Sulle k -calotte di uno spazio lineare finito.

Memoria di GIUSEPPE TALLINI (a Roma).

Sunto. - È dato dal penultimo capoverso del n. 1

PREFAZIONE

1. Sia $S_{n,q}$ uno spazio lineare proiettivo di dimensione n costruito su un qualunque corpo γ finito, di ordine q . È noto ⁽¹⁾ che γ risulta commutativo, isomorfo ad un campo di GALOIS e definito a meno di un isomorfismo dal suo ordine q , il quale deve essere un intero del tipo $q = p^h$, d'altronde qualunque, ove $p \geq 2$, $h \geq 1$ sono interi e p è primo (uguale alla caratteristica di γ); e che ogni $S_k \subseteq S_{n,q}$ ($k = 0, 1, \dots, n$) contiene $Q_k = \sum_{l=0}^k q^l$ ⁽²⁾ punti.

Denotiamo, con B. SEGRE, K -arco ⁽³⁾ di un $S_{2,q}$ un insieme di K punti di $S_{2,q}$ a tre a tre non allineati. È noto allora che una conica non degenera di $S_{2,q}$ costituisce un $(q+1)$ -arco. Si pone il problema di vedere se, viceversa, ogni $(q+1)$ -arco di $S_{2,q}$ risulti una conica. Al riguardo è intanto facile constatare che, se $p = 2$ e $q > 4$, esistono in $S_{2,q}$ dei $(q+1)$ -archi che non sono coniche. Ma B. SEGRE ha dimostrato ⁽⁴⁾ che questo è il solo caso d'eccezione, cioè che: *se $p \neq 2$, ogni $(q+1)$ -arco di $S_{2,q}$ è una conica*, giungendo così a caratterizzare con sole proprietà grafiche le coniche di un $S_{2,q}$ con $p \neq 2$.

Lo stesso autore ha esteso, in un successivo lavoro ⁽⁵⁾, questa caratterizzazione alle cubiche gobbe di un $S_{3,q}$ e pose problemi analoghi per le curve razionali normali di un $S_{n,q}$.

Le suddette ricerche furono l'argomento di alcune lezioni del Corso di « Geometria Superiore » tenute a Roma dal Prof. BENIAMINO SEGRE nel Maggio del 1955. In esse questi propose più in generale di caratterizzare, con sole proprietà grafiche, diversi tipi di varietà algebriche di un $S_{n,q}$,

⁽¹⁾ Cfr. per es. B. SEGRE [14], §§ 12, 17. (I numeri entro parentesi quadre si riferiscono alla bibliografia posta alla fine del presente lavoro).

⁽²⁾ Nel seguito assumeremo sempre per definizione $\sum_{l=0}^k q^l = Q_k$.

⁽³⁾ Cfr. B. SEGRE [19], p. 359.

⁽⁴⁾ Cfr. B. SEGRE [17], [18].

⁽⁵⁾ Cfr. B. SEGRE [19].

inaugurando così un nuovo campo di studi. L'interesse di tali ricerche resta avvalorato dall'ipotesi — ventilata da JÄRNEFELT e da altri autori — di possibili applicazioni delle geometrie finite alla fisica atomica e all'astronomia ⁽⁶⁾.

In questo campo di ricerche, le prime varietà che in ordine di difficoltà si presentano dopo le curve razionali normali sono le quadriche di un $S_{n,q}$. Ad esse abbiamo perciò rivolto il nostro studio. In due recenti Note Lincee ⁽⁷⁾ abbiamo enunciato alcuni risultati concernenti la caratterizzazione di quelle con sole proprietà grafiche, e nel presente lavoro vengono esposte compiutamente le relative dimostrazioni, ivi soltanto accennate. Rinviamo perciò alle suddette Note per quanto riguarda gli enunciati particolareggiati dei risultati ottenuti ed alcuni cenni sulla teoria delle quadriche negli spazi finiti, indispensabili per la comprensione del presente lavoro.

La più semplice proprietà di natura grafica di cui godono le quadriche di un $S_{n,q}$ è quella di contenere ogni retta avente più di due punti in comune con esse. Ci siamo proposti di vedere se e quando questa *sola* proprietà sia atta a caratterizzarle, ossia se ogni insieme di punti di $S_{n,q}$ che la soddisfi risulti una quadrica. Il problema ammette certo risposta negativa in un $S_{n,q}$ con $q=2$, perchè in tale spazio ogni retta possiede tre punti, onde un qualsiasi insieme di punti, se $q=2$, gode della suddetta proprietà; supporremo perciò sempre in seguito $q>2$. Ebbene, sotto questa ipotesi, si può, almeno in parte, dare risposta affermativa al problema propostoci.

Più precisamente, qui dimostreremo che *un insieme di K punti di $S_{n,q}$ (con $n \geq 3$) — che non coincide con tutto l' $S_{n,q}$ — godente della proprietà di contenere ogni retta avente più di due punti in comune con l'insieme, sotto l'ulteriore ipotesi che $K \geq Q_{n-1}$, o si compone di un iperpiano e un S_t ($t = -1, 0, 1, \dots, n-1$) oppure: se $p \neq 2$, risulta o una quadrica non specializzata di uno spazio di dimensione pari, o un cono quadrico proiettante dal suo spazio vertice una quadrica del tipo suddetto, o una quadrica non specializzata di tipo iperbolico di uno spazio di dimensioni dispari, oppure un cono quadrico di tipo iperbolico ⁽⁸⁾; se $p=2$, risulta o uno dei precedenti tipi di quadriche, o si compone di una delle quadriche suddette e di un opportuno spazio lineare, oppure risulta un cono proiettante da un S_{n-3} un $(q+1)$ -arco o un $(q+2)$ -arco di un piano sghembo con l' S_{n-3} . Si riescono così a caratterizzare graficamente tutti i tipi di quadriche di un $S_{n,q}$ escluse soltanto quelle — specializzate o no — di tipo ellittico.*

⁽⁶⁾ Si confrontino i recenti lavori seguenti di vari matematici finlandesi, aventi appunto lo scopo di adeguare la geometria degli spazi finiti alle applicazioni fisiche: G. JÄRNEFELT [5], [6]; G. JÄRNEFELT e P. KUSTAAHEIMO [7]; P. KUSTAAHEIMO [8], [9]; P. KUSTAAHEIMO e B. QVIST [10].

⁽⁷⁾ Cfr. G. TALLINI [20], [21].

⁽⁸⁾ Per la distinzione dei vari tipi di quadriche di un $S_{n,q}$ cfr. G. TALLINI [20].

Da quanto è stato ora detto si può già avere un'idea del gran numero di casi che è necessario discutere. Si noti inoltre che i due casi $p \neq 2$ e $p = 2$, per quanto presentino delle analogie, sono di fatto sostanzialmente differenti e occorre trattarli diversamente. Ciò anche perchè, mentre se $p \neq 2$ si può usufruire nelle dimostrazioni del teorema di B. SEGRE sui $(q+1)$ -archi piani, enunciato all'inizio di questo numero, se $p = 2$, venendo a cadere il suddetto teorema, si dovrà procedere indipendentemente da esso.

2. Per poter procedere più agevolmente nella trattazione definiamo *K-calotta* di un $S_{n,q}$, con $n \geq 2$ e $q = p^h > 2$, un insieme di K punti di un $S_{n,q}$ che contenga ogni retta avente più di due punti in comune con l'insieme e che non coincida con tutto l' $S_{n,q}$. Sia δ ($0 \leq \delta < n$) la massima dimensione degli spazi contenuti in una *K-calotta*, allora diremo che essa ha indice di specializzazione δ , e la indicheremo con $C(K, \delta)$.

Diremo che una retta di $S_{n,q}$, non appartenente alla *K-calotta*, risulta *secante*, *esterna*, *tangente* alla *K-calotta* a secondo che essa abbia due punti, nessuno o un sol punto in comune con essa.

Notiamo che una *K-calotta* di un $S_{2,q}$ risulta un *K-arco* piano oppure si compone di una retta e un $S_1(t = -1, 0, 1)$. In seguito supporremo perciò $n \geq 3$.

Per rispondere al problema enunciato al n. 1 siamo condotti a studiare le *K-calotte*, ciò che appunto facciamo nel presente lavoro.

Nel primo paragrafo studiamo talune semplici proprietà delle *K-calotte*, valide in generale, che ci occorreranno in seguito, inoltre dimostriamo alcuni risultati relativi alle calotte $C(K, 0)$ di $S_{n,q}$.

Nel secondo paragrafo studiamo le calotte $C(K, \delta)$ di $S_{n,q}$ con $K \geq Q_{n-1}$ e δ arbitrario, e dimostriamo che per esse K può soltanto assumere i valori seguenti: $K = Q_{n-1}$, $K = Q_{n-1} + q^\delta$, $K = Q_{n-1} + q^t$ con $0 \leq t < \delta$.

Nel terzo paragrafo studiamo esaurientemente le calotte $C(Q_{n-1}, \delta)$ di $S_{n,q}$, con δ arbitrario, e dimostriamo che per esse δ deve verificare le limitazioni $\frac{n}{2} - 1 \leq \delta \leq n - 1$. Inoltre proviamo che per $\delta = \frac{n}{2} - 1$ (nel qual caso n deve essere pari) la calotta risulta una quadrica non specializzata; per $\frac{n}{2} - 1 < \delta \leq n - 3$ (nel qual caso deve essere $n > 4$) la calotta risulta un cono quadrico proiettante da un $S_{2\delta-n+1}$ vertice una quadrica non specializzata di un $S_{2(n-\delta-1)}$ sghebo con l' $S_{2\delta-n+1}$; per $\delta = n - 2$ la calotta risulta un cono quadrico con vertice un S_{n-3} se $p \neq 2$, un cono proiettante da un S_{n-3} un $(q+1)$ -arco di un piano sghebo con l' S_{n-3} se $p = 2$; per $\delta = n - 1$ la calotta risulta un iperpiano di $S_{n,q}$.

Nel quarto paragrafo approfondiamo lo studio delle calotte $C(Q_{n-1} + q^\delta, \delta)$ di $S_{n,q}$ con δ arbitrario, e dimostriamo che per esse δ deve verificare le

limitazioni $\frac{n-1}{2} \leq \delta \leq n-1$. Stabiliamo inoltre che per $n=3$ la calotta risulta una quadrica rigata, o un cono proiettante da un punto V un $(q+2)$ -arco di un piano non passante per V (il secondo caso potendosi presentare soltanto se $p=2$) oppure si compone di due piani. Per $n>3$, se $\delta = \frac{n-1}{2}$ (nel qual caso n deve essere dispari) la calotta risulta una quadrica non specializzata di tipo iperbolico; se $\frac{n-1}{2} < \delta \leq n-3$ (nel qual caso deve essere $n < 5$) la calotta risulta un cono quadrico di tipo iperbolico avente come spazio vertice un $S_{2\delta-n}$; se $\delta = n-2$ la calotta risulta un cono quadrico di tipo iperbolico con spazio vertice un S_{n-4} oppure un cono proiettante da un S_{n-3} vertice un $(q+2)$ -arco di un piano sghembo con l' S_{n-3} (il secondo caso potendosi presentare soltanto se $p=2$); se $\delta = n-1$ la calotta si compone di due iperpiani di $S_{n,q}$.

Nel quinto paragrafo studiamo le calotte $C(Q_{n-1} + q^t, \delta)$ di $S_{n,q}$, con t e δ interi arbitrari tali che $0 \leq t < \delta$. Dimostriamo che, se $p \neq 2$, deve essere $\delta = n-1$ e la calotta risulta composta di un iperpiano e un S_t . Invece, se $p=2$, δ deve verificare le limitazioni $\frac{n}{2} - 1 \leq \delta \leq n-1$ e t l'ulteriore limitazioni $t \leq 2\delta - n + 2$. Inoltre, sempre se $p=2$, per $\delta = \frac{n}{2} - 1$ (nel qual caso n deve essere pari) la calotta si compone di una quadrica non specializzata e del suo centro ⁽⁹⁾; per $\frac{n}{2} - 1 < \delta \leq n-3$ (nel qual caso deve essere $n > 4$) la calotta risulta composta da un cono quadrico proiettante da un $S_{2\delta-n+1}$ una quadrica non specializzata di un $S_{2(n-\delta-1)}$ sghembo con l' $S_{2\delta-n+1}$, e da un S_t contenuto nell' $S_{2\delta-n+2}$ proiezione da $S_{2\delta-n+1}$ del centro della quadrica non specializzata di $S_{2(n-\delta-1)}$; per $\delta = n-2$ la calotta si compone di un cono proiettante da un S_{n-3} un $(q+1)$ -arco di un piano sghembo con l' S_{n-3} , e di un S_t immerso nell' S_{n-2} proiezione dall' S_{n-3} del centro ⁽¹⁰⁾ del $(q+1)$ -arco; per $\delta = n-1$ la calotta si compone di un iperpiano ed un S_t .

§ 1. - Alcune proprietà generali delle K -calotte.

Studio delle calotte $C(K, 0)$.

3. In questo paragrafo studieremo alcune semplici proprietà generali delle K -calotte, che ci saranno utili nel seguito, e dimostreremo alcune proprietà delle calotte $C(K, 0)$.

⁽⁹⁾ Cfr. G. TALLINI [20], n. 3.

⁽¹⁰⁾ Un $(q+1)$ -arco di un $S_{2,q}$, con $p=2$, è tale che tutte le sue tangenti passano per un punto (cfr. B. QVIST [13], § 1). Chiameremo centro del $(q+1)$ -arco detto punto.

Cominciamo a notare la seguente semplice proposizione che ci sarà utile nel seguito:

1^a. - In un S_r grafico irriducibile ⁽¹⁾, in particolare in un $S_{r,q}$, ogni insieme I di punti che contenga ogni retta avente due punti in comune con esso, risulta uno spazio subordinato di S_r .

Sia $S_h (0 \leq h \leq r)$ lo spazio congiungente i punti di I . Dimostriamo che I coincide con S_h . Possiamo procedere per induzione rispetto ad h , essendo vera la proposizione per $h=0$. L' S_h è individuato da $h+1$ punti indipendenti di I . Per l'induzione ammessa ognuno degli $h+1$ S_{h-1} congiungente h dei suddetti punti appartiene ad I . Ma allora ogni retta di S_h , avendo almeno due punti in comune con i detti S_{h-1} e quindi con I , deve appartenere ad I . Onde I coincide con S_h .

In un $S_{n,q}$, con $n \geq 3$ e $q = p^h > 2$, le calotte $C(K, \delta)$ godono delle seguenti immediate proprietà:

2^a. - Ogni calotta $C(K, \delta)$ è tale che $K \geq Q_\delta$.

3^a. - Ogni calotta $C(Q_\delta, \delta)$ coincide con un S_δ .

Dimostriamo ora la proposizione seguente:

4^a. - Ogni calotta $C(K, n-1)$, con $K > Q_{n-1}$, risulta costituita da un S_{n-1} e un $S_t (0 \leq t \leq n-1)$; onde necessariamente K deve essere del tipo $K = Q_{n-1} + q^t$.

La $C(K, n-1)$ è costituita da un iperpiano S_{n-1} e da un insieme di punti tale che se due punti appartengono ad esso tutta la retta che li congiunge appartiene alla $C(K, n-1)$ (avendo la retta tre punti in comune con la $C(K, n-1)$: i due punti dati e il punto d'incontro della retta con l' S_{n-1}). In base alle proposizione 1^a, quest'ultimo insieme è dunque costituito dai punti di uno spazio lineare che non appartengono a S_{n-1} . Segue l'asserto.

Si hanno le seguenti proposizioni:

5^a. - Ogni $S_r \subset S_{n,q}$, con $r \geq 3$, che non abbia intersezione vuota con una calotta $C(K, \delta)$ e che non appartenga ad essa, la interseca in una calotta $C(K', \delta')$, con $K' \leq K$ e $\delta' \leq \delta$.

6^a. - Ogni $S_2 \subset S_{n,q}$, che non abbia intersezione vuota con una calotta $C(K, \delta)$ e che non appartenga ad essa, la interseca in un K' -arco, con $K' \leq K$, o in un S_1 e un $S_t (t = -1, 0, 1)$.

7^a. - Ogni S_{l+1} contenente un S_l (con $0 \leq l \leq \delta-1$) di una calotta $C(K, \delta)$ o appartiene ad essa o la interseca ulteriormente esclusivamente in un S_t (con $-1 \leq t \leq l$).

8^a. - Ogni $S_{\delta+1}$ contenente un S_δ di una calotta $C(K, \delta)$ la interseca ulteriormente esclusivamente in un S_t (con $-1 \leq t \leq \delta$).

Le proposizioni 5^a e 6^a sono immediate, la 7^a e la 8^a si deducono dalle proposizioni 4^a, 5^a, 6^a.

⁽¹⁾ Cfr. B. SEGRE [14], § 14.

4. In un $S_{n,q}$, con $n \geq 3$ e $q = p^h > 2$, le calotte $C(K, 0)$ risultano insieme di K punti a tre a tre non allineati. In relazione ad esse si pone il problema di determinare quale sia il massimo valore di K siffatto che in $S_{n,q}$ esista una calotta $C(K, 0)$, ossia il problema di trovare il massimo numero di punti a tre a tre non allineati di $S_{n,q}$. Questo numero, funzione naturalmente di n e di q , lo indicheremo con $M_{n,q}$ ⁽¹²⁾.

Per $n = 3$ e $q > 2$ si dimostra ⁽¹³⁾ agevolmente che $M_{3,q} = q^2 + 1$. Per $n > 3$ sussiste il teorema seguente che dà un limite superiore al valore di $M_{n,q}$:

TEOREMA. - *Detto $M_{n,q}$ il massimo numero di punti a tre a tre non allineati di un $S_{n,q}$, con $n > 3$ e $q = p^h > 2$, deve necessariamente aversi $M_{n,q} < q^{n-1} + 1$.*

DIMOSTRAZIONE. - Il teorema rimarrà dimostrato una volta che si faccia vedere che non può esistere in un $S_{n,q}$ una calotta $C(q^{n-1} + 1, 0)$.

Ragioniamo per assurdo ammettendo che esista in $S_{n,q}$ una tale calotta. Consideriamo due suoi punti distinti P_1 e P_2 , un qualsiasi piano per essi intersecherà la calotta in un t -arco, dove a priori è $t \leq q + 1$ se $p \neq 2$, oppure $t \leq q + 2$ se $p = 2$ ⁽¹⁴⁾.

Dimostriamo che se $p = 2$, t non può raggiungere il valore $q + 2$. Supposto per assurdo che esista un piano π intersecante la calotta in un $(q + 2)$ -arco, consideriamo i $Q_{n-3} S_3$ contenenti π ; ognuno di essi la incontra ulteriormente in $d_i (i = 1, 2, \dots, Q_{n-3})$ punti. Uguagliando il numero dei punti della calotta, distinti dai punti del $(q + 2)$ -arco di π , con il numero di punti di essa contenuti in ciascun $S_3 \supset \pi$ e non in π , si ottiene:

$$(1) \quad \sum_{i=1}^{Q_{n-3}} d_i = q^{n-1} + 1 - (q + 2) = q^{n-1} - q - 1.$$

D'altra parte, come si è ricordato in principio di questo numero, il massimo numero di punti a tre a tre non allineati di un $S_{n,q}$, anche nel caso

⁽¹²⁾ In un $S_{n,2}$ si ha $M_{n,2} = 2^n$. La precedente uguaglianza si desume facilmente dalla seguente proposizione:

In un $S_{n,2}$ ogni insieme $\mathcal{C}$ di 2^n punti a tre a tre non allineati è costituito dai punti di $S_{n,2}$ che non appartengono ad un iperpiano.

Sia P un punto di $\mathcal{C}$, le rette che lo congiungono con i rimanenti punti di $\mathcal{C}$ sono $2^n - 1 = 2^{n-1} + 2^{n-2} + \dots + 2 + 1$. Questo numero coincide con il numero delle rette di $S_{n,2}$ per P , onde ogni retta per P è secante $\mathcal{C}$. Data l'arbitrarietà di P ne segue che $\mathcal{C}$ non ammette rette tangenti. Ricordando che ogni retta di $S_{n,2}$ possiede tre punti, si ha che se due punti non appartengono a $\mathcal{C}$ l'ulteriore punto della retta che li congiunge non può appartenere a $\mathcal{C}$ (altrimenti la retta sarebbe tangente a $\mathcal{C}$). L'insieme dei punti di $S_{n,2}$ che non appartengono a $\mathcal{C}$ gode dunque della proprietà di contenere ogni retta che ha in comune con esso due punti, ed è quindi (cfr. proposizione 1^a) uno spazio lineare subordinato di $S_{n,2}$, dovendo contenere $2^{n-1} + 2^{n-2} + \dots + 2 + 1$ punti dovrà essere un iperpiano di $S_{n,2}$. Onde l'asserto.

⁽¹³⁾ Cf. B. QVIST [13], § 2.

⁽¹⁴⁾ È noto che il massimo numero di punti a tre a tre non allineati di un $S_{2,q}$ è $q + 1$ se $p \neq 2$ e $q + 2$ se $p = 2$. Cfr. B. QVIST [13], § 1.

$p = 2$, è $q^2 + 1$, onde

$$d_i + q + 2 \leq q^2 + 1, \quad (i = 1, 2, \dots, Q_{n-3}).$$

sommando le Q_{n-3} disuguaglianze precedenti si ottiene

$$\sum_{i=1}^{Q_{n-3}} d_i \leq Q_{n-3}(q^2 - q - 1) = q^{n-1} - q - Q_{n-3} < q^{n-1} - q - 1$$

e ciò è in contrasto con la (1).

Ogni piano per $P_1 P_2$ interseca dunque la calotta in un t -arco, dove a priori è $t \leq q + 1$ anche se $p = 2$. Dimostriamo che in ogni caso deve essere $t = q + 1$: Poichè i piani per $P_1 P_2$ sono Q_{n-2} e si ha

$$Q_{n-2}(q - 1) + 2 = q^{n-1} + 1,$$

se un piano per $P_1 P_2$ avesse meno di $q - 1$ punti, distinti da P_1 e P_2 , in comune con la calotta, ve ne dovrebbe essere un altro con più di $q - 1$ punti, che la interseca quindi in un t -arco con $t > q + 1$ e ciò è escluso.

Consideriamo ora un qualsiasi iperpiano S_{n-1} per $P_1 P_2$. I piani di S_{n-1} per $P_1 P_2$ sono Q_{n-3} , ognuno di essi incontra la calotta $C(q^{n-1} + 1, 0)$ in $q - 1$ punti, distinti da P_1 e P_2 , ne segue che i punti della calotta comuni all' S_{n-1} sono in numero di

$$Q_{n-3}(q - 1) + 2 = q^{n-2} + 1,$$

quindi S_{n-1} incontra la calotta $C(q^{n-1} + 1, 0)$ in una calotta $C(q^{n-2} + 1, 0)$.

Sia T un punto di $C(q^{n-1} + 1, 0)$, le secanti per T alla calotta sono q^{n-1} , dunque, essendo le rette per T Q_{n-1} , le tangenti per T alla calotta saranno $Q_{n-1} - q^{n-1} = Q_{n-2}$. Siano t_1 e t_2 due tali tangenti; ogni retta per T giacente nel piano τ individuato da t_1 e t_2 deve essere tangente in T alla calotta, altrimenti τ incontrerebbe la $C(q^{n-1} + 1, 0)$ in un $(q + 1)$ -arco avente in T le due tangenti distinte t_1 e t_2 e ciò è assurdo ⁽¹⁵⁾. Ma allora un iperpiano di $S_{n,q}$ non passante per T interseca l'insieme delle rette tangenti in T in un insieme di Q_{n-2} punti che gode della proprietà di contenere ogni retta avente due punti in comune con l'insieme, ossia in un S_{n-2} di tale iperpiano (cfr. proposizione 1^a n. 3). Ne segue che le Q_{n-2} tangenti a $C(q^{n-1} + 1, 0)$ in T costituiscono un iperpiano che sarà detto l'*iperpiano tangente* alla calotta $C(q^{n-1} + 1, 0)$ in T .

Da quanto precede si deduce che un iperpiano di $S_{n,q}$, che non sia esterno alla calotta $C(q^{n-1} + 1, 0)$, può avere in comune con essa o un sol punto (iperpiano tangente), o una calotta $C(q^{n-2} + 1, 0)$ (iperpiano secante). Dedurremo da ciò l'assurdo.

Siano T_1 e T_2 due punti della calotta $C(q^{n-1} + 1, 0)$, τ_1 e τ_2 i due rispettivi iperpiani tangenti in essi. τ_1 e τ_2 sono certo distinti e si incontrano in

⁽¹⁵⁾ Cfr. B. QVIST [13], § 1.

un $\bar{S}_{n-2}$ non avente nessun punto in comune con la calotta. Indichiamo con t il numero degli iperpiani per $\bar{S}_{n-2}$ tangenti alla calotta e distinti da τ_1 e τ_2 , con s il numero di quelli secanti la calotta. Essendo gli iperpiani per $\bar{S}_{n-2}$ distinti da τ_1 e τ_2 in numero di $q-1$, sarà

$$(2) \quad 0 \leq t < q-1, \quad 0 \leq s \leq q-1.$$

Uguagliando il numero dei punti della calotta $C(q^{n-1}+1, 0)$ distinti da T_1 e T_2 con il numero dei punti di essa appartenenti a ciascuno dei suddetti iperpiani, si ha

$$(3) \quad t + s(q^{n-2} + 1) = q^{n-1} - 1.$$

Da (2) si deduce

$$t + s(q^{n-2} + 1) < (q-1) + (q-1)(q^{n-2} + 1).$$

Infine dalla precedente disuguaglianza e dalla (3), con facili passaggi, si deduce

$$Q_{n-3} < 2$$

relazione manifestamente assurda, essendo $n > 3$. L'assurdo prova l'asserto.

§ 2. - Prime proprietà delle K -calotte, con $K \geq Q_{n-1}$.

5. In questo paragrafo ci proponiamo di studiare le prime proprietà delle calotte $C(K, \delta)$ di un $S_{n,q}$ ($n \geq 3$, $q = p^h > 2$), con $K \geq Q_{n-1}$ e δ a priori arbitrario. Cominciamo a notare che, essendo $K \geq Q_{n-1} > q^{n-1} + 1$, in base al teor. I n. 4, dovrà essere $\delta > 0$.

Dalle proposizioni 3^a e 4^a del n. 3 si deduce la proposizione seguente:

Una calotta $C(K, n-1)$ di $S_{n,q}$ è tale che K può assumere solamente i valori seguenti $K = Q_{n-1}$, $K = Q_{n-1} + q^t$ ($0 \leq t \leq n-1$); nel primo caso essa risulta un S_{n-1} , nel secondo si compone di un S_{n-1} e un S_t .

Per quanto precede nello studio delle calotte $C(K, \delta)$, con $K \geq Q_{n-1}$, possiamo supporre $0 < \delta < n-1$.

Sia $\bar{S}_\delta$ un arbitrario S_δ di una calotta $C(K, \delta)$ di $S_{n,q}$, con $K \geq Q_{n-1}$. Dalla proposizione 8^a del n. 3 segue che ognuno dei $Q_{n-\delta-1}$ $S_{\delta+1} \supset \bar{S}_\delta$ incontra la $C(K, \delta)$, oltre che in $\bar{S}_\delta$, in un S_t , con $-1 \leq t \leq \delta$. Sia allora l_0 il numero degli $S_{\delta+1} \supset \bar{S}_\delta$ che non incontrano ulteriormente la $C(K, \delta)$, l_r ($r = 1, 2, \dots, \delta+1$) il numero degli $S_{\delta+1} \supset \bar{S}_\delta$ che incontrano ulteriormente la calotta in un S_{r-1} , avente quindi in comune con $C(K, \delta)$ ulteriormente q^{r-1} punti. Dovrà intanto essere $l_{\delta+1} = Q_{n-\delta-1} - \sum_{i=0}^{\delta} l_i$.

Uguagliando il numero di punti di $C(K, \delta)$ appartenenti a ciascun $S_{\delta+1} \supset \bar{S}_\delta$ e non a $\bar{S}_\delta$, con il numero di punti di $C(K, \delta)$ non appartenenti a $\bar{S}_\delta$, si ha:

$$\sum_{i=1}^{\delta} l_i q^{i-1} + q^\delta [Q_{n-\delta-1} - \sum_{i=0}^{\delta} l_i] = K - Q_\delta.$$

Posto $K = Q_{n-1} + l$, con $l \geq 0$, la precedente equazione si riduce a:

$$(4) \quad \sum_{i=1}^{\delta} l_i q^{i-1} + q^{\delta} = l + q^{\delta} \left(\sum_{i=0}^{\delta} l_i \right).$$

Ci proponiamo ora di risolvere l'equazione indeterminata (4) nelle incognite $l, l_0, l_1, \dots, l_{\delta}$ soggette all'ovvia condizione di essere interi non negativi.

6. In questo numero troveremo tutte quelle soluzioni della (4) per le quali $l=0$. Siamo così condotti a studiare l'equazione

$$(4') \quad \sum_{i=1}^{\delta} l_i q^{i-1} + q^{\delta} = q^{\delta} \sum_{i=0}^{\delta} l_i.$$

Supponiamo che la (4') ammetta qualche soluzione nelle l_i ($i=0, 1, \dots, \delta$) con $l_0 > 1$. Per una tale soluzione si avrebbe:

$$\sum_{i=1}^{\delta} l_i q^{i-1} + q^{\delta} \leq q^{\delta} \sum_{i=1}^{\delta} l_i + q^{\delta} < q^{\delta} \sum_{i=0}^{\delta} l_i$$

e ciò è in contrasto con la (4'). Onde non esiste nessuna soluzione della (4') con $l_0 > 1$. l_0 può quindi assumere i soli valori $l_0 = 1$ e $l_0 = 0$.

Supposto $l_0 = 1$, la (4') diventa:

$$\sum_{i=1}^{\delta} l_i q^{i-1} = q^{\delta} \sum_{i=1}^{\delta} l_i$$

relazione vera solo se $l_1 = l_2 = \dots = l_{\delta} = 0$, (in quanto in caso contrario il secondo membro sarebbe maggiore del primo, dovendo essere le l_i interi non negativi).

Supposto $l_0 = 0$, la (4') diventa

$$\sum_{i=1}^{\delta} l_i q^{i-1} + q^{\delta} = q^{\delta} \sum_{i=1}^{\delta} l_i,$$

che si riduce, con facili calcoli, alla

$$(q-1) \sum_{i=1}^{\delta} l_i q^{i-1} Q_{\delta-i} = q^{\delta},$$

ed infine alla:

$$\sum_{i=1}^{\delta} l_i q^{i-1} Q_{\delta-1} = Q_{\delta-1} + \frac{1}{q-1},$$

relazione evidentemente assurda, se le l_i sono intere, essendo il primo membro un intero ed il secondo un numero non intero non appena $q > 2$, come supponiamo. Dunque non esiste nessuna soluzione della (4') con $l_0 = 0$.

Concludendo la (4') ammette l'unica soluzione:

$$l_0 = 1, l_1 = l_2 = \dots = l_{\delta} = 0.$$

7. In questo numero ci proponiamo di trovare tutte quelle soluzioni della (4) per le quali $l > 0$. Siamo così condotti a studiare l'equazione:

$$(4'') \quad \sum_{i=1}^{\delta} l_i q^{i-1} + q^{\delta} = l + q^{\delta} \sum_{i=1}^{\delta} l_i, \quad l > 0.$$

Ammettiamo che la (4'') ammetta qualche soluzione con $l_0 > 0$, per essa si avrebbe, essendo $l > 0$, $l_0 \geq 1$, $\sum_{i=1}^{\delta} l_i q^{i-1} \leq q^{\delta} \sum_{i=1}^{\delta} l_i$:

$$\sum_{i=1}^{\delta} l_i q^{i-1} + q^{\delta} < l + q^{\delta} \sum_{i=1}^{\delta} l_i$$

e ciò è in contrasto con la (4''). Non esiste dunque nessuna soluzione della (4'') con $l_0 > 0$. Posto allora in essa $l_0 = 0$, si ottiene l'equazione:

$$\sum_{i=1}^{\delta} l_i q^{i-1} + q^{\delta} = l + q^{\delta} \sum_{i=1}^{\delta} l_i, \quad l > 0,$$

che si trasforma, con facili calcoli, nella

$$q^{\delta} - l = (q - 1) \sum_{i=1}^{\delta} l_i q^{i-1} Q_{\delta-i}, \quad l > 0.$$

Essendo nella precedente equazione il secondo membro una quantità non negativa, dovrà essere $0 < l \leq q^{\delta}$.

Per $l = q^{\delta}$ si ottiene (dovendo essere le l_i quantità non negative) l'unica soluzione $l_i = 0$ ($i = 1, 2, \dots, \delta$).

Supposto $0 < l < q^{\delta}$, la precedente equazione si scrive:

$$\frac{q^{\delta} - l}{q - 1} = l_1 Q_{\delta-1} + l_2 q Q_{\delta-2} + \dots + l_{\delta} q^{\delta-1}, \quad 0 < l < q^{\delta},$$

da cui si ricava che la quantità $\frac{q^{\delta} - l}{q - 1}$ deve essere un intero (se vogliamo che le l_i siano tali) positivo (essendo $l > q^{\delta}$).

Introduciamo l'incognita ausiliaria

$$c = \frac{q^{\delta} - l}{q - 1},$$

soggetta alla condizione di essere un intero positivo. Poichè $0 < l = q^{\delta} - c(q - 1)$, sarà $c < \frac{q^{\delta}}{q - 1} = Q_{\delta-1} + \frac{1}{q - 1}$ e quindi $c \leq Q_{\delta-1}$, dovendo essere c intero. Siamo così condotti a studiare l'equazione:

$$(5) \quad c = l_1 Q_{\delta-1} + l_2 q Q_{\delta-2} + \dots + l_{\delta} q^{\delta-1}, \quad 0 < c \leq Q_{\delta-1}.$$

Per $c = Q_{\delta-1}$ la (5) diventa:

$$(l_1 - 1)Q_{\delta-1} + l_2 q Q_{\delta-2} + \dots + l_{\delta} q^{\delta-1} = 0,$$

in questa relazione non può essere $l_1 = 0$, altrimenti, come si legge direttamente in essa, Q_{s-1} dovrebbe essere divisibile per q , mentre ciò manifestamente non è possibile. Dovrà quindi essere $l_1 - 1 \geq 0$, ma allora la precedente equazione ammette l'unica soluzione $l_1 = 1$, $l_2 = \dots = l_s = 0$ (dovendo essere $l_1 - 1, l_2, \dots, l_s$ interi non negativi).

Per $0 < c < Q_{s-1}$ due casi sono possibili: o $l_i = 0$, o $l_i > 0$. Il secondo caso è senz'altro da escludersi perchè riduce la (5) alla:

$$(Q_{\delta-1} - c) + (l_i - 1)Q_{\delta-1} + l_i q Q_{\delta-2} + \dots + l_i q^{\delta-1} = 0, \quad l_i - 1 \geq 0,$$

relazione evidentemente assurda, dovendo essere $Q_{\delta-1} - c > 0$, $l_i - 1 \geq 0$ e $l_i \geq 0$ ($i = 2, \dots, \delta$). Se $l_i = 0$, la (5) diventa:

$$c = l_0 q Q_{\delta-2} + \dots + l_{\delta} q^{\delta-1}, \quad 0 < c < Q_{\delta-1},$$

dividendo ambo i membri per q si ricava che $\frac{c}{q}$ deve essere un intero. Posto allora $\frac{c}{q} = c_1$ (dove, essendo $0 < c < Q_{s-1}$, dovrà essere $0 < c_1 < Q_{s-2} + \frac{1}{q}$ e quindi $0 < c_1 \leq Q_{s-2}$, essendo c_1 intero), la precedente equazione si riduce alla:

$$(5') \quad c_i = l_i Q_{\delta-2} + \dots + l_{\delta} q^{\delta-2}, \quad 0 < c_i \leq Q_{\delta-2},$$

che, a parte le notazioni, è dello stesso tipo della (5), ma con una incognita in meno. Possiamo allora ragionare sulla (5') come abbiamo fatto sulla (5), e così via. Proseguendo in questo modo si deduce che tutte le soluzioni della (5) sono :

$$\begin{aligned} c &= Q_{\delta-1}, \quad (l = 1), \quad l_1 = 1, l_2 = \dots = l_\delta = 0; \\ c &= c_l q = Q_{\delta-2q}, \quad (l = q), \quad l_1 = 0, l_2 = 1, l_3 = \dots l_\delta = 0; \\ &\dots\dots\dots \\ c &= c_{\delta-1} q^{\delta-1} = Q_{\delta} q^{\delta-1}, \quad (l = q^{\delta-1}), \quad l_1 = \dots = l_{\delta-1} = 0, l_\delta = 1. \end{aligned}$$

Concludendo tutte le soluzioni della (4'') sono date da:

$$\begin{aligned} l &= q^t, \quad l_0 = l_1 = \dots = l_t = 0, \quad l_{t+1} = 1, \quad l_{t+2} = \dots = l_\delta = 0, \quad (t = 0, 1, \dots, \delta - 2); \\ l &= q^{\delta-1}, \quad l_0 = l_1 = \dots = l_{\delta-1} = 0, \quad l_\delta = 1; \\ l &= q^\delta, \quad l_0 = l_1 = \dots = l_\delta = 0. \end{aligned}$$

8. Dai due numeri precedenti si deduce che la (4) ammette le uniche soluzioni seguenti:

$$\begin{aligned} l &= 0, (K = Q_{n-1}), l_0 = 1, l_1 = \dots = l_\delta = 0, (l_{\delta+1} = Q_{n-\delta-1} - 1); \\ l &= q^t, (K = Q_{n-1} + q^t), l_0 = \dots = l_t = 0, l_{t+1} = 1, l_{t+2} = \dots = l_\delta = 0, (l_{\delta+1} = Q_{n-\delta-1} - 1), \\ &\quad \text{con } t = 0, 1, \dots, \delta - 2; \\ l &= q^{\delta-1}, (K = Q_{n-1} + q^{\delta-1}), l_0 = \dots = l_{\delta-1} = 0, l_\delta = 1, (l_{\delta+1} = Q_{n-\delta-1} - 1); \\ l &= q^\delta, (K = Q_{n-1} + q^\delta), l_0 = \dots = l_\delta = 0, (l_{\delta+1} = Q_{n-\delta-1}). \end{aligned}$$

Da ciò, ricordando quanto è detto nel n. 5 e il significato ivi specificato delle l_i ($i = 0, 1, \dots, \delta + 1$), segue il

TEOREMA II. - *In un $S_{n,q}$, con $n \geq 3$ e $q = p^h > 2$, ogni calotta $C(K, \delta)$ dove K e δ sono due interi, a priori arbitrari, soddisfacenti rispettivamente alle limitazioni $Q_{n-1} \leq K$ e $0 < \delta < n - 1$, è tale che K risulta di fatto uguale ad uno dei valori seguenti: $K = Q_{n-1}$, $K = Q_{n-1} + q^t$ ($t = 0, 1, \dots, \delta - 1$), e $K = Q_{n-1} + q^\delta$. Nei casi $K = Q_{n-1}$ e $K = Q_{n-1} + q^t$ ($t = 0, 1, \dots, \delta - 1$), fissato comunque un $\bar{S}_\delta$ della calotta, tra i $Q_{n-\delta-1}$ $S_{\delta+1} \supset \bar{S}_\delta$ ve ne è uno ben determinato che incontra ulteriormente la calotta rispettivamente in nessun punto nel primo caso, e in un S_t ($t = 0, 1, \dots, \delta - 1$) nel secondo caso, esso sarà detto l' $S_{\delta+1}$ tangente alla calotta lungo $\bar{S}_\delta$; tutti gli altri $S_{\delta+1} \supset \bar{S}_\delta$ incontrano ulteriormente la calotta in un S_δ . Nel caso $K = Q_{n-1} + q^\delta$, fissato comunque un $\bar{S}_\delta$ della calotta, ognuno dei $Q_{n-\delta-1}$ $S_{\delta+1} \supset \bar{S}_\delta$ incontra ulteriormente la calotta in un S_δ .*

Per il teorema precedente lo studio delle K -calotte, con $K \geq Q_{n-1}$, è ricondotto a quello dei seguenti tipi di calotte: $C(Q_{n-1}, \delta)$, $C(Q_{n-1} + q^t, \delta)$ ($0 \leq t < \delta$), $C(Q_{n-1} + q^\delta, \delta)$. Questo studio sarà fatto nei paragrafi seguenti.

§ 3. - Studio delle calotte $C(Q_{n-1}, \delta)$ di $S_{n,q}$.

9. In questo paragrafo ci proponiamo di studiare compiutamente le calotte $C(Q_{n-1}, \delta)$, dove a priori è $0 < \delta < n - 1$, di un $S_{n,q}$, con $n \geq 3$ e $q = p^h > 2$.

Cominciamo a notare la seguente proposizione:

Sia $\bar{S}_\delta$ un qualsiasi S_δ contenuto in una calotta $C(Q_{n-1}, \delta)$ di un $S_{n,q}$. Tra i $Q_{n-\delta-1}$ $S_{\delta+1} \subset \bar{S}_\delta$ ve ne è uno che non interseca la calotta ulteriormente in nessun altro punto, lo chiameremo l' $S_{\delta+1}$ tangente ad essa lungo $\bar{S}_\delta$, tutti gli altri $Q_{n-\delta-1} - 1$ $S_{\delta+1}$ la intersecano ulteriormente in un S_δ . Ogni S_h , con $h > \delta + 1$, contenente $\bar{S}_\delta$ e il suo $S_{\delta+1}$ tangente, incontra la calotta in una calotta $C(Q_{h-1}, \delta)$. Ogni S_h , con $h > \delta + 1$, contenente $\bar{S}_\delta$ e non contenente il suo $S_{\delta+1}$ tangente, incontra la calotta in una calotta $C(Q_{h+1} + q^\delta, \delta)$.

La prima parte della proposizione essendo contenuta nel Teorema II (n. 8), dimostriamo la seconda parte: si consideri un $S_h \supset \bar{S}_\delta$, con $h > \delta + 1$, gli $S_{\delta+1} \subset S_h$ contenenti $\bar{S}_\delta$ sono $Q_{h-\delta-1}$. Se l' S_h contiene l' $S_{\delta+1}$ tangente lungo $\bar{S}_\delta$, i punti comuni ad esso e alla calotta $C(Q_{n-1}, \delta)$ sono:

$$(Q_{h-\delta-1} - 1)q^\delta + Q_\delta = Q_{h-1}.$$

In caso contrario essi sono

$$Q_{h-\delta-1}q^\delta + Q_\delta = Q_{h-1} + q^\delta.$$

Dunque, in virtù della proposizione 5^a del n. 3, nel primo caso l' S_h interseca $C(Q_{n-1}, \delta)$ in una calotta $C(Q_{n-1}, \delta)$, nel secondo caso in una calotta $C(Q_{n-1} + q^\delta, \delta)$.

Sussiste la proposizione seguente:

Comunque si consideri un S_l , con $0 \leq l < \delta$, contenuto in una calotta $C(Q_{n-1}, \delta)$ di $S_{n,q}$, esiste sempre almeno un S_δ di $C(Q_{n-1}, \delta)$ contenente l' S_l .

Cominciamo a dimostrare la proposizione per $l=0$. Sia P un punto comunque fissato di $C(Q_{n-1}, \delta)$ e $\bar{S}_\delta$ un qualsiasi $S_\delta \subset C(Q_{n-1}, \delta)$. Se P non è contenuto in $\bar{S}_\delta$, consideriamo l' $S_{\delta+1}$ individuato da P e da $\bar{S}_\delta$, esso interseca ulteriormente $C(Q_{n-1}, \delta)$ in un S_δ passante per P . Quindi in ogni caso per P passerà almeno un S_δ contenuto in $C(Q_{n-1}, \delta)$. Possiamo ora procedere per induzione rispetto a l , ammettendo vera la proposizione per $l-1$ e dimostrandola per l . Dato un $S_l \subset C(Q_{n-1}, \delta)$, consideriamo un S_{l-1} contenuto in esso. Per l'induzione ammessa esisterà almeno un $S_\delta^* \subset C(Q_{n-1}, \delta)$ contenente S_{l-1} . Se S_δ^* non contiene S_l consideriamo l' $S_{\delta+1}$ individuato da S_δ^* e da un punto di S_l non giacente in S_δ^* . Esso intersecherà ulteriormente $C(Q_{n-1}, \delta)$ in un nuovo S_δ^* , contenente ovviamente S_l . In ogni caso dunque per S_l passerà almeno un $S_\delta \subset C(Q_{n-1}, \delta)$.

10. Dimostriamo il seguente:

TEOREMA III. - *In un $S_{n,q}$ ogni calotta $C(Q_{n-1}, n-2)$ è un cono quadratico con spazio vertice un S_{n-3} se $p \neq 2$, è un cono proiettante da un S_{n-3} vertice un $(q+1)$ -arco di un piano, sghembo con S_{n-3} , se $p=2$.*

Denotiamo con $\bar{S}_{n-2}$ e $\bar{S}_{n-1}$ rispettivamente un qualsiasi S_{n-2} certo esistente nella calotta $C(Q_{n-1}, n-2)$ ed il suo S_{n-1} tangente. Per quanto è detto nella prima proposizione del n. 9, ognuno dei q S_{n-1} per $\bar{S}_{n-2}$, distinti da $\bar{S}_{n-1}$, interseca ulteriormente $C(Q_{n-1}, n-2)$ in un S_{n-2} . Rimangono così individuati, oltre a $\bar{S}_{n-2}$, q S_{n-2} di $C(Q_{n-1}, n-2)$ distinti tra loro e da $\bar{S}_{n-2}$. Dimostriamo che non ne esistono altri in $C(Q_{n-1}, n-2)$. Sia infatti S_{n-2}^* un qualsiasi $S_{n-2} \subset C(Q_{n-1}, n-2)$, distinto da $\bar{S}_{n-2}$. Esso interseca $\bar{S}_{n-1}$ in un S_{n-3} , necessariamente contenuto in $\bar{S}_{n-2}$ (non essendoci in $\bar{S}_{n-1}$ altri punti di $C(Q_{n-1}, n-2)$ distinti dai punti di $\bar{S}_{n-2}$). Ne segue che S_{n-2}^* e $\bar{S}_{n-2}$, incontrandosi in un S_{n-3} , sono contenuti in un S_{n-1} e quindi S_{n-2}^* coincide con uno dei q S_{n-2} suddetti.

La calotta $C(Q_{n-1}, n-2)$ contiene dunque esattamente $q+1$ S_{n-2} distinti: l' $\bar{S}_{n-2}$ e i q S_{n-2} di cui sopra. Ognuno di questi ultimi S_{n-2} interseca $\bar{S}_{n-2}$ in un S_{n-3} (essendo contenuto in un S_{n-1} per $\bar{S}_{n-2}$). Data l'arbitrarietà della scelta di $\bar{S}_{n-2}$ tra i $q+1$ S_{n-2} della calotta, ne segue che essi si incontrano a due a due in un S_{n-3} . Ma allora, per un noto teorema di geometria proiettiva ⁽¹⁶⁾, i suddetti S_{n-2} o passano tutti per un S_{n-3} o giacciono tutti in un S_{n-1} . La seconda eventualità essendo esclusa (altrimenti tutto l' S_{n-1} in cui sono contenuti gli S_{n-2} dovrebbe appartenere alla calotta), ne segue che la calotta $C(Q_{n-1}, n-2)$ è costituita da $q+1$ S_{n-2} passanti tutti per uno stesso S_{n-3} , che denoteremo con $\bar{S}_{n-3}$.

Sia ora π un piano sghembo con $\bar{S}_{n-3}$. Ognuno dei $q+1$ S_{n-2} contenuti nella calotta interseca π in un sol punto, dunque π incontra $C(Q_{n-1}, n-2)$ in $q+1$ punti distinti, i quali sono a tre a tre non allineati: in quanto se tre di essi fossero allineati, detta r la retta che li congiunge, essa dovrebbe appartenere alla calotta e quindi tutti i $q+1$ punti suddetti dovrebbero stare su r ; ma allora l' S_{n-1} individuato da $\bar{S}_{n-3}$ e da r dovrebbe contenere i $q+1$ S_{n-2} di $C(Q_{n-1}, n-2)$ e ciò è escluso.

L'intersezione di π con $C(Q_{n-1}, n-2)$ è dunque un $(q+1)$ -arco, e quindi una conica ⁽¹⁷⁾, se $p \neq 2$. Ne segue che la calotta $C(Q_{n-1}, n-2)$ risulta un cono quadrico con vertice in $\bar{S}_{n-3}$, se $p \neq 2$, ed un cono proiettante da $\bar{S}_{n-3}$ un $(q+1)$ -arco di π , se $p = 2$.

11. Nello studio delle calotte $C(Q_{n-1}, \delta)$ di un $S_{n,q}$ supporremo senz'altro in seguito $0 < \delta < n-2$, in quanto il caso $\delta = n-2$ è stato già discusso nel numero precedente. Possiamo anche supporre $n > 3$, poichè il caso $n = 3$ si lascia completamente trattare in base al teorema del numero precedente.

Dalla prima proposizione del n. 9 e dal Teorema III si deduce la proposizione seguente:

In un $S_{n,q}$, con $n \geq 4$, una calotta $C(Q_{n-1}, \delta)$, con $0 < \delta < n-2$, è intersecata da un qualsiasi $S_{\delta+2}$, contenente un $\bar{S}_{\delta} \subset C(Q_{n-1}, \delta)$ ed il suo $\bar{S}_{\delta+1}$ tangente, in un cono quadrico con vertice in un $S_{\delta-1} \subset \bar{S}_{\delta}$, se $p \neq 2$; in un cono proiettante da un $S_{\delta-1} \subset \bar{S}_{\delta}$ un $(q+1)$ -arco di un piano di $S_{\delta+2}$ sghembo con l' $S_{\delta-1}$, se $p = 2$.

12. In un $S_{n,q}$, con $n \geq 4$, consideriamo una calotta $C(Q_{n-1}, \delta)$, con $0 < \delta < n-2$. Sia $\bar{S}_{\delta}$ un qualsiasi $S_{\delta} \subset C(Q_{n-1}, \delta)$ e $\bar{S}_{\delta+2}$ un $S_{\delta+2} \supset \bar{S}_{\delta}$ non contenente l' $S_{\delta+1}$ tangente alla calotta lungo $\bar{S}_{\delta}$. Ognuno dei $q+1$ $S_{\delta+1} \supset \bar{S}_{\delta}$

⁽¹⁶⁾ Cfr. E. BERTINI [2], cap. I, n. 16, in cui il teorema è dimostrato in uno spazio proiettivo reale o complesso; ma l'argomentazione ivi fatta può venir ripetuta in un qualsiasi spazio grafico.

⁽¹⁷⁾ Cfr. B. SEGRE [17], [18].

di $\bar{S}_{\delta+2}$ interseca ulteriormente $C(Q_{n-1}, \delta)$ in un S_{δ} (n. 9); rimangono così individuati, oltre a $\bar{S}_{\delta}$, altri $q+1$ S_{δ} di $C(Q_{n-1}, \delta)$, contenuti in $\bar{S}_{\delta+2}$, ognuno dei quali interseca $\bar{S}_{\delta}$ in un $S_{\delta-1}$.

Ci proponiamo di dimostrare che *due qualsiasi dei precedenti S_{δ} intersecano $\bar{S}_{\delta}$ in due distinti $S_{\delta-1}$* .

Ragionando per assurdo, ammettiamo che tra i $q+1$ S_{δ} suddetti ne esistano due distinti, li indicheremo rispettivamente con S_{δ}' e S_{δ}'' , intersecanti $\bar{S}_{\delta}$ in uno stesso $S_{\delta-1}$, che denoteremo con $S_{\delta-1}^*$. Cominciamo a far vedere che, in questa ipotesi, ogni altro S_{δ} in questione deve passare per $S_{\delta-1}^*$. Supposto infatti che ne esista uno incontrante $\bar{S}_{\delta}$ in un $S_{\delta-1}$ distinto da $S_{\delta-1}^*$, lo indicheremo con $\bar{S}_{\delta}$ denotando con $\bar{S}_{\delta-1}$ la sua intersezione con $\bar{S}_{\delta}$, consideriamo l' $S_{\delta+1}$ congiungente S_{δ}' e S_{δ}'' . Esso incontra $\bar{S}_{\delta}$ in $S_{\delta-1}^*$ e $\bar{S}_{\delta}$ in un $S_{\delta-1}$, certamente distinto sia da $S_{\delta-1}^*$, sia da $\bar{S}_{\delta-1}$ (in quanto $\bar{S}_{\delta-1}$, essendo distinto da $S_{\delta-1}^*$, non è contenuto nell' $S_{\delta+1}$). Il suddetto $S_{\delta-1}$, essendo contenuto nella calotta $C(Q_{n-1}, \delta)$, dovrà necessariamente appartenere o a S_{δ}' o a S_{δ}'' . Nel primo caso (analogamente si ragiona nel secondo caso) gli spazi S_{δ}' , $\bar{S}_{\delta}$, $\bar{S}_{\delta}$, incontrandosi a due a due in $S_{\delta-1}$ distinti tra loro, debbono essere contenuti in uno stesso $S_{\delta+1}$ e ciò è assurdo (Cfr. proposizione 8^a n. 3).

Consideriamo ora un piano $\pi \subset \bar{S}_{\delta+2}$, sghembo con $S_{\delta-1}^*$, esso interseca ciascuno dei $q+1$ S_{δ} suddetti (i quali, per quanto precede, passano tutti per $S_{\delta-1}^*$) e $\bar{S}_{\delta}$ in un punto. π incontra quindi $C(Q_{n-1}, \delta)$ in $q+2$ punti distinti, i quali sono a tre a tre non allineati (se tre di essi fossero allineati, detta r la retta che li congiunge, essa dovrebbe appartenere a $C(Q_{n-1}, \delta)$, onde $q+1$ dei $q+2$ punti suddetti dovrebbero stare su r , ma allora l' $S_{\delta+1}$ congiungente r con $S_{\delta-1}^*$ dovrebbe contenere $q+1$ dei $q+2$ S_{δ} suddetti, e ciò è escluso). Ne segue che $\bar{S}_{\delta+2}$ incontra la $C(Q_{n-1}, \delta)$ in un cono proiettante da $S_{\delta-1}^*$ un $(q+2)$ -arco di π . Ora ciò è assurdo se $p \neq 2$, in quanto, in questa ipotesi, non esistono $(q+2)$ -archi piani⁽¹⁸⁾. Ci proponiamo di ricondurre all'assurdo anche il caso $p=2$.

Consideriamo l' $S_{\delta+3}$ congiungente $\bar{S}_{\delta+2}$ e l' $S_{\delta+1}$ tangente alla $C(Q_{n-1}, \delta)$ lungo $\bar{S}_{\delta}$. Ogni $S_{\delta+2} \subset S_{\delta+3}$ contenente l' $S_{\delta+1}$ tangente suddetto incontra: la $C(Q_{n-1}, \delta)$ in un cono proiettante da un $S_{\delta-1}$ di $\bar{S}_{\delta}$ un $(q+1)$ -arco di un piano sghembo con l' $S_{\delta-1}$ (n. 11), ed inoltre $\bar{S}_{\delta+2}$ in un $S_{\delta+1}$ ($\supset \bar{S}_{\delta}$), il quale interseca la $C(Q_{n-1}, \delta)$, oltre che in $\bar{S}_{\delta}$, in un S_{δ} passante per $S_{\delta-1}^*$. Onde lo spazio vertice del precedente cono coincide con $S_{\delta-1}^*$. Ne segue che ogni $S_{\delta+1}$ di $S_{\delta+3}$, contenente S_{δ} e distinto dall' $S_{\delta+1}$ tangente lungo $\bar{S}_{\delta}$, interseca ulteriormente la $C(Q_{n-1}, \delta)$ in un S_{δ} passante per $S_{\delta-1}^*$, (in quanto un tale S_{δ} appartiene al cono sezione dell' $S_{\delta+2}$, individuato da esso e dall' $S_{\delta+1}$ tangente, con la $C(Q_{n-1}, \delta)$).

(18) Cfr. R. C. BOSE [3] e B. QVIST [13], p. 8.

L'intersezione di $S_{\delta+3}$ con la $C(Q_{n-1}, \delta)$ è dunque costituita da $\bar{S}_\delta$ e dai $q^2 + q$ S_δ , passanti per $S_{\delta-1}^*$ e distinti tra loro e da $\bar{S}_\delta$, ulteriori intersezioni della $C(Q_{n-1}, \delta)$ con i $q^2 + q$ $S_{\delta+1}$ di $S_{\delta+3}$ contenenti $\bar{S}_\delta$ e distinti dall' $S_{\delta+1}$ tangente lungo $\bar{S}_\delta$.

Consideriamo ora un $S_\delta \subset S_{\delta+3}$ sghembo con $S_{\delta-1}^*$; ognuno dei $q^2 + q + 1$ S_δ suddetti incontra l' S_δ in un sol punto. L' S_δ ha dunque in comune con la $C(Q_{n-1}, \delta)$ $q^2 + q + 1$ punti distinti, i quali sono a tre a tre non allineati (in quanto se tre di essi fossero allineati, detta r la retta che li congiunge, essa dovrebbe appartenere alla $C(Q_{n-1}, \delta)$, ma allora l' $S_{\delta+1}$, congiungente r con $S_{\delta-1}^*$, dovrebbe contenere $q + 1$ dei $q^2 + q + 1$ S_δ suddetti, e ciò è escluso). Ma in un $S_{\delta,q}$, con $p = 2$, non possono esistere $q^2 + q + 1$ punti a tre a tre non allineati ⁽¹⁹⁾. Ne segue l'assurdo anche in questo caso.

13. Continuiamo ad indicare con $\bar{S}_\delta$ un qualsiasi S_δ di una calotta $C(Q_{n-1}, \delta)$, denotando con $\bar{S}_{\delta+1}$ l' $S_{\delta+1}$ tangente alla calotta lungo $\bar{S}_\delta$. È stato dimostrato (n. 11) che un qualsiasi $S_{\delta+2}$ contenente $\bar{S}_{\delta+1}$ incontra la $C(Q_{n-1}, \delta)$ in un cono avente come spazio vertice un $S_{\delta-1}$ di $\bar{S}_\delta$ e proiettante da tale $S_{\delta-1}$ un $(q + 1)$ -arco di un piano sghembo con esso. Ora ci proponiamo di dimostrare che due tali $S_{\delta+2}$ incontrano la calotta in due coni aventi $S_{\delta-1}$ vertici distinti.

Ammettiamo, per assurda ipotesi, che esistano due distinti $S_{\delta+2} \supset \bar{S}_{\delta+1}$, li indicheremo rispettivamente con $S'_{\delta+2}$ e $S''_{\delta+2}$, intersecanti la $C(Q_{n-1}, \delta)$ in due coni Γ' e Γ'' aventi lo stesso spazio vertice coincidente con un $S_{\delta-1}$ di $\bar{S}_\delta$, che denoteremo con $S_{\delta-1}^*$. $S'_{\delta+2}$ e $S''_{\delta+2}$ si incontrano in $\bar{S}_{\delta+1}$ e quindi i due coni Γ' e Γ'' hanno in comune solamente $\bar{S}_\delta$. Consideriamo un S'_δ appartenente a Γ' e distinto da $\bar{S}_\delta$, e un S''_δ appartenente a Γ'' e distinto da $\bar{S}_\delta$. $\bar{S}_\delta$, S'_δ , S''_δ si incontrano a due a due in $S_{\delta-1}^*$ quindi l' $S_{\delta+2}$ da essi individuato, in base a quanto è stato dimostrato nel numero precedente, deve necessariamente contenere $\bar{S}_{\delta+1}$, ma allora tanto $S'_{\delta+2}$ che $S''_{\delta+2}$ debbono coincidere con tale $S_{\delta+2}$ e quindi tra loro. L'assurdo prova l'asserto.

Dalla precedente proposizione si deduce la seguente proprietà:

Ogni calotta $C(Q_{n-1}, \delta)$ di un $S_{n,q}$, con $n \geq 4$, è tale che δ verifica di fatto la disuguaglianza

$$\frac{n}{2} - 1 \leq \delta.$$

Infatti, fissato un S_δ nella calotta $C(Q_{n-1}, \delta)$, gli $S_{\delta+2}$ contenente l' $S_{\delta+1}$ tangente lungo S_δ alla $C(Q_{n-1}, \delta)$ sono $Q_{n-\delta-2}$, gli $S_{\delta-1}$ di S_δ sono Q_δ : per quanto è detto nella proposizione precedente deve allora essere $Q_\delta \geq Q_{n-\delta-2}$,

⁽¹⁹⁾ Cfr. B. QVIST [13], § 2.

ossia $\delta \geq n - \delta - 2$, da cui

$$\frac{n}{2} - 1 \leq \delta.$$

In base a quanto si è ora dimostrato, nello studio delle calotte $C(Q_{n-1}, \delta)$ dobbiamo senz'altro supporre $\frac{n}{2} - 1 \leq \delta < n - 2$.

14. Mantenendo le notazioni del numero 12 e ricordando quanto è ivi detto, si ha che i $q + 1$ $S_{\delta+1} \supset \bar{S}_\delta$ di $\bar{S}_{\delta+2}$ incontrano ulteriormente la $C(Q_{n-1}, \delta)$ in $q + 1$ S_δ intersecanti $\bar{S}_\delta$ in $S_{\delta-1}$ *distinti*. Ci proponiamo di dimostrare che i $q + 1$ $S_{\delta-1}$ così individuati in $\bar{S}_\delta$ formano fascio se $\delta > 1$.

Sia $S_{\delta+1}^*$ un $S_{\delta+1} \supset \bar{S}_\delta$ di $\bar{S}_{\delta+2}$, esso interseca ulteriormente la $C(Q_{n-1}, \delta)$ in un S_δ^* , il quale ha in comune con $\bar{S}_\delta$ un $S_{\delta-1}^*$. Consideriamo ora un $S_{\delta+1} \subset \bar{S}_{\delta+2}$ contenente S_δ^* e distinto sia da $S_{\delta+1}^*$, sia dall' $S_{\delta+1}$ tangente alla $C(Q_{n-1}, \delta)$ lungo S_δ^* , esso interseca ulteriormente la $C(Q_{n-1}, \delta)$ in un S_δ , che denoteremo con $\bar{S}_\delta$.

$\bar{S}_\delta$ e S_δ^* si incontrano in un $\bar{S}_{\delta-1}$, distinto da $S_{\delta-1}^*$ (altrimenti $\bar{S}_\delta$ e S_δ^* incontrerebbero $\bar{S}_\delta$ in uno stesso $S_{\delta-1}$, e ciò è escluso in base al n. 12). $\bar{S}_{\delta-1}$ e $S_{\delta-1}^*$, essendo distinti tra loro e contenuti in S_δ^* , si intersecano in un $S_{\delta-2}$, che denoteremo con $\bar{S}_{\delta-2}$. $\bar{S}_\delta$ e $\bar{S}_{\delta-2}$, non potendosi incontrare in un $S_{\delta-1}$ (altrimenti $\bar{S}_\delta$, $\bar{S}_{\delta-2}$ e S_δ^* , avendo a due a due in comune un $S_{\delta-1}$, giacerebbero in uno stesso $S_{\delta+1}$), si intersecano esclusivamente in $\bar{S}_{\delta-2}$.

Consideriamo infine un qualsiasi $S_{\delta+1}$ di $\bar{S}_{\delta+2}$ passante per $\bar{S}_\delta$. Esso, non potendo contenere $\bar{S}_\delta$ (in quanto $\bar{S}_\delta$ e $\bar{S}_\delta$ si incontrano in $\bar{S}_{\delta-2}$ e quindi il loro spazio congiungente è $\bar{S}_{\delta+2}$ e non un $S_{\delta+1}$), deve incontrare $\bar{S}_\delta$ in un $S_{\delta-1}$, contenente ovviamente $\bar{S}_{\delta-2}$ e non contenuto in $\bar{S}_\delta$. Ma allora l' S_δ ulteriore intersezione di $S_{\delta+1}$ con la $C(Q_{n-1}, \delta)$ conterrà il suddetto $S_{\delta-1}$ e quindi $\bar{S}_{\delta-2}$. Ne segue che tutti i $q + 1$ S_δ , ulteriori intersezioni degli $S_{\delta+1} \supset \bar{S}_\delta$ di $S_{\delta+2}$ con la $C(Q_{n-1}, \delta)$, contengono $\bar{S}_{\delta-2}$. Da ciò segue immediatamente l'asserto.

15. In un $S_{n,q}$ consideriamo una calotta $C(Q_{n-1}, \delta)$, supporremo in questo numero e nel seguente $\frac{n}{2} - 1 < \delta < n - 2$ e quindi $n > 4$.

Continuiamo ad indicare con $\bar{S}_\delta$ un $S_\delta \subset C(Q_{n-1}, \delta)$ e con $\bar{S}_{\delta+1}$ l' $S_{\delta+1}$ tangente alla $C(Q_{n-1}, \delta)$ lungo $\bar{S}_\delta$. Ognuno dei $Q_{n-\delta-2}$ $S_{\delta+2}$ contenente $\bar{S}_{\delta+1}$ incontra la $C(Q_{n-1}, \delta)$ in un cono, avente come spazio vertice un $S_{\delta-1} \subset \bar{S}_\delta$, e due tali $S_{\delta+2}$ distinti incontrano la $C(Q_{n-1}, \delta)$ in coni aventi $S_{\delta-1}$ vertici distinti (n. 13). In $\bar{S}_\delta$ si vengono così a determinare $Q_{n-\delta-2}$ $S_{\delta-1}$, vertici dei suddetti coni. Denoteremo con I l'insieme di tali $S_{\delta-1} \subset \bar{S}_\delta$. Ci proponiamo di dimostrare che:

L'insieme I su specificato è costituito da tutti e soli gli $S_{\delta-1} \subset \bar{S}_\delta$ che passano per un $S_{2\delta-n+1} \subset \bar{S}_\delta$.

Presi comunque in $\bar{S}_\delta$ due distinti $S_{\delta-1} \in I$, consideriamo i due coni che li ammettono come vertici. Siano S'_δ e S''_δ due S_δ , distinti da $\bar{S}_\delta$, appartenenti rispettivamente al primo e al secondo cono. S'_δ , S''_δ , $\bar{S}_\delta$ sono congiunti da un $S_{\delta+2}$ non contenente $\bar{S}_{\delta+1}$ (n. 12). Ne segue, per quanto è detto nel n. 14, che tutti gli $S_{\delta-1}$ di $\bar{S}_\delta$ appartenenti al fascio individuato dai due $S_{\delta-1} \in I$ appartengono ad I .

I è dunque un insieme di iperpiani ($S_{\delta-1}$) di $\bar{S}_\delta$ godente della proprietà di contenere, insieme a due suoi qualsiasi iperpiani, tutto il fascio da essi determinato. Dalla duale della proposizione 1 n. 3 segue allora che I è un sistema lineare di iperpiani di $\bar{S}_\delta$; dovendone contenere $Q_{n-\delta-2}$ esso coinciderà con la stella di iperpiani di S_δ avente come centro un $S_{2\delta-n+1}$.

16. Ci proponiamo di dimostrare in questo numero la proposizione seguente:

In un $S_{n,q}$, con $n > 4$, ogni calotta $C(Q_{n-1}, \delta)$, con $\frac{n}{2} - 1 < \delta < n - 2$,

è un cono avente come spazio vertice un $S_{2\delta-n+1}$. Inoltre ogni $S_{2(n-\delta-1)}$, sghembo con l' $S_{2\delta-n+1}$, interseca il cono in una calotta $C(Q_{2(n-\delta-1)-1}, n-\delta-2)$.

Sia $\bar{S}_\delta$ un fissato S_δ di $C(Q_{n-1}, \delta)$, ognuno dei $Q_{n-\delta-1} - 1$ $S_{\delta+1} \supset \bar{S}_\delta$, distinto dall' $S_{\delta+1}$ tangente a $C(Q_{n-1}, \delta)$ lungo $\bar{S}_\delta$, interseca ulteriormente $C(Q_{n-1}, \delta)$ in un S_δ , denoteremo con $\bar{S}_\delta$ ognuno dei $Q_{n-\delta-1} - 1$ S_δ così individuati.

Per quanto è detto nel numero precedente, gli $\bar{S}_\delta$ passano tutti per un $S_{2\delta-n+1} \subset \bar{S}_\delta$, che indicheremo con $S_{2\delta-n+1}^*$.

Sia P un qualunque punto di $C(Q_{n-1}, \delta)$ non contenuto in $S_{2\delta-n+1}^*$, l' $S_{2\delta-n+2}$ congiungente P con $S_{2\delta-n+1}^*$ appartiene a $C(Q_{n-1}, \delta)$; infatti se P è contenuto in $\bar{S}_\delta$ il suddetto $S_{2\delta-n+2}$ deve appartenere a $\bar{S}_\delta$ e quindi a $C(Q_{n-1}, \delta)$, se P non è contenuto in $\bar{S}_\delta$ l' $S_{\delta+1}$ congiungente P con $\bar{S}_\delta$ interseca ulteriormente $C(Q_{n-1}, \delta)$ in un $\bar{S}_\delta$ passante per P e per $S_{2\delta-n+1}^*$ e quindi contenente l' $S_{2\delta-n+2}$ in questione, il quale deve dunque ancora appartenere a $C(Q_{n-1}, \delta)$. Da ciò segue che $C(Q_{n-1}, \delta)$ risulta un cono avente come spazio vertice l' $S_{2\delta-n+1}^*$.

Rimane così provata la prima parte della proposizione, dimostriamone la seconda. Un $S_{2(n-\delta-1)}$ (spazio di dimensione duale di $S_{2\delta-n+1}^*$), sghembo con $S_{2\delta-n+1}^*$, incontra la $C(Q_{n-1}, \delta)$ in una calotta $C(K', \delta')$ (cfr. n. 3 proposizione 5^a). Ci proponiamo di determinare K' e δ' .

La calotta $C(K', \delta')$ contiene gli $S_{n-\delta-2}$ intersezioni degli $\bar{S}_\delta$ con l' $S_{2(n-\delta-1)}$, inoltre essa non può contenere nessun $S_{n-\delta-1}$, altrimenti, essendo la $C(Q_{n-1}, \delta)$ un cono con vertice in $S_{2\delta-n+1}^*$, l' $S_{\delta+1}$ congiungente $S_{2\delta-n+1}^*$ con il supposto esistente $S_{n-\delta-1}$ di $C(K', \delta')$, dovrebbe appartenere totalmente a $C(Q_{n-1}, \delta)$ e ciò è escluso. Ne segue che $n - \delta - 2$ è la massima dimensione degli spazi contenuti in $C(K', \delta')$ e quindi $\delta' = n - \delta - 2$.

Determiniamo ora K' . Gli $S_{2\delta-n+2}$, contenuti in un $\bar{S}_\delta$ o in $\bar{S}_\delta$, passanti per $S_{2\delta-n+1}^*$, sono $Q_{n-\delta-2}$ e ognuno di essi incontra l' $S_{2(n-\delta-1)}$ in un punto.

Ogni $\bar{S}_\delta$ interseca $\bar{\bar{S}}_\delta$ in un $S_{\delta-1}$, gli $S_{2\delta-n+2} \subset S_{\delta-1}$ per $S_{2\delta-n+1}^*$ sono $Q_{n-\delta-3}$. Quindi gli $S_{2\delta-n+2} \subset S_\delta$ passanti per $S_{2\delta-n+1}^*$ e non contenuti in $\bar{\bar{S}}_\delta$ sono: $Q_{n-\delta-2} - Q_{n-\delta-3} = q^{n-\delta-2}$. K' è dato: dal numero degli $S_{2\delta-n+2}$ di ogni $\bar{S}_\delta$ passanti per $S_{2\delta-n+1}^*$ e non contenuti in $\bar{\bar{S}}_\delta$, più il numero degli $S_{2\delta-n+2}$ di $\bar{\bar{S}}_\delta$ passanti per $S_{2\delta-n+1}^*$. Sarà quindi:

$$K' = (Q_{n-\delta-1} - 1)q^{n-\delta-2} + Q_{n-\delta-2} = Q_{2(n-\delta-1)-1}.$$

Concludendo l' $S_{2(n-\delta-1)}$ interseca la $C(Q_{n-1}, \delta)$ in una calotta $C(Q_{2(n-\delta-1)-1}, n - \delta - 2)$.

Nei rimanenti numeri di questo paragrafo ci proponiamo di dimostrare che in un $S_{2r,q}$, con $r \geq 2$, ogni calotta $C(Q_{2r-1}, r-1)$ è una quadrica non specializzata dell' $S_{2r,q}$. Da ciò e dalla proposizione precedentemente dimostrata, seguirà che in un $S_{n,q}$ ogni calotta $C(Q_{n-1}, \delta)$, con $\frac{n}{2} - 1 < \delta < n - 2$, è un cono quadrico avente come spazio vertice un $S_{2\delta-n+1}$.

17. In un $S_{2r,q}$, con $r > 1$, ogni calotta $C(Q_{2r-1}, r-1)$ gode della proprietà seguente, che ci proponiamo di dimostrare in questo numero.

Comunque si consideri un punto P di una calotta $C(Q_{2r-1}, r-1)$, gli S_{r-1} di $C(Q_{2r-1}, r-1)$ per P sono congiunti da un iperpiano, che denomineremo l'iperpiano tangente in P alla $C(Q_{2r-1}, r-1)$. Esso incontra la calotta in un cono con vertice in P , che denomineremo cono tangente in P alla $C(Q_{2r-1}, r-1)$, il quale è intersecato da ogni S_{2r-2} , non passante per P , dell'iperpiano tangente in una calotta $C(Q_{2r-3}, r-2)$ di S_{2r-2} .

Consideriamo un qualsiasi S_{r-1} della calotta $C(Q_{2r-1}, r-1)$ e denotiamo con T_r lo spazio tangente alla calotta lungo S_{r-1} . In base alla prima proposizione del n. 9 e al numero precedente se $r > 2$, e in forza dell'ultima proposizione del n. 11 se $r = 2$, deduciamo che un S_{2r-1} contenente T_r incontra la calotta in un cono, che denoteremo con Γ , avente vertice in un punto V di S_{r-1} , la cui intersezione con un S_{2r-2} , appartenente a S_{2r-1} e non passante per V , risulta una calotta $C(Q_{2r-3}, r-2)$ di S_{2r-2} .

Dimostriamo che ogni S_{r-1} della calotta $C(Q_{2r-1}, r-1)$, passante per V , appartiene a Γ . Infatti, se ciò non fosse, un supposto esistente S_{r-1}^* della $C(Q_{2r-1}, r-1)$, passante per V e non contenuto in Γ , incontrerebbe S_{2r-1} in un $S_{r-2}^* \supset V$, contenuto in Γ e quindi appartenente ad un suo $\bar{S}_{r-1}$ (cfr. seconda proposizione n. 9). Indichiamo con $T_r (\subset S_{2r-1})$ l' S_r tangente a Γ lungo $\bar{S}_{r-1}$, esso coincide con l' S_r tangente alla $C(Q_{2r-1}, r-1)$ lungo $\bar{S}_{r-1}$. Ogni $S_{r+1} \subset S_{2r-1}$ passante per T_r incontra la $C(Q_{2r-1}, r-1)$, e quindi Γ , in un cono il cui S_{r-2} vertice giace in $\bar{S}_{r-1}$ e passa per V (n. 11). Quando l' S_{r+1} varia descrivendo i Q_{r-2} S_{r+1} di S_{2r-1} per T_r , il cono varia descrivendo Γ e il suo S_{r-2} vertice descrive la stella di S_{r-2} con centro V appartenente a $\bar{S}_{r-1}$. Da quanto è detto nel n. 13 segue allora che un qualsiasi S_{r+1} contenente T_r e intersecante la $C(Q_{2r-1}, r-1)$ in un cono con vertice in un S_{r-2}

di $\bar{S}_{r-1}$ per V , non potendo differire da uno dei precedenti S_{r+1} , deve appartenere a S_{2r-1} . L' S_{r+1} congiungente S_{r-1}^* con $\bar{T}_r$ non appartiene a S_{2r-1} e, d'altra parte, incontra la $C(Q_{2r-1}, r-1)$ in un cono con vertice nell' S_{r-2}^* di S_{r-1} passante per V . Ciò è assurdo per quanto precede, ne segue l'asserto.

Da quanto ora dimostrato si deduce che: Γ risulta il luogo degli S_{r-1} di $C(Q_{2r-1}, r-1)$ passanti per V e l' S_{2r-1} lo spazio congiungente tali S_{r-1} .

Ne segue che due distinti S_{2r-1} per T_r intersecano la $C(Q_{2r-1}, r-1)$ in due coni con vertici in due punti distinti di S_{r-1} . Poichè sia gli S_{2r-1} per T_r sia i punti di S_{r-1} sono Q_{r-1} si ha che ad ogni punto di S_{r-1} rimane associato un iperpiano S_{2r-1} : spazio congiungente gli S_{r-1} di $C(Q_{2r-1}, r-1)$ per il punto.

Sia ora P un punto della $C(Q_{2r-1}, r-1)$, per quanto è detto nella seconda proposizione del n. 9 esisterà un S_{r-1} di $C(Q_{2r-1}, r-1)$ per P , quindi, per ciò che precede, per P passerà un ben determinato iperpiano: spazio congiungente gli S_{r-1} di $C(Q_{2r-1}, r-1)$ passanti per P . Il suddetto iperpiano interseca la $C(Q_{2r-1}, r-1)$ in un cono con vertice in P , il quale incontra ogni S_{2r-2} dell'iperpiano, non passante per P , in una calotta $C(Q_{2r-3}, r-2)$ di S_{2r-2} .

18. Dalla proposizione dimostrata nel numero precedente e dalla seconda proposizione del n. 9 si deduce facilmente che: *Il cono tangente in un punto P ad una calotta $C(Q_{2r-1}, r-1)$ di un $S_{2r,q}$ risulta il luogo delle rette della calotta per P .*

Sussiste anche la seguente proposizione: *L'iperpiano tangente in un punto P ad una calotta $C(Q_{2r-1}, r-1)$ di un $S_{2r,q}$, risulta il luogo delle rette per P tangenti o appartenenti alla calotta.*

Siano infatti τ e Γ l'iperpiano e il cono tangente in P alla calotta. Le rette per P contenute in τ risultano evidentemente tangenti o appartenenti alla calotta. Viceversa ogni retta per P tangente o appartenente alla calotta giace in τ , in quanto le rette per P non giacenti in τ sono secanti la calotta: infatti i punti della calotta non appartenenti a τ sono q^{2r-1} , le q^{2r-1} rette congiungenti P con i suddetti punti sono tutte secanti la calotta (non potendo appartenere nessuna ad essa, altrimenti sarebbe contenuta, in base alla prop. precedente, in Γ e quindi in τ), d'altronde esse esauriscono le rette per P non appartenenti a τ .

Tutte le proprietà viste in questo e nei precedenti numeri valgono indifferentemente nei due casi $p \neq 2$ e $p = 2$. Volendosi proseguire oltre nello studio dello calotte $C(Q_{2r-1}, r-1)$ di $S_{2r,q}$ occorre distinguere i due casi. È ciò che faremo nei rimanenti numeri di questo paragrafo.

19. Ci proponiamo di dimostrare in questo e nei successivi numeri 20, 21, 22, 23 il seguente

TEOREMA IV. — In un $S_{2r,q}$, con $r \geq 1$ e $p \neq 2$, ogni calotta $C(Q_{2r-1}, r-1)$ risulta una quadrica (conica se $r=1$) non specializzata.

Il teorema per $r=1$ riducesi al noto teorema di B. SEGRE affermando che ogni $(q+1)$ -arco di un $S_{2,q}$, con $p \neq 2$, risulta una conica⁽²⁰⁾; possiamo quindi procedere per induzione rispetto ad r , ammettendo vero il teorema per $r-1$ e dimostrandolo per r .

In un $S_{2r,q}$, con $r > 1$, consideriamo una calotta $C(Q_{2r-1}, r-1)$, sia P un suo punto e τ l'iperpiano tangente, (n. 17) in P a $C(Q_{2r-1}, r-1)$. τ incontra (n. 17) la $C(Q_{2r-1}, r-1)$ in un cono Γ con vertice in P ed intersecato da un $S_{2(r-1)}$ di τ , non passante per P , in una calotta $C(Q_{2(r-1)-1}, r-2)$ di $S_{2(r-1)}$, ossia, per l'induzione ammessa, in una quadrica non specializzata dell' $S_{2(r-1)}$. Γ risulta quindi un cono *quadrico*. Si ha dunque che l'iperpiano tangente in un punto P di una calotta $C(Q_{2r-1}, r-1)$ incontra la calotta in un cono quadrico con vertice in P .

Sia T_1 un qualsiasi punto della calotta $C(Q_{2r-1}, r-1)$, τ_1 e Γ_1 rispettivamente l'iperpiano e il cono tangente in T_1 a $C(Q_{2r-1}, r-1)$. Sia T_2 un altro punto di $C(Q_{2r-1}, r-1)$ non appartenente a Γ_1 , τ_2 e Γ_2 rispettivamente l'iperpiano e il cono tangente in T_2 a $C(Q_{2r-1}, r-1)$.

τ_2 non può passare per T_1 , altrimenti T_1 sarebbe un punto di Γ_2 , onde tutta la retta T_2T_1 dovrebbe appartenere a Γ_2 e quindi alla $C(Q_{2r-1}, r-1)$, ma allora la retta T_2T_1 dovrebbe appartenere anche a Γ_1 (n. 18), onde $T_2 \subset \tau_1$, ciò che è stato escluso. τ_2 e τ_1 si incontrano dunque in un S_{2r-2} non passante nè per T_1 , nè per T_2 . L' S_{2r-2} intersecherà allora Γ_1 e Γ_2 in una stessa quadrica non specializzata — intersezione della calotta con l' S_{2r-2} — che denoteremo con H .

Si consideri il fascio F di quadriche che ammette come varietà base i due coni Γ_1 e Γ_2 . Esso possiede, come si può facilmente dimostrare⁽²¹⁾, due sole quadriche specializzate: quella che si spezza negli iperpiani τ_1 e τ_2 , e il cono avente come vertice la retta T_1T_2 e proiettante da essa la quadrica H .

Sia P un punto della calotta $C(Q_{2r-1}, r-1)$, non giacente nè in Γ_1 , nè in Γ_2 . La quadrica del fascio F passante per P è certo non specializzata. Infatti essa non può specializzarsi nè evidentemente nella quadrica spezzata nei due iperpiani τ_1 e τ_2 , nè nel cono avente come vertice la retta T_1T_2 e

⁽²⁰⁾ Cfr. B. SEGRE [17] e [18].

⁽²¹⁾ Infatti un qualsiasi punto V dello spazio vertice di una prefissata quadrica specializzata (cono) del fascio, deve necessariamente appartenere o alla retta T_1T_2 o all' $S_{2(r-1)}$, intersezione degli iperpiani τ_1 e τ_2 , altrimenti i due coni quadrici dell' $S_{2r,q}$, proiezioni rispettive di Γ_1 e Γ_2 da V , certamente distinti tra loro, dovrebbero appartenere alla quadrica specializzata in questione, e ciò è assurdo. Se V appartiene alla T_1T_2 , tutta la T_1T_2 dovrà evidentemente esser contenuta nella quadrica, che dovrà allora coincidere con il cono proiettante dalla T_1T_2 la quadrica H di $S_{2(r-1)}$. Se V appartiene a $S_{2(r-1)}$, tutto $S_{2(r-1)}$ dovrà evidentemente esser contenuto nella quadrica, che dovrà allora coincidere con quella che degenera negli iperpiani τ_1 e τ_2 .

proiettante da essa la quadrica H . In quanto, in quest'ultimo caso, il piano π , individuato da T_1, T_2, P , dovrebbe essere un piano generatore del cono e intersecare l' S_{2r-2} , sezione di τ_1 con τ_2 , in un punto T di H ; ma allora le rette TT_1 e TT_2 e il punto P di π appartenerebbero alla $C(Q_{2r-1}, r-1)$, onde, non potendo P appartenere nè alla retta TT_1 nè alla retta TT_2 , tutto il piano π dovrebbe appartenere alla $C(Q_{2r-1}, r-1)$ (cfr. proposizione 6^a n. 3), e quindi anche la retta T_1T_2 , ma ciò è escluso.

Ne segue che ogni quadrica del fascio F , passante per un punto P di $C(Q_{2r-1}, r-1)$ che non appartenga alla varietà base del fascio F , è non specializzata.

20. Sia $\mathcal{Q}$ una quadrica non specializzata del fascio F di cui al numero precedente. Vogliamo dimostrare che: se una retta s della $C(Q_{2r-1}, r-1)$ ha un punto P , non giacente nè in τ_1 nè in τ_2 , in comune con $\mathcal{Q}$, tutta s appartiene a $\mathcal{Q}$.

Due casi sono possibili: s incontra τ_1 e τ_2 rispettivamente in due punti distinti; s incontra τ_1 e τ_2 in due punti coincidenti con un punto dell' S_{2r-2} intersezione di τ_1 e τ_2 .

Nel primo caso i punti d'incontro di s con τ_1 e τ_2 sono rispettivamente punti di Γ_1 e Γ_2 , e quindi appartengono a $\mathcal{Q}$; ma allora su s ci sono tre punti distinti di $\mathcal{Q}$ (P e i due punti suddetti), quindi essa appartiene per intero a $\mathcal{Q}$.

Nel secondo caso sia $\bar{P}$ il punto in cui s incontra l' S_{2r-2} sezione di τ_1 e τ_2 ; $\bar{P}$ appartiene alla quadrica H intersezione della calotta con S_{2r-2} . Su s ci sono q punti distinti da $\bar{P}$, per ognuno di essi passa una quadrica non specializzata del fascio F ; poichè tali quadriche sono $q-1$, deve necessariamente esistere tra esse una avente due punti in comune con s , ma allora tutta s deve appartenere a questa quadrica (avendo tre punti in comune con essa: i due punti suddetti e $\bar{P}$), onde detta quadrica contenendo P deve coincidere con $\mathcal{Q}$.

21. Dalla proprietà dimostrata nel numero precedente segue che: denotato con P un punto della calotta $C(Q_{2r-1}, r-1)$, non appartenente nè a Γ_1 nè a Γ_2 , e con $\mathcal{Q}$ la quadrica del fascio F per P , l'iperpiano e il cono tangente in P alla $C(Q_{2r-1}, r-1)$ coincidono rispettivamente con l'iperpiano e il cono tangente in P a $\mathcal{Q}$.

Infatti il cono tangente in P a $C(Q_{2r-1}, r-1)$ è costituito dalle rette per P appartenenti alla $C(Q_{2r-1}, r-1)$ (n. 18), e quindi, in base al n. 20, appartiene anche a $\mathcal{Q}$, risultando il cono tangente in P a $\mathcal{Q}$. Ne segue anche la coincidenza tra i due iperpiani tangenti. Onde l'asserto.

Poichè $\mathcal{Q}$ è non specializzata, l'iperpiano tangente in P a $\mathcal{Q}$, e quindi l'iperpiano tangente in P a $C(Q_{2r-1}, r-1)$, non può passare per l' S_{2r-2}

intersezione di τ_1 e τ_2 , essendo essi rispettivamente gli iperpiani tangenti a $\mathcal{Q}$ in T_1 e T_2 . Data l'arbitrarietà della scelta dei punti T_1 , T_2 e P sulla $C(Q_{2r-1}, r-1)$, se ne deduce la proprietà seguente:

Sia P_1 un qualsiasi punto di una calotta $C(Q_{2r-1}, r-1)$ e π_1 il relativo iperpiano tangente, P_2 un altro punto della $C(Q_{2r-1}, r-1)$ non giacente in π_1 , e π_2 il relativo iperpiano tangente, comunque si consideri un altro punto P_3 della $C(Q_{2r-1}, r-1)$, non giacente nè in π_1 nè in π_2 , l'iperpiano tangente in P_3 alla $C(Q_{2r-1}, r-1)$ non passa per l' S_{2r-2} intersezione di π_1 con π_2 .

22. Con le notazioni del n. 19, sia P un punto della calotta $C(Q_{2r-1}, r-1)$, non appartenente nè a Γ_1 nè a Γ_2 , e $\mathcal{Q}$ la quadrica non specializzata del fascio F per P , vogliamo dimostrare che: *sotto le ipotesi*

- a) $q > 3, \quad r \geq 2$
- b) $q = 3, \quad r > 2,$

comunque si consideri un altro punto P' della calotta $C(Q_{2r-1}, r-1)$, esso appartiene a $\mathcal{Q}$. Da ciò segue il teorema IV completamente nel caso $q > 3$, e nel caso $q = 3$ seguirà non appena lo si dimostrerà indipendentemente per $r = 2$; è ciò che faremo nel n. 23.

Siano τ e Γ rispettivamente l'iperpiano e il cono tangente in P a $\mathcal{Q}$. Essi coincidono con l'iperpiano e il cono tangente in P alla $C(Q_{2r-1}, r-1)$ (n. 21). Inoltre τ non passa per l' S_{2r-2} intersezione di τ_1 e τ_2 (n. 21).

Preso comunque un punto P' della calotta $C(Q_{2r-1}, r-1)$ dobbiamo dimostrare che esso appartiene a $\mathcal{Q}$. Possiamo allora supporre che P' non appartenga nè a Γ_1 , nè a Γ_2 , nè a Γ .

Sia $\mathcal{Q}'$ la quadrica non specializzata nel fascio F per P' ; denoteremo rispettivamente con τ' e Γ' l'iperpiano e il cono tangente in P' a $\mathcal{Q}'$. Essi coincidono con l'iperpiano e il cono tangente in P' alla $C(Q_{2r-1}, r-1)$. Inoltre τ' non passa per nessuno dei tre S_{2r-2} , sezioni rispettive di due dei tre iperpiani τ, τ_1, τ_2 (n. 21).

τ e τ' si incontrano in un S_{2r-2} , che denoteremo con S_{2r-2}^* , non passante nè per P nè per P' e non giacente nè in τ_1 nè in τ_2 , (se giacesse, per esempio, in τ_1 , i tre iperpiani τ, τ_1, τ' si incontrerebbero in uno stesso S_{2r-2} e ciò è escluso). Denotiamo allora con S_{2r-3}^1 e S_{2r-3}^2 rispettivamente i due S_{2r-3} sezione di S_{2r-2}^* con τ_1 e τ_2 .

S_{2r-2}^* incontra Γ e Γ' in una stessa quadrica non specializzata, che denoteremo con H^* . L'asserto seguirà non appena si dimostri che esiste sempre almeno un punto L di H^* , non contenuto nè in S_{2r-3}^1 nè in S_{2r-3}^2 . In quanto, ammessa l'esistenza di un tal punto, esso apparterrà contemporaneamente a Γ e a Γ' e quindi a $\mathcal{Q}$ e a $\mathcal{Q}'$, senza esser contenuto nella varietà base del fascio F (non giacendo L nè in S_{2r-3}^1 nè in S_{2r-3}^2). Ma due quadriche di

uno stesso fascio, avente in comune un punto non contenuto nella varietà base del fascio, coincidono, dunque $\mathcal{Q}$ coinciderà con $\mathcal{Q}'$, e P' dovrà appartenere a $\mathcal{Q}$.

La quadrica non specializzata H^* di S_{2r-2}^* contiene Q_{2r-3} punti ⁽²⁾. Un $S_{2r-3} \subset S_{2r-2}^*$ la incontra in una quadrica che può essere o un cono con punto vertice (se l' S_{2r-3} è tangente), o una quadrica di tipo ellittico, o una quadrica di tipo iperbolico. Nei tre casi i punti comuni all' S_{2r-3} e a H^* sono rispettivamente in numero di Q_{2r-4} , $Q_{2r-4} - q^{r-2}$, $Q_{2r-4} + q^{r-2}$. I punti di H^* non contenuti nè in S_{2r-3}^1 nè in S_{2r-3}^2 sono dunque almeno in numero di $Q_{2r-3} - 2(Q_{2r-4} + q^{r-2})$.

Ci resta dunque da dimostrare la disuguaglianza:

$$(6) \quad Q_{2r-3} - 2(Q_{2r-4} + q^{r-2}) = Q_{2r-4}(q-2) + 1 - 2q^{r-2} > 0$$

nei seguenti due casi

$$\begin{array}{ll} a) & q > 3, \quad r \geq 2 \\ b) & q = 3, \quad r > 2. \end{array}$$

Nel caso $a)$ si ha:

$$4 < q + \frac{1}{q^{r-2}}$$

da cui, con facili passaggi, si ottiene:

$$\frac{2q^{r-2} - 1}{q - 2} < q^{r-2}$$

ed infine la disuguaglianza (6), essendo

$$q^{r-2} \leq Q_{2r-4}.$$

Nel caso $b)$ si ha

$$2(q+1) < q^2 + \frac{1}{q^{r-2}}$$

da cui, con facili passaggi, si ottiene:

$$\frac{2q^{r-2} - 1}{q - 2} < q^{r-1}$$

ed infine la disuguaglianza (6), essendo

$$q^{r-1} < Q_{2r-4}.$$

⁽²²⁾ Per la determinazione del numero di punti delle quadriche negli spazi finiti cfr. E. J. S. PRIMROSE [12] e G. TALLINI [20], nn. 2, 3.

23. Ci rimane ora da dimostrare il teorema IV per una calotta $C(Q_{2r-1}, r-1)$ di un $S_{2r,q}$, con $q=3$ e $r=2$. Dobbiamo cioè provare che in un $S_{4,3}$ ogni calotta $C(40, 1)$ risulta una quadrica non specializzata.

Anche in questo caso valgono tutti i risultati dei numeri precedenti al n. 22. Inoltre, usando le notazioni del n. 19, il fascio di quadriche F è ora costituito da quattro quadriche di cui due specializzate e due non specializzate.

Denotiamo con π il piano intersezione dei due ippiani τ_1 e τ_2 . La conica H , intersezione di $C(40, 1)$ con π , la cui proiezione da T_1 e T_2 dà rispettivamente i coni Γ_1 e Γ_2 , è costituita da quattro punti, che denotiamo con A_1, A_2, A_3, A_4 .

Il cono tangente a $C(40, 1)$ in A_i ($i=1, 2, 3, 4$) è costituito da quattro rette, che sono le uniche rette di $C(40, 1)$ per A_i , due delle quali sono quelle che congiungono A_i rispettivamente con T_1 e T_2 le altre due sono rette non appartenenti nè a τ_1 nè a τ_2 , che denoteremo con a_i ed a'_i .

Consideriamo il piano individuato da a_i e A_i ($i=2, 3, 4$), esso incontra (cfr. prima proposizione n. 9) ulteriormente $C(40, 1)$ in una retta per A_i , incidente a_i in un punto diverso evidentemente da A_i , la quale non può quindi appartenere nè a τ_1 nè a τ_2 . Essa sarà dunque a_i o a'_i . Possiamo supporre, con un cambiamento inessenziale di notazioni, che sia a'_i .

Le rette a'_i, a'_j ($i \neq j; i, j=1, 2, 3, 4$), incidenti a_i , sono sghembe tra loro. Infatti: se si incontrassero in un punto non situato su a_i , il piano da esse determinato dovrebbe contenere anche a_i , ma ciò è escluso non potendo un piano contenere tre rette di $C(40, 1)$ (cfr. prop. 8ª n. 3); se si incontrassero in un punto P di a_i , dovrebbe essere P distinto da A_i e quindi $i, j \neq 1$ ed allora l'ippiano tangente alla $C(40, 1)$ in P — dovendo contenere le rette a'_i, a'_j e a_i (cfr. prima proposizione n. 18) e quindi i tre punti distinti A_i, A_j, A_1 — dovrebbe passare per π , ma ciò è escluso (cfr. seconda proposizione n. 21).

Consideriamo ora il piano individuato da A_i e da a'_j ($i \neq j; i, j=1, 2, 3, 4$), esso interseca la $C(40, 1)$ ulteriormente in una retta per A_i , incidente a'_j in un punto diverso da A_j , la quale non può quindi appartenere nè a τ_1 nè a τ_2 . Essa sarà o la a_i o la a'_i , ma non potendo essere la a'_i in quanto a'_i e a'_j sono sghembe tra loro, dovrà essere la a_i . Da ciò segue che le rette a_i ($i=1, 2, 3, 4$) sono incidenti alle rette a'_j ($j=1, 2, 3, 4$). Inoltre le rette a_i sono a due a due sghembe tra loro, in quanto se due di esse fossero incidenti, il piano da esse determinato dovrebbe contenere almeno una delle rette a'_j (essendo le a'_j incidenti alle a_i), ma ciò è escluso, non potendo un piano contenere tre rette di $C(40, 1)$.

Le due quaterne a_1, a_2, a_3, a_4 e a'_1, a'_2, a'_3, a'_4 sono costituite dunque ognuna da rette a due a due sghembe tra loro, e sono tali che ogni retta della prima quaterna è incidente a tutte quelle della seconda quaterna e viceversa.

Queste rette costituiscono quindi una quadrica rigata R di un $\bar{S}_3$ (l' S_3 individuato da a_i e π). Inoltre R risulta l'intersezione di $\bar{S}_3$ con la $C(40, 1)$.

Sia P un punto di R , non appartenente nè a τ_i nè a τ_2 , a_i e a_j (con $i \neq j$) le due rette di R per P , e $\mathcal{Q}$ la quadrica non specializzata del fascio F per P . Le rette a_i e a_j appartengono alla $C(40, 1)$ e passano per il punto P di $\mathcal{Q}$, punto che non è contenuto nè in τ_i nè in τ_2 , quindi esse appartengono anche a $\mathcal{Q}$ (n. 21). Per la stessa ragione ogni retta a_l , con $l \neq j$, e ogni retta a'_k , con $k \neq i$, incontrando rispettivamente a_j e a_i in punti di $\mathcal{Q}$ non contenuti nè in τ_i nè in τ_2 , dovrà appartenere a $\mathcal{Q}$. Ma allora anche a_j e a_i , dovranno esser contenute in $\mathcal{Q}$ e quindi tutta R dovrà appartenere a $\mathcal{Q}$.

Sia ora P' un punto di $C(40, 1)$ non contenuto nè in Γ_1 , nè in Γ_2 , nè in R , vogliamo dimostrare che esso appartiene a $\mathcal{Q}$, dopodichè rimane provato l'asserto.

Il cono tangente alla $C(40, 1)$ in P' è costituito da quattro rette r_i ($i = 1, 2, 3, 4$) della $C(40, 1)$ per P' , distinte dalle rette a_i, a'_j (altrimenti $P' \subset R$) e quindi non passanti per nessun dei punti A_1, A_2, A_3, A_4 . Le r_i sono dunque sgemente con il piano π . Gli iperpiani $\tau_1, \tau_2, \bar{S}_3$ appartengono al fascio di asse il piano π , onde ognuna delle rette r_i , essendo sgemba con π , dovrà incontrare $\tau_1, \tau_2, \bar{S}_3$ in tre punti *distinti*, contenuti rispettivamente in Γ_1, Γ_2, R (essendo le r_i contenute nella $C(40, 1)$) e quindi appartenenti tutti e tre a $\mathcal{Q}$, in quanto Γ_1, Γ_2, R appartengono a $\mathcal{Q}$. Ma allora le rette r_i , avendo ognuna tre punti distinti in comune con $\mathcal{Q}$, dovranno appartenere a $\mathcal{Q}$ e dunque ciò deve accadere anche per P' .

24. Ci proponiamo di dimostrare ⁽²³⁾, in questo e nei successivi numeri 25, 26, il seguente

TEOREMA IV' - In un $S_{4,q}$, con $p = 2$, ogni calotta $C(Q_3, 1)$ risulta una quadrica non specializzata.

In un $S_{4,q}$, con $p = 2$, consideriamo una calotta $C(Q_3, 1)$, sia T un suo punto, τ e Γ rispettivamente l'iperpiano e il cono tangente in T alla $C(Q_3, 1)$ (n. 17). Il cono Γ è intersecato da un piano π di τ , non passante per T , in un $(q+1)$ -arco (n. 17).

In π le $q+1$ rette tangenti al $(q+1)$ -arco passano tutte, come è noto ⁽²⁴⁾, per un punto S , che chiameremo centro del $(q+1)$ -arco, in modo che ogni retta di π per S risulta tangente al $(q+1)$ -arco. Ne segue che i $q+1$ piani di π tangenti al cono Γ passano tutti per la retta TS , determinando il fascio di piani di τ per essa. Chiameremo, per un motivo che vedremo più avanti, *tangente centrale* la retta TS così caratterizzata.

⁽²³⁾ È indispensabile per la comprensione del seguito la conoscenza della teoria delle quadriche costruite su un corpo finito di caratteristica 2, per la quale rimandiamo a G. TALLINI [20], n. 3.

⁽²⁴⁾ Cfr. B. QVIST [13], n. 4.

Per ogni punto della $C(Q_3, 1)$ passa una ben determinata tangente centrale e per punti distinti passano tangenti centrali distinte. Essendo i punti di $C(Q_3, 1)$ in numero di Q_3 , tale sarà il numero delle tangenti centrali di $C(Q_3, 1)$. Dimosteremo che esse *passano tutte per un punto C* . Da ciò seguirà che, essendo le rette per un punto di $S_{4,q}$ anche esse in numero di Q_3 , le tangenti centrali costituiscono la stella di rette di centro C .

Per dimostrare quanto detto proveremo che le tangenti centrali sono a due a due incidenti, dopodichè l'asserto seguirà dalla ben nota proposizione di geometria proiettiva ⁽²⁵⁾, affermando che in un S_n più rette a due a due incidenti o passano tutte per un punto o giacciono tutte in un piano, quando si tenga presente che le tangenti centrali, essendo in numero di Q_3 , non possono giacere tutte in un piano.

Siano t_1 e t_2 due tangenti centrali distinte, T_1 e T_2 i rispettivi punti di tangenza, τ_1 e τ_2 , Γ_1 e Γ_2 rispettivamente gli iperpiani e i coni tangenti in T_1 e T_2 alla $C(Q_3, 1)$. Due casi sono possibili a secondo che la retta T_1T_2 appartenga o non appartenga alla $C(Q_3, 1)$. Nel primo caso la retta T_1T_2 sarà contenuta nel piano π intersezione di τ_1 e τ_2 ; π non può contenere nessuna altra retta di $C(Q_3, 1)$, in quanto, giacendo π sia in τ_1 che in τ_2 , una tal retta dovrebbe appartenere sia a Γ_1 che a Γ_2 e quindi passare per T_1 e per T_2 , ossia dovrebbe coincidere con la T_1T_2 ; ne segue che π è un piano tangente sia al cono Γ_1 che al cono Γ_2 , onde su esso giacerà la t_1 e la t_2 , le quali risulteranno quindi incidenti. Nel secondo caso il piano π sezione di τ_1 e τ_2 non contiene nè T_1 nè T_2 (infatti se contenesse per esempio T_2 , questo punto apparterrebbe a Γ_1 , ma allora tutta la retta T_1T_2 dovrebbe appartenere a Γ_1 e quindi alla $C(Q_3, 1)$), i due coni Γ_1 e Γ_2 intersecano dunque π in uno stesso $(q+1)$ -arco. Sia S il suo centro, le rette ST_1 e ST_2 dovranno allora coincidere con t_1 e t_2 , le quali risulteranno quindi ancora incidenti in S . Rimane così dimostrato l'asserto.

Chiameremo *centro* della calotta $C(Q_3, 1)$ il punto C per cui passano tutte le tangenti centrali.

25. Sia T un punto della calotta $C(Q_3, 1)$, si è visto al n. 18 che il luogo delle rette per T tangenti e appartenenti alla $C(Q_3, 1)$ costituisce l'iperpiano tangente in T alla calotta. Poichè tra le tangenti in T alla calotta vi è la tangente centrale TC (C centro della calotta, cfr. n. 24), l'iperpiano tangente in T alla $C(Q_3, 1)$ passa per C .

Sia ora P un qualsiasi punto di $S_{4,q}$, distinto da C e dai punti della $C(Q_3, 1)$, consideriamo la retta CP ; essa, essendo una tangente centrale (n. 24), incontra la calotta in un unico punto che continueremo a denotare con T . L'iperpiano τ tangente in T alla $C(Q_3, 1)$ passa per C e quindi anche per P .

⁽²⁵⁾ Cfr. nota ⁽¹⁶⁾ del n. 10.

Le rette per P contenute in τ sono tutte tangenti alla $C(Q_3, 1)$. Infatti ogni piano di τ per $CP \equiv CT$ è tangente al cono Γ sezione di τ con la $C(Q_3, 1)$, onde ogni retta per P di τ dovrà essere tangente al cono Γ e quindi alla $C(Q_3, 1)$.

Dimostriamo che non esiste nessun'altra retta per P tangente alla calotta. Infatti sia t una retta supposta esistente, tangente alla calotta, passante per P e non giacente in τ . Il punto T' di tangenza di t con la $C(Q_3, 1)$ non giace in τ . L'iperpiano τ' , tangente in T' a $C(Q_3, 1)$, contiene t (n. 18) e quindi il punto P ; passa per C , onde conterrà anche la retta CP ; esso incontrerà dunque τ in un piano π passante per $CP \equiv CT$. π interseca il cono Γ , sezione di τ con la $C(Q_3, 1)$, in una retta certamente non passante per T' (non giacendo T' in τ). La suddetta retta deve appartenere anche a τ' e quindi al cono Γ' , sezione di τ' con la $C(Q_3, 1)$, senza passare per T' , ma ciò è assurdo. Ne segue l'asserto.

Da quanto precede si deduce la proposizione seguente:

Comunque si consideri un punto P di $S_{4,q}$, distinto da C , il luogo delle rette tangenti (o eventualmente appartenenti, se P appartiene a $C(Q_3, 1)$) alla calotta $C(Q_3, 1)$ per P risulta un iperpiano, e precisamente l'iperpiano tangente alla $C(Q_3, 1)$ nel punto T d'incontro della CP con la calotta.

Sia ora $\bar{t}$ una retta di $C(Q_3, 1)$ e $\bar{S}_3$ un S_3 per $\bar{t}$ non passante per C . L'iperpiano tangente alla $C(Q_3, 1)$ in un punto P di $\bar{t}$ contiene $\bar{t}$ (n. 18), passa per C e quindi è distinto da $\bar{S}_3$ e lo incontra in un piano contenente $\bar{t}$ e non passante per C . Il suddetto piano, appartenendo all'iperpiano tangente in P alla $C(Q_3, 1)$ e non contenendo la tangente centrale PC , incontra il cono tangente alla $C(Q_3, 1)$ in P in una ulteriore retta per P che denomineremo con s . Al variare di P su $\bar{t}$ la s varia descrivendo un insieme di $q+1$ rette di $\bar{S}_3$ a due a due sghembe tra loro (se due di esse fossero incidenti il piano da esse determinato conterrebbe anche $\bar{t}$ e quindi incontrerebbe $C(Q_3, 1)$ in almeno tre rette distinte, e ciò è assurdo).

Sia $\bar{s}$ una delle rette s . Ogni piano di $\bar{S}_3$ per $\bar{s}$, incontrando le rimanenti q rette s in q punti distinti e quindi allineati (cfr. proposizione 6 n. 3), avrà in comune con la $C(Q_3, 1)$ ulteriormente una retta t , eventualmente coincidente con $\bar{t}$, incidente ad ogni retta s . Al variare del piano di $\bar{S}_3$ nel fascio di asse $\bar{s}$, la retta t varierà descrivendo un insieme di $q+1$ rette, ognuna incidente le rette s e a due a due sghembe tra loro (se due di esse fossero incidenti il piano da esse determinato dovrebbe contenere almeno una retta s e quindi incontrerebbe $C(Q_3, 1)$ in almeno tre rette distinte, e ciò è assurdo).

Ne segue dunque che le rette s e le rette t formano i due regoli di una quadrica rigata che denomineremo con R , intersezione di $\bar{S}_3$ con la $C(Q_3, 1)$.

Associamo ora ad ogni punto P di $S_{4,q}$, distinto da C , l'iperpiano luogo delle rette tangenti (o, se $P \in C(Q_3, 1)$, eventualmente appartenenti) alla $C(Q_3, 1)$ per P . Esso, come si è visto precedentemente, coincide con l'iperpiano τ tangente alla $C(Q_3, 1)$ nel punto T d'incontro della retta CP con la calotta $C(Q_3, 1)$ e quindi non

T_2 alla $C(Q_{2r-1}, r-1)$. L'iperpiano τ_2 non passa evidentemente per T_1 ed incontra τ_1 in un $S_{2(r-1)}$, non contenente nè T_1 nè T_2 . L' $S_{2(r-1)}$ intersecherà quindi Γ_1 e Γ_2 in una stessa quadrica non specializzata, intersezione di $S_{2(r-1)}$ con la calotta, che denoteremo con H .

Consideriamo il fascio F di quadriche che ammette come varietà base i due coni Γ_1 e Γ_2 . Esso possiede, come si può facilmente dimostrare ⁽²⁸⁾, due sole quadriche specializzate: quella che degenera nei due iperpiani τ_1 e τ_2 , e il cono avente come spazio vertice la retta T_1T_2 e proiettante da essa la quadrica H . Da ciò, ragionando come nei numeri 19, 20, 21 si dimostrano rispettivamente le seguenti proprietà, analoghe a quelle ivi incontrate.

Ogni quadrica del fascio F , passante per un punto P della $C(Q_{2r-1}, r-1)$ che non appartenga alla varietà base del fascio, è non specializzata.

Sia $\mathcal{Q}$ una quadrica non specializzata del fascio F , se una retta s della $C(Q_{2r-1}, r-1)$ ha un punto, non giacente nè in τ_1 nè in τ_2 , in comune con $\mathcal{Q}$, tutta s appartiene a $\mathcal{Q}$.

Denotato con P un punto della calotta $C(Q_{2r-1}, r-1)$, non appartenente nè a τ_1 nè a τ_2 , e $\mathcal{Q}$ la quadrica del fascio F per P , l'iperpiano e il cono tangente in P alla $C(Q_{2r-1}, r-1)$ coincidono rispettivamente con l'iperpiano e il cono tangente in P a $\mathcal{Q}$.

La quadrica H dell' $S_{2(r-1)}$ intersezione di τ_1 e τ_2 , ammette un centro ⁽²⁹⁾ che denoteremo con C . Esso non può giacere sulla retta T_1T_2 (essendo T_1T_2 sghemba con $S_{2(r-1)}$), consideriamo allora il piano π individuato dai punti C, T_1, T_2 . π interseca l'iperpiano τ_1 , tangente in T_1 alla $C(Q_{2r-1}, r-1)$, nella retta CT_1 ; dunque l'unica retta di π per T_1 tangente alla $C(Q_{2r-1}, r-1)$ è la CT_1 , le altre q rette sono secanti (n. 18). Ne segue che π incontra la $C(Q_{2r-1}, r-1)$ in $q+1$ punti i quali formano necessariamente un $(q+1)$ -arco (cfr. proposizione 6^a n. 3), che denoteremo con $\mathcal{A}$.

28. Rileviamo ora alcune proprietà delle quadriche non specializzate di un $S_{2r,q}$, con $p=2$, che ci saranno utili nel seguito.

Sia $\mathcal{L}$ una tale quadrica, essa individua ⁽³⁰⁾ una polarità nulla, avente come spazio singolare un punto C (centro della $\mathcal{L}$) non appartenente a $\mathcal{L}$, tale che l'iperpiano polare di un punto P (distinto da C) risulta il luogo delle rette tangenti (o, se $P \in \mathcal{L}$, eventualmente appartenenti) alla $\mathcal{L}$ per P , e coincide con l'iperpiano tangente in P a $\mathcal{L}$ se P sta su $\mathcal{L}$.

Sia τ l'iperpiano polare di P , esso passa, oltre che per P , anche per C (essendo C spazio singolare della polarità nulla), quindi la retta CP risulta tangente a $\mathcal{L}$ in un punto T . Inoltre l'iperpiano polare non varia, come è

⁽²⁸⁾ Cfr. nota ⁽²⁴⁾, n. 19.

⁽²⁹⁾ Cfr. G. TALLINI [20], n. 3.

⁽³⁰⁾ Cfr. G. TALLINI [20], n. 3.

noto ⁽³¹⁾, al variare di P sulla CT , ne segue che τ coincide con l'iperpiano tangente in T alla $\mathcal{L}$.

Sia T_1 e τ_1 rispettivamente un punto di $\mathcal{L}$ e il relativo iperpiano tangente, T_2 e τ_2 rispettivamente un punto di $\mathcal{L}$, non appartenente a τ_1 , e il relativo iperpiano tangente. L' $S_{2(r-1)}$ sezione di τ_1 e τ_2 contiene C e non passa evidentemente nè per T_1 nè per T_2 , quindi interseca $\mathcal{L}$ in una quadrica non specializzata il cui centro coincide ovviamente con C . Il piano π individuato dai punti T_1 , T_2 , C interseca evidentemente $\mathcal{L}$ in un $(q+1)$ -arco che denotiamo con $\mathcal{K}$.

Dimostriamo che *l'iperpiano tangente in un punto T di $\mathcal{L}$ appartiene o no al fascio di iperpiani individuato da τ_1 e τ_2 a secondo che T sia o non sia un punto di $\mathcal{K}$.*

L'asserto seguirà se proviamo, come ora faremo, che un qualsiasi iperpiano del fascio determinato da τ_1 e τ_2 è tangente a $\mathcal{L}$ in un punto di $\mathcal{K}$. Sia τ un tale iperpiano, esso incontra la retta T_1T_2 in un punto P . Essendo evidentemente la T_1T_2 polare dell' $S_{2(r-1)}$ sezione di τ_1 e τ_2 , l'iperpiano polare di P , passa, oltre che per P , per l' $S_{2(r-1)}$ e quindi coincide con τ , ma esso deve anche coincidere, per quanto precede, con l'iperpiano tangente nel punto d'incontro della CP con $\mathcal{L}$, ossia, giacendo la CP su π , col punto di incontro di CP con $\mathcal{K}$. Onde l'asserto.

29. Ritornando allo studio della calotta $C(Q_{2r-1}, r-1)$ di cui al n. 27 e usando le notazioni ivi adottate, sia P un qualsiasi punto di essa non situato nè in τ_1 nè in τ_2 , appartenente o no al $(q+1)$ -arco $\mathcal{A}$, sezione del piano π (individuato da T_1 , T_2 , C) con la $C(Q_{2r-1}, r-1)$. Consideriamo la quadrica non specializzata del fascio F passante per P . *L'iperpiano tangente alla $C(Q_{2r-1}, r-1)$ in P coincide (n. 27) con l'iperpiano tangente alla quadrica in P ; ne segue, in base a quanto detto nel numero precedente, che esso appartiene o no al fascio d'iperpiani individuato da τ_1 e τ_2 a secondo che P sia o non sia un punto di $\mathcal{A}$.*

Siamo ora in grado di dimostrare il teor. IV'. Consideriamo un punto T , distinto da T_1 e T_2 , appartenente al $(q+1)$ -arco $\mathcal{A}$. Sia τ e Γ rispettivamente l'iperpiano e il cono tangente in T alla $C(Q_{2r-1}, r-1)$. τ passerà, per la precedente proposizione, per l' $S_{2(r-1)}$ sezione di τ_1 e τ_2 , e Γ sarà il cono proiettante da T la quadrica H .

Sia $\mathcal{Q}$ la quadrica non specializzata del fascio F per T ; l'iperpiano e il cono tangente alla $\mathcal{Q}$ in T coincidono rispettivamente con τ e Γ (n. 27). Vogliamo dimostrare che ogni altro punto T' della $C(Q_{2r-1}, r-1)$ appartiene

⁽³¹⁾ Cfr. E. BERTINI [2], p. 119.

varia al variare di P su CT . La CP incontra $\bar{S}_3$ in un punto P' e il suddetto iperpiano τ incontra $\bar{S}_3$ in un piano che sarà il luogo delle rette di $\bar{S}_3$ tangenti (o, se $P' \in R$, eventualmente appartenenti) alla quadrica R per P' , ossia il piano polare di P' rispetto alla polarità nulla associata alla quadrica R ⁽²⁶⁾. Ne segue che la corrispondenza che si ottiene associando ad ogni punto P di $S_{4,q}$, distinto da C , l'iperpiano luogo delle rette tangenti (o, se $P \in C(Q_3, 1)$, eventualmente appartenenti) alla $C(Q_3, 1)$ per P , coincide con la polarità nulla proiezione da C della polarità nulla definita in $\bar{S}_3$ dalla quadrica R .

Si conclude con la proposizione seguente:

In un $S_{4,q}$ ogni calotta $C(Q_3, 1)$ individua una polarità nulla, avente come spazio singolare il punto C , centro della calotta, e tale da far corrispondere ad ogni punto P , distinto da C , l'iperpiano luogo delle rette tangenti (o, se $P \in C(Q_3, 1)$, eventualmente appartenenti) alla $C(Q_3, 1)$ per P .

26. Siamo ora in grado di dimostrare il teor. IV' enunciato al n. 24.

Scegliamo il riferimento proiettivo in $S_{4,q}$ in modo che il punto $O_5(0, 0, 0, 0, 1)$ coincida con il centro della $C(Q_3, 1)$ (n. 24), l'iperpiano fondamentale $\kappa_5 = 0$ sia un S_3 non passante per O_5 e contenente una retta della $C(Q_3, 1)$, e quindi, per quanto è detto nel numero precedente, intersecante la calotta in una quadrica rigata R . Possiamo inoltre scegliere i rimanenti punti fondamentali in $\kappa_5 = 0$ e il punto unitario in modo che la R si riduca ad avere equazione $\kappa_1\kappa_2 + \kappa_3\kappa_4 = 0$.

Prendiamo in considerazione il fascio di quadriche F di equazione:

$$(7) \quad \lambda\kappa_5^2 + \mu(\kappa_1\kappa_2 + \kappa_3\kappa_4) = 0.$$

È facile dimostrare ⁽²⁷⁾ che le uniche quadriche specializzate del fascio F sono il cono proiettante da O_5 la quadrica R di $\kappa_5 = 0$ (che si ottiene da (7) per $\lambda = 0$), e quella che si spezza nell'iperpiano $\kappa_5 = 0$ contato due volte (che si ottiene da (7) per $\mu = 0$); inoltre che le quadriche del fascio F distinte da $\kappa_5^2 = 0$ ammettono tutte lo stesso centro O_5 , che è anche il centro di $C(Q_3, 1)$, e la stessa polarità nulla, che è quella proiettante da O_5 la polarità nulla di $\kappa_5 = 0$ associata alla quadrica R e che coincide quindi con la polarità nulla individuata dalla $C(Q_3, 1)$ (n. 25).

Sia T un punto di $C(Q_3, 1)$ non situato su R . La quadrica $\mathcal{Q}$ del fascio F per T è certo non specializzata, non potendo coincidere nè ovviamente con $\kappa_5^2 = 0$, nè con il cono proiettante da O_5 la quadrica R , in quanto se così fosse la retta TO_5 dovrebbe appartenere al cono e incontrare dunque $\kappa_5 = 0$ in un punto di R e quindi di $C(Q_3, 1)$, ma ciò è escluso non potendovi essere sulla TO_5 , che è tangente alla $C(Q_3, 1)$ in T (essendo O_5 centro della calotta), due punti distinti di $C(Q_3, 1)$.

⁽²⁶⁾ Cfr. G. TALLINI [20], n. 3.

⁽²⁷⁾ Cfr. G. TALLINI [20], n. 3.

L'iperpiano tangente τ in T e $\mathcal{Q}$ coincide con l'iperpiano tangente in T alla $C(Q_3, 1)$, in quanto le due polarità nulle associate alla $\mathcal{Q}$ e alla calotta $C(Q_3, 1)$ coincidono. Consideriamo inoltre una qualsiasi retta della $C(Q_3, 1)$ per T ; essa, dovendo appartenere a τ , deve o essere tangente in T a $\mathcal{Q}$ o appartenere a $\mathcal{Q}$; il primo caso è escluso in quanto essa, essendo una retta di $C(Q_3, 1)$, incontra $\kappa_s = 0$ in un punto di R e quindi di $\mathcal{Q}$, distinto certo da T . Ne segue che tutte le rette di $C(Q_3, 1)$ per T appartengono anche a $\mathcal{Q}$, e quindi il cono tangente in T a $\mathcal{Q}$ coincide con il cono tangente in T alla $C(Q_3, 1)$.

Sia ora T' un qualsiasi altro punto di $C(Q_3, 1)$, non appartenente nè a R , nè al cono Γ tangente in T a $C(Q_3, 1)$, vogliamo provare che esso appartiene a $\mathcal{Q}$, dopodichè il teorema sarà dimostrato.

Siano τ' e Γ' rispettivamente l'iperpiano e il cono tangente in T' alla $C(Q_3, 1)$, essi, per quanto precedentemente detto, coincidono rispettivamente con l'iperpiano e il cono tangente in T' alla quadrica $\mathcal{Q}'$ del fascio F per T' . τ e τ' si incontrano in un piano π per O_s , non passante evidentemente nè per T nè per T' . π , contenendo O_s , non può giacere in $\kappa_s = 0$ e intersecherà quindi il suddetto iperpiano in una retta r . Inoltre π incontrerà Γ e Γ' in uno stesso $(q+1)$ -arco, il quale avrà in comune con r , e quindi con l'iperpiano $\kappa_s = 0$, al più due punti; ne segue che Γ e Γ' e di conseguenza anche $\mathcal{Q}$ e $\mathcal{Q}'$ (appartenendo Γ a $\mathcal{Q}$ e Γ' a $\mathcal{Q}'$) hanno in comune almeno $q-1 > 0$ punti non giacenti in $\kappa_s = 0$ e quindi non appartenenti alla quadrica R , varietà base del fascio F ; onde $\mathcal{Q}$ coincide con $\mathcal{Q}'$ (in quanto due quadriche di uno stesso fascio aventi in comune almeno un punto, che non appartenga alla varietà base del fascio, coincidono) e T' appartiene a $\mathcal{Q}$.

27. Ci proponiamo di dimostrare, in questo e nei successivi numeri 28, 29, il seguente

TEOREMA IV'' - In un $S_{2r,q}$, con $r \geq 2$ e $p=2$, ogni calotta $C(Q_{2r-1}, r-1)$ risulta una quadrica non specializzata.

Il Teorema per $r=2$ riducesi al teor. IV' precedentemente dimostrato; possiamo quindi procedere per induzione rispetto ad r , ammettendolo vero per $r-1$ e dimostrandolo per r .

In un $S_{2r,q}$, con $r > 2$ e $p=2$, consideriamo una calotta $C(Q_{2r-1}, r-1)$. Sia T un suo punto, τ e Γ rispettivamente l'iperpiano e il cono tangente in T alla calotta (n. 17). Un $S_{2(r-1)}$ di τ , non passante per T , incontra Γ in una calotta $C(Q_{2(r-1)-1}, r-2)$ dell' $S_{2(r-1)}$ (n. 17), ossia, per l'induzione ammessa, in una quadrica non specializzata di tale $S_{2(r-1)}$. Ne segue che Γ risulta un cono quadrico con vertice in T .

Sia T_1 un punto della $C(Q_{2r-1}, r-1)$, τ_1 e Γ_1 rispettivamente l'iperpiano e il cono tangente in T_1 alla $C(Q_{2r-1}, r-1)$, T_2 un altro punto di $C(Q_{2r-1}, r-1)$ non situato in Γ_1 , τ_2 e Γ_2 rispettivamente l'iperpiano e il cono tangente in

quindi sono sghembe tra loro. Sia $\bar{s}$ una tra esse, consideriamo due piani per s , π' e π'' distinti tra loro e dal piano $\bar{s}r$. π' (π'') incontra ulteriormente la calotta in una retta, che sarà indicata con $r'(r'')$. Ogni retta s distinta da $\bar{s}$, incontra $\pi'(\pi'')$ in un punto il quale, non potendo appartenere a s , essendo s sghemba con $\bar{s}$, dovrà appartenere a $r'(r'')$. Le rette s sono dunque incidenti a ciascuna delle tre rette r, r', r'' , le quali debbono essere sghembe tra loro perchè tali sono le rette s . Ne segue che la calotta $C(Q_2 + q, 1)$, essendo costituita dalle $q + 1$ rette s incidenti a tre rette sghembe risulta una quadrica rigata. Rimane così completamente dimostrato il teorema per $n = 3$.

Supponiamo $n > 3$. Ragionando come nel n. 14 (quando si ponga ivi $\delta = n - 2$) ne deduciamo che gli S_{n-3} sezione degli $\bar{S}_{n-2}$ con $\bar{S}_{n-2}$ formano fascio. Sia $\bar{S}_{n-4}$ l'asse del fascio.

Preso comunque un punto P di $C(Q_{n-1} + q^{n-2}, n - 2)$ non contenuto nell' $\bar{S}_{n-4}$, l' S_{n-3} congiungente P con $\bar{S}_{n-4}$ appartiene tutto alla calotta, infatti ciò è evidente se $P \in \bar{S}_{n-2}$, in caso contrario l' S_{n-1} congiungente $\bar{S}_{n-2}$ con P interseca ulteriormente la calotta in un $\bar{S}_{n-2}$ contenente P e $\bar{S}_{n-4}$ e quindi l' S_{n-3} che li congiunge. Ne segue che la calotta risulta un cono con vertice l' $\bar{S}_{n-4}$.

Consideriamo ora un S_3 , sghembo con $\bar{S}_{n-4}$, esso interseca ogni $\bar{S}_{n-2}$ in una retta. Due $\bar{S}_{n-2}$ distinti incontrano l' S_3 in due rette evidentemente distinte (ogni $\bar{S}_{n-2}$ risultando lo spazio congiungente $\bar{S}_{n-4}$ con la retta intersezione di $\bar{S}_{n-2}$ con l' S_3) e sghembe tra loro, in quanto, denotate con r_1 e r_2 le suddette rette, se esse fossero incidenti, l' S_{n-1} congiungente $r_1, r_2, \bar{S}_{n-4}$ dovrebbe contenere, oltre ai due $\bar{S}_{n-2}$, anche $\bar{S}_{n-2}$ (come spazio congiungente i due S_{n-3} sezione degli $\bar{S}_{n-2}$ dati con $\bar{S}_{n-2}$) e ciò è escluso (cfr. proposizione 8 n. 3).

L' S_3 incontra dunque la calotta $C(Q_{n-1} + q^{n-2}, n - 2)$ in $q + 1$ rette (tante quanti sono gli $\bar{S}_{n-2}$) a due a due sghembe tra loro, formanti evidentemente una calotta $C(Q_2 + q, 1)$ ossia, per quanto è stato dimostrato nel caso $n = 3$, in una quadrica rigata (non potendo la $C(Q_2 + q, 1)$ essere un cono dovendo possedere rette sghembe).

La calotta $C(Q_{n-1} + q^{n-2}, n - 2)$ risulta dunque un cono quadrico proiettante da $\bar{S}_{n-4}$ una quadrica di tipo iperbolico di S_3 .

In base al teorema ora dimostrato nello studio successivo delle calotte $C(Q_{n-1} + q^\delta, \delta)$ di un $S_{n,q}$ possiamo senz'altro supporre $n > 3$ ed inoltre $0 < \delta < n - 2$.

32. In un $S_{n,q}$, con $n \geq 4$, consideriamo una calotta $C(Q_{n-1} + q^\delta, \delta)$ con $0 < \delta < n - 2$, sia $\bar{S}_\delta$ un S_δ in essa contenuto. Ogni $S_{\delta+1} \supset \bar{S}_\delta$ incontra ulteriormente la calotta in un S_δ (n. 31), intersecante $\bar{S}_\delta$ in un $S_{\delta-1}$. Ci proponiamo di dimostrare che *due tali S_δ incontrano $\bar{S}_\delta$ in due $S_{\delta-1}$ distinti*.

Ragionando per assurdo, ammettiamo che tra gli S_δ suddetti ne esistano due intersecanti $\bar{S}_\delta$ in uno stesso $\bar{S}_{\delta-1}$. Denotiamo con $\bar{S}_{\delta+2}$ l' $S_{\delta+2}$ che li con-

giunge con $\bar{S}_\delta$. Esso incontra la calotta $C(Q_{n-1} + q^\delta, \delta)$ in una calotta $C(Q_{\delta+1} + q^\delta, \delta)$ (n. 31), ossia, in base al teor. VII e tenendo presente che tre S_δ della $C(Q_{\delta+1} + q^\delta, \delta)$ concorrono nello stesso $\bar{S}_{\delta-1}$, in un cono Γ proiettante dall' $\bar{S}_{\delta-1}$ un $(q+2)$ -arco di un piano sghembo con l' $\bar{S}_{\delta-1}$. Ora ciò è assurdo se $p \neq 2$, non esistendo se $p \neq 2$ $(q+2)$ -archi piani ⁽³³⁾. Ci proponiamo di ricondurre all'assurdo anche il caso $p = 2$.

Consideriamo un $S_{\delta+3}$ contenente $\bar{S}_{\delta+2}$ e denotiamo con I l'insieme degli S_δ ulteriore intersezione degli $S_{\delta+1}$ di $S_{\delta+3}$ contenenti $\bar{S}_\delta$ con la calotta $C(Q_{n-1} + q^\delta, \delta)$. Gli S_δ di I contenuti in $\bar{S}_{\delta+2}$ sono tutti e soli quelli appartenenti al cono Γ .

Supponiamo che esista un S_δ di I non appartenente a Γ , che denoteremo con S_δ^* , intersecante $\bar{S}_\delta$ secondo lo spazio vertice $\bar{S}_{\delta-1}$ di Γ . Sia S_δ' un qualsiasi S_δ di I distinto da S_δ^* e dagli S_δ di Γ . L' $S_{\delta+2}$ congiungente S_δ^* , S_δ' , $\bar{S}_\delta$ incontra $\bar{S}_{\delta+2}$ in un $S_{\delta+1} \supset \bar{S}_\delta$, intersecante la calotta $C(Q_{n-1} + q^\delta, \delta)$, oltre che in $\bar{S}_\delta$, in un S_δ di Γ , che passa quindi per $\bar{S}_{\delta-1}$. Ne segue che la calotta $C(Q_{\delta+1} + q^\delta, \delta)$ sezione di $S_{\delta+2}$ con la $C(Q_{n-1} + q^\delta, \delta)$ contiene tre distinti S_δ concorrenti in $\bar{S}_{\delta-1}$ ($\bar{S}_\delta$, S_δ^* e l' S_δ suddetto) e quindi risulta un cono con vertice $\bar{S}_{\delta-1}$ (teor. VII), onde S_δ' passa per $\bar{S}_{\delta-1}$. Data la genericità di S_δ' , ogni S_δ di I dovrà passare per $\bar{S}_{\delta-1}$. Ma allora un $S_\delta \subset S_{\delta+3}$ sghembo con $\bar{S}_{\delta-1}$ interseca $\bar{S}_\delta$ e ogni S_δ di I in un sol punto e quindi la calotta $C(Q_{n-1} + q^\delta, \delta)$ in un insieme di $q^2 + q + 2$ punti (tanti quanti sono gli S_δ di I e $\bar{S}_\delta$) evidentemente distinti e a tre a tre non allineati. Ma ciò è assurdo, in quanto il massimo numero di punti a tre a tre non allineati di un $S_{\delta,q}$ è $q^2 + 1$ ⁽³⁴⁾.

Dimostriamo ora che due qualsiasi S_δ di I , di cui uno almeno distinto dagli S_δ di Γ , incontrano $\bar{S}_\delta$ in $S_{\delta-1}$ distinti. Supponiamo che ciò non avvenga e siano S_δ' e S_δ'' due tali S_δ intersecanti $\bar{S}_\delta$ in uno stesso $S_{\delta-1}$. L' $S_{\delta+2}$ congiungente S_δ' , S_δ'' , $\bar{S}_\delta$ incontra allora la calotta $C(Q_{n-1} + q^\delta, \delta)$ in un cono Γ' avente come vertice il suddetto $S_{\delta-1}$. D'altra parte l' $S_{\delta+2}$ incontra $\bar{S}_{\delta+2}$ in un $S_{\delta+1} \supset \bar{S}_\delta$ intersecante la $C(Q_{n-1} + q^\delta, \delta)$, e quindi Γ e Γ' , in $\bar{S}_\delta$ e in un altro S_δ . I coni Γ e Γ' allora, avendo in comune due spazi massimi, hanno gli stessi spazi vertici, i quali coincideranno con $\bar{S}_{\delta-1}$, onde S_δ' e S_δ'' passano per $\bar{S}_{\delta-1}$. E ciò è assurdo per quanto è stato dimostrato nel precedente capoverso, in quanto uno almeno degli spazi S_δ' e S_δ'' non appartiene a Γ .

Gli S_δ di I sono in numero di $q^2 + q + 1$ (tanti quanti sono gli $S_{\delta+1} \supset \bar{S}_\delta$), di essi i $q + 1$ che appartengono a Γ intersecano $\bar{S}_\delta$ nello stesso $\bar{S}_{\delta-1}$, gli altri q^2 intersecano $\bar{S}_\delta$ in $S_{\delta-1}$ distinti tra loro e da $\bar{S}_{\delta-1}$, ne segue che gli $S_{\delta-1}$ distinti, sezione degli S_δ di I con $\bar{S}_\delta$, sono in numero di $q^2 + 1$. Ciò è manifestamente assurdo se $\delta = 1$, possiamo quindi supporre $\delta > 1$.

⁽³³⁾ Cfr. R. C. BOSE [3] e B. QVIST [13], p. 8.

⁽³⁴⁾ Cfr. B. QVIST [13], n. 6.

a $\mathcal{Q}$, dopodichè sarà dimostrato il teorema. Possiamo intanto supporre T'' distinto dai punti di $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma$. Supponiamo inoltre che esso non appartenga al $(q+1)$ -arco $\mathcal{A}$, in quanto una volta dimostrata la proposizione in questo caso, essa segue anche per i punti T'' del $(q+1)$ -arco $\mathcal{A}$: poiché, denotata con r'' una retta di $C(Q_{2r-1}, r-1)$ per T'' (certo esistente, n. 18), la r'' ha in comune con i punti di $\mathcal{A}$ solamente T'' , quindi tutti gli altri suoi $q(>2)$ punti appartengono a $\mathcal{Q}$ onde anche T'' apparterrà a $\mathcal{Q}$.

Sia $\mathcal{Q}'$ la quadrica non specializzata del fascio F per T', τ' e Γ' rispettivamente l'iperpiano e il cono tangente in T' a $\mathcal{Q}'$; essi coincidono con l'iperpiano e il cono tangente in T' alla $C(Q_{2r-1}, r-1)$ (n. 27). Per l'ipotesi fatta su T' di non appartenere al $(q+1)$ -arco $\mathcal{A}$, τ' non passerà per $S_{2(r-1)}$ e intersecherà dunque τ in un $S_{2(r-1)}^*$, non passante nè per T nè per T' , distinto da $S_{2(r-1)}$. Sia S_{2r-3}^* l'intersezione di $S_{2(r-1)}^*$ con $S_{2(r-1)}$.

I coni Γ e Γ' si incontrano in una stessa quadrica non specializzata H^* di $S_{2(r-1)}^*$. I punti di H^* che non appartengono a Γ_1 o a Γ_2 sono evidentemente tutti quelli che non son contenuti in S_{2r-3}^* . Di questi punti ne esiste certamente almeno uno. Ne segue che Γ e Γ' , e quindi $\mathcal{Q}$ e $\mathcal{Q}'$ hanno almeno un punto in comune distinto dai punti di Γ_1 e Γ_2 , punti della varietà base del fascio F . Ma due quadriche di uno stesso fascio avente in comune un punto non appartenente alla varietà base del fascio coincidono, quindi $\mathcal{Q}$ dovrà coincidere con $\mathcal{Q}'$ e T' dovrà appartenere a $\mathcal{Q}$.

30. Dalla proposizione dimostrata nel n. 16 e dai teoremi IV e IV" si deduce il seguente

TEOREMA V. - In un $S_{n,q}$, con $n > 4$ e $q = p^h > 2$, ogni calotta $C(Q_{n-1}, \delta)$, con $\frac{n}{2} - 1 < \delta < n - 2$, è un cono quadrico avente come spazio vertice un $S_{2\delta-n+1}$.

I risultati trovati in questo paragrafo possono essere riassunti nel teorema seguente.

TEOREMA VI. - In un $S_{n,q}$, con $n \geq 3$ e $q > 2$, ogni calotta $C(Q_{n-1}, \delta)$, dove δ è un intero a priori soddisfacente alle limitazioni $0 < \delta \leq n - 1$, è tale che δ verifica di fatto le limitazioni $\frac{n}{2} - 1 \leq \delta \leq n - 1$. Inoltre per $\delta = \frac{n}{2} - 1$ (nel qual caso n è pari) la calotta risulta una quadrica non specializzata; per $\frac{n}{2} - 1 < \delta \leq n - 3$ (nel qual caso deve essere $n > 4$) la calotta risulta un cono quadrico proiettante da un $S_{2\delta-n+1}$ una quadrica non specializzata di un $S_{2(n-\delta-1)}$ sghembo con l' $S_{2\delta-n+1}$; per $\delta = n - 2$ la calotta risulta un cono quadrico con vertice un S_{n-3} se $p \neq 2$, un cono proiettante da un S_{n-3} un $(q+1)$ -arco di un piano sghembo con l' S_{n-3} se $p = 2$; per $\delta = n - 1$ la calotta risulta ovviamente un iperpiano di $S_{n,q}$.

§ 4. - Studio delle calotte $C(Q_{n-1} + q^\delta, \delta)$ di $S_{n,q}$.

31. In questo paragrafo ci proponiamo di studiare compiutamente le calotte $C(Q_{n-1} + q^\delta, \delta)$ dove a priori è $0 < \delta < n - 1$, di un $S_{n,q}$, con $n \geq 3$ e $q = p^h > 2$.

Dal teor. II del § 2 si deduce la seguente proposizione:

Sia $\bar{S}_\delta$ un qualsiasi S_δ contenuto in una calotta $C(Q_{n-1} + q^\delta, \delta)$ di un $S_{n,q}$. Ogni $S_{\delta+1} \supset \bar{S}_\delta$ interseca ulteriormente la calotta in un S_δ . Ogni $S_h \supset \bar{S}_\delta$, con $h > \delta + 1$, incontra la calotta in una calotta $C(Q_{h-1} + q^\delta, \delta)$.

Ragionando come nel n. 9 § 3, si deduce inoltre la proposizione seguente:

Comunque si consideri un S_l , con $0 \leq l < \delta$, contenuto in una calotta $C(Q_{n-1} + q^\delta, \delta)$ di $S_{n,q}$, esiste sempre almeno un S_δ di $C(Q_{n-1} + q^\delta, \delta)$ contenente l' S_l .

Dimostriamo il seguente:

TEOREMA VII. - *In un $S_{n,q}$, con $n \geq 3$, ogni calotta $C(Q_{n-1} + q^{n-2}, n-2)$ risulta: se $n=3$, una quadrica rigata non specializzata, oppure un cono proiettante da un punto V un $(q+2)$ -arco di un piano non passante per V (il secondo caso potendosi presentare solo se $p=2$); se $n > 3$, un cono quadratico di tipo iperbolico con spazio vertice un S_{n-4} , oppure un cono proiettante da un S_{n-3} vertice un $(q+2)$ -arco di un piano sghembo con l' S_{n-3} (il secondo caso potendosi presentare solo se $p=2$).*

Denotiamo con $\bar{S}_{n-2}$ un S_{n-2} , certo esistente, della calotta $C(Q_{n-1} + q^{n-2}, n-2)$. In base alla prima proposizione di questo numero, ognuno dei $q+1$ $S_{n-1} \supset \bar{S}_{n-2}$ interseca ulteriormente la calotta in un S_{n-2} , che denoteremo con $\bar{S}_{n-2}$. Vengono così individuati $q+1$ $\bar{S}_{n-2}$ di $C(Q_{n-1} + q^{n-2}, n-2)$ distinti tra loro e da $\bar{S}_{n-2}$. Ognuno di essi incontra $\bar{S}_{n-2}$ in un S_{n-3} .

Supponiamo, che gli $\bar{S}_{n-2}$ così individuati passino tutti per uno stesso S_{n-3} di $\bar{S}_{n-2}$, che denoteremo con $\bar{S}_{n-3}$. Sia α un piano sghembo con $\bar{S}_{n-3}$; esso incontra $\bar{S}_{n-2}$ e ognuno dei $q+1$ $\bar{S}_{n-2}$ ciascuno in un punto, e quindi la calotta in $q+2$ punti distinti, i quali sono evidentemente a tre a tre non allineati e formano un $(q+2)$ -arco di α . La calotta risulta allora un cono proiettante da $\bar{S}_{n-3}$ il $(q+2)$ -arco di α . Notiamo che il caso ora trattato può presentarsi solo se $p=2$, in quanto se $p \neq 2$ non esistono $(q+2)$ -archi piani ⁽³²⁾.

Escluso il caso precedente, ragionando come nel terzo capoverso del n. 12 (quando si ponga ivi $\delta = n-2$) ne deduciamo che i $q+1$ $\bar{S}_{n-2}$ incontrano $\bar{S}_{n-2}$ in S_{n-3} distinti tra loro. Distinguiamo i due casi $n=3$, $n > 3$.

Supponiamo $n=3$. La calotta risulta allora una $C(Q_2 + q, 1)$, l' $\bar{S}_{n-2}$ riducesi ad una retta che denoteremo con r e gli $\bar{S}_{n-2}$ si riducono a $q+1$ rette, che saranno denotate con s . Le rette s incidono r in punti distinti e

⁽³²⁾ Cfr. R. C. BOSE [3] e B. QVIST [13], p. 8.

Sia allora S_δ^* un fissato S_δ di I non appartenente a Γ , esso intersecherà $\bar{S}_\delta$ in un $S_{\delta-1}^*$, distinto da $\bar{S}_{\delta-1}$ e avente in comune con esso un $S_{\delta-2}^*$. Consideriamo un qualsiasi S_δ' di I distinto da S_δ^* e dagli S_δ di Γ . L' $S_{\delta+2}$ congiungente S_δ' , S_δ^* , $\bar{S}_\delta$ incontra $\bar{S}_{\delta+2}$ in un $S_{\delta+1}$ avente in comune con la calotta $C(Q_{n+1} + q^\delta, \delta)$, oltre a $\bar{S}_\delta$, un S_δ di Γ passante quindi per $\bar{S}_{\delta-1}$. La calotta $C(Q_{\delta+1} + q^\delta, \delta)$ intersezione di $S_{\delta+2}$ con la $C(Q_{n-1} + q^\delta, \delta)$, in base al teor. VII e tenendo presente che essa contiene gli spazii $\bar{S}_\delta$, S_δ^* e l' S_δ suddetto, i quali s'intersecano lungo $S_{\delta-2}^*$, risulta un cono quadrico con vertice $S_{\delta-2}^*$. S_δ' deve allora passare per $S_{\delta-2}^*$. Data la genericità di S_δ' , si ha che ogni S_δ di I passa per $S_{\delta-2}^*$. I $q^2 + 1$ $S_{\delta-1}$ distinti, intersezioni degli S_δ di I con $\bar{S}_\delta$, passano dunque tutti per $S_{\delta-2}^*$, ma ciò è assurdo in quanto gli $S_{\delta-1}$ distinti di $\bar{S}_\delta$ per $S_{\delta-2}^*$ sono in numero di $q + 1 < q^2 + 1$. L'assurdo prova l'asserto anche nel caso $p = 2$.

Si noti ora che gli S_δ ulteriore intersezione degli $S_{\delta+1} \subset S_{n,q}$ per $\bar{S}_\delta$ con la calotta $C(Q_{n-1} + q^\delta, \delta)$ sono in numero di $Q_{n-\delta-1}$ (tanti quanti sono gli $S_{\delta+1} \subset S_{n,q}$ per $\bar{S}_\delta$), essi incontrano $\bar{S}_\delta$ in $Q_{n-\delta-1}$ $S_{\delta-1}$ distinti, in base alla precedente proposizione; essendo d'altra parte gli $S_{\delta-1}$ di $\bar{S}_\delta$ in numero di Q_δ , dovrà essere $Q_\delta \geq Q_{n-\delta-1}$, ossia $\delta \geq n - \delta - 1$, da cui $\delta \geq \frac{n-1}{2}$. Dovendo poi essere $\frac{n-1}{2} \leq \delta < n-2$, con δ intero positivo, dovrà aversi $n > 4$. Ne segue che:

In un $S_{n,q}$ una calotta $C(Q_{n-1} + q^\delta, \delta)$, con δ a priori soddisfacente alla limitazioni $0 < \delta < n-2$, può esistere solo se $n < 4$, nel qual caso essa è tale che di fatto δ soddisfa alle limitazioni

$$\frac{n-1}{2} \leq \delta < n-2.$$

Dalla prima proposizione di questo numero e del n. 31, e dal teor. VII segue che:

Una calotta $C(Q_{n-1} + q^\delta, \delta)$, con $\frac{n-1}{2} \leq \delta < n-2$, di un $S_{n,q}$, con $n > 4$, è intersecata da un qualsiasi $S_{\delta+2}$ contenente un $\bar{S}_\delta \subset C(Q_{n-1} + q^\delta, \delta)$ in un cono quadrico di tipo iperbolico avente come spazio vertice un $S_{\delta-2}$ di $\bar{S}_\delta$.

33. Osserviamo che in $S_{n,q}$ una calotta $C(Q_{n-1} + q^\delta, \delta)$, con $\frac{n-1}{2} < \delta < n-2$, può esistere solo se $n > 5$. Ciò premesso ci proponiamo di dimostrare in questo numero la proposizione seguente:

In un $S_{n,q}$, con $n > 5$, ogni calotta $C(Q_{n-1} + q^\delta, \delta)$, con $\frac{n-1}{2} < \delta < n-2$, risulta un cono proiettante da un $S_{2\delta-n}$ una calotta $C(Q_{2(n-\delta-1)} + q^{n-\delta-1}, n-\delta-1)$ di un $S_{2(n-\delta-1)+1}$ sghembo con l' $S_{2\delta-n}$ vertice.

Sia $\bar{S}_\delta$ un S_δ della calotta $C(Q_{n-1} + q^\delta, \delta)$. I $Q_{n-\delta-1} S_\delta$, ulteriori intersezioni degli $S_{\delta+1} \subset S_{n,q}$ per $\bar{S}_\delta$ con la calotta, incontrano $\bar{S}_\delta$ in $Q_{n-\delta-1} S_{\delta-1}$ distinti. Denotiamo I un tale insieme di $S_{\delta-1}$.

Dimostriamo che se due $S_{\delta-1}$ appartengono ad I tutto il fascio di $S_{\delta-1}$, contenuto in $\bar{S}_\delta$, da essi determinato appartiene ad I . Siano infatti $S'_{\delta-1}$ e $S''_{\delta-1}$ due $S_{\delta-1}$ di I , S'_δ e S''_δ i due S_δ della calotta che intersecano $\bar{S}_\delta$ rispettivamente in $S'_{\delta-1}$ e $S''_{\delta-1}$, e $\bar{S}_{\delta-2}$ l' $S_{\delta-2}$ intersezione di $S'_{\delta-1}$ e $S''_{\delta-1}$. Consideriamo l' $S_{\delta+2}$ congiungente $\bar{S}_\delta$, S'_δ , S''_δ , esso incontra la calotta in un cono quadrico Γ di tipo iperbolico avente come spazio vertice $\bar{S}_{\delta-2}$ (cfr. ultima proposizione n. 32). Gli S_δ del cono quadrico Γ intersecano $\bar{S}_\delta$ in $S_{\delta-1}$ formanti fascio di asse $\bar{S}_{\delta-2}$, ma tali $S_{\delta-1}$ appartengono ad I , in quanto gli S_δ di Γ son contenuti in $C(Q_{n-1} + q^\delta, \delta)$, ne segue l'asserto.

I è dunque un insieme di iperpiani ($S_{\delta-1}$) di $\bar{S}_\delta$ godente della proprietà di contenere, insieme a due suoi qualsiasi iperpiani, tutto il fascio da essi determinato. Dalla duale della proposizione 1 n. 3 segue allora che I è un sistema *lineare* di iperpiani di $\bar{S}_\delta$; dovendone contenere $Q_{n-\delta-1}$ esso coinciderà con la stella di iperpiani di $\bar{S}_\delta$ avente come centro un $\bar{S}_{2\delta-n}$.

Sia P un punto di $C(Q_{n-1} + q^\delta, \delta)$ non appartenente a $\bar{S}_{2\delta-n}$, l' $S_{2\delta-n+1}$ congiungente P con $\bar{S}_{2\delta-n}$ appartiene totalmente a $C(Q_{n-1} + q^\delta, \delta)$; infatti ciò è evidente se $P \in \bar{S}_\delta$, in caso contrario l' $S_{\delta+1}$ congiungente $\bar{S}_\delta$ con P interseca ulteriormente la calotta in un S_δ , contenente P e $\bar{S}_{2\delta-n}$ e quindi l' $S_{2\delta-n+1}$ che li congiunge. Ne segue che la calotta $C(Q_{n-1} + q^\delta, \delta)$ risulta un cono avente come spazio vertice $\bar{S}_{2\delta-n}$.

L'intersezione della calotta $C(Q_{n-1} + q^\delta, \delta)$ con un $S_{2(n-\delta)-1}$ sghembo con $\bar{S}_{2\delta-n}$ risulta una calotta $C(K, \delta')$ (cfr. proposizione 5^a n. 3). Ci proponiamo di calcolare δ' e K .

Ogni $S_\delta \subset C(Q_{n-1} + q^\delta, \delta)$ passa per $\bar{S}_{2\delta-n}$ e quindi interseca $S_{2(n-\delta)-1}$ in un $S_{n-\delta-1} \subset C(K, \delta')$. D'altra parte in $C(K, \delta')$ non è contenuto nessun $S_{n-\delta}$, altrimenti l' $S_{\delta+1}$ congiungente esso con $\bar{S}_{2\delta-n}$ dovrebbe appartenere a $C(Q_{n-1} + q^\delta, \delta)$, essendo tale calotta un cono con vertice $\bar{S}_{2\delta-n}$, e ciò è escluso. Ne segue che la massima dimensione degli spazii contenuti in $C(K, \delta')$ è $\delta' = n - \delta - 1$.

I $Q_{n-\delta-1} S_\delta$, ulteriori intersezione degli $S_{\delta+1} \supset \bar{S}_\delta$ con la $C(Q_{n-1} + q^\delta, \delta)$, esauriscono con i loro punti la calotta $C(Q_{n-1} + q^\delta, \delta)$, inoltre essi non hanno punti in comune fuori $\bar{S}_\delta$. Gli $S_{2\delta-n+1}$ appartenenti ad un tale S_δ passanti per $\bar{S}_{2\delta-n}$ e non contenuti in $\bar{S}_\delta$ sono in numero di $Q_{n-\delta-1} - Q_{n-\delta-2} = q^{n-\delta-1}$, essi incontrano $S_{2(n-\delta)-1}$ in $q^{n-\delta-1}$ punti distinti. I punti di $C(K, \delta')$ non appartenenti a $\bar{S}_\delta$ sono quindi $Q_{n-\delta-1} q^{n-\delta-1}$, se ad essi aggiungiamo i $Q_{n-\delta-1}$ punti dell' $S_{n-\delta-1}$ sezione di $\bar{S}_\delta$ con $S_{2(n-\delta)-1}$ otteniamo tutti i punti di $C(K, \delta')$, si ha dunque:

$$K = Q_{n-\delta-1} q^{n-\delta-1} + Q_{n-\delta-1} = Q_{2(n-\delta)-1} + q^{n-\delta-1}.$$

Ne segue l'asserto.

34. In base al numero precedente siano ricondotti a studiare le calotte $C(Q_{2r} + q^r, r)$ di un $S_{2r+1, q}$, con $r \geq 2$. È ciò che faremo in questo e nel successivo numero.

Sia $\bar{S}_r$ un S_r di una calotta $C(Q_{2r} + q^r, r)$ di un S_{2r+1} , con $r \geq 2$. In forza della prima proposizione del n. 31 e del n. 33 se $r > 2$ e in base all'ultima proposizione del n. 32 se $r = 2$, deduciamo che un iperpiano $S_{2r} \supset \bar{S}_r$ incontra la calotta in un cono Γ , con vertice in un punto $\bar{P}$ di $\bar{S}_r$, e proiettante da $\bar{P}$ una calotta $C(Q_{2(r-1)} + q^{r-1}, r-1)$ di un $S_{2r-1} \subset S_{2r}$ non contenente $\bar{P}$.

Dimostreremo che ogni S_r di $C(Q_{2r} + q^r, r)$ passante per $\bar{P}$ appartiene a S_{2r} e quindi a Γ .

Ragionando per assurdo, ammettiamo che esista un $S_r' \subset C(Q_{2r} + q^r, r)$, passante per $\bar{P}$ e non appartenente a S_{2r} . Esso interseca S_{2r} in un $S_{r-1}' \supset \bar{P}$, il quale deve appartenere a Γ e quindi è contenuto in un S_r^* di Γ (cfr. secondo proposizione n. 31).

Gli $S_{r+1} \supset S_r^*$ di S_{2r} incontrano ulteriormente Γ in S_r , i quali intersecano S_r^* in S_{r-1} passanti per $\bar{P}$, anzi tali S_{r-1} al variare dell' S_{r+1} per S_r^* in S_{2r} , variano descrivendo una stella di S_{r-1} per $\bar{P}$ in S_r^* (n. 33). Onde ogni S_{r-1} della stella, e quindi anche S_{r-1}' , risulta l'intersezione di un ben determinato S_r di Γ con S_r^* . Sia S_r'' quello relativo a S_{r-1}' . S_r' e S_r'' sono S_r distinti di $C(Q_{2r} + q^r, r)$ incontranti S_r^* nello stesso S_{r-1}' , ma ciò è assurdo in base alla prima proposizione del n. 32.

Dalla proposizione ora dimostrata segue che il cono Γ risulta il luogo degli S_r della calotta $C(Q_{2r} + q^r, r)$ per $\bar{P}$ e l' S_{2r} lo spazio congiungente tali S_r . Ma allora due S_{2r} per $\bar{S}_r$ incontrano la calotta in coni con vertici distinti; poichè i punti di $\bar{S}_r$ sono tanti quanti sono gli S_{2r} per esso, si ha che ad ogni punto di $\bar{S}_r$ rimane associato un ben determinato $S_{2r} \supset \bar{S}_r$ che incontra la calotta in un cono con vertice in quel punto.

Osservando che ogni punto P della calotta è contenuto almeno in un suo S_r (cfr. seconda proposizione n. 31), da quanto precede deduciamo che:

Comunque si consideri un punto P di una calotta $C(Q_{2r} + q^r, r)$ gli S_r di essa per P sono congiunti da un iperpiano, che denomineremo l'iperpiano tangente in P alla calotta. Esso incontra la $C(Q_{2r} + q^r, r)$ in un cono con vertice in P , che denomineremo cono tangente in P alla calotta, il quale è intersecato da ogni S_{2r-1} dell'iperpiano tangente, non passante per P , in una calotta $C(Q_{2(r-1)} + q^{r-1}, r-1)$ di S_{2r-1} .

Dalla proposizione precedente, ragionando come nel n. 18, segue che:

L'iperpiano tangente in un punto P di una calotta $C(Q_{2r} + q^r, r)$, risulta il luogo delle rette per P tangenti o appartenenti alla calotta.

35. Siamo ora in grado di dimostrare il seguente

TEOREMA VIII. - *In un $S_{2r+1,q}$, con $r \geq 2$, ogni calotta $C(Q_{2r} + q^r, r)$ risulta una quadrica di tipo iperbolico non specializzata di $S_{2r+1,q}$.*

Ammettiamo vero il teorema per $r=2$, nel qual caso sarà dimostrato alla fine di questo numero, e procediamo per induzione rispetto ad r .

Il cono tangente in un punto P della calotta $C(Q_{2r} + q^r, r)$ è intersecato da un S_{2r-1} non passante per P , appartenente all'iperpiano tangente in P , in una calotta $C(Q_{2(r-1)} + q^{r-1}, r-1)$ (n. 34), ossia, per l'induzione ammessa, in una quadrica non specializzata. Esso risulta quindi un cono quadrico con vertice in P .

Sia ora T_1 un punto delle $C(Q_{2r} + q^r, r)$ e τ_1 il relativo iperpiano tangente; T_2 un punto della calotta, non appartenente a τ_1 , e τ_2 il relativo iperpiano tangente; Γ_1 e Γ_2 siano i coni tangenti alla calotta in T_1 e T_2 . τ_1 e τ_2 si incontrano in un S_{2r-1} , evidentemente non passante nè per T_1 nè per T_2 , il quale incontra Γ_1 e Γ_2 in una stessa quadrica non specializzata, intersezione dell' S_{2r-1} con la calotta, che denoteremo con H .

Consideriamo il fascio F di quadriche che ammette come varietà base i due coni quadrici Γ_1 e Γ_2 . Esso contiene ⁽³⁵⁾ due sole quadriche specializzate: quella che si spezza negli iperpiani τ_1 e τ_2 , e il cono avente come vertice la retta $T_1 T_2$ e proiettante da essa la quadrica H . Ragionando ora come nei numeri 19, 20, 21 si dimostrano le proprietà seguenti:

1^a. *Ogni quadrica del fascio F passante per un punto P della $C(Q_{2r} + q^r, r)$, non situato nella varietà base di F , è non specializzata.*

2^a. *Ogni retta s della $C(Q_{2r} + q^r, r)$ avente un punto non situato nè in Γ_1 nè in Γ_2 in comune con una quadrica $\mathcal{Q}$ di F appartiene tutta a $\mathcal{Q}$.*

3^a. *L'iperpiano e il cono tangente in un punto P , non situato nè in Γ_1 nè in Γ_2 , della $C(Q_{2r} + q^r, r)$ coincidono rispettivamente con l'iperpiano e il cono tangente in P alla quadrica di F per P .*

4^a. *Sia P_1 un qualsiasi punto di $C(Q_{2r} + q^r, r)$ e π_1 il relativo iperpiano tangente, P_2 un altro punto della $C(Q_{2r} + q^r, r)$, non giacente in π_1 , e π_2 il relativo iperpiano tangente, comunque si consideri un altro punto P_3 della $C(Q_{2r} + q^r, r)$, non giacente nè in π_1 nè in π_2 , l'iperpiano tangente in P_3 non passa per l' S_{2r-1} sezione di π_1 con π_2 .*

Sia ora P un punto della $C(Q_{2r} + q^r, r)$ non situato nè in Γ_1 nè in Γ_2 , e $\mathcal{Q}$ la quadrica non specializzata di F per P . Denotiamo con τ e Γ l'iperpiano e il cono tangente in P alla $C(Q_{2r} + q^r, r)$. Essi coincidono rispettivamente con l'iperpiano e il cono tangente in P a $\mathcal{Q}$. Vogliamo provare che ogni altro punto P' di $C(Q_{2r} + q^r, r)$ appartiene a $\mathcal{Q}$. Possiamo allora supporre P' non giacente nè su Γ nè su Γ_1 nè su Γ_2 .

⁽³⁵⁾ Cfr. nota ⁽²¹⁾, n. 19.

Sia $\mathcal{Q}'$ la quadrica non specializzata di F per P' , τ' e Γ' l'iperpiano e il cono tangente in P' a $C(Q_{2r} + q^r, r)$, essi coincidono rispettivamente con l'iperpiano e il cono tangente in P' a $\mathcal{Q}'$. τ e τ' si incontrano in un S_{2r-1}^* , non giacente nè in τ_1 nè in τ_2 (cfr. la precedente proposizione 4), e che li interseca quindi rispettivamente in un S_{2r-2}^1 e in un S_{2r-2}^2 .

S_{2r-1}^* incontra $C(Q_{2r} + q^r, r)$ in una quadrica H^* non specializzata la cui proiezione da P e da P' dà rispettivamente Γ e Γ' . Se H^* contiene un punto P^* non appartenente nè a τ_1 nè a τ_2 — dovendo P^* appartenere sia a Γ che a Γ' , e quindi a $\mathcal{Q}$ e a $\mathcal{Q}'$, e non appartenere alla varietà base del fascio F — deve necessariamente coincidere $\mathcal{Q}$ con $\mathcal{Q}'$ e quindi P' appartenere a $\mathcal{Q}$. Ci resta dunque da provare che esiste almeno un punto di H^* non situato nè in τ_1 nè in τ_2 .

Essendo H^* una quadrica non specializzata di tipo iperbolico di S_{2r-1}^* , il numero dei suoi punti è dato da $Q_{2(r-1)} + q^{r-1}$. Un iperpiano di S_{2r-1}^* interseca H^* o in un cono quadrico con punto vertice, che può essere di tipo iperbolico o ellittico, oppure in una quadrica non specializzata. In ognuno dei tre casi tale intersezione è costituita da un numero di punti dato rispettivamente da $Q_{2r-3} + q^{r-1}$, $Q_{2r-3} - q^{r-1}$, Q_{2r-3} . Dunque i punti di H^* non appartenenti nè a S_{2r-2}^1 nè a S_{2r-2}^2 , e cioè non appartenenti nè a τ_1 nè a τ_2 , sono almeno in numero di

$$N = Q_{2r-2} + q^{r-1} - 2(Q_{2r-3} + q^{r-1}) = Q_{2r-3}(q - 2) + 1 - q^{r-1}.$$

Proviamo che per $q > 2$ e $r \geq 2$ è

$$(8) \quad N = Q_{2r-3}(q - 2) + 1 - q^{r-1} > 0.$$

si ha, essendo $q > 2$:

$$3 < q + \frac{1}{q^{r-1}},$$

da cui con facili passaggi:

$$\frac{q^{r-1} - 1}{q - 2} < q^{r-1}$$

ed infine la (8), essendo, per $r \geq 2$, $q^{r-1} < Q_{2r-3}$.

Ci resta da dimostrare il Teorema nel caso $r = 2$: In un $S_{5,q}$ consideriamo una calotta $C(Q_4 + q^2, 2)$, l' S_4 tangente in un punto P della calotta la interseca nel cono Γ tangente alla calotta in P . Sia $\bar{S}_2$ un S_2 di Γ , allora, in base all'ultima proposizione del n. 32, Γ risulta un cono quadrico di tipo iperbolico con vertice in P . In base a ciò e ragionando come precedentemente per il caso $r > 2$, si conclude col teorema.

36. In base al n. 33 ed al teor. VIII si deduce il seguente:

TEOREMA IX. - *In un $S_{n,q}$, con $n > 5$ e $q > 2$, ogni calotta $C(Q_{n-1} + q^\delta, \delta)$ con $\frac{n-1}{2} < \delta < n-2$, risulta un cono quadrico di tipo iperbolico avente come spazio vertice un $S_{2\delta-n}$.*

I risultati del presente paragrafo si possono riassumere nel teorema seguente:

TEOREMA X. - *In un $S_{n,q}$, con $n \geq 3$ e $q > 2$, ogni calotta $C(Q_{n-1} + q^\delta, \delta)$, con δ a priori soddisfacente alle ovvie limitazioni $0 < \delta < n-1$, è tale che δ soddisfa di fatto alle limitazioni $\frac{n-1}{2} \leq \delta < n-1$. Inoltre per $n=3$ la calotta risulta una quadrica rigata oppure un cono proiettante da un punto V un $(q+2)$ -arco di un piano non passante per V (il secondo caso potendosi presentare solo se $p=2$). Per $n > 3$, se $\delta = n-2$ la calotta risulta un cono quadrico di tipo iperbolico con spazio vertice un S_{n-4} oppure un cono proiettante da un S_{n-3} vertice un $(q+2)$ -arco di un piano sghembo con l' S_{n-3} (il secondo caso potendosi presentare solo se $p=2$); se $\frac{n-1}{2} < \delta < n-2$ (nel qual caso deve essere $n > 5$) la calotta risulta un cono quadrico di tipo iperbolico avente come spazio vertice un $S_{2\delta-n}$; se $\delta = \frac{n-1}{2}$ (nel qual caso n deve essere dispari) la calotta risulta una quadrica non specializzata di tipo iperbolico.*

**§ 5. - Studio delle calotte $C(Q_{n-1} + q^t, \delta)$ di un $S_{n,q}$,
con $0 \leq t < \delta < n-1$.**

37. In questo paragrafo ci proponiamo di studiare completamente le calotte $C(Q_{n-1} + q^t, \delta)$ di un $S_{n,q}$, con $n \geq 3$, dove t e δ verificano a priori le limitazioni $0 \leq t < \delta < n-1$.

Dal Teorema II paragrafo 2 si deduce la seguente proposizione:

Comunque si consideri un S_δ di una calotta $C(Q_{n-1} + q^t, \delta)$, tra i $Q_{n-\delta-1}$ $S_{\delta+1} \supset S_\delta$ ve ne è uno ben determinato che incontra ulteriormente la calotta in un S_t , che denomineremo l' $S_{\delta-1}$ tangente alla calotta lungo l' S_δ , ogni altro incontra ulteriormente la calotta in un S_δ .

Sia $\bar{S}_\delta$ un fissato S_δ della calotta $C(Q_{n-1} + q^t, \delta)$. Denotiamo con $\bar{S}_{\delta+1}$ e $\bar{S}_t$ rispettivamente l' $S_{\delta+1}$ tangente alla calotta lungo $\bar{S}_\delta$ e l' S_t ulteriore intersezione di $\bar{S}_{\delta+1}$ con $C(Q_{n-1} + q^t, \delta)$. Ci proponiamo di dimostrare la proposizione seguente.

Una retta della calotta avente con $\bar{S}_t$ un punto in comune fuori dell' S_{t-1} sezione di $\bar{S}_\delta$ con $\bar{S}_t$, giace necessariamente in $\bar{S}_t$ se $t > 0$, non esiste se $t = 0$.

Ragionando per assurdo, ammettiamo che esista una retta r della calotta non contenuta in $\bar{S}_t$ e avente in comune con esso un punto $\bar{P}$, non giacente nell' S_{t-1} sezione di $\bar{S}_t$ con $\bar{S}_\delta$.

La r deve allora essere sghemba con $\bar{S}_\delta$, altrimenti sarebbe contenuta in $\bar{S}_{\delta+1}$ e quindi in $\bar{S}_t$. Sia allora $\bar{S}_{\delta+2}$ l' $S_{\delta+2}$ congiungente $\bar{S}_\delta$ con r , esso contiene $\bar{S}_{\delta+1}$ e $\bar{S}_t$. I q $S_{\delta+1}$ di $\bar{S}_{\delta+2}$ contenenti $\bar{S}_\delta$ e distinti da $\bar{S}_{\delta+1}$ incontrano ulteriormente la calotta in q S_δ , i quali intersecano r evidentemente in punti distinti e $\bar{S}_\delta$ in $S_{\delta-1}$ distinti, in quanto se due tali S_δ segassero $\bar{S}_\delta$ in uno stesso $S_{\delta-1}$, l' $S_{\delta+1}$ loro congiungente dovrebbe contenere r e quindi dovrebbe appartenere tutto alla calotta (cfr. proposizione 8 n. 3) e ciò è escluso. Supponiamo $\delta > 1$ — il caso $\delta = 1$ sarà discusso in seguito — e siano S'_δ e S''_δ due tali S_δ , P' e P'' i rispettivi punti d'incontro con r , $S_{\delta-2}^*$ l' $S_{\delta-2}$ comune ai due $S_{\delta-1}$ sezione di $\bar{S}_\delta$ con S'_δ e S''_δ .

L' S_δ congiungente $S_{\delta-2}^*$ con r , dovendo contenere la retta $r \subset C(Q_{n-1} + q^t, \delta)$ e i due $S_{\delta-1}$ della calotta proiezioni rispettive di $S_{\delta-2}^*$ da P' e P'' , deve appartenere tutto alla calotta (cfr. proposizione 7 n. 3). Esso interseca $\bar{S}_\delta$ in $S_{\delta-2}^*$ e $\bar{S}_{\delta+1}$ in un $S_{\delta-1}$, il quale, dovendo appartenere alla calotta e non potendo appartenere a $\bar{S}_\delta$, non può che coincidere con $\bar{S}_t$. Onde $t = \delta - 1$ ed inoltre l' S_{t-1} sezione di $\bar{S}_t$ con $\bar{S}_\delta$ deve coincidere con $S_{\delta-2}^*$. Data l'arbitrarietà di S'_δ e S''_δ ne segue anche che tutti gli S_δ , ulteriore intersezione della calotta con gli $S_{\delta+1}$ di $\bar{S}_{\delta+2}$ contenenti $\bar{S}_\delta$, passano per $S_{\delta-2}^*$.

Consideriamo un $S_\delta \subset \bar{S}_{\delta+2}$ sghembo con $S_{\delta-2}^*$. I q $S_{\delta+1}$ di $\bar{S}_{\delta+2}$ contenenti $\bar{S}_\delta$ e distinti da $\bar{S}_{\delta+1}$, e i q S_δ loro ulteriore intersezione con la calotta, incontrano l' S_δ rispettivamente in q piani distinti passanti per la retta sezione di $\bar{S}_\delta$ con S_δ , retta che denotiamo con $\bar{r}$, e in q rette, ciascuna su ogni piano, a due a due sghembe tra loro (in quanto due tali S_δ si incontrano in $S_{\delta-2}^*$ che è sghembo con S_δ). Inoltre $\bar{S}_{\delta+1}$ e l' $\bar{S}_t \equiv \bar{S}_{\delta-1}$, sua intersezione con la calotta, incontrano l' S_δ rispettivamente in un piano π per $\bar{r}$, distinto dai precedenti, e in un punto di π non situato su $\bar{r}$.

L'intersezione della calotta $C(Q_{n-1} + q^t, \delta)$ con l' S_δ è dunque costituita da $Q_2 + 1$ punti ed anzi risulta una calotta $C(Q_2 + 1, 1)$ contenente $\bar{r}$ e tale che dei $q + 1$ piani per $\bar{r}$, il piano π la incontra ulteriormente solamente in un punto, e gli altri q la incontrano ulteriormente in q rette, ciascuna su ogni piano, a due a due sghembe tra loro e incidenti $\bar{r}$. Sia s una di queste q rette, uno qualsiasi dei $q + 1$ piani per essa incontra le $q - 1$ rimanenti in $q - 1$ punti distinti tra loro e dai punti di s , e quindi (cfr. proposizione 6 n. 3) in una retta di $C(Q_2 + 1, 1)$. Rimangono così individuate, al variare del piano per s , $q + 1$ rette di $C(Q_2 + 1, 1)$ incidenti alle q rette suddette e quindi a due a due sghembe tra loro.

La calotta $C(Q_2 + 1, 1)$, dovendo contenere $q + 1$ rette a due a due sghembe tra loro, deve possedere $(q + 1)^2$ punti distinti e non $Q_2 + 1$. Onde l'assurdo.

Se $\delta = 1$ ci si convince facilmente che l'intersezione di $\bar{S}_{\delta+2} \equiv \bar{S}_3$ con la

calotta $C(Q_{n-1} + q^t, \delta)$ risulta una calotta $C(Q_2 + 1, 1)$ del tipo su considerato, ne segue l'assurdo anche in questo caso.

38. Continuiamo a denotare con $\bar{S}_\delta$, $\bar{S}_t$ e $\bar{S}_{t-1}$ rispettivamente un S_δ di una calotta $C(Q_{n-1} + q^t, \delta)$ di un $S_{n,q}$, l' S_t ulteriore intersezione di essa con l' $S_{\delta+1}$ tangente alla calotta lungo $\bar{S}_\delta$ e l' S_{t-1} sezione di $\bar{S}_t$ con S_δ .

Consideriamo l'insieme dei punti della calotta distinti da quei punti di $\bar{S}_t$ che non appartengono a $\bar{S}_{t-1}$. Esso, essendo costituito da Q_{n-1} punti e godendo inoltre — in base all'ultima proposizione del numero precedente — della proprietà di contenere ogni retta avente più di due punti con esso in comune, risulta una calotta $C(Q_{n-1}, \delta)$.

Dunque ogni calotta $C(Q_{n-1} + q^t, \delta)$ di $S_{n,q}$ si compone di una calotta $C(Q_{n-1}, \delta)$ e di un $\bar{S}_t$, avente in comune con la $C(Q_{n-1}, \delta)$ un $\bar{S}_{t-1}$. Inoltre i punti di $\bar{S}_t$, non appartenenti a $\bar{S}_{t-1}$, sono tali che ogni retta per essi risulta tangente alla calotta $C(Q_{n-1}, \delta)$, in quanto se così non fosse esisterebbero delle rette aventi tre punti in comune con la $C(Q_{n-1} + q^t, \delta)$ e non appartenenti ad essa (cfr. ultima proposizione n. 37).

Distinguiamo ora i due casi $p \neq 2$ e $p = 2$.

Dimostriamo che in un $S_{n,q}$, con $p \neq 2$, non esistono calotte $C(Q_{n-1} + q^t, \delta)$. Infatti, supposta esistente una tale calotta, la calotta $C(Q_{n-1}, \delta)$ di cui essa si compone deve risultare, in base al teor. VI paragrafo 3, una quadrica (specializzata o non). È ben noto che per un punto non appartenente ad una quadrica passa sempre almeno una secante alla quadrica se $p \neq 2$, quindi per un punto di $\bar{S}_t$, non appartenente a $\bar{S}_{t-1}$, dovrebbe passare almeno una retta secante la quadrica $C(Q_{n-1}, \delta)$, ma ciò è assurdo in base all'osservazione fatta precedentemente. Ne segue l'asserto.

Supponiamo ora $p = 2$. In base al teor. VI, paragrafo 3, la calotta $C(Q_{n-1}, \delta)$ di cui si compone la $C(Q_{n-1} + q^t, \delta)$ è tale che $\frac{n}{2} - 1 \leq \delta \leq n - 2$ ed inoltre: per $\delta = n - 2$ essa risulta un cono proiettante da un S_{n-3} un $(q+1)$ -arco di un piano sghembo con l' S_{n-3} , in questo caso i soli punti di $S_{n,q}$ per cui ogni retta per essi risulta tangente al cono risultano quelli dell' S_{n-2} proiezione dall' S_{n-3} del centro del $(q+1)$ -arco, onde l' $\bar{S}_t$ deve essere immerso in tale S_{n-2} ; per $\frac{n}{2} - 1 < \delta < n - 2$ essa risulta un cono quadrico proiettante da un $S_{2\delta-n+1}$ vertice una quadrica non specializzata di un $S_{2(n-\delta-1)}$, i soli punti di $S_{n,q}$ per cui ogni retta per essi risulta tangente al cono risultano, come è noto, quelli dell' $S_{2\delta-n+2}$ proiezione dall' $S_{2\delta-n+1}$ del centro della quadrica non specializzata, onde l' $\bar{S}_t$ deve essere contenuto in tale $S_{2\delta-n+2}$ e quindi $t \leq 2\delta - n + 2$; per $\delta = \frac{n}{2} - 1$ (nel qual caso n deve essere pari) essa risulta una quadrica non specializzata, il centro della quadrica è l'unico

punto di $S_{n,q}$ tale che ogni retta per esso risulta tangente alla quadrica, onde $\bar{S}_t$ deve coincidere con tale punto e quindi $t = 0$.

I risultati precedenti si riassumono nel

TEOREMA XI. - *In un $S_{n,q}$, con $n \geq 3$ e $q > 2$, non esistono calotte $C(Q_{n-1} + q^t, \delta)$, con $0 \leq t < \delta < n-1$, se $p \neq 2$; se $p = 2$, ogni calotta $C(Q_{n-1} + q^t, \delta)$, con $0 \leq t < \delta < n-1$, è tale che t e δ soddisfano di fatto le ulteriori limitazioni $\frac{n}{2} - 1 \leq \delta < n-1$ e $t \leq 2\delta - n + 2$, inoltre: per $\delta = n-2$ la calotta risulta composta da un cono proiettante da un S_{n-3} un $(q+1)$ -arco di un piano sghembo con l' S_{n-3} e da un S_t immerso nell' S_{n-2} proiezione dall' S_{n-3} del centro del $(q+1)$ -arco; per $\frac{n}{2} - 1 < \delta < n-2$ (nel qual caso deve essere $n > 4$) la calotta risulta composta da un cono quadrico proiettante da un $S_{2\delta-n+1}$ una quadrica non specializzata di un $S_{2(n-\delta-1)}$, sghembo con l' $S_{2\delta-n+1}$, e da un S_t contenuto nell' $S_{2\delta-n+2}$ proiezione da $S_{2\delta-n+1}$ del centro della quadrica non specializzata; per $\delta = \frac{n}{2} - 1$ (nel qual caso n deve essere pari) la calotta si compone di una quadrica non specializzata e del suo centro.*

BIBLIOGRAFIA

- [1] A. BARLOTTI, *Un'estensione del teorema di Segre-Kustaanheimo*, « Boll. U.M.I. », (3) 10 (1955) 4, pp. 498-506.
- [2] E. BERTINI, *Introduzione alla geometria proiettiva degli iperspazi*, 2ª ed. (Messina, Principato, 1923).
- [3] R. C. BOSE, *Mathematical theory of factorial design*, « Sankhya », vol. VIII, pp. 107-166.
- [4] L. E. DICKSON, *Linear groups, with an exposition of the Galois field theory*, (Leipzig, Teubner, 1901).
- [5] G. JÄRNEFELT, *A plane geometry with a finite number of elements*, « Verröf. des Finnischen Geodätischen Inst. », n. 36 (1949).
- [6] G. JÄRNEFELT, *Reflections on a finite approximation to Euclidean Geometry. Physical and astronomical prospects*, « Ann. Ac. Sc. Fennicae », ser. A, I, n. 96 (1951).
- [7] G. JÄRNEFELT e P. KUSTAAHEIMO, *An observation on finite geometries*, « Atti XI Congresso matematico scandinavo » (Trondheim 1949), pp. 166-182.
- [8] P. KUSTAAHEIMO, *A note on a finite approximation of the Euclidean plane geometry*, « Soc. Sc. Fenn. Comm. Phys. math. », XV, 19 (1950).
- [9] P. KUSTAAHEIMO, *On the fundamental prime of a finite world*, « Ann. Ac. Sc. Fennicae », ser. A, I, n. 129 (1952).
- [10] P. KUSTAAHEIMO e B. QVIST, *On differentiation in Galois fields*, « Ann. Ac. Sc. Fennicae », ser. A, I, n. 137 (1952).
- [11] G. PANELLA, *Caratterizzazione delle quadriche di uno spazio (tridimensionale) lineare sopra un corpo finito*, « Boll. U.M.I. », (3) 10 (1955) 4, pp. 507-513.
- [12] E. J. F. PRIMROSE, *Quadrics in finite geometries*, « Proc. Cambridge Phil. Soc. », 47 (1951), pp. 299-304.
- [13] B. QVIST, *Some remarks concerning curves of the second degree in a finite plane*, « Ann. Ac. Sc. Fennicae », ser. A, I, n. 134 (1952).
- [14] B. SEGRE, *Lezioni di geometria moderna*, vol. I (Bologna, Zanichelli, 1948).

- [15] B. SEGRE, *Problèmes arithmétiques en géométrie algébrique*, Colloque de Géométrie algébrique (Liège, CBRM, 1949), pp. 123-142.
 - [16] B. SEGRE, *Arithmetical questions on algebraic varieties*, (London, The Athlone Press, 1951).
 - [17] B. SEGRE, *Sulle ovali nei piani lineari finiti*, « Rend. Acc. Naz. Lincei », (8) 17 (1954), pp. 141-142.
 - [18] B. SEGRE, *Ovals in a finite projective plane*, « Canadian Journal of Math. », 7 (1955), pp. 414-416.
 - [19] B. SEGRE, *Curve razionali normali e K -archi negli spazi finiti*, « Ann. Mat. », (4) 39 (1955), pp. 357-379.
 - [20] G. TALLINI, *Sulle K -calotte degli spazi lineari finiti. Nota I*, « Rend. Acc. Naz. Lincei », (8) 20 (1956), pp. 311-317.
 - [21] G. TALLINI, *Sulle K -calotte degli spazi lineari finiti. Nota II*, « Rend. Acc. Naz. Lincei », (8) 20 (1956), pp. 442-446.
-