Sul prodotto di gruppi permutabili.

Memoria di CESARINA MARCHIONNA TIBILETTI (a Milano).

Sunto. - *Dati due gruppi A^* e B^* si determinano tutti i gruppi G che risultano prodotto di due gruppi A e B fra loro permutabili ed isomorfi (rispettivamente) ad A^* e B^*. Tale determinazione è fatta usando i gruppi di sostituzioni ed il concetto di prodotto completo di Krasner e Kaloujnine. Si dà poi un criterio per riconoscere fra le soluzioni ottenute quelle isomorfe.*

Infine si caratterizzano anche certi gruppi che risultano prodotto di due gruppi A e G_B fra loro permutabili ove A è isomorfo ad A^* e G_B è (in generale) omomorfo a B^*.

I. Introduzione.

1. Sono dati due gruppi A^* e B^*. Si vogliono trovare tutti i gruppi G che risultano prodotto di due gruppi A e B fra loro permutabili ed isomorfi (rispettivamente) ad A^* e B^*.

Questo problema è già stato trattato da vari Autori (1) (e da alcuni di essi con qualche limitazione) riportandolo ad altro problema la cui soluzione non appare agevole nel caso generale, anche se può riuscire facile in casi particolari.

Ora qui si dà dello stesso problema una soluzione, la quale si basa sull'uso dei gruppi di sostituzioni (in insiemi anche infiniti) e in particolare sfrutta il concetto, di prodotto completo di gruppi di sostituzioni (concetto introdotto da M. KRASNER ed L. KALOUJNINE (2)).

La soluzione qui presentata si riduce in sostanza a caratterizzare i precedenti gruppi G come quei particolari sottogruppi transitivi di un certo prodotto completo Γ_{ab} (ben definito a partire da A^* e B^*) che soddisfano a due condizioni determinate.

Tale caratterizzazione viene data prima nel caso in cui l'intersezione $A \cap B$ risulti essere solo l'identità e poi nel caso in cui $A \cap B$ sia un gruppo qualsiasi.

Successivamente si dà un criterio che permette di riconoscere fra le soluzione ottenute quelle uguali (cioè isomorfe): a ciò si perviene usando le proprietà generali di trasformazione (3) dei sottogruppi di prodotti completi.

---

(1) Cfr. per esempio [9], [1], [5], [7], [4], [8], [6], e la bibliografia già segnalata in queste note.

(2) Cfr. [2]. Questo lavoro di M. KRASNER ed L. KALOUJNINE (indicato appunto con [2]) contiene la trattazione più diffusa del concetto di prodotto completo di gruppi di sostituzioni, concetto che però era già stato introdotto in altre precedenti esposizioni riassuntive degli stessi autori.

(3) Cfr. [2], § 5.

Inoltre le precedenti condizioni cui devono soddisfare i sottogruppi di Γ_{ab} che sono soluzioni del nostro problema inducono ad introdurre alcune interessanti estensioni del problema. Lasciando cadere taluna delle suddette condizioni, si caratterizzano certi gruppi G che risultano prodotto di due gruppi A e G_B fra loro permutabili ove A è isomorfo ad A^* e G_B è solo omomorfo (di solito), in certo modo, a B^*.

Queste prime estensioni ne suggeriscono naturalmente altre (che si ottengono variando o tralasciando alcune delle ipotesi) ma, per ragioni di brevità, pensiamo che non valga la pena di trattarle qui.

II. **Preliminari.**

2. Premettiamo alcune considerazioni utili per il seguito. Avvertiamo subito che per la nomenclatura ci atterremo, salvo avviso in contrario, alla citata nota [2] di M. KRASNER ed L. KALOUJNINE (oltre che alla nomenclatura abituale).

Consideriamo l'insieme M_a formato da tutti gli elementi di A^* ed il gruppo Γ_a di tutte le sostituzioni che si possono realizzare in M_a (limitandoci eventualmente ai casi in cui ha senso la « totalità » di queste sostituzioni [4]).

Il gruppo Γ_a contiene ovviamente come sottogruppo il gruppo A_S dato dal Cayleyano sinistro di A^* (che considereremo isomorfo ad A^* nel modo abituale) [5]. Tale A_S è evidentemente un gruppo regolare [6] su M_a.

Consideriamo anche l'insieme M_b formato dagli elementi di B^*: sia B_S il gruppo di sostituzioni, regolare, su M_b dato dal Cayleyano sinistro di B^*.

Allora in relazione agli insiemi M_a ed M_b ed ai gruppi Γ_a e B_S che operano rispettivamente in essi introduciamo (secondo la nomenclatura di KRASNER [7]) il prodotto completo

$$\Gamma_{ab} = \Gamma_a \circ B_S \text{ [8]}.$$

Notiamo subito che dei due gruppi di sostituzioni che sono fattori del prodotto completo Γ_{ab} il solo B_S è (in generale) un gruppo regolare.

---

(4) I casi cui così ci si riferisce sono quelli che « ragionevolmente » si possono presentare. Non vogliamo entrare qui nella questione dell'esistenza della suddetta « totalità » che è legata ad una costruzione, sia pure ideale, ovvia in alcuni casi semplici, ma che, data la completa indeterminatezza di M_a, potrebbe richiedere l'uso del postulato di ZERMELO o altri procedimenti logici di discutibile valore.

D'altronde in casi concreti il gruppo Γ_a (su M_a) potrebbe anche essere sostituito da altro gruppo determinabile senza le precedenti complicazioni.

(5) Cfr. [10], pag. 164. Precisamente, chiamati genericamente con x gli elementi di A^*, ad ogni elemento a di A^* corrisponde sugli x la sostituzione $x \to ax$.

(6) Cfr. [11], pag. 37.

(7) Cfr. [2], § 1.

(8) Cfr. anche [3], cap IV, n. 1 per un concetto in parte analogo al prodotto completo qui introdotto.

Consideriamo ora il gruppo Γ_b di tutte le sostituzioni che si possono realizzare in M_b (per tale Γ_b vale l'osservazione fatta sopra a proposito di Γ_a). In relazione agli M_b ed M_a ed ai gruppi Γ_b ed A_S (che rispettivamente operano in essi) introduciamo anche il prodotto completo

$$\Gamma_{ba} = \Gamma_b \circ A_S.$$

Dai teoremi di KRASNER e KALOUJNINE [2] si ha immediatamente il seguente:

TEOREMA 1. - *Ogni sottogruppo transitivo* Γ (9) *di* Γ_{ab} *possiede due sottogruppi* Γ_1 e Γ_2 *tali che:*

1) $\Gamma \supset \Gamma_1 \supset \Gamma_2$;

2) Γ_2 *è anti-invariante* (10) *in* Γ;

3) *la rappresentazione di* Γ *mediante* Γ_1 *(dopo un'opportuna identificazione dell'insieme* Γ/Γ_1 *con* M_a*) diventa un sottogruppo* Γ_a' *di* Γ_a *e la rappresentazione di* Γ_1 *mediante* Γ_2 *(dopo un'opportuna identificazione dell'insieme* Γ_1/Γ_2 *con* M_b*) risulta essere il gruppo* B_S.

Inversamente, sia H *un gruppo astratto contenente due sottogruppi* H_1 *ed* H_2 *per cui:*

1) $H \supset H_1 \supset H_2$;

2) H_2 *è anti-invariante in* H;

3) *la rappresentazione di* H *mediante* H_1 *e quella di* H_1 *mediante* H_2 *risultano rispettivamente (dopo una identificazione di* H/H_1 *con* M_a *ed* H_1/H_2 *con* M_b*) un sottogruppo* Γ_a' *di* Γ_a *ed il gruppo* B_S.

Allora H *è isomorfo (secondo un* (M_a, M_b)*-isomorfismo* (11)*) ad un sottogruppo transitivo di* Γ_{ab}.

La validità della seconda parte (teorema inverso) del precedente enunciato è assicurata dal teorema 1 di KRASNER e KALOUJNINE (12). Quanto alla prima parte, dallo stesso teorema 1 (di KRASNER e KALOUJNINE) risulterebbe solo che: la rappresentazione di Γ_1 mediante Γ_2 è un sottogruppo B' di B_S (non il gruppo B_S in generale).

Qui però, poichè B_S è un gruppo regolare di sostituzioni in M_b, ogni sottogruppo B' è intransitivo su M_b, mentre, se Γ è transitivo, deve essere transitiva in virtù del § 2, n. 4, di [2] anche la rappresentazione di Γ_1 per Γ_2. Pertanto B' coincide con B_S.

(9) Qui e nel seguito tale transitività è sempre in relazione a tutti gli elementi dell'insieme $M = M_a \times M_b$.

(10) Ricordiamo che un sottogruppo C' di un gruppo C si dice anti-invariante in C se non contiene, oltre l'unità, alcun sottogruppo proprio invariante in C. Cfr. [2], nota I, pag. 216.

(11) Cfr. [2], § 4, n. 1.

(12) Cfr. [2], § 4, n. 4.

Diciamo ancora che un sottogruppo transitivo Γ di Γ_{ab} è *schreieriano* quando ammette una coppia di sottogruppi Γ_1 e Γ_2 (che soddisfano alle condizioni 1-3 poste nell'enunciato del teorema 1) tali che Γ_2 si riduca all'unità di Γ_{ab} (13).

Ricordiamo pure come nella nota di KRASNER e KALOUJNINE (14) sono presentati i gruppi Γ_1 e Γ_2 relativi ad un sottogruppo Γ transitivo. Sia $m_0 = (a_0, b_0)$ un elemento, fissato, di $M = M_a \times M_b$; il gruppo Γ_1 può essere senz'altro dato dal gruppo $\Gamma_1 < m_0 >$ delle sostituzioni di Γ che negli elementi di M del tipo $m = (a_0, b)$ lasciano fermo a_0 e Γ_2 appare allora come il sottogruppo $\Gamma_2 < m_0 >$ delle sostituzioni di Γ che lasciano fermo l'elemento $m_0 = (a_0, b_0)$ stesso.

Notiamo che, essendo Γ transitivo, quando si passi da un elemento m_0 ad un elemento m_1 di M si hanno gruppi $\Gamma_1 < m_0 >$ e $\Gamma_2 < m_0 >$ rispettivamente coniugati di $\Gamma_1 < m_1 >$ e $\Gamma_2 < m_1 >$ (15). Pertanto le precedenti considerazioni sono indipendenti dall'elemento m_0 scelto in M.

Di conseguenza *per un sottogruppo* Γ *di* Γ_{ab} *l'essere schreieriano* significa ora anche che in Γ vi è *una sola sostituzione che lascia fermo un elemento* $m = (a, b)$ *di* M e questa è naturalmente l'unità.

Nei paragrafi seguenti risolveremo il problema che è oggetto di questo lavoro in due fasi. Daremo dapprima alcune proprietà dei gruppi G che vogliamo trovare. Noteremo poi che le proprietà indicate sono caratteristiche per i gruppi richiesti i quali, in base ad esse, risultano pertanto determinati ed ottenuti.

Considereremo successivamente i casi in cui i gruppi A e B (isomorfi ad A^* e B^*) in G hanno in comune la sola unità od un gruppo qualsiasi.

Risolveremo poi, con una casistica dello stesso tipo, un problema analogo al precedente in cui G risulta però prodotto di gruppi A e G_B (permutabili fra loro) con A isomorfo ad A^* e G_B omomorfo a B^*.

III. Caso in cui l'intersezione $A \cap B$ risulti l'unità.

3. Consideriamo ora un gruppo G prodotto di due gruppi A e B (permutabili), rispettivamente isomorfi ad A^* e B^*, tali che l'intersezione $A \cap B$ sia l'unità.

Il gruppo G, che contiene il gruppo B, si scompone in laterali della forma

$$aB$$

(13) Notiamo che gli autori KRASNER e KALOUJNINE ([2], § 6, n. 2) chiamano schreieriano un analogo sottogruppo in relazione ad un prodotto completo di sottogruppi astratti (regolari). Qui dei due fattori Γ_a e B_s è regolare solo B_s.

(14) Cfr [2], § 2, n. 4.

(15) Cfr. anche [2], § 2, n. 5.

ove a è un qualsiasi elemento di A. Infatti, poichè A e B hanno in comune solo l'unità ne viene che (essendo a, a' elementi di A e b, b' elementi di B)

$$ab = a'b' \quad \text{dà} \quad a'^{-1}a = b'b^{-1} = 1 \quad \text{cioè} \quad a = a' \text{ e } b = b'.$$

Naturalmente si ha

$$G \supset B \supset 1.$$

Analogamente, in quanto contiene A, il gruppo G si può scomporre in laterali della forma

$$bA$$

ove b è un qualunque elemento di B.

Si ha

$$G \supset A \supset 1.$$

Allora, verificandosi ovviamente le condizioni richieste dal precedente teorema 1, si ha il seguente

TEOREMA 2. - *Tutti i gruppi G prodotto di due gruppi permutabili A e B (aventi in comune solo l'unità) sono isomorfi (anzi (M_a, M_b)-isomorfi) a sottogruppi transitivi schreieriani del prodotto completo Γ_{ab} e sono pure isomorfi (anzi (M_b, M_a)-isomorfi) a sottogruppi transitivi schreieriani del prodotto completo Γ_{ba}.*

Esaminiamo ora più dettagliatamente come può realizzarsi questo isomorfismo per trovare poi quali siano i sottogruppi di Γ_{ab} che risolvono il nostro problema.

Anzitutto gli elementi di G si scrivono nella forma ab ove a è un generico elemento di A e b un generico elemento di B. Anzi un elemento di G si scrive in uno ed un solo modo nella forma ab ([16]).

Usiamo ora gli elementi di G come moltiplicatori a sinistra dei laterali aB: essi (data la permutabilità di A e B) operano delle sostituzioni sugli elementi ab che costituiscono appunto il sottogruppo di Γ_{ab} cui G risulta isomorfo (v. teorema 2), quando a e b si pensino rispettivamente come elementi di M_a ed M_b.

In particolare gli elementi b usati come moltiplicatori a sinistra lasciano fermo il laterale aB ove a coincide con l'unità, cioè il laterale $aB = B$, e danno luogo ad un sottogruppo di sostituzioni di Γ_{ab} isomorfo a B (tale sottogruppo risulta il Γ_1 che compare nell'enunciato del teorema 1).

L'unico elemento che, usato come moltiplicatore a sinistra su aB lascia fermo l'elemento ab per cui $a = b = 1$ è l'unità (la quale dà qui il gruppo Γ_2 nominato nell'enunciato del teorema 1). Quest'ultimo fatto indica appunto che il nostro gruppo G è isomorfo ad un sottogruppo schreieriano di Γ_{ab}.

([16]) Cfr. [7] n. 1.

Osserviamo ancora che gli elementi a usati come moltiplicatori a sinistra di aB mutano gli ab variando gli a e lasciando inalterati i b; essi quindi danno luogo ad un sottogruppo Γ_A di Γ_{ab} isomorfo ad A (ed A^*).

4. Dati A^* e B^* vogliamo ora determinare (a meno di isomorfismi) entro Γ_{ab} (o Γ_{ba}) i gruppi $G=AB$, con $A \cap B=1$ ed A, B fra loro permutabili.

Consideriamo il prodotto completo Γ_{ab}, operante sull'insieme $M=M_a \times M_b$, descritto sopra (n. 2). Siano indicati genericamente con $m=(a, b)$ gli elementi di M (ove a appartiene ad M_a e b ad M_b) su cui operano le sostituzioni di Γ_{ab}.

Il gruppo Γ_{ab} contiene il *sottogruppo* Γ_A *che opera sulle* a *degli* $m=(a, b)$ *come il gruppo* A_S e lascia ferme singolarmente le b; *un tale sottogruppo è isomorfo ad* A_S *(ed* A^**).*

Sia ora G un sottogruppo transitivo schreieriano di Γ_{ab} che contenga Γ_A.

Fissato un elemento $m_0=(a_0, b_0)$ il sottogruppo G contiene il sottogruppo $G_1 < m_0 >$ delle sostituzioni che lasciano fermo a_0 negli elementi (a_0, b) di M. Inoltre $G_1 < m_0 >$ contiene il sottogruppo $G_2 < m_0 >$ delle sostituzioni che lasciano fermo $m_0=(a_0, b_0)$ [17].

Ora per il teorema 1 e per gli ulteriori richiami del n. 2 risulta che $G_1 < m_0 >$ è un gruppo isomorfo al gruppo B_S (ed al gruppo B^*).

Indichiamo con B il gruppo $G_1 < m_0 >$ e con β le sue sostituzioni.

Sappiamo anche per il n. 2 che l'insieme G/B è identificabile con M_a.

Siccome poi G è transitivo vi sono entro tale gruppo delle sostituzioni α che mutano $m_0=(a_0, b_0)$ in un $m=(a, b_0)$ con a qualsiasi. Queste α (quando non siano l'unità), per la definizione data, non sono sostituzioni di B e fra esse ve ne è una sola che porta m_0 in un $m=(a, b_0)$ con a prefissato (poichè, essendo il gruppo schreieriano, solo l'identità porta m_0 in sè).

Ora le α sono sostituzioni che realizzano, per esempio, la scomposizione in laterali $B\alpha$ del gruppo G. Infatti una $\beta\alpha$ porti (a_0, b_0) in un (a, b); al variare di β (fermo restando α) si hanno operazioni distinte che portano a_0 in uno stesso a e b_0 in ciascuno degli elementi b; al variare di α (fermo restando β) l'(a_0, b_0) va in un (a, b) con a sempre diverso. Essendoci una sola sostituzione (il gruppo è schreieriano) che porta (a_0, b_0) in un certo (a, b) le $\beta\alpha$ sono tutte e sole le sostituzioni di G.

Notiamo ancora che siccome G contiene Γ_A ed è schreieriano le α sono, tutte e sole, le sostituzioni di Γ_A.

Infine, data la scomposizione di G in laterali $B\alpha$ si ha [18]

$$B\alpha\beta' = B\alpha' \quad \text{cioè} \quad \alpha\beta' = \beta''\alpha'.$$

---

[17] È indifferente la scelta di m_0 in M (cfr. n. 2).

[18] Sono indicate con α dotato eventualmente di indici ed apici le sostituzioni di Γ_A, sono indicate con β dotato eventualmente di indici od apici le sostituzioni di B.

Dunque i due gruppi Γ_A e B di G cui appartengono rispettivamente le α e le β risultano permutabili. Inoltre i gruppi Γ_A e B non hanno elementi in comune (oltre l'unità) per il modo come sono stati definiti (le α e le β, diverse dall'unità, portano $m_0 = (a_0, b_0)$ rispettivamente in elementi diversi).

Per le considerazioni fatte or ora e per quelle del precedente n. 3 si conclude col seguente:

TEOREMA 3. - *Tutti i gruppi che risultino prodotto di due gruppi permutabili A e B rispettivamente isomorfi a due gruppi dati A^* e B^*, per cui A e B hanno in comune solo l'unità si trovano (a meno di isomorfismi) come sottogruppi del prodotto completo $\Gamma_{ab} = \Gamma_a \circ B_S$. Precisamente sono tutti e soli i sottogruppi G di Γ_{ab} transitivi e schreieriani che contengono il sottogruppo Γ_A (di Γ_{ab}).*

Naturalmente, in modo analogo, si caratterizzano i precedenti gruppi G come sottogruppi del prodotto completo Γ_{ba}.

5. In base ai teoremi di trasformazione di KRASNER e KALOUJNINE ([19]) si possono dare anche alcune ulteriori notizie circa i sottogruppi di Γ_{ab} che sono soluzioni del nostro problema.

A tal fine ricordiamo, enunciandolo in relazione al particolare prodotto completo Γ_{ab} (che ci interessa), il seguente teorema di KRASNER e KALOUJNINE ([20]).

Tutti e soli i sottogruppi Γ del prodotto completo Γ_{ab} che siano (M_a, M_b)--isomorfi ad un gruppo dato G si ottengono da uno di essi Γ_0 effettuando un automorfismo interno proprio di Γ_{ab}.

Tali automorfismi sono realizzati da tutte e sole le sostituzioni appartenenti ad un certo sottogruppo Γ^* di Γ_{ab}.

Precisamente, fissato un elemento $m_0 = (a_0, b_0)$ di $M = M_a \times M_b$ (v. n^i. 2 e 4) indichiamo con $\Gamma_1 < m_0 >$ il sottogruppo di Γ_{ab} formato dalle sostituzioni di Γ_{ab} che lasciano fermo a_0 negli elementi del tipo (a_0, b) di M e con $\Gamma_2 < m_0 >$ il sottogruppo delle sostituzioni di Γ_{ab} che lasciano fermo $m_0 = (a_0, b_0)$.

Sia $\Gamma_1^* < m_0 >$ il sottogruppo normale di Γ_{ab} dato dall'intersezione di $\Gamma_1 < m_0 >$ e dei sottogruppi di Γ_{ab} coniugati di $\Gamma_1 < m_0 >$. Sia $\Gamma_2^* < m_0 >$ il sottogruppo normale di $\Gamma_1 < m_0 >$ dato dall'intersezione di $\Gamma_2 < m_0 >$ e dei sottogruppi di $\Gamma_1 < m_0 >$ coniugati di $\Gamma_2 < m_0 >$. Il suddetto gruppo Γ^* è l'intersezione

$$\Gamma^* = \Gamma_1^* < m_0 > \cap \Gamma_2^* < m_0 > .$$

([19]) Cfr. [2], § 5.
([20]) Cfr. [2], § 5, n. 4.

Dopo tali richiami, osserviamo ancora che le soluzioni G del nostro problema, fornite dal teorema 3 non saranno in generale tutte diverse (a meno di isomorfismi).

Ora possiamo dire che:

Le soluzioni G, fornite dal teorema 3, che siano eventualmente uguali (a meno di isomorfismi) differiscono per un automorfismo interno di Γ_{ab} realizzatò con sostituzioni del precedente gruppo Γ^*.

IV. Caso in cui l'intersezione $A \cap B$ è un gruppo proprio.

6. Sia ora G un gruppo prodotto di due gruppi A e B permutabili ($G = AB$), isomorfi rispettivamente a due gruppi dati A^* e B^* tale che $I = A \cap B$ sia un gruppo proprio.

Notiamo che in quanto I è un sottogruppo di A e di B deve essere simultaneamente isomorfo ad un sottogruppo I_A^* di A^* e ad un sottogruppo I_B^* di B^* (cioè i gruppi A^* e B^* devono contenere rispettivamente un gruppo I_A^* ed un gruppo I_B^* fra loro isomorfi, in qualche modo).

Consideriamo una scomposizione di A rispetto al suo sottogruppo I e sia $\bar{a}I$ il generico laterale di I in A.

È noto [21] che i laterali di B in G si possono scrivere nella forma $\bar{a}B$ ove gli $\bar{a}$ sono gli stessi elementi che compaiono nella precedente scomposizione di A mediante I.

La rappresentazione di G mediante B è un gruppo di sostituzioni sui laterali $\bar{a}B$. Questi laterali formano un insieme i cui elementi sono in corrispondenza biunivoca con i laterali $\bar{a}I$ di A rispetto ad I, con i laterali di A^* rispetto ad I_A^* e con gli stessi elementi $\bar{a}$ scelti. Chiamiamo con M_a l'insieme di tali elementi che possiamo senz'altro supporre siano indicati dagli $\bar{a}$.

Ora

$$G \supset B \supset 1$$

e la rappresentazione di G per B risulta data da un gruppo di sostituzioni operante nell'insieme $\bar{M}_a$.

La rappresentazione di B mediante l'unità è ovviamente un gruppo (regolare) B_S di sostituzioni che si possono considerare operanti nell'insieme M_b degli elementi b di B (o dei corrispondenti di B^*).

Introduciamo il prodotto completo $\bar{\Gamma}_{ab} = \bar{\Gamma}_a \circ B_S$ del gruppo $\bar{\Gamma}_a$ di tutte le sostituzioni entro l'insieme $\bar{M}_a$ [22] e del (già citato) gruppo di sostituzioni B_S entro M_b.

---

[21] Cfr. per esempio [10], pag. 63

[22] Cfr. la questione analoga all'inizio del n. 2 a proposito dell'introduzione di Γ_a. Anche il presente gruppo Γ_a viene considerato nei casi in cui (essendo M_a anche infinito) ha senso parlarne. Valgono pure ora osservazioni simili a quelle della nota [4].

Per il teorema 1 si può allora dare il

TEOREMA 4. - *Un gruppo G sia prodotto di due gruppi permutabili A e B aventi in comune un sottogruppo proprio I. Sia $\bar{M}_a$ un insieme in corrispondenza biunivoca con A/I ed M_b l'insieme degli elementi di B. Ogni gruppo G è isomorfo (anzi $(\bar{M}_a, M_b)$-isomorfo) ad un sottogruppo transitivo schreieriano del prodotto completo $\bar{\Gamma}_{ab} = \bar{\Gamma}_a \circ B_S$.*

Naturalmente si ha un teorema del tutto analogo scambiando formalmente nell'enunciato precedente A con B ed a con b (cioè scambiando fin dall'inizio l'ufficio del gruppo A^* con quello del gruppo B^*).

Esaminiamo ora più particolarmente come può realizzarsi l'isomorfismo indicato dal teorema 4 e ciò al fine di determinare poi i sottogruppi di $\bar{\Gamma}_{ab}$ che risolvono il nostro problema.

Abbiamo già visto che il gruppo $G = AB$ si può scomporre in laterali del tipo $\bar{a}B$ ove gli elementi $\bar{a}$ sono quelli che compaiono nella scomposizione in laterali $\bar{a}I$ di A (corrispondenti ad elementi analoghi di una scomposizione di A^*).

D'altronde il gruppo I sta anche in B e in relazione ad esso si può avere per B una scomposizione in laterali $I\bar{b}$. Gli elementi di B (ed insieme di M_b) si possono scrivere nella forma $i\bar{b}$ (essendo i un generico elemento di I).

Gli elementi di G si possono allora scrivere nella forma

$$\bar{a}b = \bar{a}i\bar{b}$$

ove $\bar{a}$, i, $\bar{b}$ sono gli elementi usati sopra nelle varie scomposizioni.

Nella precedente scrittura gli $\bar{a}$ sono in sostanza gli elementi di $\bar{M}_a$, i b sono gli elementi di M_b e la scrittura $i\bar{b}$ per gli elementi b realizza una distinzione degli elementi di M_b in relazione a quelli del gruppo I.

Usiamo ora gli elementi di G come moltiplicatori a sinistra; essi operano delle sostituzioni sugli $\bar{a}b$ le quali appunto costituiscono il sottogruppo di $\bar{\Gamma}_{ab}$ sopra indicato, quando $\bar{a}$ e b si pensino rispettivamente quali elementi di $\bar{M}_a$ ed M_b.

Precisamente i b, usati come moltiplicatori a sinistra lasciano fermo il laterale $\bar{a}b$ ove $\bar{a}$ sia l'unità (cioè $\bar{a}B = B$). Essi danno così luogo ad un sottogruppo di sostituzioni di $\bar{\Gamma}_{ab}$ isomorfo a B.

L'unico elemento che, usato come moltiplicatore a sinistra, lascia fermo l'elemento $\bar{a}b$ per cui $\bar{a} = b = 1$ è l'unità (d'accordo col fatto che il gruppo G è isomorfo a un sottogruppo schreieriano di $\bar{\Gamma}_{ab}$).

Gli elementi $\bar{a}i$ usati come moltiplicatori a sinistra mutano elementi $\bar{a}i\bar{b}$ in elementi $\bar{a}'i'\bar{b}$ (con lo stesso $\bar{b}$) ([23]). Queste moltiplicazioni a sinistra con

([23]) Qui e nel seguito si usano convenzioni del tutto analoghe a quelle precisate nella nota ([18]).

elementi $\bar{a}i$ danno luogo ad un certo gruppo $\bar{\Gamma}_A$ di Γ_{ab} che risulta isomorfo ad A. Il gruppo $\bar{\Gamma}_A$ opera sugli $\bar{a}i$ come il cayleyano sinistro di A sugli stessi elementi e lascia fermi i b.

7. Supponiamo ora che siano dati i gruppi A^* e B^* e che questi contengano rispettivamente un sottogruppo I_A^* ed I_B^* isomorfi in un certo isomorfismo ω.

In tale ipotesi il nostro problema diventerà quello di determinare (a meno di isomorfismi) i gruppi $G = AB$ con A e B isomorfi rispettivamente ad A^* e B^* ed $I = A \cap B$ isomorfo ai precedenti I_A^* ed I_B^* (in modo che ogni elemento di I corrisponda ad un elemento di I_A^* e ad un elemento di I_B^* rispettivamente omologhi per ω).

Naturalmente si hanno soluzioni in generale diverse in relazione ad ogni scelta di I_A^*, I_B^* ed ω.

Consideriamo quindi una scomposizione in laterali $\bar{a}I_A^*$ di A^* secondo I_A^* ed una scomposizione in laterali $I_B^*\bar{b}$ di B^* secondo I_B^*.

I laterali $\bar{a}I_A^*$ o senz'altro gli $\bar{a}$ scelti costituiscono un insieme $\bar{M}_a$ (simile a quello introdotto nel n. 6, tanto che, senza generare ambiguità possiamo indicarlo con lo stesso nome); gli elementi di B^* costituiscono il solito insieme M_b. In questo insieme M_b distinguiamo gli elementi in classi in relazione ai laterali $I_B^*\bar{b}$: precisamente un elemento di M_b si chiami $b = b_{i\bar{b}}$ se è dato da un elemento della forma $i\bar{b}$ di B^* (ove i è un elemento di I_B^*). Gli elementi di M_b vengono così distribuiti in sottoinsiemi $M_{\bar{b}}$ ove per ogni $\bar{b}$ si ha uno di tali sottoinsiemi ed ogni $M_{\bar{b}}$ contiene gli elementi di un laterale della scomposizione $I_B^*\bar{b}$ di B per I_B^*.

Osserviamo ancora che chiameremo ora con i sia un certo elemento di I_B^* che il corrispondente in ω di I_A^*.

Consideriamo il precedente prodotto completo $\bar{\Gamma}_{ab} = \bar{\Gamma}_a \circ B_S$ *definito in relazione ai due gruppi* $\bar{\Gamma}_a$ *e* B_S *operanti rispettivamente negli insiemi* $\bar{M}_a$ *ed* M_b ora definiti.

In $\bar{\Gamma}_{ab}$ vi è *il sottogruppo* $\bar{\Gamma}_A$ *isomorfo ad* A^* *che opera:*

1) *sugli* $\bar{a}$ *ed* i *delle coppie* $(\bar{a}, b_{i\bar{b}})$ *di* M *sostituzioni uguali a quelle operate dagli elementi di* A^* *presi quali moltiplicatori a sinistra degli stessi elementi* $\bar{a}i$ *di* A^*;

2) *lascia fermi singolarmente gli elementi* $\bar{b}$ (cioè gli insiemi $M_{\bar{b}}$).

Sia ora G un sottogruppo transitivo schrerieriano di $\bar{\Gamma}_{ab}$ che contenga $\bar{\Gamma}_A$.

Fissiamo un elemento $m_0 = (\bar{a}_0, b_0) = (\bar{a}_0, b_{i_0\bar{b}_0})$. Il gruppo G contiene il sottogruppo $G_1 < m_0 >$ delle sostituzioni che lasciano fermo $\bar{a}_0$ negli elementi $(\bar{a}_0, b)$. Inoltre $G_1 < m_0 >$ contiene il sottogruppo $G_2 < m_0 >$ delle sostituzioni che lasciano fermo $m_0 = (\bar{a}_0, b_0)$ [24].

[24] È sempre indifferente la scelta di m_0 (cfr. n. 2).

Ora per il n. 2 risulta che $G_1 < m_0 >$ è un gruppo isomorfo a B_S: anzi chiameremo senz'altro con B tale $G_1 < m_0 >$ e con β le sue sostituzioni.

Per il teorema 1 l'insieme G/B è identificabile con $\bar{M}_a$. Siccome G è transitivo, entro G vi sono delle sostituzioni $\bar{\alpha}$ che mutano $m_0 = (\bar{a}_0, b_0)$ in un $(\bar{a}, b_0)$ con $\bar{a}$ qualsiasi; indichiamo con $\bar{N}_\alpha$ il loro insieme.

Queste $\bar{\alpha}$ (quando non siano l'unità), data la natura di B, non sono delle β; essendo poi il gruppo schreieriano vi è una sola $\bar{\alpha}$ che porti m_0 in un $m = (\bar{a}, b_0)$ con $\bar{a}$ prefissato.

Tali $\bar{\alpha}$ realizzano per esempio la scomposizione in laterali $B\bar{\alpha}$ di G. Come nel caso del n. 4 (vale la stessa dimostrazione) le $\beta\bar{\alpha}$ sono tutte e sole le sostituzioni di G.

Siccome G è schreieriano e contiene $\bar{\Gamma}_A$ le $\bar{\alpha}$ risultano essere delle sostituzioni di $\bar{\Gamma}_A$ (infatti in $\bar{\Gamma}_A$ esistono sotituzioni che operano su (a_0, b_0) rispettivamente come le $\bar{\alpha}$ scelte).

La scomposizione di G in laterali $B\bar{\alpha}$ porta che [25]

$$B\bar{\alpha}\beta' = B\bar{\alpha}' \qquad \text{cioè} \qquad \bar{\alpha}\beta' = \beta''\bar{\alpha}'.$$

Dunque l'insieme $\bar{N}_\alpha$ ed il gruppo B cui appartengono rispettivamente le $\bar{\alpha}$ e le β sono permutabili (nel senso usato per questa parola quando si parla di gruppi permutabili).

Il gruppo $\bar{\Gamma}_A$ contiene evidentemente (in quanto G è schreieriano) le sostituzioni di B che mutano $m_0 = (\bar{a}_0, b_{i_0\bar{b}_0})$ in ciascun $m = (\bar{a}_0, b_{i\bar{b}_0})$ ove $i\bar{b}_0$ è un qualsiasi elemento di $M_{\bar{b}_0}$ (e solo queste sostituzioni di B). Tali sostituzioni comuni formano un sottogruppo di $\bar{\Gamma}_A$ e di B isomorfo ad I_B^*. Il gruppo G risulta pertanto essere il prodotto di due gruppi permutabili $\bar{\Gamma}_A$ e B aventi in comune un sottogruppo isomorfo ad I_B^* (ed I_A^*).

Allora si può concludere col seguente

TEOREMA 5. - *Sia G un prodotto di due gruppi permutabili A e B rispettivamente isomorfi a due gruppi dati A^* e B^*, per cui A e B hanno in comune un sottogruppo proprio I (isomorfo simultaneamente ad un dato sottogruppo I_A^* di A^* e ad un dato sottogruppo I_B^* di B^*). Tali sottogruppi si trovano (a meno di isomorfismi) come sottogruppi del prodotto completo $\bar{\Gamma}_{ab} = \bar{\Gamma}_a \circ B_S$. Precisamente sono tutti e soli i sottogruppi transitivi e schreieriani di $\bar{\Gamma}_{ab}$ che contengono il sottogruppo $\bar{\Gamma}_A$ (di $\bar{\Gamma}_{ab}$).*

Naturalmente anche qui si può procedere in modo del tutto analogo scambiando nel problema precedente l'ufficio di A^* con quello di B^*.

OSSERVAZIONE. - Una proposizione simile a quella esposta nel n. 5 circa l'uguaglianza (a meno di isomorfismi) delle soluzioni fornite dal teorema 3 vale per i sottogruppi G di $\bar{\Gamma}_{ab}$ caratterizzati nel teorema 5.

---

[25] Valgono convenzioni analoghe a quelle della nota [18]. Sono indicate con $\bar{\alpha}$ dotato eventualmente di apici le sostituzioni appartenenti all'insieme $\bar{N}_\alpha$.

III. Estensioni.

8. Le precedenti condizioni cui devono soddisfare i sottogruppi di Γ_{ab} che sono soluzioni del problema trattato nei n.i 3 e 4 inducono ad introdurre alcune interessanti estensioni. Precisamente caratterizzeremo dei sottogruppi di Γ_{ab} simili a quelli considerati nel n. 4 ma non schreieriani.

Siano ancora A^* e B^* due gruppi dati.

Sia $G = AG_B$ un gruppo prodotto di due gruppi A e G_B ove:

(I)
1) *il gruppo A è isomorfo ad A^*;*
2) *la rappresentazione di G_B mediante un suo sottogruppo H_B è isomorfa a B^*;*
3) *il gruppo H_B è anti-invariante in G e l'insieme G_B/H_B è in corrispondenza biunivoca con l'insieme M_b degli elementi di B^*;*
4) *A e G_B non hanno elementi in comune salvo l'unità.*

Naturalmente il gruppo G_B ora considerato è in generale solo omomorfo a B^*.

Ancora consideriamo il precedente gruppo Γ_{ab} (per cui, dati A^* e B^*, si suppongono definiti M_a, M_b, Γ_{ab}, Γ_A, B_S ecc. in modo simile a quello esposto nei n.i 2 e 3).

Per il teorema 1 si ha che *il gruppo G soddisfacente alle precedenti ipotesi è isomorfo, anzi (M_a, M_b)-isomorfo, ad un sottogruppo transitivo di Γ_{ab}.*

Si possono poi fare considerazioni dirette analoghe a quelle del n. 3 circa il modo di ottenere da G un gruppo di sostituzioni per moltiplicazione a sinistra degli elementi di G stesso. Precisamente si può scomporre G in laterali aG_B ove con a si indicano gli elementi di A e si può scomporre G_B in laterali bH_B i quali danno un insieme M_b in corrispondenza biunivoca con B^*. Il gruppo G si può scomporre perciò in laterali del tipo abH_B. Moltiplicando poi a sinistra gli elementi di G pensati nella forma abh (con h in H_B) si vede direttamente come G sia isomorfo ad un sottogruppo di Γ_{ab}. È chiaro anche (moltiplicando a sinistra con le a) che tale sottogruppo di Γ_{ab} contiene un gruppo isomorfo a Γ_A (v. n. 3).

Viceversa sia G un sottogruppo transitivo del gruppo Γ_{ab} (introdotto come nel n. 4).

Si fissi un elemento $m_0 = (a_0, b_0)$. Si ha un sottogruppo $G_1 < m_0 >$ di G formato da sostituzioni che lasciano fermo a_0 negli elementi $m = (a_0, b)$ di M. Il gruppo $G_1 < m_0 >$ contiene ancora un sottogruppo $G_2 < m_0 >$ formato dalle sostituzioni di G che lasciano fermo $m_0 = (a_0, b_0)$. Per il teorema 1 la rappresentazione di $G_1 < m_0 >$ per $G_2 < m_0 >$ è data da B_S (per cui $G_1 < m_0 >$ è omomorfo a B^*).

Chiamiamo $G_1 < m_0 >$ con G_B e $G_2 < m_0 >$ con H_B; inoltre indichiamo con g una generica sostituzione di tale G_B e con h una di H_B.

Sappiamo, per il teorema 1, che G/G_B è identificabile con M_a.

Sia α una sostituzione di Γ_A (diversa dall'unità): essa porta $m_0 = (a_0, b_0)$ in (a, b_0) con $a \neq a_0$ e le α sono tali che fra esse una ed una sola porta (a_0, b_0) in un certo (a, b). Le sostituzioni $g\alpha$ sono tutte distinte: quelle che contengono la stessa α (o g) tenendo fisso g (o α) sono evidentemente diverse. Due sostituzioni $g\alpha$ e $g'\alpha'$ con $\alpha' \neq \alpha$ sono diverse poichè (a_0, b_0) è mutato per $g\alpha$ in un (a, b) e per $g'\alpha'$ in un (a', b') con $a' \neq a$. Non vi sono sostituzioni s di G fuori delle $g\alpha$ [26]. Pertanto si può dare per G la scomposizione in laterali: $G_B\alpha$.

Ragionando come nel n. 4 si ha che Γ_A e G_B sono permutabili e senza elementi comuni salvo l'unità.

Si conclude col seguente teorema.

TEOREMA 6. - *Siano dati due gruppi A^* e B^* e sia G un gruppo prodotto di due gruppi permutabili A e G_B per cui valgono le condizioni* (I). *Tutti e soli i gruppi G di questo tipo sono dati (a meno di isomorfismi) dai sottogruppi transitivi del prodotto completo $\Gamma_{ab} = \Gamma_a \circ B_S$ che contengono il sottogruppo Γ_A di Γ_{ab}.*

9. Diamo ora un'altra estensione analoga a quella trattata nel precedente n. 8 ma relativamente ad un caso in cui i gruppi A e G_B abbiano in comune un sottogruppo proprio.

Siano ancora dati i gruppi A^* e B^* i quali contengono rispettivamente due sottogruppi I_A^* ed I_B^* fra loro isomorfi in un certo isomorfismo ω.

Sia $G = AG_B$ un gruppo prodotto di due gruppi A e G_B ove:

(II)
1) *il gruppo A è isomorfo ad A^*;*
2) *la rappresentazione del gruppo G_B per un suo sottogruppo H_B è isomorfa a B^*;*
3) *il gruppo H_B è anti-invariante in G e l'insieme G_B/H_B è identificabile con l'insieme M_b degli elementi di B^*;*
4) *A e G_B hanno in comune un sottogruppo proprio I isomorfo ad I_A^* ed I_B^** (in modo che gli elementi di I_A^* ed I_B^* corrispondenti ad uno stesso elemento di I siano omologhi in ω).

Consideriamo ancora gli insiemi $\overline{M}_a$ (dato dai laterali di A rispetto ad I) ed M_b e in corrispondenza il gruppo $\overline{\Gamma}_{ab}$ (v. n. 5).

---

[26] Supponiamo infatti che una s porti (a_0, b_0) in un (a, b); vi è una certa sostituzione $g\alpha$ che porta (a_0, b_0) (in (a_0, b) e) in (a, b), data la transitività di G, e allora $s(g\alpha)^{-1} = h$ ove h è una sostituzione di H_B cioè $s = hg\alpha = g'\alpha$.

Per il teorema 1 si ha allora il seguente

TEOREMA 7. - *Ogni gruppo G che sia prodotto di due gruppi A e G_B per cui valgono le condizioni* (II) *è isomorfo, anzi* $(\bar{M}_a, M_b)$*-isomorfo ad un sottogruppo transitivo di* $\bar{\Gamma}_{ab}$.

Descriviamo ora più dettagliatamente certi gruppi G del tipo sopra considerato perchè ciò risulterà utile per il seguito.

Aggiungiamo l'ipotesi che

(III) *il gruppo I comune ad A e G_B contenga del gruppo H_B solo l'unità* (cioè $I \cap H_B = 1$).

Il gruppo G si può scomporre in laterali $\bar{a}G_B$ essendo $\bar{a}I$ i laterali di A rispetto ad I. Inoltre si possono dare di G_B le scomposizioni in laterali bH_B (in corrispondenza biunivoca con gli elementi di M_b) ed in laterali $I\bar{g}$. Gli elementi b della scomposizione bH_B risultano dati da certi $i\bar{b}$ ove le i sono tutti gli elementi di I e le $\bar{b}$ sono l'unità ed altri elementi non appartenenti nè ad I nè ad H_B.

Allora G_B risulta scomposto in classi di laterali

$$\bar{a}bH_B = \bar{a}i\bar{b}H_B.$$

Gli $\bar{a}$ sono in sostanza gli elementi di $\bar{M}_a$ e gli $i\bar{b} = b$ gli elementi di M_b.

Usiamo ora gli elementi di G come moltiplicatori a sinistra: essi operano sugli $\bar{a}b$ (della scomposizione $\bar{a}bH_B$) delle sostituzioni che costituiscono appunto il sottogruppo di $\bar{\Gamma}_{ab}$ sopra indicato.

In particolare gli $\bar{a}i$ come moltiplicatori a sinistra determinano un gruppo $\bar{\Gamma}_A$ di $\bar{\Gamma}_{ab}$ isomorfo ad A (ed A^*) che opera sugli $\bar{a}i$ come il cayleyano sinistro del gruppo A e lascia ferme le $\bar{b}$.

10. Caratterizziamo ora entro $\bar{\Gamma}_{ab}$ i gruppi G che soddisfano alle condizioni (II) e (III) del n. 9.

Siano dati i gruppi A^* e B^* ed in essi rispettivamente due sottogruppi I_A^* ed I_B^* fra loro isomorfi in un certo isomorfismo ω.

Il gruppo A^* ammetterà una scomposizione in laterali $\bar{a}I_A^*$ ed il gruppo B^* una scomposizione $I_B^*\bar{b}$. I laterali $\bar{a}I_A^*$ (o gli elementi $\bar{a}$) danno un insieme $\bar{M}_a$; gli elementi di B^* costituiscono un insieme M_b in cui, in relazione ad $I_B^*\bar{b}$ si possono distinguere (come nel n. 7) degli elementi $b_{i\bar{b}}$.

Avvertiamo che anche qui (come nel n. 7) indicheremo con lo stesso simbolo i sia un elemento di I_A^* che uno di I_B^* i quali si corrispondono nell'isomorfismo ω.

Consideriamo il prodotto completo $\bar{\Gamma}_{ab} = \bar{\Gamma}_a \circ B_S$ ed in esso il gruppo Γ_A come è indicato nel n. 8.

Sia ora G un sottogruppo transitivo di $\bar{\Gamma}_{ab}$ che contiene il sottogruppo Γ_A.

Fissiamo un elemento $m_0 = (\bar{a}_0, b_0) = (\bar{a}_0, b_{i_0\bar{b}_0})$. Il gruppo G contiene il sottogruppo $G_1 < m_0 >$ delle sostituzioni che lasciano fermo $\bar{a}_0$ negli elementi del tipo $(\bar{a}_0, b)$; a sua volta il gruppo $G_1 < m_0 >$ contiene il sottogruppo $G_2 < m_0 >$ delle sostituzioni che lasciano fermo $m_0 = (\bar{a}_0, b_0)$.

Ora (v. n. 2) l'insieme $G/G_1 < m_0 >$ è in corrispondenza biunivoca con $\bar{M}_a$ come $G_1 < m_0 > / G_2 < m_0 >$ è in corrispondenza biunivoca con M_b e la rappresentazione di $G_1 < m_0 >$ per $G_2 < m_0 >$ è data da B_S. Inoltre $G_2 < m_0 >$ è anti-invariante in G.

Chiamiamo $G_1 < m_0 >$ con G e $G_2 < m_0 >$ con H_B.

Siccome G è transitivo, in G vi sono delle sostituzioni che mutano $m_0 = (\bar{a}_0, b_0)$ in un $(\bar{a}, b_0)$ con $\bar{a}$ qualsiasi. Queste sostituzioni (quando non siano l'unità) non appartengono a G_B e ve ne è almeno una per ogni $\bar{a}$.

Per ciascuna $\bar{a}$ ne scegliamo una che chiamiamo $\bar{\alpha}^*$. Le classi $G_B\bar{\alpha}^*$ esauriscono tutte le sostituzioni del gruppo. Infatti fra esse vi sono sempre sostituzioni che portano $(\bar{a}_0, b_0)$ in un certo $(\bar{a}, b)$ con $\bar{a}$ e b qualsiasi (si verifica questo fatto come nel n. 4). Se poi s è una qualsiasi sostituzione di G che porta $(\bar{a}_0, b_0)$ in $(\bar{a}, b)$ vi è una $g_B\bar{\alpha}^*$ (di un $G_B\bar{\alpha}^*$) che opera nello stesso modo su $(\bar{a}_0, b_0)$: allora $(g_B\bar{\alpha}^*)s^{-1} = h$, ove h è in H_B, ed $s = (h^{-1}g_B)\bar{\alpha}^*$.

Poichè G contiene $\bar{\Gamma}_A$ le $\bar{\alpha}^*$ risultano essere a meno di qualche sostituzione h di H_B delle sostituzioni $\bar{\alpha}$ di $\bar{\Gamma}_A$. Sarà $\bar{\alpha}^*\bar{\alpha}^{-1} = h$ ove $\bar{\alpha}$ è in $\bar{\Gamma}_{A^*}$. Poniamo ora in $G_B\bar{\alpha}^*$ in luogo di $\bar{\alpha}^*$ una sostituzione $\bar{\alpha}$ per cui $\bar{\alpha}^* = h\bar{\alpha}$: si ha così una scomposizione $G_B\bar{\alpha}$ di G.

L'insieme delle $\bar{\alpha}$ ora scelte e il gruppo G_B sono permutabili (la verifica è simile a quella analoga del n. 7).

Ovviamente i gruppi Γ_A e G_B hanno un sottogruppo comune I (isomorfo ad I_A^* ed I_B^*).

Si può allora concludere col seguente

TEOREMA 8. - *Sia G un gruppo prodotto di due gruppi permutabili A e G_B soddisfacente alle condizioni* (II) *e* (III). *Tali gruppi G sono (a meno di ~~isomorfismi)~~ tutti e soli i sottogruppi transitivi del prodotto completo $\bar{\Gamma}_{ab} = \bar{\Gamma}_a \circ B_S$ che contengono il sottogruppo $\bar{\Gamma}_A$ di $\bar{\Gamma}_{ab}$.*

OSSERVAZIONE. - Valgono naturalmente osservazioni del tutto analoghe a quelle poste nel n. 5 circa l'eventuale uguaglianza (a meno di isomorfismi) dei gruppi G caratterizzati rispettivamente dai teoremi 6 ed 8.

BIBLIOGRAFIA

[1] G. CASADIO, *Costruzione di gruppi come prodotto di sottogruppi permutabili*, «Rend. di Matem. e delle sue applicazioni» (V) **2** (1941), pag. 348.

[2] M. KRASNER, e L. KALOUJNINE, *Produit complet des groupes de permutation et problème d'extension de groupes*, I, II, III, «Acta scientiarum mathematicarum, Szeged», **18** (1949/50), pag. 208, **14** (1951/52), pag 39 e pag. 69.

[3] O. ORE, *Theory of monomial groups*, « Trans. of the Amer. math. Soc. » **51** (1942), pag. 15.
[4] L. REDEI, *Anwendungen des schiefen Produktes in der Gruppentheorie*, « Journ. für die reine ánd angewandte Math. » **188** (1951), pag. 201.
[5] L. REDEI e J. SZEP, *On factorisable groups*, « Acta scientiarum mathematicarum, Szeged », **13** (1949/50), pag. 235.
[6] — — *Die Verallgemeinerung der Theorie des Gruppenproduktes von Zappa-Casadio*, « Acta scientiarum mathematicarum, Szeged », **16** (1955), pag. 165.
[7] J. SZEP, *On factorisable, not simple groups*, « Acta scientiarum mathematicarum, Szeged », **13** (1949/50) pag. 239.
[8] — — *On factorisable simple groups*, « Acta scientiarum mathematicarum, Szeged », **14** (1951/52), pag. 22.
[9] G. ZAPPA, *Costruzione dei gruppi prodotto di due dati sottogruppi permutabili fra loro*, « Atti del 2° Congresso dell'U.M.I. », Bologna 1940, pag. 115.
[10] — — *Gruppi, corpi, equazioni*, Liguori, Napoli, 1954.
[11] H. ZASSENHAUS, *The theory of groups*, Chelsea, New York, 1949.