Über lineare Komplexe von Räumen höchster Dimension einer nicht entarteten Quadrik.

di WERNER BURAU (a Hamburg).

Sunto. - *Conoscendo il modello minimo $M_{\binom{k+1}{2}}$ per la totalità degli S_k^I d'una schiera giacenti su di una quadrica Q_{2k} di S_{2k+1} si definisce il « complesso lineare di S_k^I » come immagine d'una sezione iperpiana di $M_{\binom{k+1}{2}}$. Il problema della classificazione proiettiva di tali complessi lineari è posto e risolto per $k \leq 5$.*

In der S_k -Geometrie des projektiven S_n spricht man von linearen Komplexen in Verallgemeinerung eines bekannten Begriffs aus der Liniengeometrie des S_3 . Bildet man alle S_k des S_n in üblicher Weise auf die Punkte einer Grassmannschen $G_{n,k}$ ab, so entsprechen die linearen S_k -Komplexe gerade den hyperebenen Schnitten der $G_{n,k}$. Alle S_k -Komplexe, die durch eine projektive Transformation des S_n ineinander übergeführt werden können, rechnet man dabei zu einer Klasse, und das damit entstehende Problem der projektiven Klassifikation aller linearen S_k -Komplexe ist bei $k=1$, wo es mit der Klassifikation der beliebig entarteten Nullkorrelationen des S_n äquivalent ist, und im Falle $k=2$ für $n \leq 8$ gelöst (s. 6). In mancherlei Hinsicht verwandt mit den $G_{n,k}$ sind die Mannigfaltigkeiten der einfachen Spinoren, die ich an anderer Stelle mit $M_{\binom{k+1}{2}}$ bezeichnet und ausführlich geometrisch beschrieben habe (s. 1, 2, 4). Die Punkte der $M_{\binom{k+1}{2}}$ lassen sich demnach als Bilder der $\infty^{\binom{k+1}{2}} S_{k-1}$ einer Q_{2k-1} oder auch der $\infty^{\binom{k+1}{2}} S_k^I$ einer Schar auf der Q_{2k} auffassen. Dabei wollen wir unter Q_{n-1} stets eine nicht entartete Quadrik des S_n verstehen. Die $M_{\binom{k+1}{2}}$ sind im Sinne F. SEVERIS Minimalmodelle für die genannten Gesamtheiten von Räumen und in naturgemässer Weise heranzuziehen, wenn man sich jetzt weitere Fragen einer sog. S_k^I -Geometrie einer Q_{2k} , bzw. S_{k-1} -Geometrie einer Q_{2k-1} vorlegt. In Anlehnung an die Sprechweise der S_k -Geometrie des S_n ergibt sich dann zunächst der Begriff des linearen Komplexes mit den analogen Fragestellungen. Dabei nennen wir lineare Komplexe solche Gesamtheiten von Räumen S_k^I der Q_{2k} , bzw. S_{k-1} der Q_{2k-1} , die auf die Punkte von hyperebenen Schnitten der zugeordneten $M_{\binom{k+1}{2}}$ abgebildet werden können. Zu einer Klasse wollen wir dann alle diejenigen hyperebenen Schnitte nennen, die mittels einer Autokollineation der $M_{\binom{k+1}{2}}$ ineinander überführt werden

können. Dies ist gleichwertig damit, dass die zugehörigen Mengen von Räumen auf der Q_{2k} projektiv äquivalent sind, wobei es genügt, sich auf solche Autokollineationen zu beschränken, welche die beiden Scharen von S_k nicht vertauschen. Fasst man die Punkte der $M_{\binom{k+1}{2}}$ jedoch als Bilder der S_{k-1} der Q_{2k-1} auf und versteht unter einer Klasse von S_{k-1} -Komplexen jetzt die Gesamtheit aller durch eine Autokollineation der Q_{2k-1} auseinander hervorgehenden, so verfeinert sich die zuerst gegebene Klasseneinteilung im allgemeinen. Denn man hat jetzt die hyperebenen Schnitte der $M_{\binom{k+1}{2}}$ in Bezug auf eine Untergruppe aller Autokollineationen der $M_{\binom{k+1}{2}}$ einzuteilen. Diese Untergruppe wird induziert durch alle Projektivitäten der Q_{2k} in sich, die gleichzeitig einen gewissen Q_{2k-1} -Schnitt derselben in sich überführen. Wir werden im folgenden das erste Klassifikationsproblem in den niedrigsten Fällen bis zu $k=5$ im Kap. 3 lösen. Zuvor wird jedoch im Kap. 1 eine Reihe einfacher Tatsachen über die $M_{\binom{k+1}{2}}$ zusammengestellt und im Kap. 2 werden gewisse allgemeine Eigenschaften aller S_k^I , bzw. aller S_{k-1} -Komplexe mit zugehörigen Begriffsbildungen gebracht.

Auf den Q_{2k} mit ungeradem k schneiden sich bekanntlich zwei S_k^I im allgemeinen nicht. Es entsteht dann folgende interessante Begriffsbildung, die auch ihr Analogon in den linearen Räumen besitzt (s. 7): Wir nennen eine Menge von S_{2h+1}^I der Q_{4h+2} inzidenz-abgeschlossen wenn alle S_{2h+1}^I der Menge sich schneiden (und dann gleich mindestens in einer Geraden, wie man weiss) und wenn es keinen weiteren S_{2h+1}^I ausserhalb der Menge gibt, der auch alle S_{2h+1}^I der Menge schneidet.

Die Frage der inzidenzabgeschlossenen Systeme von S_{2h+1}^I auf Q_{4h+2} wird im Kap. 1 kurz berührt werden, da es auf eine interessante Fragestellung bei des $M_{\binom{2h+2}{2}}$ führt.

Wie stets, sollen unsere Indizes bei uns Dimensionen bezeichnen; ist ferner F_a irgendeine den S_m aufspannende Mannigfaltigkeit, so werde dieser S_m auch mit $\langle F_a \rangle$ oder $\langle F_a \rangle_m$ bezeichnet.

KAP. 1. - Allgemeine Eigenschaften der $M_{\binom{k+1}{2}}$ und der Q_{2k} ; inzidenzabgeschlossene Systeme auf der Q_{2k} .

In den einfachsten Fällen ist

bei $k=1$: M_1 die Gerade S_1

bei $k=2$: M_3 der S_3

bei $k=3$: M_6 wieder eine Quadrik Q_6 .

Wir fassen in diesem Kap. die Punkte der $M_{\binom{k+1}{2}}$ stets als Bilder aller S_k^I der Q_{2k} auf. Ist nun A_h ($h < k$) ein fester Raum der Q_{2k} und A'_{2k-h} der zu A_h bezügl. der Q_{2k} polare Raum, so schneidet bekanntlich A'_{2k-h} aus Q_{2k} einen Kegel K_{2k-h-1} aus, der A_h als Spitzenraum besitzt. Alle durch A_h gehenden Räume der Q_{2k} gehören K_{2k-h-1} an, insbesondere erhält man alle S_k^I durch A_h dadurch, dass man die Räume S_{k-h-1}^I einer $Q_{2k-2h-2}$ mit A_h verbindet. Wir sagen dafür auch kurz: Die S_k^I durch A_h verhalten sich wie die S_{k-h-1}^I einer $Q_{2k-2h-2}$. Innerhalb der $M_{\binom{k+1}{2}}$ gibt es mithin ebensoviele derartige verschiedene $M_{\binom{k-h}{2}}$ wie es S_h auf der Q_{2k} gibt. Für $h = k - 3$ sind diese $M_{\binom{k-h}{2}}$ lineare Räume S_3 der $M_{\binom{k+1}{2}}$, die wir U_3^{II} nennen wollen und die mithin den S_{k-3} der Q_{2k} zuzuordnen sind.

Eine weitere, davon verschiedene Schar von Räumen der $M_{\binom{k+1}{2}}$ sind die U_k^I . Ein U_k^I ist die Menge der Bildpunkte aller derjenigen S_k^I , die einen festen S_k^{II} höchst speziell, d. h. $k - 1$ -dimensional treffen. Jedem S_k^{II} der Q_{2k} ist mithin ein derartiger U_k^I zugeordnet, so dass man die U_k^I der $M_{\binom{k+1}{2}}$ auch wieder auf die Punkte einer anderen $M_{\binom{k+1}{2}}$ abbilden kann.

Alle U_k^I und U_3^{II} durch einen festen Punkt P_0 der $M_{\binom{k+1}{2}}$ erhält man dadurch, dass man die U_{k-1}^I und U_2^{II} einer Grassmannschen $G_{k,k-2}$, d. h. der Bildmenge aller S_{k-2} eines S_k , mit P_0 verbindet. Dieser dadurch erzeugte, sog. $G_{k,k-2}$ -Kegel spannt den Tangentialraum $T_{\binom{k+1}{2}}$ der $M_{\binom{k+2}{2}}$ im Punkte P_0 auf.

Die Punkte dieses Grassmannkegels, wie ihn auch nennen wollen, sind die Bilder aller derjenigen S_k^I , die einen festen S_k^I , und zwar den Bildraum der Kegelspitze P_0 , mindestens $k-2$ -dimensional schneiden.

Bemerkenswert ist ferner das Auftreten Grassmannscher $G_{k,h}$ innerhalb der $M_{\binom{k+1}{2}}$. Gegeben seien die beiden windschiefen Räume A_k und B_k der Q_{2k} . Dann werden alle Räume $S_k = A_h \cup B_{k-h-1}$ der Q_{2k} mit $A_h \subset A_k$, $B_{k-h-1} \subset B_k$, sofern sie der Schar I angehören, auf die Punkte einer $G_{k,h} \subset M_{\binom{k+1}{2}}$ abgebildet.

Wichtig ist ferner noch das Auftreten von rationalen Normkurven innerhalb der $M_{\binom{k+1}{2}}$. Darüber zeigen wir folgenden später benötigten

SATZ 1. – Auf den Q_{4h+2} gibt es Mengen von $\infty^1 S_{2h+1}^I$, die eine Segresche $S_{2h+1,1}$ erzeugen. Diese werden auf die Punkte einer rationalen Normkurve V_1^{h+1} innerhalb von $M_{\binom{2h+2}{2}}$ abgebildet. Der Raum $\langle V_1^{h+1} \rangle$ einer solchen V_1^{h+1} hat mit $M_{\binom{2h+2}{2}}$ nur die Punkte von V_1^{h+1} gemein.

Beweis. – Aus der Theorie der Q_{4h+2} entnehmen wir die Existenz der erwähnten aus S_{2h+1}^I erzeugten $S_{2h+1,1}$. Die Grassmannbilder derselben sind

Normkurven V_1^{2h+2} . Wegen des bekannten Zusammenhanges zwischen dem Grassmannbild aller S_k^I der Q_{2k} und der $M_{\binom{k+1}{2}}$ (s. 2) ist die Bildkurve der $\infty^1 S_{2h+1}^I$ dann eine V_1^{h+1} . Die weitere Behauptung ist gewiss richtig für $h=0$, so dass wir Induktion nach h ansetzen können. Gegeben sei dann eine Q_{2h+2} mit einer aus S_{2h+1}^I erzeugten $S_{2h+1,1}$. Wir nehmen die Punkte A und B , auf denen wir die rekursive Erzeugung der zugehörigen $M_{\binom{2h+1}{2}}$ (s. 1 und 2) aufbauen, in $S_{2h+1,1}$ an. Dann ergeben die $\infty^1 S_{2h+1}^I$, mit A und B verbunden, je einen Kegel mit Geradenspitze über einer $S_{2h-1,1}$. Auf die $M_{\binom{2h+2}{2}}$ übertragen, ergibt dies folgende Tatsachen: Die Bildkurve V_1^{h+1} der $\infty^1 S_{2h+1}^I$ unserer $S_{2h+1,1}$ verbindet je einen Punkt aus $M_{\binom{2h+1}{2}}^A$ und $M_{\binom{2h+1}{2}}^B$, und die V_1^{h+1} treffenden Geraden unserer Erzeugung, bilden eine rationale Normregelfläche, die je eine in $M_{\binom{2h+1}{2}}^A$ und $M_{\binom{2h+1}{2}}^B$ liegende Leitkurve V_1^h besitzt. Die Behauptung über den Raum $\langle V_1^{h+1} \rangle$ ergibt sich dann sofort aus derjenigen für die beiden V_1^h .

Die $M_{\binom{k+1}{2}}$ spannt einen Raum von $2^k - 1$ Dimensionen auf. Mit ihr ist in natürlicher Weise ein dazu duales Gebilde $\widehat{M}_{\binom{k+1}{2}}$ von $\infty^{\binom{k+1}{2}}$ Hyperebenen U_{2^k-2} des $\langle M_{\binom{k+1}{2}} \rangle$ verknüpft. Die U_{2^k-2} von $\widehat{M}_{\binom{k+1}{2}}$ sind dadurch gekennzeichnet, dass sie mit $M_{\binom{k+1}{2}}$ genau die Menge der Bildpunkte aller derjenigen S_k^I gemein haben, die einen festen S_k^I (bei ungeradem k), bzw. festem S_k^{II} (bei geradem k) treffen. Das mit $\widehat{M}_{\binom{k+1}{2}}$ in analoger Weise verknüpfte duale Gebilde ist wieder $M_{\binom{k+1}{2}}$. Bei geradem k induziert jede Autokollineation der Q_{2k} von der zweiten Schar, d. h. eine solche, durch die S_k^I in S_k^{II} übergehen, eine Korrelation im Raume S_{2^k-1} von $M_{\binom{k+1}{2}}$ in $\widehat{M}_{\binom{k+1}{2}}$. Bei ungeradem k wird dies durch die Autokollineationen der Q_{2k} von der ersten Schar bewirkt, die die S_k^I und S_k^{II} nicht vertauschen. Unter diesen, die für sich ja bereits eine Gruppe bilden, ist die Identität enthalten. Diese induziert eine ausgezeichnete involutorische Korrelation von $M_{\binom{k+1}{2}}$ in $\widehat{M}_{\binom{k+1}{2}}$, die bei $k \equiv 1 \pmod{4}$ eine Nullkorrelation und bei $k \equiv 3 \pmod{4}$ eine Polarität ist. Demnach ist bei $k \equiv 3 \pmod{4}$ mit der $M_{\binom{k+1}{2}}$ eine Quadrik Q_{2^k-2} verbunden, die sog. Fundamentalquadrik. Bei $k=3$ fällt diese noch mit der M_6 selber zusammen, bei $k > 3$ ist sie eine ausgezeichnete durch $M_{\binom{k+1}{2}}$ gehende Hyperfläche.

Es sind demnach zueinander gleichwertige Aufgaben, entweder die Hyperebenen oder die Punkte des S_{2^k-1} bezüglich der Gruppe aller Autokollineationen der $M_{\binom{k+1}{2}}$ (oder auch $\widehat{M}_{\binom{k+1}{2}}$) zu klassifizieren, was im Kap. 3 von Wichtigkeit sein wird.

Im Fall ungerader k führt die Existenz der oben erwähnten ausgezeichneten Polarität, bzw. Nullkorrelation, wofür wir auch «Fundamentalkorre-

lation π » sagen wollen, zu weiteren interessanten Fragen, wovon wir auf folgende hinweisen wollen:

π besitzt als involutorische Korrelation des S_{2^k-1} selbstpolare Räume der Dimension $2^{k-1} - 1$, die im Falle $k \equiv 3 \pmod{4}$ mit den auf der Fundamentalquadrik Q_{2^k-2} liegenden Räumen der höchsten Dimension zusammenfallen. Wir interessieren uns insbesondere für solche selbstpolaren S_{2^k-1-1} , die durch Punkte der $M_{\binom{k+1}{2}}$ aufgespannt werden. S_{2^k-1-1} sei ein solcher

Raum und $\mathfrak{A}$ die Menge derjenigen S_k^I der Q_{2k} , deren Bildpunkte auf S_{2^k-1-1} liegen. $\mathfrak{A}$ heisst dann « inzidenzabgeschlossen ». Diese Bezeichnung rechtfertigt sich durch die folgenden beiden, sofort einsichtigen Eigenschaften von $\mathfrak{A}$: 1) Alle S_k^I aus $\mathfrak{A}$ schneiden einander, 2) Es gibt keinen Raum S_k^I ausserhalb der Menge $\mathfrak{A}$, der gleichfalls alle S_k^I von $\mathfrak{A}$ schneidet.

Es entsteht nun die interessante Aufgabe, alle verschiedenen Typen derartiger inzidenzabgeschlossener Mengen von S_k^I der Q_{2k} (k ungerade) anzugeben. Wir begnügen uns an dieser Stelle, auf folgende, in jeder Q_{4g+2} vorhandenen Mengen hinzuweisen:

SATZ. 2. – In jeder Q_{4g+2} gibt es folgende beiden Typen von irreduziblen, inzidenzabgeschlossenen S_{2g+1}^I -Mengen:

a) Gesamtheit aller S_{2g+1}^I durch einen festen Punkt der Q_{4g+2} .

b) Gesamtheit aller S_{2g+1}^I , die einen festen A_{2g+1}^{II} bei ungeradem g , bzw. A_{2g+1}^I bei geradem g , mindestens $g + 1$ -dimensional treffen.

Beweis. – Die Räume der Gesamtheit a) werden auf die Punkte einer $M_{\binom{2g+1}{2}}$ innerhalb der $M_{\binom{2g+2}{2}}$ abgebildet, und die $M_{\binom{2g+1}{2}}$ spannt einen $S_{2^{2g}-1}$ innerhalb des $S_{2^{2g+1}-1}$ auf. Von einer Menge des Typs b) ist ebenfalls sofort zu sehen, dass die zugehörigen S_{2g+1}^I alle einander schneiden, ohne dass das System noch durch einen weiteren, auf der Q_{4g+2} liegenden Raum der gleichen Eigenschaft erweitert werden kann. Wir haben uns noch davon zu überzeugen, dass die Bildpunkte einer Menge b) einen $S_{2^{2g}-1}$ innerhalb des $S_{2^{2g+1}-1}$ aufspannen. Dazu geben wir uns einen zu A_{2g+1} windschiefen Raum B_{2g+1} der Q_{4g+2} vor und spannen die Menge der Bildpunkte von b) durch folgende Bildmengen auf:

1) g gerade

$G_{2g+1, g-1}$ als Bildmenge (*) aller $S_{2g+1}^I = A_{g+1} \cup B_{g-1}$

$G_{2g+1, g-3}$ als Bildmenge aller $S_{2g+1}^I = A_{g+3} \cup B_{g-3}$

.....

$G_{2g+1, 1}$ als Bildmenge aller $S_{2g+1}^I = A_{2g-1} \cup B_1$

$G_{2g+1, -1}$, d. h. den Bildpunkt von A_{2g+1}

(*) Unter A_ν , B_μ sind hier stets Teilräume von A_{2g+1} , B_{2g+1} von der Dimension des Index zu verstehen.

2) g ungerade

.....
 $G_{2g+1,2}$ als Bildmenge aller $S_{2g+1}^I = A_{2g-2} \cup B_2$
 $G_{2g+1,0}$ als Bildmenge aller $S_{2g+1}^I = A_{2g} \cup B_0$.

Wegen der bekannten Formeln

$$2^{2g} = \binom{2g+2}{g} + \binom{2g+2}{g-2} + \dots + \binom{2g+2}{3} + \binom{2g+2}{1} \quad (g \text{ ungerade})$$

$$2^{2g} = \binom{2g+2}{g} + \binom{2g+2}{g-2} + \dots + \binom{2g+2}{2} + \binom{2g+2}{0} \quad (g \text{ gerade})$$

ist der Verbindungsraum aller hierbei auftretenden Grassmannräume $\langle G_{2g+1,v} \rangle$ aber gerade ein Raum von $2^{2g} - 1$ Dimensionen.

KAP. 2 - Allgemeine Eigenschaften der linearen S_k^I -Komplexe der Q_{2k} und der S_{k-1} -Komplexe der Q_{2k-1} .

Zufolge der in der Einleitung gegebenen Definition wollen wir unter einem linearen S_k^I -Komplex auf der Q_{2k} , bzw. S_{k-1} -Komplex der Q_{2k-1} die Bildmenge der Punkte eines hyper ebenen Schnitts des $M_{\binom{k+1}{2}}$ verstehen. Diese linearen Komplexe — auch kurz Komplexe genannt — haben einige allgemeine Eigenschaften, die wir jetzt betrachten wollen:

Ist P_h ($h < k$) ein fester Raum des Q_{2k} , so werden, wie wir in Kap. 1 erwähnten, sämtliche S_k^I der Q_{2k} durch P_h auf die Punkte einer $M_{\binom{k-h}{2}}^P$ abgebildet. Ist nun S_{k-2}^I diejenige Hyperebene im $\langle M_{\binom{k+1}{2}} \rangle$, welche den Komplex definiert, so bestehen die folgenden beiden Möglichkeiten:

- a) S_{k-2}^I enthält $M_{\binom{k-h}{2}}^P$ nicht ganz
- b) S_{k-2}^I enthält $M_{\binom{k-h}{2}}^P$ ganz.

Im Fall b), wo also jeder $S_k^I \supset P_h$ zum Komplex gehört, wollen wir auch sagen: P_h ist ein singulärer Raum des Komplexes. Ebenso soll ein P_h der Q_{2k-1} singulär heissen, wenn jeder $S_{k-1} \supset P_h$ zum Komplex gehört. Dann ergibt sich unmittelbar aus der Definition:

Mit P_h ist auch jeder $P_g \subset Q_{2k}$ mit $h < g < k$ und $P_h \subset P_g$ gleichfalls singulär, das Gleiche gilt für jeden der Q_{2k-1} angehörigen Oberraum eines Komplexraumes S_{k-1} der Q_{2k-1} . Die Komplexräume S_k^I der Q_{2k} bzw. S_{k-1} der Q_{2k-1} könnte man hiernach folgerichtig auch singulär bezügl. des Komplexes nennen; doch ist diese Bezeichnung überflüssig.

Wichtig für die Komplexe sind insbesondere diejenigen Punkte der Q_{2k} , bzw. der Q_{2k-1} , die in dem soeben erwähnten Sinne singulär sind. Hat nun P_h der Q_{2k} , bzw. der Q_{2k-1} die Eigenschaft, dass jeder seiner Punkte singulär

ist, so ist gewiss auch der ganze P_h in dem soeben gekennzeichneten Sinne singulär. Denn wenn alle S_k^I zum Komplex gehören, dann gilt das gewiss auch von allen S_k^I (bzw. S_{k-1}) der Quadrik, die P_h enthalten. Das Umgekehrte braucht aber nicht der Fall zu sein. Wir wollen daher diejenigen P_h der Quadrik, welche die Eigenschaft haben, dass alle ihre Punkte singulär sind, auch « stark singulär » nennen.

Für weitere Untersuchungen über lineare S_k^I -, bzw. S_{k-1} -Komplexe empfiehlt es sich, die singulären Räume noch feiner in Klassen zu unterteilen und alle diejenigen S_h in eine Klasse zu legen, die die Eigenschaft haben, dass alle $S_g \subset S_h$ ($g < h$), aber nicht alle S_{g-1} bei $g > 0$ gewöhnlich singulär sind.

KAP. 3. - Klassifikation der linearen S_k^I -Komplexe bis zu $k=5$.

Wir klassifizieren jetzt die S_k^I -Komplexe bis zu $k=5$. In den Fällen $k=1, 2, 3$ sind die S_k^I -Komplexe rasch erledigt. M_1 ist die Gerade als Bild aller S_1^I eines Regulus; ein S_1^I -Komplex ist dann nichts anderes, als eine einzelne Gerade dieses Regulus. M_3 ist ebenfalls ein linearer Raum S_3 als Bild aller S_2^I einer Q_4 . Diese Q_4 fasse man zweckmässig als die Plückersche Bildmenge aller Geraden eines projektiven P_3 auf, so dass die S_2^I den Geraden je eines Bündels entsprechen, d. h. Punkten des P_3 zugeordnet sind. Diesen P_3 lasse man dann aber wieder mit M_3 zusammenfallen. Die Ebenen eines S_2^I -Komplexes sind ihrer Definition nach den Punkten einer Ebene $E_2 \subset M_3$ zugeordnet, d. h. es ergibt sich vermittels der liniengeometrischen Übertragung sofort folgende Aussage:

Ein S_2^I -Komplex der Q_4 besteht aus der Gesamtheit aller S_2^I , die eine feste Ebene S_2^{II} der anderen Schar treffen, d. h. damit auch von selber gleich in einer Geraden schneiden.

Bei $k=3$ ist M_6 wieder eine Quadrik Q_6 , und bekanntlich gibt es bezüglich einer komplexen Q_6 nur zwei projektiv verschiedene Typen von Hyperebenen, solche, die Q_6 nicht berühren und die Tangentialhyperebenen. Demnach gibt es nur folgende 2 Typen von S_3^I -Komplexen:

a) Treffkomplexe aller einen festen S_3^I schneidenden S_3^I .

b) Allgemeine Komplexe. Der allgemeine Komplex besitzt keine singulären Punkte, denn das würde sofort bedeuten, dass die zugeordnete Hyperebene mit Q_6 einen S_3 gemein hat, d. h. die Q_6 berührt. Dagegen existieren singuläre Geraden und Ebenen.

Beim Aufbau des linearen S_3^I -Komplexes beachte man, dass durch den ihn definierenden hyperebenen Schnitt P_6 jedem U_3 der Q_6 ein U_3^{II} eindeutig zugeordnet ist, nämlich dann, wenn der U_3^I und der U_3^{II} sich in einer auf P_6 liegenden Ebene schneiden. Da die U_3^I und U_3^{II} wiederum je den

Punkten und S_3^{II} der Q_6 zugeordnet sind, definiert unser allgemeiner Komplex eine eindeutige Beziehung zwischen den Punkten und S_3^{II} der Q_6 , wobei jeder Punkt mit seinem zugeordneten S_3^{II} inzidiert. Diese zur Nullkorrelation des S_3 ähnliche Korrespondenz ist bereits von Engel entdeckt und seither mehrfach untersucht worden (s. 5, 8, 10).

Bei $k = 4$ spannt die M_{10} den S_{15} auf. Die M_{10} sei Bildmenge der $\infty^{10} S_4^I$ einer Q_8 . Gemäss Kap. 1 werden dann die durch einen festen Punkt der Q_8 gehenden S_4^I auf die die Punkte einer M_6 auf M_{10} abgebildet. Diese Quadriken M_6 , von denen es ∞^8 gibt, in Zuordnung zu den Punkten der Q_8 , spannen Räume $\langle M_6 \rangle_7$ auf. Über diese zeigen wir folgenden

SATZ 3. – Die ∞^8 Räume $\langle M_6 \rangle$ innerhalb des Spinorenraumes S_{15} spannen ganz S_{15} auf.

Beweis. – Wir untersuchen, wie sich zwei M_6 der M_{10} zueinander verhalten können. Den Punkten A und B der Q_8 mögen die Quadriken M_6^A und M_6^B innerhalb der M_{10} zugeordnet sein.

Sind A und B nicht konjugiert in der Polarität der Q_8 , d. h. gehört die Gerade AB der Q_8 nicht an, so sind die Räume $\langle M_6^A \rangle_7$ und $\langle M_6^B \rangle_7$ punktfremd zueinander, wie aus der Erzeugung der M_{10} (s. 1, 2) sofort folgt. Gehört die Gerade $g = AB$ aber der Q_8 an, so haben M_6^A und M_6^B einen Raum U_3^{II} gemein, aber auch die ganzen Räume $\langle M_6^A \rangle_7$ und $\langle M_6^B \rangle_7$ können sich nur in U_3^{II} schneiden. Dies folgt gleichfalls aus der Erzeugung der M_{10} (s. 1, 2), wenn man diese etwa auf die Punkte A und C der Q_8 begründet, wobei C zu B in der Polarität der Q_8 konjugiert gewählt werde. Demnach treten als Schnittpunkte von Räumen $\langle M_6 \rangle_7$ nur solche auf, die bereits auf den M_6 , d. h. auf der M_{10} , liegen; der allgemeine Punkt eines Raumes M_6 , der nicht auf M_6 liegt, gehört, mithin nur diesem M_6 an, und demnach spannen alle $\infty^8 \langle M_6 \rangle_7$ daher eine Mannigfaltigkeit von 15 Dimensionen, d. h. wie behauptet, ganz S_{15} auf.

Zufolge dieses Satzes gibt es nur zwei wesentlich verschiedene Lagen von Punkten hinsichtlich der Gruppe aller Autokollineationen der M_{10} :

a) Punkte auf M_{10} ,

b) Punkte ausserhalb von M_{10} , die dann einem Raum $\langle M_6 \rangle_7$ eindeutig angehören. Dies bedeutet auch die Existenz von nur zwei Typen von S_4^I -Komplexen, die wir in folgendem Satz noch genauer beschreiben wollen:

SATZ 4. – Es gibt nur zwei Typen von S_4^I -Komplexen auf der Q_8 :

a) Treffkomplexe eines festen S_4^{II} .

b) Allgemeine S_4^I -Komplexe. Diese sind folgendermassen zu erzeugen: Man nehme einen festen Punkt A der Q_8 mit dem Tangentialkegel T_7^A . Dieser T_7^A werde durch Verbinden aller S_3^I einer Q_6 mit A erzeugt. Durch Verbinden aller $\infty^5 S_3^{II}$ eines S_3^{II} -Komplexes dieser Q_6 mit A mögen die $\infty^5 S_4^{II}$ durch A der Menge $\mathfrak{A}$ entstehen. Alle diejenigen $\infty^8 S_4^I$, die die S_4^{II} der

Menge $\mathfrak{A}$ dreidimensional treffen, bilden dann einen allgemeinen S_4^I -Komplex mit A als singulärem Punkt.

Beweis. – Es ist schon zuvor mit Hilfe von Satz 3 festgestellt worden, dass es nur 2 Typen von Punkten, d. h. auch nur 2 Typen von Hyperebenen S_{14} bezügl. der M_{10} geben kann. Es ist nur noch erforderlich, die geometrische Bedeutung eines S_{14} des allgemeinen Typs festzustellen. Ein Punkt allgemeiner Lage hatte die Eigenschaft, nur einem Raum $\langle M_6 \rangle_7$ anzugehören. Wegen der Selbstdualität der $\langle M_6 \rangle_7$ enthält der allgemeine S_{14} auch nur eine M_6 . Diese möge den Punkt A der Q_3 zugeordnet sein. B sei nur ein weiterer, nicht zu A in der Polarität konjugierter Punkt von Q_3 . Zur Geraden AB sei der Raum S_7' polar, der mit Q_3 die Quadrik Q_6^{AB} gemein haben möge. M_6^A und M_6^B seien die Bildmengen aller S_4^I je durch A und B ; dann spannen sie den S_{15} auf, und M_{10} wird aus M_6^A und M_6^B so erzeugt, wie es von mir genauer in (1, 2) beschrieben worden ist. Ein S_{14} , der M_6^A enthält, kann $\langle M_6^B \rangle$ nur in einem S_6 schneiden. Ist S_{14} von allgemeiner Art, so ist der Durchschnitt $S_6 \cap M_6^B$ wiederum eine nicht entartete Quadrik Q_5^B , die sich als Bildmenge aller S_4^I herausstellt, welche B mit allen S_3^I eines Komplexes in Q_6^{AB} verbinden. S_{14} enthält ausserdem ganz M_6^A und alle U_4^I , die Punkte von Q_5^B mit den ihnen zugeordneten U_3^{II} aus M_6^A , d. h. den U_3^{II} eines linearen Komplexes, verbinden. Diese $\infty^5 U_4^I$ sind aber den im Satz beschriebenen S_4^{II} der Q_3 zugeordnet. Man beachte die Ähnlichkeit der S_4^I -Komplexe der Q_3 mit den zuerst von CASTELNUOVO (s. 3) behandelten Geradenkomplexen des S_4 .

Bei den S_5^I -Komplexen der Q_{10} gibt es erstmalig mehr als 2 Typen zu unterscheiden. Die zugehörige Bildmenge aller S_5^I der Q_{10} ist zunächst die M_{15} des S_{31} . Bei der Suche nach Obermannigfaltigkeiten von M_{15} , die zugleich mit den Autokollineationen von M_{15} autokollinear in sich transformiert werden, kommt man zunächst von selber darauf, die von allen $\langle M_6 \rangle$ und allen $\langle M_{10} \rangle$ erzeugten Gebilde zu betrachten. Satz 3 lehrt uns sofort, dass beide Gebilde zusammenfallen; wir nennen sie Δ_{24} , da wir gleich sehen werden, dass es sich um eine Mannigfaltigkeit von 24 Dimensionen handelt. Eine weitere Teilmenge des S_{31} wird von allen T_{15} der M_{15} erzeugt. Das, was wir weiterhin über die beiden erwähnten Mannigfaltigkeiten benötigen werden, fassen wir in folgendem Satz zusammen:

SATZ. 5. – Die von den Räumen $\langle M_6 \rangle_7$ aller Teil- M_6 der M_{15} erzeugte Mannigfaltigkeit Δ_{24} fällt mit der von den $\langle M_{10} \rangle_{15}$ aller M_{10} der M_{15} erzeugten zusammen. Alle $\infty^{15} T_{15}$ der M_{15} erzeugen eine diese Δ_{24} enthaltende Hyperfläche D_{30} .

Beweis. – Zuzufolge Satz 1 überdecken die innerhalb eines festen $\langle M_{10} \rangle_{15}$ liegenden Räume $\langle M_6 \rangle_7$ diesen S_{15} ganz. Andererseits sind die M_{10} der M_{15} den Punkten der Q_{10} zugeordnet. M_{10}^A und M_{10}^B mögen den Punkten A und B der Q_{10} entsprechen. Dann folgt sofort aus der Erzeugung der M_{15} , dass

a) $\langle M_{10}^A \rangle$ und $\langle M_{10}^B \rangle$ windschief sind, wenn A und B nicht konjugiert in der Polarität sind

b) $\langle M_{10}^A \rangle \cap \langle M_{10}^B \rangle = \langle M_6 \rangle$, wenn die Gerade $g = AB$ zu Q_{10} gehört. M_6^g ist dann die Bildmenge aller S_5^I der Q_{10} , die g enthalten.

Hieraus folgt aber sofort, dass die $\infty^{10} \langle M_{10} \rangle_{15}$ nur eine Δ_{24} bilden, da durch jeden M_6 einer M_{10} insgesamt $\infty^1 M_{10}$ gehen, entsprechend den ∞^1 Punkten der Geraden g auf Q_{10} , denen M_6 zugeordnet ist.

Zum Beweise des zweiten Teils von Satz 5 hat man die verschiedenen Lagemöglichkeiten zweier Tangentialräume T_{15} der M_{15} zu diskutieren. Die T_{15} sind ihren Berührungspunkten, d. h. den S_5^I der Q_{10} eineindeutig zugeordnet. T_{15}^X und T_{15}^Y mögen die M_{15} in den Punkten X_0 , bzw. Y_0 berühren, die ihrerseits Bilder der Räume X_5^I und Y_5^I auf Q_{10} sein mögen. Dann bestehen bekanntlich folgende Lagemöglichkeiten für X_5^I und Y_5^I :

a) X_5^I und Y_5^I sind windschief

b) $X_5^I \cap Y_5^I = Z_1$

c) $X_5^I \cap Y_5^I = Z_3$.

Im Falle a), der der allgemeinste ist, sind auch T_{15}^X und T_{15}^Y zueinander fremd. Denn man erzeuge, wie in (1, 2) beschrieben, die M_{15} durch Korrespondenz zwischen 2 Mannigfaltigkeiten M_{10}^A und M_{10}^B , nehme diese so an, dass X_0 in M_{10}^A und Y_0 in M_{10}^B liegt. Dann gilt

$$\begin{aligned} T_{15}^X \cap \langle M_{10}^A \rangle &= T_{10}^X, & T_{15}^Y \cap \langle M_{10}^B \rangle &= T_{10}^Y \\ T_{15}^X \cap \langle M_{10}^B \rangle &= V_4, & T_{15}^Y \cap \langle M_{10}^A \rangle &= U_4, \end{aligned}$$

wobei T_{10}^X und T_{10}^Y je die Tangentialräume an M_{10}^A und M_{10}^B in den Punkten X und Y sind und ferner U_4 die Bildmenge aller derjenigen S_5^I bedeutet, die durch A gehen und X_5^I dreidimensional treffen. V_4 hat analoge Bedeutung. Jetzt erweisen sich aber T_{10}^X und U_4 sowie T_{10}^Y und V_4 je als punktfremd zueinander. Dies folgt sofort aus folgender Tatsache der Q_8 -Geometrie: Es gibt keinen S_4^I der Q_8 , der einen Raum A_4^I zweidimensional und gleichzeitig einen zu A_4^I windschiefen Raum B_4^{II} dreidimensional trifft.

Im Fall b) gibt es Räume S_5^I , die X_5^I und Y_5^I je dreidimensional treffen. Diese müssen, wie man sich leicht überlegt, alle durch die Gerade Z_1 , gehen, und sie verhalten sich so wie die S_3^I einer Q_6 , die 2 windschiefe Räume X_3^I und Y_3^I derselben treffen, d. h. aber, sie werden auf die Punkte einer $G_{3,1}$ innerhalb der M_{15} abgebildet. Nimmt man die Bildpunkte X_0 und Y_0 von X_5^I und Y_5^I wie bei der Überlegung zum Fall a) wieder je auf M_{10}^A und M_{10}^B an, so stellt man fest, dass U_4 und T_{10}^X sowie V_4 und T_{10}^Y jetzt nicht mehr punktfremd sind, sondern je eine Ebene gemein haben, woraus folgt, dass der Schnitt $T_{15}^X \cap T_{15}^Y$ fünfdimensional, d. h. auch nicht umfassender als der zuvor schon festgestellte $\langle G_{3,1} \rangle_5$ ist.

Im Fall c) kann man ebenfalls X_0 und Y_0 je in M_{10}^A und M_{10}^B annehmen. Dann folgt durch eine analoge Überlegung, dass jetzt $U_4 \subset T_{10}^X$ und $V_4 \subset T_{10}^Y$ gilt, so dass

$$T_{15}^X \cap T_{15}^Y = \langle U_4 \cup V_4 \rangle,$$

ist. Von diesem Schnittraum S_9 überzeugt man sich auch noch auf folgende Weise: Beim Fall c) sind X_0 und Y_0 durch eine auf M_{15} liegende Gerade G_1 verbunden, und man weiss aus der Theorie der M_{15} (s. 1), dass die durch G_1 gehenden U_5^I der M_{15} , die ja gewiss den Tangential- T_{15} aller Punkte von G_1 angehören, einen Kegel L_6 mit der Spitze G_1 über einer Segreschen $S_{3,1}$ bilden, d. h. einen S_9 aufspannen.

T_{15}^X schneidet nun die M_{15} in einen $G_{5,1}$ -Kegel K^Y mit dem Berührungspunkt X_0 als Spitze.

Wir haben soeben festgestellt, dass als Schnitträume von T_{15}^X mit anderen T_{15}^Y nur auftreten können: Räume $\langle G_{3,1} \rangle$, wo $G_{3,1} \subset K^Y$ und Segrekegel L_6 , die auch X_0 enthalten und die auch dadurch erklärt werden können, dass man einen Tangentialraum T_8 der $G_{5,1}$ mit X_0 verbindet. Nun weiss man aus der Theorie der $G_{5,1}$, dass die $\infty^8 T_8$ der $G_{5,1}$ dieselbe Hyperfläche aufspannen wie die ∞^8 Räume $\langle G_{3,1} \rangle$ aller $G_{3,1} \subset G_{5,1}$. Hieraus folgt unmittelbar, dass ein allgemeiner Punkt eines T_{15} der M_{15} nur diesem und keinem weiteren Tangential- T_{15} angehört; das heisst jedoch, alle $\infty^{15} T_{15}$ erzeugen, wie behauptet, eine Hyperfläche D_{30} .

Es ergeben sich nunmehr folgende 4 gewiss verschiedene Möglichkeiten wachsender Spezialisierung der Lage eines Punktes P_0 im S_{31} bezüglich der M_{15} :

- a) P_0 gehört nicht zu D_{30}
- b) P_0 gehört zu D_{30} , aber nicht zu Δ_{24}
- c) P_0 gehört zu Δ_{24} , aber nicht zu M_{15}
- d) P_0 gehört zu M_{15} .

Um die Gleichberechtigung aller dieser Lagen bezüglich der Gruppe der Autokollineationen von M_{15} zu zeigen, benötigen wir noch folgenden Satz:

SATZ. 6. - Die Gesamtheit aller Sehnen der M_{15} überdeckt den S_{31} im allgemeinen einfach.

Beweis. - Zunächst bemerken wir, dass die Sehnen der Quadrik M_6 natürlich den Raum $\langle M_6 \rangle$ ganz erfüllen und damit auch zufolge Satz 2 die Sehnen einer M_{10} ganz $\langle M_{10} \rangle$. Demnach enthält die Menge der Punkte aller Sehnen der M_{15} die Mannigfaltigkeit Δ_{24} als Teilmenge. Wir haben uns jetzt nur noch davon zu überzeugen, dass durch einen allgemeinen Punkt einer allgemeinen Sehne nicht noch eine weitere Sehne geht. Dazu nehmen wir an, dass die beiden Sehnen s, s' mit den Stützpunkten X_0, Y_0 und X'_0, Y'_0 sich schneiden. Die Allgemeinheit von s bedingt, dass die X_0 und Y_0 zugeordneten Räume X_5 und Y_5 der Q_{10} keinen Durchschnitt haben. Das Gleiche gilt auch

für die X_0' und Y_0' zugeordneten X_5' und Y_5' . Angenommen, X_5 und X_5' schnitten sich. Dann basieren wir auf einem Punkt A des Durchschnitts $X_5 \cap X_5'$ sowie einem Punkt B von Y_5 eine Erzeugung der M_{15} und stellen fest, dass der Verbindungsraum $\langle M_{10}^A \cup Y_0 \rangle$ ausserhalb von M_{10}^A nur noch einen Y_0 enthaltenden U_5 mit M_{15} gemein hat, in dem notwendigerweise auch Y_0' liegen müsste. Hieraus folgt weiterhin, dass Y_5 und Y_5' sich dreidimensional schneiden, da die Verbindungsgerade $G_1^Y = Y_0 Y_0'$ ganz aus Punkten der M_{15} besteht. Durch dieselbe Überlegung ergibt sich, dass auch die Gerade $G_1^X = X_0 X_0'$ ganz zu M_{15} gehört, d. h. dem Schnittpunkt $H = G_1^X \cap G_1^Y$ entspräche auf Q_{10} ein Raum S_5^I , der sowohl X_5 als auch Y_5 dreidimensional schneidet. Dies ist aber unvereinbar damit, dass X_5 und Y_5 windschief zueinander sind.

Jetzt ergibt sich leicht die Klassifikation der S_5^I -Komplexe der Q_{10} , die wir in folgendem Satz zusammenfassen:

SATZ. 7. – Es gibt folgende 4 verschiedene Typen wachsender Spezialisierung von S_5^I -Komplexen der Q_{10} , die je untereinander äquivalent sind:

a) Allgemeine Komplexe, die man auch dadurch kennzeichnen kann, dass sie keinen S_5^I enthalten, dessen Teil- S_3 sämtlich singulär sind.

b) Komplexe ohne singulären Punkt, die aber einen S_5^I enthalten, dessen S_3 sämtlich singulär sind.

c) Komplexe, die einen singulären Punkt und damit auch gleich eine stark singuläre Gerade von singulären Punkten, aber keine Ebene aus solchen Punkten enthalten.

d) Treffkomplexe, die aus allen S_5^I bestehen, die einen festen Raum A_5^I treffen, Man kann auch sagen, die Komplexe dieser Art sind dadurch gekennzeichnet, mehr als eine Gerade und damit gleich einen A_5^I aus singulären Punkten zu besitzen.

Beweis. – Wir haben bereits festgestellt, dass es 4 gewiss verschiedene Lagemöglichkeiten eines Punktes bezügl. der M_{15} gibt. Wir haben uns jetzt noch davon zu überzeugen, dass die Punkte einer Klasse untereinander bezüglich der Gruppe der Autokollineationen der M_{15} äquivalent sind. Dazu benutzen wir folgende aus der Theorie der Q_{10} leicht herleitbare Tatsache: $S_{5,1}$ und $\tilde{S}_{5,1}$ je mit den erzeugenden Räumen A_5, B_5, C_5 sowie $\tilde{A}_5, \tilde{B}_5, \tilde{C}_5$ seien gegeben. Dann gibt es Kollineationen der Q_{10} in sich, wodurch A_5, B_5, C_5 je in $\tilde{A}_5, \tilde{B}_5, \tilde{C}_5$ übergehen. Auf die M_{15} übertragen, besagt dies folgendes: Zwei rationale Normkurven V_1^3 und $\tilde{V}_1^3$ der M_{15} (s. Satz 1), können auf ∞^3 verschiedene, d. h. auf alle überhaupt möglichen Weisen auch durch Autokollineationen der M_{15} ineinander transformiert werden. Dann folgt aus der Theorie der rationalen Normkurven V_1^3 aber weiter: Ein von den beiden Kurvenpunkten verschiedener Punkt einer Sehne der V_1^3 kann in einen gleichfalls allgemeinen Punkt einer Sehne der $\tilde{V}_1^3$ durch Autokollineationen der M_{15} transformiert werden. Das Gleiche gilt von je einem vom Berührungs-

punkt verschiedenen Punkt einer Tangente an V_1^3 und $\bar{V}_1^3$. Hierin liegt aber die Äquivalenz aller Punkte der Klassen $a)$ und $b)$. Die Äquivalenz aller Punkte der Klasse $c)$ folgt daraus, dass durch unsere Gruppe zwei Teilmengen M_6 und $\tilde{M}_6$ der M_{15} auf alle projektiv möglichen Weisen einander transformiert werden können. Ferner sind alle Punkte der Klasse $d)$, d. h. der M_{15} selber, gewiss gleichberechtigt.

Die weiterhin im Satz angegebene Beschreibung der Komplexe ergibt sich leicht durch Übergang zum Dualen. Bei der Dualisierung der Klassen $b)$ und $c)$ beachte man am besten, dass die T_{15} und $\langle M_{10} \rangle$ sich je selber dual gegenüberstehen, d. h. man hat statt eines allgemeinen Punktes eines T_{15} oder eines $\langle M_{10} \rangle$ allgemeine Hyperebenen durch diese Räume zu nehmen.

Aufgrund der bekannten Bedeutung von T_{15} und M_{10} für die S_5^I -Geometrie (s. Kap. 1) folgt die angegebene Beschreibung der zugehörigen S_5^I -Komplexe unmittelbar.

Die Beschreibung der allgemeinen Komplexe des Typs $a)$ ist nur durch eine negative Aussage gemacht worden. Es empfiehlt sich, diese Beschreibung durch positive Aussagen zu ergänzen, worauf wir jedoch hier nicht eingehen können.

LITERATUR

- [1] W. BURAU, *Grundmannigfaltigkeiten der projektiven Geometrie*, Kap. IV, «Collect. Math.», vol. 5 (1952), p. 113-227.
- [2] — — *Kennzeichnung der einfachsten Punktmodelle für die linearen Räume auf Hyperquadriken*, «Rend. di Mat. Roma», Serie V, vol. 14 (1955), p. 1-22.
- [3] G. CASTELNUOVO, *Ricerche di geometria della retta nello spazio a 4 dim.*, «Atti Ist. Ven.», ser. 7, t. 2 (1891), p. 855-901.
- [4] CL. CHEVALLEY, *The algebraic theory of spinors*, New York (1954).
- [5] F. ENGEL, *Ein neues, dem linearen Komplexe analoges Gebilde*, «Leipziger Berichte», (1900), p. 63-76, 220-239.
- [6] C. LONGO, *Sui complessi lineari di piani*, «Annali di mat.», s. IV, 36 (1954).
- [7] U. MORIN, *Sui sistemi di piani a due a due incidenti*, «Atti Ist. Ven.», 89 (1930), p. 907-926.
- [8] B. SEGRE, *Sulla totalità degli spazi di dimensione massima...*, «Boll. Unione mat.», v. 17 (1938), p. 1-14.
- [9] C. SEGRE, *Sui complessi lineari di piani nello spazio a cinque dimensioni*, «Annali di mat.», (3), 27 (1917), p. 75-123.
- [10] E. A. WEISS, *Oklaven, Engelscher Komplex, Trialitätsprinzip*, «Math. Ztsch.», 44 (1938), p. 580-611.