Sur le Théorème de Jordan dans un espace T_1.

Par RUBENS G. LINTZ - Escola de Engenharia de São Carlos.
Universidade de São Paulo. Brasil.

Résumé. - *On veut généraliser ici le théorème de* JORDAN, *par une convenable définition de courbe fermée, à un espace topologique général, ne possédant même une métrique.*

§ 1. - Introduction.

1. **Généralités.** - Les courbes de JORDAN, définies comme des ensembles homéomorphes à un segment rectiligne ou à une circonférence, se rattachent au célèbre théorème de JORDAN [1]:

« Toute courbe simple fermée divise le plan en deux parties ouvertes connexes qui ont cette courbe comme frontière commune ».

Ce théorème fut étendu aux espaces euclidiens à n-dimension par BROUWER [2] et plus récemment à un espace non équivalent topologiquement au plan euclidien par J. M. SLYE [3].

La question de la accessibilité, posée par SCHOENFLIES [4, p. 65], a été étudiée par des nombreux auteurs et sur cela on pourrait se rapporter aux ouvrages de KERÉKJÁRTÓ [4, p. 65] et WHYBURN [5, p. 111].

Dans ce travail on donne une définition de courbe ouverte et de courbe fermée dans un espace T_1, en montrant que, relativemente aux courbes fermées, l'on peut poser un théorème « type JORDAN », c'est à dire un théorème de séparation de l'espace en deux composants connexes. Aussitôt, par une definition convenable d'accessibilité, on demontre qu'une courbe fermée est accessible des composants de l'espace.

Pour simplifier l'exposition, nous avons divisé ce théorème général en deux autres:

théorème 1, qui énonce la séparation de l'espace en deux parties connexes;

théorème 2, qui traite de l'accessibilité.

En réalité, la partie du théorème 1 qui s'attache seulement à la séparation de l'espace sera prise comme axiome, parce que l'importance du théorème de JORDAN ne réside pas dans le fait qu'une courbe fermée sépare l'espace en deux parties (propriété jouée d'ailleurs par beaucoup d'autres ensembles frontières), mais que ces parties soient *connexes* et, de plus, que la courbe fermée soit *accessible* par des *courbes ouvertes* en relation à ces parties.

La nomenclature sera, d'une manière générale, celle de KURATOWSKY [6] et de WILDER [7]. Particulièrement la frontière, l'interieur et l'extérieur d'un ensemble A seront indiqué respectivement par $F(A)$, $I(A)$ et $E(A)$.

2. **Définitions.** - Soit E un espace topologique satisfaisant aux trois premiers axiomes de HAUSDORFF [8, p. 213]. Tous les ensembles que nous allons considérer se rapporteront à cet espace.

DÉFINITION I. - On appelle *courbe ouverte* un ensemble frontière, fermé et irréductible par rapport à la connexion entre deux points qui s'appellent *extrémités* de la courbe.

Il est bon d'ajouter que KURATOWSKY [9, p. 131] appelle espace irréductible entre P_1 et P_2 un espace irréductible à la proprieté: être un ensemble connexe et fermé contenant P_1 et P_2, alors que WILDER [7, p. 21] exlut de la définition le terme *fermé.* Ainsi, l'ensemble des points:

$$y = \operatorname{sen}\frac{1}{x},\ x \neq 0 \qquad \text{et} \qquad y = 0,\ x = 0$$

dans le plan, serait irréductible entre (0, 0) e $(1/\pi, 0)$ au sens de WILDER, alors qu'il n'en serait pas au sens de KURATOWSKY. Cependant si l'espace est le plan. considéré sans les segments $0 < y \leq 1$ et $-1 \leq y < 0$, l'ensemble ci dessus, est irréductible dans les deux sens. Dans ce cas, il serait une courbe ouverte, en accord avec notre définition.

Dans la suite le terme *irréductible* sera toujours entendu au sens de WILDER.

On peut donner un espace tel que certains ensembles irréductibles qu'il contient soient fermés et ouverts. Prenons un carré $ABCD$ en lui donnant la structure topologique suivante:

1) Les voisinages des points des côtés AB et CD sont des segments parallèles aux côtés AD et BC, moins l'extrémité qui ne contient pas le point considéré.

2) Les voisinages des autres points sont des segments qui ont ces points comme centre, parallèles au côté AD, extrémités exclues.

On voit que les segments qui unissent les points de AB à ceux de DC, paralléle à AD sont des ensembles irréductibles de cet espace, et y sont *ouverts et fermés.*

Un autre exemple c'est le plan muni de la topologie ordinaire (les voisinages de P sont des cercles de centre P), moins les points du segment A: $0 < x < 1$, de l'axe x, dont les points ont pour voisinages des segments de centre en ces points, extrémités exlues. On voit que $I(A) \neq 0$.

Cependant ces ensembles ne sont point des *courbes ouvertes* parce qu'ils ne sont pas *frontières.*

Ces exemples montrent que la propriété « être irréductible » est indépendante de la propriété « être frontière » lorsqu'on se rapport à un espace abstrait.

Il convient de distinguer aussi ce que nous appellons *courbe ouverte* de ce que, ordinairement, l'on désigne par *courbe de Jordan ouverte.*

JANIZEWSKY [10] a caractérisé la courbe de JORDAN ouverte d'extrémités A, B par deux propriétés:

1) Être un continu *irréductible,* entre A et B, c'est à dire, un continu qui ne contient pas aucum vrai sous-continu, contenant A et B.

2) Ne posséder pas des vrais sous-continus de condensation [9, p. 177].

Par exemple, l'espace étant le plan moins les segments $0 < y \leq 1$ e $-1 \leq y < 0$, l'ensemble:

$$y = \operatorname{sen}\frac{1}{x}, \ x \neq 0 \qquad y = 0, \ x = 0,$$

est, comme nous déjà vu, une courbe ouverte d'extrémité $(0, 0)$ et $(1/\pi, 0)$. Cependant il n'est pas une courbe de JORDAN, parce qu'il n'est pas un continu.

Comme nous démontrerons plus loin, les courbes ouvertes ne contiennent pas des vrais sous-continus de condensation ou plus généralement, des vrais sous-corbes ouvertes de condensation et pourtant ces courbes ne sont pas indécomposables [11] dans la topologie du plan. Ainsi, la différence entre ces courbes et les courbes de JORDAN ouvertes réside non seulement dans l'usage du concept *fermé* dans les premières et *compact* dans les secondes (nous prenons continu = connexe + compact) mais aussi dans la signification du terme *irréductible.* Un ensemble peut fort bien être un *continu* irréductible, sans être un *connexe* irrèductible. Par exemple, l'ensemble fermé:

$$y = \operatorname{sen}\frac{1}{x}, \ x \neq 0 \qquad -1 \leq y \leq 1, \quad x = 0$$

est un continu irréductible entre $\left(-\frac{1}{\pi}, 0\right)$ et $\left(\frac{1}{\pi}, 0\right)$ mais il n'est pas un connexe irréductible entre ces mêmes points. Cela vient du fait que cet ensemble est irréductible par rapport à la propriété: être connexe et fermé; mais non par rapport à la propriété: être connexe. Pour une étude plus approfondie dans cet ordre d'idées, voir [12].

DÉFINITION II. - On appel la courbe fermée π un ensemble qui jouit de la propriété suivante: si P_1 et P_2 sont deux points différents de π, alors existent deux courbes ouvertes π_1 et π_2, d'extrémités P_1 et P_2, telles que:

1) $\pi_1 \cup \pi_2 = \pi$,

2) $\pi_1 \cap \pi_2 = \{P_1, P_2\}$.

Dans la suite on indiquera par P soit l'ensemble formè du point P, soit le point P.

§ 2. - L'espace topologique et la première partie du théorème de Jordan.

1. Les axiomes de l'espace. - Comme nous avons déja vu, l'espace E considéré satisfait au trois premiers axiomes de HAUSDORFF et contient des courbes ouvertes et fermées. Maintenant, les axiomes suivants seront posés:

AXIOME I. - Donnés une courbe ouverte π et un point P, il y a toujours une courbe fermée π' qui contient π et P.

AXIOME II (*). - Donnée une courbe fermée il existe seulement deux ensembles *ouverts*, non vides Ω et $E - \bar{\Omega}$, qui ont cette courbe comme frontière commune.

AXIOME III. - Deux points P_1 et P_2 appartenants à une voisinage d'un point quelconque de E peuvent être unis par une courbe ouverte contenue dans cette voisinage et de plus, si Q appartient à une courbe fermée ou à une courbe ouverte π, pour une voisinage Q quelconque de Q, l'ensemble $V(Q) \cap \pi$ contient une courbe ouverte contenant Q.

Ce dernier axiome exprime que les voisinages sont « arc-connexes » et, à plus forte raison, que l'espace est localement connexe.

Étudions, maintenant, l'indépendance logique absolue de ces axiomes.

1) Soit E le plan moins les points de l'ensemble

$$y = \operatorname{sen} \frac{1}{x} \qquad 0 < x \leq 1$$

$$-1 \leq y < 0; \quad 0 < y \leq 1 \qquad x = 0.$$

On voit qu'y sont verifiés les axiomes I et II, mais non le III.

Un autre exemple très intèressant est le suivant: soit E le plan muni de la topologié ordinaire, exceptés les points d'une droite r, d'abscisses irrationelle dont les voisinages sont des cercles ouvertes de centre P desquels on soustrait les points de r d'abscisses rationelles. Alors ont voit qu'un conque $AB \subset r$ est une courbe ouverte, cependant si $P \in AB$ a une abscisse irrationelle, $V(P) \cap AB$ ne contient pas aucune courbe ouverte, quelque soit $V(P)$.

(*) On voit que l'axiome II ne diffère pas de l'axiome 4 de R. L. MOORE (16, p. 152) que par le terme *connexe*. Cette proprieté de connexion est en réalité demontrable, d'après nos axiomes, comme on a fait dans le théorème 1.

2) Soit E l'espace euclidien à tois dimensions. Y sont valables I et III, mais non II.

3) Soit E le plan, moins le segment AB, extrémités exclues. On voit qu'y sont vérifiés les axiomes II et III, mais non le I. En effet, si une courbe ouverte π contient les points A et B non considérés comme extrémités, il n'existe pas aucune courbe fermée contenante π et un point de la région du plan limité par π et par le segment AB.

2. **Conséquence des axiomes.** - Des axiomes établis au dessus, nous pouvons tirer quelques conséquences.

CONSÉQUENCE A. - Si P_1 et P_2 sont deux points, il y a une courbe ouverte d'extrémités P_1 et P_2.

Soit π une c. o. (courbe ouverte). Si $\pi \supset \{P_1, P_2\}$, alors, par une propriété des ensembles irréductibles [7, p. 23], la proposition est démontrée. Au contraire, soit π' une c. f. (courbe fermée) qui contient π et P_1 (Axiome I). Prenons un point $P_3 \in \pi'$ différent de P_1, lorsque π' ne contient pas P_2, car autrement la proposition serait démontrée. Soit alors π'' une c. f. qui contient une c. o. $\subset \pi'$ d'extrémités P_1 et P_3 (Définition II) et P_2. Ainsi il y a une c. o. d'extrémites P_1 et P_2 (Définition II): la proposition est dèmontrèe.

CONSÉQUENCE B. - Donnés deux points P_1 et P_2 et une c. o. π, il y a une c. f. qui contient P_1, P_2 et π.

Démonstration immédiate.

CONSÉQUENCE C. - L'espace E satisfait au axiome de séparation de FRÉCHET c'est à dire il est un espace T_1 [13, p. 67]. En effet soit, par impossible, P_1 et P_2 deux points tels que, $V(P_1) \cap P_2 \neq 0$ quels que soient les voisinages $V(P_1)$ de P_1 considérées. Autrement dit, la fermeture de P_2 contient $\{P_1, P_2\}$.

D'après la conséquence A, il y a une c. o. π d'extrémités P_1 et P_2. Ceci n'est possible que dans le cas où π soit réduite a $\{P_1, P_2\}$. Mais, en prenant un point P différent de P_1 et P_2, il-y a une c. f. π' qui contient π et P. Alors $\pi' = \pi_1 \cup \{P_1, P_2\}$ et l'ensemble π_1 n'est pas irreductible entre P_1 et P_2, puisque l'ensemble $\{P_1, P_2\} \subset \pi_1$ est connexe et différent de lui. Ainsi la proposition est démontrée.

Immédiatement on voit aussi qu'une c. o. ne peut contenir seulement un nombre fini de points.

CONSÉQUENCE D. - Si $A \neq 0 \neq E$, alors $F(A) \neq 0$.

En effet, si $F(A) = 0$, E admette une partition [14, p. 71], $E = A \mid (E - A)$ et en prennant $P_1 \in A$ et $P_2 \in E - A$ il n'y aurait aucune c. o. d'extrémités P_1 et P_2, en contradiction à la conséquence A. c. f. d.

Dans la suite, on fera usage des propriétés des ensembles irréductibles sans y faire des références. Le lecteur est prié de s'adresser à l'ouvrage de Wilder [7], déjà cité, pages 21-27.

3. Dans ce nombre nous donnerons la première partie du théorème qui constitue le but de ce travail. La seconde partie sera étabile dans le paragraphe suivant.

THÉORÈME 1. - Une courbe fermée divise l'espace en deux parties en soiant sa frontière commune et de plus ces parties sont connexes.

Donnée une c. f. π, en conséquence de l'axiome II, il y a seulement deux ensembles Ω et $E - \bar{\Omega}$ dont la frontière comune est π.

D'une manière générale si A est un ensemble ouvert, tel que $0 \neq \bar{A} \neq E$, une c. o. π d'extrémités $P_1 \in A$, $P_2 \in E(A)$ rencontre $F(A)$.

Considérons à cet effet les ensembles $\pi_1 = A \cap \pi$ et $\pi_2 = \pi \cap (E - \bar{A})$. Si $P_2 \notin F(A)$ ces ensembles ne sont pas vides. Alors, si $\pi' = \pi_1 \cup \pi_2$, π' ne serait pas connexe, pourtant il y a un point $\bar{P}$ appartenant à $\pi - \pi_1 \cup \pi_2$. Mais évidemment $\bar{P} \in F(A)$, parce que $E = A \cup F(A) \cup (E - \bar{A})$, comme il était à démontrer.

Passons alors à démontrer que Ω est connexe.

Voyons d'abord que $\bar{\Omega}$ est connexe. En effet, soit $\bar{\Omega} = H_1 \mid H_2$, où H_1 et H_2 sont fermés. Il est facile de voir que $\pi = F(\Omega)$ contient des points de H_1 et des points de H_2.

Supposons, par exemple, que $\pi \subset H_1$. Soit $P \in F(H_2)$. Comme $P \notin \pi$, alors dans une voisinage arbitraire de P, il y a des points de H_2 et des points de H_1. Mais, H_2 étant fermé, $P \in \bar{\Omega}$, alors $P \in H_2$ et aussi $P \in H_1$, et $H_1 \cap H_2 \neq 0$, contrairement à ce que nous avons supposé. Pourtant $\pi \cap H_1 \neq 0$, $\pi \cap H_2 \neq 0$ et $\pi = \pi \cap H_1 \mid \pi \cap H_2$, ce qui contredit la définition de π. Alors $\bar{\Omega}$ est connexe.

Montrons ensuite que Ω est connexe. Supposons, par impossible, que $\Omega = H_1 \mid H_2$.

Observons que $F(H_1) \cup F(H_2) = \pi$. Comme on sait [6, p. 29] que $F(H_1) \cup \cup F(H_2) \supset F(H_1 \cup H_2) = \pi$, il suffit de démontrer la rélation contraire.

A cet effet, soit $P \in F(H_1)$; $P \notin H_1$, puisque, l'espace étant localement connexe, H_1 est ouvert [15, p. 119]; $P \notin H_2$ parce que $H_1 \mid H_2$ este une partition. Alors $P \in \pi$, parce que $P \in \bar{\Omega} = \Omega \cup \pi = H_1 \cup H_2 \cup \pi$. Même raisonnement pour un point $Q \in F(H_2)$. Ainsi $\pi \supset F(H_1) \cup F(H_2)$ et cette rélation, avec sa contraire ci-dessus écrite, établit le résultat cherché. Voyons maintenant que $F(H_1) \not\subset F(H_2)$ et $F(H_2) \not\subset F(H_1)$. En effet, si $F(H_1) \subset F(H_2)$, alors $F(H_2) = \pi$ et il y aurait trois ensembles divers ayant π comme frontière commune: H_2, Ω et $E - \bar{\Omega}$. Ce contrédit l'axiome II. D'une manière analogue, il ne peut pas subsister $F(H_2) \subset F(H_1)$. Ainsi nous pouvons avoir un point $Q \in F(H_1)$ avec $Q \notin F(H_1) \cap F(H_2)$ et un point $M \in F(H_2)$ avec $M \notin F(H_1)$

$\cap F(H_2)$. Comme π est une c. f., il y a deux courbes ouvertes π_1 et π_2 contenues dans π, ayant seulement les extrémités Q et M communes et dont la somme est π.

En faisant $F(H_1) \cap F(H_2) = C$, si $C = 0$ le théorème est démontré; dans le cas contraire, voyons que $\pi_1 \cap C \neq 0$. En effet, on tient:

$$\pi_1 = \pi_1 \cap \pi = \pi_1 \cap [F(H_1) \cup F(H_2)] = [\pi_1 \cap F(H_1)] \cap [\pi_1 \cap F(H_2)].$$

Si $\pi_1 \cap C = 0$, alors

$$\pi_1 = \pi_1 \cap F(H_1) \mid \pi_1 \cap F(H_2),$$

contrairement à la définition de π_1. Ainsi $\pi_1 \cap C \neq 0$. D'une manière tout à fait analogue on établit $\pi_2 \cap C \neq 0$.

Comme C est fermé et $Q \notin C$, il y a une voisinage $V(Q)$ avec $V(Q) \cap C = 0$.

Par l'axiome III il y a dans $V(Q) \cap \pi$ une c. o. π'. Il est facile de voir que $\pi' \subset F(H_1)$, parce que au contraire en prenant $P_1 \in F(H_1)$ e $P_2 \in F(H_2)$ contenus dans π', par ce que nous avons démontré plus haut, $\pi' \cap C \neq 0$, ce qui contredit la définition de π'. Alors $\pi' \subset F(H_1)$ et $F(H_2) \subset \pi - \pi'$. Indiquons par σ une c. o. égale a $\pi - \pi'$ plus les extremités de π'. Il est immédiat que $\sigma \supset C$.

Pour trouver una contradiction, due à l'hypothèse $C \neq 0$, prenons un point $G \in H_2$ et d'après l'axiome I, il existe une c. f. π^* contenante G et σ. Or, la partie π_0^* de π^*, d'extrémités G et Q', où Q' est une extrémité de π', doit intercepter $F(H_2)$ au moins dans un point $\bar{P}$, puisque $Q' \in E(\bar{H}_2)$. Or, ce contredit la définition de π^*, puisque, si on donne deux points G et Q' de π^*, les c. o. π_0^* et $\pi^* - \pi_0^*$, plus les extrémités de π_0^*, dont la somme est π^*, n'ont pas seulement les extrémités G et Q' en commun, mais aussi le point $\bar{P}$.

Pourtant, l'hypothèse $C \neq 0$ est impossible et $C = 0$. Mais alors $\bar{\Omega}$ n'est pas connexe, ce qui contredit le résultat antérieur. Le théorème est démontré, parce qu'on peut renverser le rôle des ensembles Ω et $E - \bar{\Omega}$.

§ 3. - L'accessibilité et la deuxième partie du théorème de Jordan.

1. **Dèfinitions.** - Soient A, B, C trois collections d'ensembles appartenants à un espace topologique E. D'une manière générale, on dit qu'un ensemble $a \in A$ est accessible d'un ensemble $b \in B$ $(a \cap b = 0)$ par rapport à la collection d'ensembles C, si donné un point quelconque $P \in a$ et un point quelconque $Q \in b$, il y a un ensemble $c \in C$, contenant P et Q et tel que $c - P \subset b$.

En nous rapportant à la topologie du plan, on sait que les courbes de JORDAN sont accessibles des deux [4, p. 61) parties qu'elles déterminent dans le plan. Ainsi, la connexion de ces parties est une condition suffisant pour l'accessibilité, ce qui n'est pas vrai en général par rapport à des catégories de courbes non de Jordan. Par exemple, l'ensemble G de points limité par les courbes:

$$y = \operatorname{sen}\frac{1}{x} \qquad 0 < x \leq 2/\pi\,; \quad -1 \leq y \leq 1, \qquad x = 0$$

$$(x - 1/\pi)^2 + (y + 1)^2 = 1/\pi^2\,,$$

est ouvert et connexe, mais les points du segment $-1 < y \leq 1$ ne sont pas accessibles de G par courbes de JORDAN. Cependant ils sont accessibles de G par courbes du type

$$y = \operatorname{sen}\frac{1}{x} - \varepsilon \qquad x \neq 0\,; \qquad y = b \qquad x = 0$$

où $\varepsilon > 0$ convenable et b est l'ordonnè d'un point quelconque du segment $-1 < y \leq 1$.

Alors nous poserons la définition de l'accessibilité pour les c. f. dans l'espace E, comme cas particulier de la définition générale donnée plus haut.

DÉFINITION III. - Une c. f. π est accessible d'un ensemble A $(\pi \cap A = 0)$, si donné un point quelconque $P_0 \in A$, il y a une c. o. π^* d'extrémités P_0, P, et telle que $\pi^* - P \subset A$, où P est un point quelconque de π.

On dira aussi que le point P est accessible de A et inaccessible autrement.

Le but de ce paragraphe est la démonstration de l'accessibilité d'une c. f. de l'ensemble Ω défini par l'axiome II. Evidemment, on tient un théorème analogue pour l'ensemble $E - \bar{\Omega}$.

DÉFINITION IV. - Une partie B d'un ensemble A, est appellée *ensemble de condensation* de A si $B \subset \overline{\bar{A} - B}$.

Par exemple, tous les points d'un segment sont des ensembles de condensation.

L'ensemble $-1 \leq y \leq 1$ de l'exemple antérieurement donné $y = \operatorname{sen}\frac{1}{x}$ est de condensation.

2. **Théorèmes préliminaires.** - Tels sont les suivantes:

THÉORÈME A. - Soit P_0, P_1, P_2 trois points différents de E et π_1 et π_2 deux c. o. d'extrémités respectivement (P_0, P_1) et (P_1, P_2). Alors, l'ensemble $\pi_1 \cup \pi_2$ est arc-connexe.

Nous écarterons les cas immédiates $\pi_1 \cap \pi_2 = P_1$, ou $\pi_1 \subset \pi_2$, $\pi_2 \subset \pi_1$.

Soit $Q_1 \in \pi_1$ et $Q_2 \in \pi_2 - \pi_1$. Il y a ainsi une voisinage $V(Q_2)$ telle que $V(Q_2) \cap \pi_1 = 0$ et d'après l'axiome III il y a une c. o. $\nu \subset \pi_2 - \pi_1$ et contenant Q_2.

Considérons maintenant une structure topologique $\mathcal{T}$ définie sur π_2 par le système de voisinages suivant: les voisinages de $P \in \pi_2$ sont des c. o. contenues dans π_2, extrémités exlues, contenant P, si P est différent de P_1 et P_2. Cas contraire les voisinages de P sont des c. o. contenantes P, une extrémité excluse (celle qui n'est pas P).

Si nous appellons T la topologie utilisée jusqu'ici nous pouvons démontrer que si $\sigma \subset \pi_2$ est connexe relativament à T il est aussi connexe relativement à $\mathcal{T}$. En effet, suposons que σ, connexe relativament à T, ne le soit pas relativement à $\mathcal{T}$. Alors, $\sigma = \sigma_1 \cup \sigma_2$, où $\sigma_1 \cap \bar{\sigma}_2 \neq 0$, en indiquant par $\bar{A}$ la fermeture de A rel. à T et par $\tilde{A}$ celle relative a $\mathcal{T}$. Il suffit de voir que la relation $\sigma_1 \cap \tilde{\sigma}_2 = 0$ est impossible. À cet effet voyons que $\bar{\sigma}_2 \subset \tilde{\sigma}_2$. Dans $V(P)$ arbitraire il y a des points de σ_2 si $P \in \bar{\sigma}_2$. Si $P \notin \tilde{\sigma}_2$ alors il y a $V_{\mathcal{T}}(P)$ avec $V_{\mathcal{T}}(P) \cap \tilde{\sigma}_2 = 0$. Alors σ est contenu dans la somme de deux ensembles fermés, par rapport à T, μ_1 et μ_2, ou μ_1 est une c. o. contenue dans $V_{\mathcal{T}}(P)$ et contenant P et $\mu_2 = \pi_2 - V_{\mathcal{T}}(P)$ contenant $\sigma_2 - P$. Evidemment dans ces conditions $P \notin \bar{\sigma}_2$, contrairement à l'hypothèse. Pourtant $\bar{\sigma}_2 \subset \tilde{\sigma}_2$, $\sigma_1 \cap \tilde{\sigma}_2 \neq 0$ et σ est connexe.

Considérons ensuite la classe N de toutes les c. o. $\nu \subset \pi_2 - \pi_1$ et contenant Q_2, et soit

$$\omega = \bigcup_{\nu \in N} \nu .$$

En vertu de la relation $\tilde{\omega} \subset \tilde{\omega}$, établie antérieurement, on voit immédiatement que $\tilde{\omega}$ est fermé relativement a T:

$$\tilde{\omega} \subset (\bar{\tilde{\omega}}) \subset (\tilde{\tilde{\omega}}) = \tilde{\omega}$$

d'où

$$\tilde{\omega} = (\bar{\tilde{\omega}}),$$

et alors $\tilde{\omega}$, ètant connexe, est une c. o., d'après la définition de ω, qui rencontre π_1 dans un seul point. Le théorème est démontré.

THÉORÈME B. - Si O est un ensemble ouvert et connexe, O est arc-connexe.

En effet, soient P_1 et P_2 deux points quelconques de O. Soit Δ l'ensemble des points O que peuvent être unis à P_1 par une c. o. contenue dans O. Δ n'est pas vide, parce qu'il y a une voisinage $V(P_1) \subset O$ et d'après l'axiome III, $V(P_1) \subset \Delta$.

Δ est ouvert. En Effet, si $Q \in \Delta$, il y a une voisinage $V(Q) \subset O$ et, d'près l'axiome III et le théorème A, $V(Q) \subset \Delta$.

Δ est fermé relativement à O. En effet, si $Q \in O$ est point d'accumulation de Δ, il y a une voisinage $V(Q) \subset O$ avec $V(Q) \cap \Delta \neq 0$. En appliquant l'axio- III et le théorème A on tiendra $V(Q) \subset \Delta$ et $Q \in \Delta$.

Si $\Delta \,\overline{\supset}\, P_2$, nous avons:

$$0 = \Delta \mid 0 - \Delta$$

ce qui contredit notre hypothèse. Le théorème est démontré.

THÉORÈME C. - Les extrémités d'une c. o. π sont accessibles de $E - \pi$.

C'est une conséquence immédiate de l'axiome I.

THÉORÈME D. - Une c. o. π ne contient pas des vraies sous-courbes ouvertes de condensation.

En effet, si π_0 est une vraie sous-c. o. de condensation de π, nous avons $\pi_0 \subset \overline{\pi - \pi_0}$. Si π_0 contient une extrémité P_1 de π, alors $\pi' = (\pi - \pi_0) \cup P_1'$ où P_1' est l'extrémité de π_0 différent de P_1 est une c. o. L'ensemble $\Gamma = (\pi - \pi_0) \cup P_1 \cup P_1'$ est connexe, puisque $\pi' \subset \Gamma \subset \bar{\pi}' = \pi$ et Γ (contenant P_1 et P_2, extrémités de π) doit coincider avec π, ce qu'est impossible parce qu'il ne contient pas π_0.

Maintenant si π_0 ne contient aucune extrémité de π, en considérant les c. o. π_1 d'extrémités P_1, P_1' et $\pi_2 = (\pi - \pi_1) \cup P_1'$ contenues dans π, où P_1' est une extrémité de π_0, nous avons $\pi_0 \subset \pi_1$ ou $\pi_0 \subset \pi_2$ et on retombe dans le cas antérieur.

Immédiatement, on voit aussi qu'une c. f. ne possède pas des vraies sous-courbes de condensation.

THÉORÈME E. - Si π est une c. f. avec $\pi = F(\Omega)$ et π' une c. f. avec $\pi' = F(\Omega') \subset \bar{\Omega}$, alors Ω' ou $E - \Omega'$ sont contenus dans $\bar{\Omega}$.

En niant le théorème ont doit admetre, simultanément:

$$E(\bar{\Omega}') - \bar{\Omega} \neq 0 \quad \text{et} \quad \Omega' - \bar{\Omega} \neq 0.$$

Soient $Q \in E(\bar{\Omega}') - \bar{\Omega}$ et $P \in \bar{\Omega}' - \bar{\Omega}$.

Ce revient à dire que P et Q appartiennent à $E(\bar{\Omega})$. D'après les théorèmes B et 1 il y a une c. o. π'' d'extrémités P, Q, contenue dns $E(\bar{\Omega})$, que rencontre nécessairement $F(\Omega') = \pi'$ au moins dans un point $\bar{P}$. Mais, alors $\bar{P} \notin \bar{\Omega}$ et $F(\Omega') \not\subset \bar{\Omega}$ contrairement à l'hypothèse c. f. d.

THÉORÈME F. - L'ensemble des points de π inaccessibles par rapport à Ω ne contient pas aucune c. o.

Par impossible, soit $\pi' \subset \pi$ c. o. dont les points sont inaccessibles de Ω. Démontrons qu'une c. o. $\pi^* \subset \bar{\Omega}$ quelconque d'extrémités $P_0 \in \Omega$ et $P \in \pi'$ quelconques rencontre $\pi - \pi'$.

En effet, soit π^* dans ces conditions, avec $\pi^* \cap (\pi - \pi') = 0$.

Par l'axiome III, dans l'ensemble $V(P_0) \cap \pi^*$, où $V(P_0) \subset \Omega$ est une voisinage de P_0, il y a une c. o. ν contenant P_0. Soit Δ la classe des c. o. $\nu \subset \Omega \cap \pi^*$ contenantes P_0 et considérons l'ensemble:

$$\omega = \bigcup_{\nu \in \Delta} \nu.$$

Dans la topologie $\mathfrak{T}$ définie sur π^* d'une manière analogue a ce que nous avons fait antérieurement (théorème A), l'ensemble $\bar{\omega}$ est une c. o. e rencontre π' dans un seul point $\bar{P}$. Ce contredit notre hypothèse.

Ainsi, une c. o. $\pi^* \subset \bar{\Omega}$ quelconque d'extrémités P_0, P, avec $P_0 \in \Omega$ et $P \in \pi'$, doit rencontrer $\pi - \pi'$. Si $V(P)$ est une voisinage arbitraire de P, on doit avoir $V(P) \cap (\pi - \pi') \neq 0$, car autrement, si $P_1 \in V(P) \cap \Omega$ et $P_2 \in V(P) \cap \cap E(\bar{\Omega})$, il y a (Axiome III) une c. o. π_1^* contenue dans $V(P)$, d'extrémités P_1 et P_2. Evidemment, $\pi_1^* \cap (\pi - \pi') = 0$ et $\pi_1^* \cap \pi' \neq 0$ (théorème 1), contraire à ce que nous avons déjà démontré. Pourtant, π' est un ensemble de condensation de π, ce qui contredit le théorème D. La proposition est démontrée.

THÉORÈME 2. - Une c. f. π est accessible de l'ensemble Ω.

Considérons une suite décroissante de c. o. $\{\pi_n\}$, contenues dans π, dont l'intersection soit un point $P \in \pi$ arbitraire. On supposera aussi que les extrémités P_n' et P_n'' de π_n soient accessibles de Ω (Théorème F). Soit $P_0 \in \Omega$ arbitraire et λ_1 un c. f. qui contient P_0 et π_1, λ_1 contenue dans $\bar{\Omega}$ et ne rencontrant π qu'en π_1. Cela est possible en vertu des théorèmes A, B, C, et F. Soit Ω_1 l'ensemble ouvert correspondent à λ_1 (Axiome II), contenu dans Ω (théorème E). En choisissant $P_1 \in \Omega_1$, on aura analoguement une c. f. $\lambda_2 \subset \bar{\Omega}_1$, qui contient P_1 et π_2, avec $\Omega_2 \subset \Omega_1$, et ainsi de suite.

Démontrons qu'il est possible de choisir la suite $\{\lambda_i\}$ de sorte que,

$$\cap_1^\infty \bar{\Omega}_i = P.$$

À cet effet considérons deux hypothèses:

1) Une suite quelconque $\{\Omega_i\}$ a une intersection contenante un ensemble I, non vide, indépendant de la suite, tel que $I - P \neq 0$, c'est à dire: une $\bar{\Omega}_i$ quelconque d'une suite quelconque contient l'ensemble I.

Soit $\bar{P} \in I$, différent de P. Soi $\lambda' \subset \bar{\Omega}$ une c. f., dont l'ensemble ouvert correspondant par l'axiome II est Ω', qui contient $\bar{P}$ et une c. o. π_i de l'ensemble antérieurement considéré On doit avoir $I \subset \bar{\Omega}'$. On sait qu'il y a une c. o. π' d'extrémités P', P'' contenues dans λ' et telle que $\pi' - \{P', P''\} \subset \Omega'$ (théorèmes A et F) En considérant que l'ensemble des points inaccessibles de λ' par rapport a Ω', ne contient pas aucune c. o. (théorème F), on pourra choisir P' et P'', différents de P, de sorte que $\bar{P} \in \pi_1'$ ou $\bar{P} \in \pi_2'$, où π_1' et π_2' sont les c. o. dont la somme est λ', d'extrémités P', P''. Comme, par la construction de $\{\pi_i\}$, on peut supposer $\bar{P} \notin \pi_i$; nous avons $\bar{P} \in \pi_1'$, par exemple, et $\pi_i \in \pi_2'$. Or, à la c. f. $\pi' \cup \pi_2'$ corresponde par l'axiome II un ensemble $\Omega^* \subset \Omega$, dont la frontière est $\pi' \cup \pi_2'$ et qui ne contient pas $\bar{P}$. Alors $\bar{\Omega}^* \cap I \neq I$, ce qui contredit notre affirmation

2) Quelque soit la suite $\{\Omega_{i,j}\}$, $i = 1, 2, 3, \ldots$, l'intersection $I_j = \cap_1^\infty \bar{\Omega}_{i,j}$ est telle que $I_j - P \neq 0$, mais l'ensemble I introduit dans la première hypotèse est réduit au point P.

Soit $\{\bar{\Omega}_{i,0}\}$ une suite, avec,

$$I_0 = \cap_1^\infty \bar{\Omega}_{i,0}.$$

Il existe une suite $\{\bar{\Omega}_{i,1}\}$ avec

$$\bar{\Omega}_{i,1} \subset \bar{\Omega}_{i,0}$$

telle que,

$$I_1 = \cap_1^\infty \bar{\Omega}_{i,1} \neq I_0.$$

En effet, autrement il suffirait d'appliquer à $\bar{\Omega}_{1,0}$ le résultat déduit antérieurement pour $\bar{\Omega}$. Considérons ensuite $\{\bar{\Omega}_{i,2}\}$ avec $\bar{\Omega}_{i,2} \subset \bar{\Omega}_{i,1}$, telle que

$$I_2 = \cap_1^\infty \bar{\Omega}_{i,2} \neq I_1.$$

On a $I_0 \supset I_1 \supset I_2$. Analoguement on aura $\{\bar{\Omega}_{i,j}\}$ avec $\bar{\Omega}_{i,j} \subset \bar{\Omega}_{i,j-1}$ et

$$I_{i-j} \supset I_j \qquad (j = 1, 2, 3, \ldots).$$

Or, pour la suite $\{\bar{\Omega}_{i,i}\}$ on a précisement

$$I = \cap_1^\infty \bar{\Omega}_{i,i} = P,$$

puisque

$$I = \cap_1^\infty I_i$$

égal à P, car autrement on retomberait dans le cas précédent.

Soit maintenant une suite croissante de c. o. $\{\mu_i\}$ tel que $\pi_{i+1} - \pi_i \subset \Omega_{i+1}$ d'extrémités $\{P_0, P_1\}$ pour μ_1, $\{P_0, P_2\}$ pour μ_2, etc.

Étudions l'ensemble,

$$\mu = \cup_1^\infty \mu_i \cup P.$$

Démontrons que P est le seul point d'accumulation de μ qui n'appartient pas à μ_n, pour n quelconque. Soit Q une autre point d'accumulation de μ, different de P et n'appartenant pas à μ_n pour n quelconque.

Si Q est point d'accumulation de $\bar{\Omega}_{i_0}$ et ne l'est pas de $\bar{\Omega}_i$ avec $i > i_0$, alors il n'est pas point d'accumulation de μ, puisque

$$\mu - \cup_1^n \mu_i \subset \bar{\Omega}_n \qquad \text{pour } n > i_0.$$

Alors Q est point d'accumulation de Ω_i pour i quelconque et ainsi

$$Q \in \cap_1^\infty \bar{\Omega}_i,$$

contrairement à l'hypothèse admise dans la construction de $\{\bar{\Omega}_i\}$. Alors, μ est fermé. Immédiatement on voit aussi que μ est ensemble frontière et irréductible entre P_0 et P. Ainsi μ est une c. o. qui rencontre π seulement dans P.

Pourtant π est accessible de Ω et le théorème est démontré.

D'une manière tout à fait analogue on démontrera que π est accessible de $E - \bar{\Omega}$.

§ 4. - Remarques.

Dans ce paragraphe, je veux faire quelques remarques qui m'ont attiré l'attention lorsque je rédigeais ce travail.

1. Premièrement, je pense que, pour la validité du théorème 1, l'axiome III peut se réduire à la connexion locale sans y faire aucune supposition par rapport à l'ensemble $V(P) \cap \pi$ dont il parle. Mais je ne réussi pas à accomplir cette tâche.

Cependant la connexion locale ne suffit pas pour la validité du théorème B et conséquemment de tous les autres qu'y en dépendent. Construisons à cet effet l'exemple suivant:

L'espace est le plan, rapporté à une systeme cartésien, muni de la topologie ordinaire, c'est à dire, les voisinage de x sont des cercles de centre x, excepté le point (0, 0) qui possède un système particulier de voisinages, définies comme il suit: prenons des demicercles C de centre (0, 0) contenus dans le demi-plan des x négatives, moins les point des segments $y > 0$ e $y < 0$. Du coté de x positives soient R des retangles:

$$R \left\{ \begin{array}{ll} 0 < x < 1/n & n = 1,\ 2\ \dots \\ -1,\ 5 < y < 1,\ 5, & \end{array} \right.$$

desquels sont exclus les points des segments S

$$S \left\{ \begin{array}{ll} x = 1/p & p = 2,\ 3\ \dots \\ -1 \leq y \leq 1 & \end{array} \right.$$

Les voisinages de (0, 0) seront les ensembles du tipe $C \cup R$.

Soit O l'ensemble ouvert formé par les points intèrieurs au carré Q, de centre dans le point (0, 0) et côtés parallèles aux axes de longuer égale à quatre, moins les points des segments S et moins les points $y > 0$ et $y < 0$ de l'axe y. Il est facile de voir que cet espace satisfait aux axiomes I et II et est localement connexe, cependant l'ensemble O est ouvert et connexe mais il n'est pas arc-connexe parce que les points (1, 5; 1) et (— 1, 5; 1) ne peuvent être liés par une c. o. contenue dans 0. Les voisinages de (0, 0) ne sont pas arc-connexes.

2. Dans une autre ordre d'idées, je pense qu'il ne sera pas sans intérêt l'étude des rélations qui peuvent exister entre ce travail et la théorie de la dimension. Nous savons qu'en général le théorème de JORDAN est lié à un espace dont la dimension joue un rôle préponderant, en soiant bien connus les procédés de topologie combinatoire utilisés dans ces études [13, pag. 390]. Or, comme nous avons abordé le même problème sous le point de vue essentiellement ensembliste, il me semble très juste une recherche plus approfondie des rélations entre ces deux méthodes topologiques, par rapport à la classe de questions qui se lient au théorème de JORDAN.

Particulièrement, j'ai déjà orienté mes études dans cette direction et j'espère, avec la grâce de DIEU, d'y faire quelque publication à ce sujet.

3. Je remercie très affectueusement M. JAURÈS CECCONI qui a voulu examiner mon travail en y apportant des précieuses observations. Aussi la colaboration de M. U. RICHARD m'a été particulièrement utile.

BIBLIOGRAPHIE

[1] JORDAN C., *Cours d'Analyse*, p. 92 (1893), Paris.

[2] BROUWER L. E. J., *Beweis der Jordanschen Satzes für den n-dimensionalen Raum*, Math. Ann., p. 314-319, vol 71-1911.

[3] SLYE J. N., *Flat spaces for which the Jordan curve theorem holds true*, Duke Math. Jour., p. 143-151 vol. 22 (1955).

[4] KÉRÉKJARTÓ B., *Vorlesungen über Topologie*, vol. I (1923), Springer.

[5] WHYBURN G. T., *Analitic Topology*, (1942), American Math. Soc. Colloq. Publ., vol. XXVIII.

[6] KURATOWSKY C., *Topologie*, vol. I (1952), Varsovie.

[7] WILDER R. L., *Topology of Manifolds*, (1949), American Math. Soc. Colloq. Publ., vol. XXXII.

[8] HAUSDORFF F., *Grundzüge der Mengenlehre*, (1949), Chelsea.

[9] KURATOWSKY C., *Topologie*, vol. II (1950), Varsovie.

[10] JANIZEWSKY S., *Sur les continus irréductibles*, Journal Éc. Polyt. vol. 16-II (1912).

[11] JANIZEWSKY S. et KURATOWSKY C., *Sur les continus indécomposables*, Fund. Math. vol. I, p. 212.

[12] KURATOWSKY C., *Théorie des continus irréductibles entre deux points*, Fund. Math. vols. 3 et 10.

[13] ALEXANDROFF P. und HOPF H., *Topologie*, vol. I (1935), Springer.

[14] NEWMANN N., *Topology of Plane Sets of Points*, (1954), Cambridge.

[15] NÖBELING G., *Grundlagen der Analytischen Topologie*, (1954), Springer.

[16] MOORE R. L., *Foundations of Point Set Theory*, (1952), American Math. Soc. Colloq. Publ., vol. XIII.