{2y_1}| \} + \\ + \frac{\bar{A}_2}{\delta_1^2} \{ |u_{2x_1x_1}' - u_{2x_1x_1}| + |u_{2y_1y_1}' - u_{2y_1y_1}| + |u_{2x_1y_1}' - u_{2x_1y_1}| \}.$$

Si possono determinare i numeri positivi $\bar{A}_i$, $i=0, 1, 2$ in modo che la disuguaglianza (7) abbia come conseguenza la disuguaglianza (19). Infatti basta che i numeri $\bar{A}_i$ abbiano i valori

$$(20) \quad \bar{A}_0 = A_0 \frac{\beta^4}{\alpha^4} + 4A_1 \frac{\beta^3\gamma}{\alpha^4} + 3A_2 \frac{\beta^2(3\alpha\delta + 5\gamma^2)}{\alpha^5}, \\ \bar{A}_1 = 2A_1 \frac{\beta^3}{\alpha^3} + 18A_2 \frac{\beta^3\gamma}{\alpha^4}, \\ \bar{A}_2 = 3A_2 \frac{\beta^3}{\alpha^3}.$$

Dobbiamo anche determinare numeri positivi $\bar{L}$, $\bar{L}'$, $\bar{L}''$ tali che le disuguaglianze

$$(21) \quad |u_2| \leq L; \quad |u_{2x_1}|, |u_{2y_1}| \leq \frac{\bar{L}'}{R}; \quad |u_{2x_1x_1}|, |u_{2x_1y_1}|, |u_{2y_1y_1}| \leq \frac{\bar{L}''}{R^2}$$

abbiano come conseguenza le disuguaglianze (6). Ho mostrato nei lavori citati che si possono prendere numeri $\bar{L}$, $\bar{L}'$, $\bar{L}''$ soddisfacenti alle disuguaglianze

$$(22) \quad \bar{L} \leq \frac{L}{\beta}, \quad \bar{L}' + \bar{L} \frac{\gamma}{\alpha} \leq \frac{L'}{\sqrt{2} \cdot h}, \\ \bar{L}'' + \bar{L}' \left(2 + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \frac{\gamma}{\alpha} + \bar{L} \left[\frac{\delta}{\alpha} + \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \frac{\gamma^2}{\alpha^2} \right] \leq \frac{\alpha L''}{2 h^2},$$

dove h è uguale a $\frac{d}{R}$.

6. Consideriamo allora l'equazione (17) che, introducendo i punti P , P' al posto delle loro coordinate x_1 , y_1 e ξ_1 , η_1 , scriveremo sotto la forma

$$(23) \quad u_2(P) - \frac{1}{8\pi} \int_{K_1} G_2(P, P') \{ -4(u_{2\xi_1} - u_{2\eta_1})R + 8u_{2\xi_1\eta_1}I - \\ - 4u_2(P') |S|^2 \} dP' = \frac{1}{8\pi} \int_{K_1} G_2(P, P') \Psi[P', u_2(P'), \dots] dP'.$$

Supponiamo di avere stabilito l'esistenza di una funzione $u_2(P)$ continua colle derivate fino al secondo ordine e soddisfacente all'equazione (23). Questa funzione si annulla evidentemente sulla circonferenza C_1 . Di più, secondo HÖLDER e DINI, le derivate seconde di u_2 soddisfano ad una condizione di HÖLDER con un esponente arbitrariamente vicino ad 1.

Segue che i coefficienti di G_2 considerati come funzioni di P' soddisfano in ogni dominio chiuso interno al cerchio K_1 ad una condizione di HÖLDER con un esponente arbitrariamente vicino ad 1. Dunque u_2 possiede derivate continue fino al 4° ordine e soddisfa all'equazione differenziale (13).

Trasformiamo adesso l'equazione *differenziale* integrale (32) integrando per parti. Abbiamo le relazioni seguenti

$$\begin{aligned} G_2(u_{2\xi^2} - u_{2\eta^2})R &= (G_2Ru_{2\xi})_\xi - (G_2Ru_{2\eta})_\eta - u_{2\xi}(G_2R)_\xi + u_{2\eta}(G_2R)_\eta, \\ u_{2\eta}(G_2R)_\eta - u_{2\xi}(G_2R)_\xi &= [u_2(G_2R)_\eta]_\eta - [u_2(G_2R)_\xi]_\xi + u_2(G_2R)_{\xi\xi} - u_2(G_2R)_{\eta\eta}. \end{aligned}$$

G_2 si annulla colle derivate prime su C_1 . Dunque abbiamo

$$\int_{K_1} G_2(u_{2\xi^2} - u_{2\eta^2})RdP' = \int_{K_1} u_2(P')[(G_2R)_{\xi\xi} - (G_2R)_{\eta\eta}]dP'.$$

Si ha ancora

$$G_2u_{2\xi\eta}I = (G_2Iu_{2\eta})_\xi - u_{2\eta}(G_2I)_\xi = -[u_2(G_2I)_\xi]_\eta + u_2(G_2I)_{\xi\eta},$$

dunque

$$\int_{K_1} G_2u_{2\xi\eta}IdP' = \int_{K_1} u_2(G_2I)_{\xi\eta}dP'.$$

L'equazione (23) si trasforma dunque nell'equazione seguente

$$\begin{aligned} (24) \quad u_2 - \frac{1}{8\pi} \int_{K_1} u_2(P') \{ & 4[(G_2R)_{\xi\xi} - (G_2R)_{\eta\eta}] + 8(G_2I)_{\xi\eta} - 4G_2 |S|^2 \} dP' = \\ & = \frac{1}{8\pi} \int_{K_1} G_2(P, P') \Psi(P', u_2(P')) dP'. \end{aligned}$$

7. L'equazione (24) può ancora trasformarsi. Si ha

$$\begin{aligned} & -4[(G_2R)_{\xi\xi} - (G_2R)_{\eta\eta}] + 8(G_2I)_{\xi\eta} = \\ & = -4[G_2R_{\xi\xi} - G_2R_{\eta\eta} + 2G_{2\xi}R_\xi - 2G_{2\eta}R_\eta + G_{2\xi\xi}R - G_{2\eta\eta}R] + \\ & + 8[G_2I_{\xi\eta} + G_{2\xi}I_\eta + G_{2\eta}I_\xi + G_{2\xi\eta}I] = -4(G_{2\xi\xi} - G_{2\eta\eta})R + 8G_{2\xi\eta}I. \end{aligned}$$

Otteniamo dunque l'equazione seguente

$$(25) \quad u_2(P) - \frac{1}{8\pi} \int_{K_1} u_2(P') \{ -4(G_{2\bar{z}z} - G_{2\eta\bar{\eta}})R + 8G_{2\bar{z}\eta}I - 4G_2 |S|^2 \} dP' = \\ = \frac{1}{8\pi} \int_{K_1} G_2(P, P') \Psi[P', u_2(P')] dP'.$$

Abbiamo un'equazione integrale col *nucleo singolare*

$$(26) \quad K(P, P') = \frac{1}{8\pi} \{ -4(G_{2\bar{z}z} - G_{2\eta\bar{\eta}})R + 8G_{2\bar{z}\eta}I - 4G_2 |S|^2 \},$$

e colla funzione « nota »

$$(27) \quad f(P) = \frac{1}{8\pi} \int G_2(P, P') \Psi[P', u_2(P')] dP',$$

$$(28) \quad u_2(P) - \int u_2(P') K(P, P') dP' = f(P).$$

Un integrale di questa equazione continua colle derivate fino al 2° ordine soddisfa all'equazione differenziale (13).

L'equazione integrale *omogenea* ottenuta dall'equazione (28) annullando il secondo membro possiede l'unica soluzione $u_2(P) \equiv 0$. Infatti, questa soluzione soddisfa all'equazione differenziale (13) e si annulla colla derivata normale su C_1 . Dunque la funzione $u(x, y)$ corrispondente in D soddisfa all'equazione biarmonica $\Delta\Delta u = 0$ e si annulla su C colla derivata normale. Infatti, u_2 e le derivate u_{2x_1} , u_{2y_1} essendo nulle, anche u e u_x , u_y si annullano su C .

Reciprocamente da $u = 0$, $\frac{du}{dn} = 0$, segue

$$\frac{du}{ds} \equiv u_x x_s + u_y y_s = 0, \quad \frac{du}{dn} \equiv u_x x_n + u_y y_n = 0,$$

dunque $u_x = u_y = 0$.

8. La singolarità dell'equazione (28) è *logaritmica*. Possiamo dunque risolvere l'equazione integrale col procedimento di FREDHOLM modificato da HILBERT. Si formano le serie

$$(29) \quad \delta(\lambda) = 1 - \delta_1 \lambda + \delta_2 \lambda^2 - \dots$$

$$(30) \quad \Delta\left(\lambda, \frac{s}{t}\right) = \Delta_1\left(\frac{s}{t}\right) - \lambda \Delta_2\left(\frac{s}{t}\right) + \lambda^2 \Delta_3\left(\frac{s}{t}\right) - \dots$$

Dunque è

$$u_2(P) = \frac{1}{8\pi} \int_{\tilde{K}_1} \left\{ G_2(P, P') + \int K(P, P'') G_2(P'', P') dP'' \right\} \Psi[P', u_2(P')] dP'.$$

La formula (35) per il nucleo risolvete ci dà in conformità

$$(38) \quad u_2(P) = \frac{1}{8\pi} \int_{\tilde{K}_1} \left\{ G_2(P, P') + \int \left[K(P, P'') - \frac{1}{\delta(1)} \sum_{h=1}^{\infty} (-1)^{h-1} \cdot \frac{1}{h!} \cdot \int \int_{(h)} \begin{vmatrix} 0, & K(P, P_1), & \dots & K(P, P_h) \\ K(P_1, P''), & 0, & \dots & K(P_1, P_h) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ K(P_h, P''), & K(P_h, P_1), & \dots & 0 \end{vmatrix} dP_1 \dots dP_h \right] G_2(P'', P') dP'' \right\} \cdot \Psi[P', u_2(P')] \dots dP'.$$

Questa formula sarà il nostro punto di partenza per le approssimazioni successive. Noi partiremo da una funzione $u_2^0(x_1, y_1)$ che soddisfa colle derivate seconde continue alle disuguaglianze (21), e formeremo la serie delle approssimazioni date dalle formole

$$(39) \quad u_2^n(P) = \frac{1}{8\pi} \int \left\{ G_2(P, P') + \int K(P, P'') G_2(P'', P') dP'' \right\} \cdot \Psi[P', u_2^{n-1}(P')] dP', \quad n=1, 2, \dots$$

Le funzioni u_2^n , $n=1, 2, \dots$ soddisfano ad una condizione di HÖLDER. Dunque le funzioni u_2^n , $n=2, 3, \dots$ soddisfanno alle equazioni differenziali che si ottengono dall'equazione (13) ponendo $u_2 = u_2^n$ a destra e $u_2 = u_2^{n-1}$ a sinistra.

10. Per dimostrare l'esistenza delle funzioni u_2^n , $n=1, 2, \dots$ e la loro convergenza verso una funzione u_2 limite, dobbiamo trasformare le espressioni (38), e per conseguenza gli integrali che figurano in queste formole.

Consideriamo dapprima l'integrale

$$(40) \quad \int K(P, P'') G_2(P'', P') dP'' = \\ = \frac{1}{8\pi} \int G_2(P'', P') \left\{ -4(G_{2\xi\xi}^{(P, P'')} - G_{2\eta^2}^{(P, P'')})R + 8G_{2\xi\eta}^{(P, P'')}I - 4G_2^{(P, P'')}|S|^2 \right\} dP'',$$

dove le derivazioni sono da effettuarsi secondo ξ'' , η'' . R , I , S sono funzioni di P'' .

Abbiamo le relazioni

$$\begin{aligned}
 G_2(P'', P')G_{2\xi''\eta''}(P, P'')R(P'') &= [G_2(P'', P')G_{2\xi''}(P, P'')R(P'')]_{\xi''} - \\
 &\quad - G_{2\xi''}(P, P'')[G_2(P'', P')R(P'')]_{\xi''}, \\
 G_2(P'', P')G_{2\eta''\eta''}(P, P'')R(P'') &= [G_2(P'', P')G_{2\eta''}(P, P'')R(P'')]_{\eta''} - \\
 &\quad - G_{2\eta''}(P, P'')[G_2(P'', P')R(P'')]_{\eta''}, \\
 -G_{2\xi''}(P, P'')[G_2(P'', P')R(P'')]_{\xi''} &= -\{G_2^{(P, P'')}\cdot [G_2^{(P'', P')}\cdot R^{(P'')}]_{\xi''}\}_{\xi''} + \\
 &\quad + G_2^{(P, P'')}\cdot [G_2^{(P'', P')}\cdot R^{(P'')}]_{\xi''\eta''}, \\
 -G_{2\eta''}(P, P'')[G_2(P'', P')R(P'')]_{\eta''} &= -\{G_2^{(P, P'')}\cdot [G_2^{(P'', P')}\cdot R^{(P'')}]_{\eta''}\}_{\eta''} + \\
 &\quad + G_2^{(P, P'')}\cdot [G_2^{(P'', P')}\cdot R^{(P'')}]_{\eta''\eta''}.
 \end{aligned}$$

Abbiamo anche

$$\begin{aligned}
 G_2^{(P'', P')}G_{2\xi''\eta''}^{(P, P'')}I^{(P'')} &= [G_2^{(P'', P')}G_{2\eta''}^{(P, P'')}I^{(P'')}]_{\xi''} - G_{2\eta''}^{(P, P'')}[G_2^{(P'', P')}I^{(P'')}]_{\xi''}, \\
 -G_{2\eta''}^{(P, P'')}[G_2^{(P'', P')}I^{(P'')}]_{\xi''} &= -\{G_2^{(P, P'')}\cdot [G_2^{(P'', P')}I^{(P'')}]_{\xi''}\}_{\eta''} + \\
 &\quad + G_2^{(P, P'')}\cdot [G_2^{(P'', P')}I^{(P'')}]_{\xi''\eta''}.
 \end{aligned}$$

G_2 e le sue derivate del primo ordine si annullano se P'' è su C_1 . Abbiamo dunque la formula

$$(41) \quad \int K(P, P'')G_2(P'', P')dP'' = \frac{1}{8\pi} \int G_2(P, P'') \{ -4[(G_2^{(P'', P')}R^{(P'')}]_{\xi''\eta''} - \\
 (G_2^{(P'', P')}R^{(P'')})_{\eta''\eta''}] + 8(G_2^{(P'', P')}I^{(P'')})_{\xi''\eta''} - 4G_2^{(P'', P')}\cdot [S(P'')]^2 \} dP''.$$

Possiamo anche trasformare questa formula. Abbiamo

$$\begin{aligned}
 &-4[G_2^{(P'', P')}R^{(P'')}]_{\xi''\eta''} + 4[G_2^{(P'', P')}R^{(P'')}]_{\eta''\eta''} + 8[G_2^{(P'', P')}I^{(P'')}]_{\xi''\eta''} \\
 &= -4G_2^{(P'', P')}\cdot [R^{(P'')}]_{\xi''\eta''} - R_{\eta''\eta''}^{(P'')} + I_{\xi''\eta''}^{(P'')} - 8[G_2^{(P'', P')}R^{(P'')}]_{\xi''} - \\
 &\quad - G_{2\eta''}^{(P'', P')}R_{\eta''}^{(P'')} - G_{2\xi''}^{(P'', P')}I_{\eta''}^{(P'')} - G_{2\eta''}^{(P'', P')}I_{\xi''}^{(P'')} - \\
 &\quad - 4[G_2^{(P'', P')} - G_{2\eta''}^{(P'', P')}]R^{(P'')} + 8G_{2\xi''\eta''}^{(P'', P')}I^{(P'')} = \\
 &= -4[G_2^{(P'', P')} - G_{2\eta''}^{(P'', P')}]R^{(P'')} + 8G_{2\xi''\eta''}^{(P'', P')}I^{(P'')}.
 \end{aligned}$$

Otteniamo così la formula importante

$$(42) \quad \int K(P, P'')G_2(P'', P')dP'' = \int G_2(P, P'')K(P', P'')dP''.$$

11. Avremo nel seguito da considerare integrali della forma

$$(43) \quad I = \int K(P, P_1)K(P_1, P_2) \dots K(P_{s-1}, P_s)G(P_s, P')dP_1 \dots dP_s.$$

Trasformando secondo la formula (42) si vede che si può trasformare suc-

Supponiamo d'altra parte che Ψ soddisfi alla disuguaglianza

$$(50) \quad |\Psi| \leq \bar{N},$$

dove si ha

$$(51) \quad \bar{N} = N\beta^3.$$

Questo accade per la funzione Ψ che figura nell'equazione differenziale (13) purchè u_2 e le sue derivate soddisfino alle disuguaglianze (21). In questo caso abbiamo le ulteriori disuguaglianze:

$$(52) \quad |I(P'')| \leq \bar{N}C_0R^2\delta''^2,$$

$$(53) \quad |I_{j,k}(P'')| \leq \bar{N}C_iR^2\delta''^{3-i}, \quad j+k=i=1, 2$$

dove C_i sono numeri positivi che abbiamo anche calcolati.

12. Adesso considereremo gli integrali della forma

$$(54) \quad J(P) = \int K(P, P'')I(P'')dP''$$

che figurano anche nella formula (38). Abbiamo

$$J(P) = \frac{1}{8\pi} \int I(P'') \{ -4(G_{2\xi''^2} - G_{2\eta''^2})R + 8G_{2\xi''\eta''}I - 4G_2|S|^2 \} dP''$$

dove gli argomenti di G sono P, P'' , e di R, I, S è argomento P'' . Integrando per parti otteniamo

$$\begin{aligned} G_{2\xi''^2}RI(P'') &= (G_{2\xi''}RI(P''))_{\xi''} - G_{2\xi''}(RI(P''))_{\xi''}, \\ -G_{2\xi''}(RI(P''))_{\xi''} &= -[G_2(RI(P''))_{\xi''}]_{\xi''} + G_2[RI(P'')]_{\xi''^2}, \\ G_{2\eta''^2}RI(P'') &= (G_{2\eta''}RI(P''))_{\eta''} - G_{2\eta''}(RI(P''))_{\eta''}, \\ -G_{2\eta''}(RI(P''))_{\eta''} &= -[G_2(RI(P''))_{\eta''}]_{\eta''} + G_2[RI(P'')]_{\eta''^2}, \\ G_{2\xi''\eta''}II(P'') &= [G_{2\xi''}II(P'')]_{\eta''} - G_{2\xi''}(II(P''))_{\eta''}, \\ -G_{2\xi''}(II(P''))_{\eta''} &= -[G_2(II(P''))_{\xi''}]_{\eta''} + G_2(II(P''))_{\xi''\eta''}. \end{aligned}$$

Abbiamo così

$$\begin{aligned} J(P) &= \frac{1}{8\pi} \int G_2(P, P'') \{ -4(RI(P''))_{\xi''^2} + 4(RI(P''))_{\eta''^2} + \\ &\quad + 8(II(P''))_{\xi''\eta''} - 4I(P'')|S|^2 \} dP''. \end{aligned}$$

Abbiamo anche

$$\begin{aligned} &-4(RI(P''))_{\xi''^2} + 4(RI(P''))_{\eta''^2} + 8(II(P''))_{\xi''\eta''} = -4RI_{\xi''^2}(P'') + \\ &\quad + 4RI_{\eta''^2}(P'') + 8II_{\xi''\eta''}(P'') - 4R_{\xi''^2}I(P'') + 4R_{\eta''^2}I(P'') + \\ &+ 8I(P'')I_{\xi''\eta''} - 8R_{\xi''}I_{\xi''}(P'') + 8R_{\eta''}I_{\eta''}(P'') + 8I_{\xi''}I_{\eta''}(P'') + 8I_{\eta''}I_{\xi''}(P'') = \\ &= -4R[I_{\xi''^2}(P'') - I_{\eta''^2}(P'')] + 8II_{\xi''\eta''}(P''). \end{aligned}$$

Siamo dunque giunti alla formula

$$(55) \quad J(P) = \int G_2(P, P'') U(P'') dP'',$$

dove abbiamo posto

$$(56) \quad U(P'') = \frac{1}{8\pi} \int \{ -4(\bar{I}_{\xi''} - \bar{I}_{\eta''})R + 8\bar{I}_{\xi''\eta''}I - 4\bar{I}|S|^2 \},$$

$$\bar{I} = I(P'').$$

Ricordando le disuguaglianze stabilite precedentemente, vediamo che nel caso della disuguaglianza (47) per la funzione Ψ si ha la disuguaglianza

$$(57) \quad |U(P'')| \leq MB_0' R^{-2} \delta''^{-\mu}$$

e nel caso della disuguaglianza (50) si ha la disuguaglianza

$$(58) \quad |U(P'')| \leq \bar{N}C_0'.$$

B_0' , C_0' sono due costanti positive che si determinano facilmente.

Segue che $J(P)$ nel primo caso soddisfa alla disuguaglianza

$$(59) \quad |J(P)| \leq MB_0'' \delta^{-2-\mu},$$

perchè nella disuguaglianza (57) si può mettere $\delta''^{-2-\mu}$ al posto di $R^{-2}\delta''^{-\mu}$.

Nel secondo caso abbiamo

$$(60) \quad |J(P)| \leq \bar{N}C_0'' R^2 \delta^2,$$

$$\delta = R - a.$$

13. La formula (38) si trasforma adesso nella formula seguente

$$(61) \quad u_2(P) = \frac{1}{8\pi} \left\{ I(P) + J(P) - \frac{1}{\delta(1)} \sum_{h=1}^{\infty} (-1)^{h-1} \cdot \frac{1}{h!} \int_{(h+1)} \begin{vmatrix} 0, & K(P, P_1), & \dots & K(P, P_h) \\ G_2(P_1, P''), & 0, & \dots & K(P_1, P_h) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ G_2(P_h, P''), & K(P_h, P_1), & \dots & 0 \end{vmatrix} dP_1 \dots dP_h \cdot U(P'') dP'' \right\}.$$

Consideriamo i determinanti che figurano in questa formula. Si ha una somma di prodotti di $h+1$ fattori. Ciascun prodotto contiene un $K(P, P_\alpha)$. Questo $K(P, P_\alpha)$ è moltiplicato per un elemento della $\alpha + 1^{ma}$ riga che può essere $G_2(P_\alpha, P'')$. Or bene questo elemento è $K(P_\alpha, P_\beta)$, $\alpha \neq \beta$. Questo elemento è moltiplicato per un $K(P_\beta, P_\gamma)$ della $\beta + 1^{ma}$ riga ecc. Si deve, proseguendo così, arrivare ad un elemento $G_2(P_\delta, P'')$. Infatti, altrimenti si otterrebbe un $K(P_\delta, P_\gamma)$ tale che δ sarebbe il primo numero uguale ad uno dei numeri precedenti $\alpha, \beta, \gamma, \dots$. Questo numero non può essere α , poichè

nel prodotto si avrebbero due elementi della $\alpha + 1$ colonna, $K(P, P_\alpha)$ e $K(P_\gamma, P_\delta)$. Nemmeno può essere δ uguale ad uno dei numeri $\beta, \dots$ perchè si avrebbe $K(P_\alpha, P_\beta)$, $K(P_\gamma, P_\delta)$ nel prodotto.

Dunque abbiamo prodotti del tipo

$$(62) \quad K(P, P_{i_1})K(P_{i_1}, P_{i_2}) \dots K(P_{i_{s-1}}, P_{i_s})G_2(P_{i_s}, P'').$$

Abbiamo (forse) anche prodotti del tipo

$$(63) \quad K(P_{j_1}P_{j_2})K(P_{j_2}P_{j_3}) \dots K(P_{j_{s-1}}P_{j_s})K(P_{j_s}P_{j_1}).$$

Ora abbiamo visto che si ha

$$(64) \quad \int K(P, P_{i_1})K(P_{i_1}P_{i_2}) \dots K(P_{i_{s-1}}P_{i_s})G(P_{i_s}, P'')dP_{i_1} \dots dP_{i_s} = \\ = \int G_2(P, P_{i_1})K(P_{i_2}P_{i_1}) \dots K(P_{i_s}P_{i_{s-1}})dP_{i_1} \dots dP_{i_s},$$

$$(65) \quad \int K(P_{j_1}P_{j_2})K(P_{j_2}P_{j_3}) \dots K(P_{j_{s-1}}P_{j_s})K(P_{j_s}P_{j_1})dP_{j_1} \dots dP_{j_s} = \\ = \int K(P_{j_2}P_{j_1})K(P_{j_3}P_{j_2}) \dots K(P_{j_s}P_{j_{s-1}})K(P_{j_1}P_{j_s})dP_{j_1} \dots dP_{j_s}.$$

Segue che il determinante

$$(66) \quad \begin{vmatrix} 0, & K(P, P_1), & \dots & K(P, P_h) \\ G_2(P_1, P''), & 0, & \dots & K(P_1, P_h) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ G_2(P_h, P''), & K(P_h, P_1), & \dots & 0 \end{vmatrix}$$

può essere sostituito dal determinante

$$(67) \quad \begin{vmatrix} 0, & G_2(P, P_1), & \dots & G_2(P, P_h) \\ K(P'', P_1), & 0, & \dots & K(P_h, P_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ K(P'', P_h), & K(P_1, P_h), & \dots & 0 \end{vmatrix}.$$

Possiamo dunque considerare al posto della serie (61) la serie

$$(68) \quad u_2 = \frac{1}{8\pi} \left\{ I(P) + J(P) - \right. \\ \left. - \frac{1}{\delta(1)} \sum_{h=1}^{\infty} (-1)^{h-1} \cdot \frac{1}{h!} \int \begin{vmatrix} 0, & G(P, P_1), & \dots & G(P, P_h) \\ K(P'', P_1), & 0, & \dots & K(P_h, P_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ K(P'', P_h), & K(P_1, P_h), & \dots & 0 \end{vmatrix} dP_1 \dots dP_h \cdot U(P'')dP'' \right\}.$$

14. Risulta dalla formula (26) che si ha la disuguaglianza

$$(69) \quad |K(P, P')| \leq \frac{kR^{\alpha-2}}{|\rho - \rho'|^\alpha}$$

nella quale $k > 0$ è un numero fisso e α è un numero che soddisfa alle disuguaglianze $0 < \alpha < \frac{1}{4}$; α può essere arbitrariamente piccolo; ρ, ρ' sono le distanze OP, OP' .

Consideriamo adesso gli integrali

$$(70) \quad C(P_i) = \int K(P'', P_i) U(P'') dP''.$$

Essi dipendono da u_2 . Segue dalle disuguaglianze precedenti che si ha nel caso della disuguaglianza (47) la disuguaglianza

$$(71) \quad |C(P_i)| \leq kMB_0' R^{\alpha-4} \int_{K_1} \frac{dP''}{|\rho_i - \rho''|^\alpha (R - \rho'')^\mu}$$

e nel caso della disuguaglianza (50) la disuguaglianza

$$(72) \quad |C(P_i)| \leq k\bar{N}C_0' R^{\alpha-2} \int_{K_1} \frac{dP''}{|\rho_i - \rho''|^\alpha}.$$

Ma abbiamo le disuguaglianze

$$\begin{aligned} \int_{\rho_i=0}^{\rho_i} dP'' \cdot \frac{1}{|\rho_i - \rho''|^\alpha (R - \rho'')^\mu} &\leq 2\pi R \int_0^{\rho_i} \frac{d\rho''}{(\rho_i - \rho'')^{\alpha+\mu}} = \\ &= 2\pi R \frac{1}{1-\alpha-\mu} \rho_i^{1-\alpha-\mu} \leq \frac{2\pi R^{2-\alpha-\mu}}{1-\alpha-\mu}, \\ \int_{\rho_i}^R dP'' \cdot \frac{1}{|\rho_i - \rho''|^\alpha (R - \rho'')^\mu} &\leq 2\pi R \int_0^{R-\rho_i} \frac{du}{u^\alpha (R - \rho_i - u)^\mu}, \quad u = \rho'' - \rho_i, \end{aligned}$$

e ponendo $\frac{u}{R - \rho_i} = v$ si ha

$$\begin{aligned} \int_{\rho_i}^R dP'' \cdot \frac{1}{|\rho_i - \rho''|^\alpha (R - \rho'')^\mu} &\leq 2\pi R (R - \rho_i)^{1-\alpha-\mu} \int_0^1 \frac{dv}{v^\alpha (1-v)^\mu} \leq \\ &\leq 2\pi m R^{2-\alpha-\mu}, \end{aligned} \quad m > 0.$$

Si ottiene dunque la disuguaglianza

$$(73) \quad |C(P_i)| \leq k B_0'' M R^{-2-\mu}$$

essendo B_0'' un numero positivo fisso.

Nel secondo caso della disuguaglianza (50) si ha invece

$$\begin{aligned} \int_{\rho_i}^R dP'' \frac{1}{|\rho_i - \rho''|^\alpha} &\leq 2\pi R \int_{\rho_i}^R \frac{d\rho''}{(\rho'' - \rho_i)^\alpha} = 2\pi R \frac{1}{1-\alpha} (\rho'' - \rho_i)^{1-\alpha} \Big|_{\rho_i}^R = \frac{2\pi R (R - \rho_i)^{1-\alpha}}{1-\alpha}, \\ \int_0^{\rho_i} dP'' \frac{1}{|\rho_i - \rho''|^\alpha} &\leq 2\pi R (\rho_i - \rho'')^{1-\alpha} \Big|_0^{\rho_i} \cdot \frac{1}{1-\alpha} = 2\pi R \frac{\rho_i^{1-\alpha}}{1-\alpha}. \end{aligned}$$

Otteniamo pertanto la disuguaglianza

$$|C(P_i)| \leq Ak\bar{N}C_0' \cdot 2\pi R^{2-\alpha} \cdot R^{\alpha-2},$$

dunque viene

$$(74) \quad |C(P_i)| \leq k C_0'' \bar{N},$$

essendo C_0'' un numero positivo fisso.

15. Adesso effettueremmo nella formula (68) le integrazioni secondo P'' . Potremo allora scrivere la formula

$$(75) \quad u_2 = \frac{1}{8\pi} \left\{ I(P) + J(P) - \frac{1}{\delta(1)} \sum_{h=1}^{\infty} (-1)^{h-1} \iint_{(h)} \begin{vmatrix} 0, & G(P_1, P), \dots, & G(P_h, P) \\ C(P_1), & 0, \dots, & K(P_h, P_1) \\ \dots & \dots & \dots \\ C(P_h), & K(P_1, P_h), \dots, & 0 \end{vmatrix} dP_1 \dots dP_h \right\}.$$

Questa formula sarà il nostro punto di partenza per le approssimazioni successive che otterremo nel modo seguente:

$$(76) \quad u_2^n = \frac{1}{8\pi} \left\{ I^{n-1}(P) + J^{n-1}(P) - \frac{1}{\delta(1)} \sum_{h=1}^{\infty} (-1)^{h-1} \iint_h \begin{vmatrix} 0, & G(P_1, P), \dots, & G(P_h, P) \\ C^{n-1}(P_1), & 0, \dots, & K(P_h, P_1) \\ \dots & \dots & \dots \\ C^{n-1}(P_h), & K(P_1, P_h), \dots, & 0 \end{vmatrix} dP_1 \dots dP_h \right\} \quad n=1, 2, \dots$$

In questa formula abbiamo posto

$$(77) \quad C^{n-1}(P_i) = \int_{K_1} K(P'', P_i) U^{n-1}(P'') dP'',$$

$$(78) \quad U^{n-1}(P'') = \frac{1}{8\pi} \{ -4(\bar{I}_{\xi''\eta''}^{n-1} - \bar{I}_{\eta''\xi''}^{n-1})R + 8\bar{I}_{\xi''\eta''}^{n-1}I - 4\bar{I}^{n-1} |S|^2 \},$$

$$(79) \quad \bar{I}^{n-1} = I^{n-1}(P) = \int_{K_1} G_2(P, P') \Psi[P', u_2^{n-1}(P')] dP',$$

$$(79a) \quad J^{n-1}(P_i) = \int G_2(P_i, P'') U^{n-1}(P'') dP''.$$

Consideriamo adesso gli integrali h -pli che figurano nella formula (76). Possiamo dividere con il sig. HILBERT il campo d'integrazione in $h!$ campi corrispondenti alle $h!$ permutazioni degli indici $1, 2, \dots, h$ dei punti $P_1 \dots P_h$. Dico che tutti questi integrali sono uguali. Infatti consideriamo il campo definito dalle condizioni

$$P_{i_1} > P_{i_2} > \dots > P_{i_h}.$$

Possiamo effettuare la trasposizione dei punti P che ci dà la permutazione $P_{i_1}, P_{i_2}, \dots, P_{i_h}$. Possiamo trasporre le righe e le colonne del determinante d'ordine $h+1$ mettendo al posto delle righe e colonne dei punti $P_1, P_2, \dots, P_h$ quelle dei punti $P_{i_1} \dots P_{i_h}$. Il determinante non cambia di valore; e poi si possono cambiare le notazioni.

I due numeri $h!$ nel denominatore e $h!$ nel numeratore si elidono. Possiamo dunque supporre che le integrazioni sono da effettuarsi nell'ipotesi

$$P_1 > P_2 > \dots > P_h.$$

16. Vogliamo adesso *maggiorare* con il sig. HILBERT i determinanti. Divideremo la prima colonna per il numero $B_0'' MR^{-1}$ nel primo caso e per $C_0'' \bar{N} R^2$ nel caso secondo. Allora, in entrambi i casi, secondo le disuguaglianze (73), (74), gli elementi di questa colonna saranno in valore assoluto $\leq \frac{k}{R^2}$.

Moltiplichiamo ora le righe $2, 3, \dots, h+1$ per le espressioni seguenti

$$(80) \quad (\rho_1 - \rho_2)^\alpha, \quad \frac{1}{\frac{1}{(\rho_1 - \rho_2)^\alpha} + \frac{1}{(\rho_2 - \rho_3)^\alpha}}, \dots, \frac{1}{\frac{1}{(\rho_{h-2} - \rho_{h-1})^\alpha} + \frac{1}{(\rho_{h-1} - \rho_h)^\alpha}}, \quad (\rho_{h-1} - \rho_h)^\alpha.$$

Evidentemente tutte queste espressioni non sorpassano R^α . Dunque si vede, attese le disuguaglianze (69), che *tutti gli elementi* del determinante

d'ordine $h+1$ delle righe $2, \dots, h+1$ non sorpassano il numero

$$kR^{\alpha-2}.$$

Possiamo adesso *sviluppare* il determinante d'ordine $h+1$ ed applicare il celebre teorema del sig. HADAMARD per ottenere le disuguaglianze seguenti

$$(81) \quad \left| \int_{(h)} \begin{vmatrix} 0, & G(P_1, P), \dots, & G(P_h, P) \\ C(P_1), & 0, \dots, & K(P_h, P_1) \\ \dots & \dots & \dots \\ C(P_h), & K(P_1, P_h), \dots, & 0 \end{vmatrix} dP_1 \dots dP_h \right| \leq$$

$$\leq B_0'' MR^{-\mu} (kR^{\alpha-2})^h \sqrt{h}^h \sum_{h+1}^h \int |G(P, P_i)| (\rho_1 - \rho_2)^{-\alpha} \left[\frac{1}{(\rho_1 - \rho_2)^\alpha} + \frac{1}{(\rho_1 - \rho_3)^\alpha} \right] \dots$$

$$\dots \left[\frac{1}{(\rho_{h-2} - \rho_{h-1})^\alpha} + \frac{1}{(\rho_{h-1} - \rho_h)^\alpha} \right] (\rho_{h-1} - \rho_h)^\alpha dP_1 \dots dP_h$$

colla condizione $P_1 > P_2 > \dots > P_h$.

Nel secondo caso si ha $C_0'' \bar{N} R^2$ al posto di $B_0'' MR^{-\mu}$.

L'integrale a destra nella formola (81) è una somma di 2^{h-1} integrali della forma seguente

$$(82) \quad J_i = \int |G(P, P_i)| dP_1 \dots dP_h \cdot \frac{1}{(\rho_1 - \rho_2)^{\alpha_1}} \dots \frac{1}{(\rho_{h-1} - \rho_h)^{\alpha_{h-1}}}.$$

La somma dei numeri α_i , $\sum_1^{h-1} \alpha_i$ è sempre uguale ad αh ed i numeri α_i sono uguali a 0, α o 2α .

17. Ora abbiamo secondo SCHWARZ

$$(83) \quad |J_i|^2 \leq \int |G^2(P, P_i)| dP_1 \dots dP_h \cdot \int \frac{1}{(\rho_1 - \rho_2)^{2\alpha_1}} \dots \frac{1}{(\rho_{h-1} - \rho_h)^{2\alpha_{h-1}}} dP_1 \dots dP_h.$$

Consideriamo il secondo integrale e poniamo

$$(84) \quad \sigma_1 = \rho_1 - \rho_2, \quad \sigma_2 = \rho_2 - \rho_3, \dots, \quad \sigma_{h-1} = \rho_{h-1} - \rho_h, \quad \sigma_h = \rho_h,$$

donde si ha inversamente

$$(85) \quad \rho_1 = \sum_1^h \sigma_i, \quad \rho_2 = \sum_2^h \sigma_i, \dots, \quad \rho_h = \sigma_h.$$

Abbiamo

$$\sigma_i > 0, \quad i = 1, \dots, h, \quad 0 < \sum_1^h \sigma_i = \rho_i \leq R.$$

Il secondo integrale sarà

$$(86) \quad J_2 = (2\pi R)^h \int_0^R \sigma_1^{-2\alpha_1} \dots \sigma_{h-1}^{-2\alpha_{h-1}} \cdot \sigma_h^{-2\alpha_h} d\sigma_1 \dots d\sigma_h, \quad \alpha_h = 0,$$

Introducendo le nuove variabili $\xi_i = \frac{\sigma_i}{R}$, $i = 1, \dots, h$ avremo

$$J_2 = (2\pi R)^h \cdot R^{h-2\alpha h} \int_0^1 \xi_1^{-2\alpha_1} \dots \xi_h^{-2\alpha_h} d\xi_1 \dots d\xi_h.$$

Ora l'integrale è uguale a

$$(87) \quad \frac{\prod_{i=1}^h \Gamma(1 - 2\alpha_i)}{\Gamma(h + 1 - 2\alpha h)}, \quad 2\alpha_i < 1, \quad 1 - 2\alpha_i > 0.$$

Otteniamo dunque la disuguaglianza

$$(88) \quad |J_2| \leq \frac{A^h \cdot R^{2h(1-\alpha)}}{h^{h(1-2\alpha)}}.$$

Consideriamo adesso il primo integrale

$$(89) \quad J_1^i = \int |G_2^2(P, P_i)| dP_1 \dots dP_h, \quad P_1 > P_2 > \dots > P_h.$$

Questo integrale sarà maggiorato dall'integrale nel quale P_i varia da 0 a R . Dunque si ha

$$(90) \quad |J_1^i| \leq \int |G_2^2(P, P_i)| dP_i \int dP_1 \dots dP_{i-1} dP_{i+1} \dots dP_h, \\ P_1 > \dots > P_{i-1} > P_{i+1} > \dots > P_h.$$

Ora abbiamo la disuguaglianza

$$(91) \quad \int dP_1 \dots dP_h \leq (2\pi R)^{h-1} \int d\rho_1 \dots d\rho_h = (2\pi R)^{h-1} \cdot \frac{R^{h-1}}{\Gamma(h)},$$

sicchè

$$(92) \quad \left| \int dP_1 \dots dP_h \right| \leq \frac{A'^h \cdot R^{2h-2}}{h^h},$$

ed anche

$$(93) \quad |J_i| \leq |J_1^i|^{\frac{1}{2}} |J_2|^{\frac{1}{2}} \leq \left\{ \int |G_2^2(P, P_i)| dP_i \right\}^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{A''^h \cdot R^{h-1}}{h^{\frac{h}{2}}} \cdot \frac{R^{h(1-\alpha)}}{h^{\frac{h}{2}(1-2\alpha)}} = \\ = \left\{ \int |G_2^2(P, P_i)| dP_i \right\}^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{A''^h \cdot R^{2h-2\alpha h-1}}{h^{h(1-\alpha)}}.$$

18. Dobbiamo allora maggiorare l'integrale

$$(94) \quad J_3^i = \int |G_2^2(P, P_i)| dP_i.$$

Questo integrale va trasformato colla trasformazione, che abbiamo già applicata, del cerchio K_1 in sè stesso:

$$(95) \quad \zeta_i = R^2 \frac{\zeta_i' + z}{R^2 + \bar{z}\zeta_i'}.$$

$P_i(\zeta_i)$ è trasformato nel punto $P_i'(\zeta_i')$. Otteniamo allora la disuguaglianza

$$(96) \quad |G_2| \leq C \frac{(R - \rho_i')^2 (R^2 - a^2)^2}{|R^2 + \bar{z}\zeta_i'|^2},$$

dove $a = 0P$, $C > 0$ è un numero noto. Dunque abbiamo la formula

$$(97) \quad |J_3^i| \leq C' \int_0^R \rho_i' d\rho_i' \int_0^{2\pi} d\varphi_i \frac{R^4 (R^2 - a^2)^2 (R - \rho_i')^4 (R^2 - a^2)^4}{|R^2 + \bar{z}\zeta_i'|^4} \leq \\ \leq C' (R^2 - a^2)^6 \cdot R^5 \cdot \int_0^{2\pi} d\varphi_i \int_0^R d\rho_i' \frac{(R - \rho_i')^4}{|R^2 + \bar{z}\zeta_i'|^8}.$$

Or bene, abbiamo

$$(98) \quad \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi_i}{|R^2 + \bar{z}\zeta_i'|^8} \leq \frac{D}{(R^2 - a\rho_i')^7 R^2}$$

secondo le formule da noi ottenute precedentemente. D'altra parte dobbiamo maggiorare l'integrale

$$(99) \quad I = \int_0^R \frac{(R - \rho_i')^4}{(R^2 - a\rho_i')^7} d\rho_i'.$$

Dividendo in due parti 0, a e a , R abbiamo

$$\int_0^a \leq \frac{1}{R^7} \int_0^a \frac{d\rho_i'}{(R - \rho_i')^3} \leq \frac{D'}{R^7 (R - a)^2}, \\ \int_a^R \leq \frac{1}{R^7} \int_a^R \frac{(R - \rho_i')^4}{(R - a)^7} d\rho_i' = \frac{1}{R^7 (R - a)^7} \cdot \frac{(R - a)^5}{5} = \frac{1}{5R^7 (R - a)^2}.$$

Otteniamo così la disuguaglianza

$$(100) \quad |I| \leq \frac{D'}{R^7 (R - a)^2}.$$

Ne consegue

$$(101) \quad |J_3^i| \leq C'' (R - a)^4 R^2.$$

Si ottiene così la disuguaglianza

$$(102) \quad |J_i| \leq \frac{A'''h \cdot R^{h(2-\alpha)}}{h^{h(1-\alpha)}} \cdot (R-a)^2.$$

19. Possiamo adesso scrivere le maggiorazioni degli integrali h -pli che figurano nella formula (76) e che abbiamo già maggiorato colle formule (81). Le maggiorazioni sono nel primo caso

$$(103) \quad B_0'' MR^{-\mu} (kR^{\alpha-2})^h \vee \bar{h}^h \cdot h \cdot 2^{h-2} \cdot \frac{A'''h \cdot R^{h(2-\alpha)}}{h^{h(1-\alpha)}} (R-a)^2,$$

mentre nel secondo caso si deve mettere $C_0'' \bar{N} R^2$ al posto di $B_0'' MR^{-\mu}$. Abbiamo dunque le maggiorazioni

$$(104) \quad B_0''' MR^{-\mu} (R-a)^2 \cdot \frac{A^{iv}h}{h^{\frac{h}{2}(1-2\alpha)}}$$

nel primo caso, e nel secondo dobbiamo mettere $C_0''' \bar{N} R^2$ al posto di $B_0''' MR^{-\mu}$.

Otteniamo infine le *serie maggioranti* seguenti:

$$(105) \quad \frac{1}{8\pi} M \left\{ B_0 \delta^{2-\mu} + B_0'' \delta^{2-\mu} + \frac{B_0'''}{|\delta(1)|} \sum_{h/1}^{\infty} \frac{A^{iv}h}{h^{\frac{h}{2}(1-2\alpha)}} \delta^{2-\mu} \right\}$$

nel primo caso, e

$$(106) \quad \frac{1}{8\pi} \bar{N} \left\{ C_0 R^2 \delta^2 + C_0'' R^2 \delta^2 + \frac{C_0'''}{|\delta(1)|} \sum_{h/1}^{\infty} \frac{A^{iv}h}{h^{\frac{h}{2}(1-2\alpha)}} R^2 \delta^2 \right\}$$

nel secondo caso.

Risulta che le funzioni u_2^n , $n=1, 2, \dots$ esistono tutte e sono contenute colle derivate entro i limiti dati dalle formule (21) purchè $\bar{N}$ soddisfi alle disuguaglianze seguenti

$$(107) \quad D_i \bar{N} R^i \leq \bar{L}_i, \quad i=0, 1, 2.$$

Abbiamo già calcolato il valore di D_0 che è uguale a

$$(108) \quad D_0 = \frac{1}{2\pi} \left\{ C_0 + C_0'' + \frac{C_0'''}{|\delta(1)|} \sum_{h/1}^{\infty} \frac{A^{iv}h}{h^{\frac{h}{2}(1-2\alpha)}} \right\}.$$

Si può evidentemente calcolare nello stesso modo i numeri D_1, D_2 che sono tali da rendere

$$(109) \quad |u_{2,i}| \leq \bar{N} D_i R^i (R-a)^{2-i}, \quad i=1, 2.$$

20. Adesso formiamo le differenze v_2^n , $n = 2, 3, \dots$. Ponendo

$$(110) \quad |\Psi(y_1, y_1, u_2^1, \dots) - \Psi(x_1, y_1, u_2^0, \dots)| \leq \frac{M}{\delta^{2+\mu}},$$

$0 < \mu < \frac{1}{2}$ si vede che le serie delle approssimazioni successive convergono assolutamente ed uniformemente purchè la condizione seguente sia soddisfatta. Denotiamo con E_0 il numero positivo

$$(111) \quad E_0 = \frac{1}{8\pi} \left\{ B_0 + B_0'' + \frac{B_0'''}{\delta(1)} \sum_{|h| \geq 1}^{\infty} \frac{A_{1vh}}{h^{\frac{1}{2}(1-2\alpha)}} \right\}.$$

Denotiamo anche con E_i , $i = 1, 2$ i numeri analoghi, facilmente calcolabili, tali che, valendo la (110), risulti

$$(112) \quad |v_{2,i}^2| \leq ME_i(R - a)^{2-\mu-i}, \quad i = 0, 1, 2.$$

Purchè si abbia la disuguaglianza

$$(113) \quad \bar{A}_0 E_0 + 2\bar{A}_1 E_1 + 3\bar{A}_2 E_2 < 1$$

la serie delle funzioni v_2^n , $n = 2, 3, \dots$ converge assolutamente ed uniformemente, perchè si ha

$$(114) \quad |v_{2,i}^n| \leq \frac{ME_i}{8\pi} \delta^{2-\mu-i} (\bar{A}_0 E_0 + 2\bar{A}_1 E_1 + 3\bar{A}_2 E_2)^{n-2}, \quad n = 2, 3, \dots$$

21. Possiamo infine enunciare il teorema seguente:

TEOREMA. — Esiste un integrale dell'equazione biarmonica non lineare nel dominio generale D limitato da una curva C di JORDAN senza punti doppi colla tangente continua. F soddisfa in D alle condizioni enunciate. u si annulla colla derivata normale $\frac{du}{dn}$ su C . Per ottenere $u(x, y)$ si rappresenta D sopra il cerchio K_1 di raggio R ottenendo $u_1(x_1, y_1) = u(x, y)$. Poniamo

$$u_1(x_1, y_1) = u_2(x_1, y_1)H,$$

H essendo il modulo della derivata $\frac{dz}{dz_1}$ della funzione rappresentante D su K_1 .

Si ottiene la funzione $u_2(x_1, y_1)$ colle approssimazioni successive

$$(38) \quad u_2^n(P) = \frac{1}{8\pi} \int_{\bar{K}_1} \left[G_2(P, P') + \int_{\bar{K}_1} K(P, P'') G_2(P'', P') dP'' \right] \cdot \Psi[P', u_2^{n-1}(P'), \dots] dP', \quad n = 1, 2, \dots$$

partendo da una funzione u_2^0 che soddisfa alle disuguaglianze date. G_2 è la

funzione di GREEN biarmonica pel cerchio K_1 . Ψ è la funzione $H^3F(x, y, u_1, \dots)$ come funzione di $x_1, y_1, u_1, \dots$ $K(P, P'')$ è il *nucleo risolvente* del nucleo $K(P, P'')$ dato dalla formula

$$(26) \quad K(P, P'') = \frac{1}{8\pi} \{ -4(G_{2\xi} - G_{2\eta})R + 8G_{2\xi\eta}I - 4G_2 |S|^2 \},$$

ξ, η essendo le coordinate di P'' .

Poniamo

$$(79) \quad I^{n-1}(P'') = \int G_2(P'', P') \Psi[P', u_2^{n-1}(P')] dP', \quad n = 1, 2, \dots$$

$$(78) \quad U^{n-1}(P'') = \frac{1}{8\pi} \{ -4(I_{\xi''\eta''}^{n-1} - I_{\eta''\xi''}^{n-1})R + 8I_{\xi''\eta''}^{n-1}I - 4I^{n-1} |S|^2 \},$$

$$(77) \quad C^{n-1}(P_i) = \int K(P'', P_i) U^{n-1}(P'') dP'',$$

$$(79^a) \quad J^{n-1}(P_i) = \int G_2(P_i, P'') U^{n-1}(P'') dP''.$$

Allora si ha

$$(76) \quad u_2^n = \frac{1}{8\pi} \{ I^{n-1}(P) + J^{n-1}(P) - \\ - \frac{1}{\delta(1)} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \int_{(h)} \begin{vmatrix} 0, & G_2(P_1, P), \dots, & G_2(P_h, P) \\ C^{n-1}(P_1), & 0, \dots, & K(P_h, P_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ C^{n-1}(P_h), & K(P_1, P_h), \dots, & 0 \end{vmatrix} dP_1 \dots dP_h \}, \quad n = 1, 2, \dots$$

$\delta(1)$ è il determinante di FREDHOLM nel caso singolare per $\lambda = 1$:

$$(115) \quad \delta(1) = 1 - \delta_1 + \delta_2 - \dots$$

dove i δ_n sono dati dalle formole (33).

La serie delle u_2^n esiste e converge assolutamente ed uniformemente colle serie derivate di primo ordine in $K_1 + C_1$ e colle serie derivate di secondo ordine in un dominio arbitrario chiuso interiore a C_1 . Le condizioni di esistenza e di convergenza sono le (107) e (113). Queste condizioni saranno certamente verificate, se N e A_0, A_1, A_2 saranno abbastanza piccoli pei valori fissi di L, L', L'' .

La funzione $S(z)$ può essere arbitraria ed influisce solamente sui valori di N, A_0, A_1, A_2 .

La funzione limite $u_2(x_1, y_1)$ soddisfa all'equazione differenziale (13) e ci dà la funzione $u(x, y)$ richiesta nel dominio D , nulla colla derivata normale su C .