Sulla propagazione delle onde elettromagnetiche nei mezzi di Toupin e Rivlin (*) (**).

MARIALUISA DE SOCIO (Milano)

A DARIO GRAFFI nel suo 70° compleanno

Summary. – *The propagation of an ordinary plane wave in a medium of Toupin and Rivlin is here considered, limitedly to the instances of an external electric or magnetic field acting on the medium. In particular, the conditions for the propagation of T.E. and T.M. or T.E.M. waves are determined.*

I. – In una nota pubblicata alcuni anni fa TOUPIN e RIVLIN [1] hanno stabilito equazioni costitutive molto generali per il campo elettromagnetico in un mezzo isotropo soggetto ad un campo elettrico $\mathscr{E}$ e ad un campo magnetico d'induzione $\mathscr{B}$ costanti rispetto al tempo. I mezzi in cui sono valide queste equazioni verranno chiamati, in seguito, mezzi di Toupin-Rivlin, o più brevemente mezzi T.R.

In una successiva memoria [2] RIVLIN ha studiato la propagazione delle onde piane, la loro riflessione e rifrazione nei mezzi sopra citati, supponendo però il campo elettrico $\mathscr{E}$ nullo.

In questa nota ho ripreso la propagazione delle onde piane ordinarie (RIVLIN considera anche le onde evanescenti) in un mezzo T.R., supponendo però $\mathscr{B}=0$, oppure $\mathscr{E}=0$. Anzitutto in base al teorema di reciprocità e con considerazioni energetiche ho stabilito alcune relazioni fra le costanti che compaiono nelle predette relazioni costitutive. Nel caso $\mathscr{B}=0$, $\mathscr{E}\neq 0$, il cui studio è stato appena iniziato da RIVLIN e TOUPIN, ho determinato in modo completo le leggi di propagazione delle onde piane in una qualunque direzione $\boldsymbol{n}$ (gli autori sopra citati si erano limitati ai casi particolari di propagazione parallela e normale ad $\mathscr{E}$) ed ho trovato che nel mezzo si propagano nella direzione e verso di $\boldsymbol{n}$ un'onda T.E. e un'onda T.M.; analoga propagazione si ha in verso opposto; le velocità delle due onde nei due versi opposti risultano però differenti. Ho poi mostrato che possono aversi onde T.E.M. solo se la direzione di propagazione $\boldsymbol{n}$ è parallela ad $\mathscr{E}$.

Ho considerato anche il caso in cui $\mathscr{E}=0$, $\mathscr{B}\neq 0$; ho anzitutto ritrovato per altra via alcune formule di Toupin e Rivlin, poi ho studiato la polarizzazione in questo caso (argomento non approfondito dai predetti autori), dimostrando che si

(*) Entrata in Redazione il 4 giugno 1976.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito dei gruppi di ricerca del C.N.R. per la Fisica Matematica.

hanno onde T.E.M. solo per propagazione parallela a $\mathscr{B}$, onde T.E. o T.M. solo per propagazione normale a $\mathscr{B}$. Credo opportuno osservare che alcuni risultati sono ottenuti senza far uso delle restrizioni imposte dal teorema di reciprocità.

II. – Consideriamo la propagazione di un'onda elettromagnetica sinusoidale di frequenza ω in un mezzo isotropo a simmetria centrale nel quale agisca un forte campo elettromagnetico esterno $\mathscr{E}$, $\mathscr{B}$. Nei mezzi T.R. valgono, nel caso di onde sinusoidali di frequenza ω, le equazioni di Maxwell:

$$\text{(II.1)} \qquad \operatorname{rot}\boldsymbol{H} = i\omega\boldsymbol{D}\,, \qquad \operatorname{rot}\boldsymbol{E} = -\,i\omega\boldsymbol{B}$$

ove ai vettori $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{B}$ vanno associate le equazioni costitutive:

$$\text{(II.2)} \qquad \boldsymbol{D} = \boldsymbol{\Phi E} + \boldsymbol{\Psi B}\,, \qquad \boldsymbol{H} = \boldsymbol{\Omega E} + \boldsymbol{\Lambda B}$$

con $\boldsymbol{\Phi}$, $\boldsymbol{\Psi}$, $\boldsymbol{\Omega}$, $\boldsymbol{\Lambda}$ tensori doppi, dipendenti da $\mathscr{E}$, $\mathscr{B}$, di cui scriveremo fra breve l'espressione nei casi che interessano questa nota.

Ciò posto, per stabilire sotto quali condizioni vale il teorema di reciprocità del campo elettromagnetico, supponiamo anzitutto che in un certo dominio $\mathscr{D}$ occupato da un mezzo T.R. si propaghi un campo elettromagnetico sinusoidale $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}$. Supponiamo poi che nello stesso dominio, in cui però al campo costante $\mathscr{E}$, $\mathscr{B}$ agente sul mezzo va sostituito il campo $\mathscr{E}'$, $\mathscr{B}'$, possa propagarsi un altro campo elettromagnetico $\boldsymbol{E}'$, $\boldsymbol{H}'$ le cui equazioni costitutive saranno allora:

$$\text{(II.2')} \qquad \boldsymbol{D}' = \boldsymbol{\Phi}'\boldsymbol{E}' + \boldsymbol{\Psi}'\boldsymbol{B}', \qquad \boldsymbol{H}' = \boldsymbol{\Omega}'\boldsymbol{E}' + \boldsymbol{\Lambda}'\boldsymbol{B}'$$

ove $\boldsymbol{\Phi}'$, $\boldsymbol{\Psi}'$, $\boldsymbol{\Omega}'$, $\boldsymbol{\Lambda}'$ hanno espressioni analoghe alle $\boldsymbol{\Phi}$, $\boldsymbol{\Psi}$, $\boldsymbol{\Omega}$, $\boldsymbol{\Lambda}$, ma con $\mathscr{E}'$, $\mathscr{B}'$ in luogo di $\mathscr{E}$, $\mathscr{B}$.

Ora affinchè fra $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{E}'$, $\boldsymbol{H}'$ valga il teorema di reciprocità dell'elettromagnetismo, qualunque sia $\mathscr{D}$, deve essere:

$$\text{(II.3)} \qquad \operatorname{div}(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}') = \operatorname{div}(\boldsymbol{E}'\times\boldsymbol{H})$$

da cui, sviluppando la divergenza e ricordando le equazioni di Maxwell (II.1) e poi le (II.2) segue:

$$\text{(II.4)} \quad \boldsymbol{B}\cdot(\boldsymbol{\Lambda}'\boldsymbol{B}' + \boldsymbol{\Omega}'\boldsymbol{E}') + \boldsymbol{E}\cdot(\boldsymbol{\Phi}'\boldsymbol{E}' + \boldsymbol{\Psi}'\boldsymbol{B}') = \boldsymbol{B}'\cdot(\boldsymbol{\Lambda B} + \boldsymbol{\Omega E}) + \boldsymbol{E}'\cdot(\boldsymbol{\Phi E} + \boldsymbol{\Psi B})\,.$$

Tale condizione è verificata per ogni coppia di campi $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}'$ se:

$$\text{(II.5)} \qquad \boldsymbol{\Lambda}' = \boldsymbol{\Lambda}^T, \qquad \boldsymbol{\Phi}' = \boldsymbol{\Phi}^T, \qquad \boldsymbol{\Omega}' = \boldsymbol{\Psi}^T, \qquad \boldsymbol{\Psi}' = \boldsymbol{\Omega}^T$$

dove con $\boldsymbol{\Lambda}^T$, $\boldsymbol{\Phi}^T$, $\boldsymbol{\Psi}^T$, $\boldsymbol{\Omega}^T$ si indica il tensore trasposto rispettivamente di $\boldsymbol{\Lambda}$, $\boldsymbol{\Phi}$, $\boldsymbol{\Psi}$, $\boldsymbol{\Omega}$.

Cerchiamo ora alcune conseguenze delle (II.5) valide nei casi particolari $\mathscr{B} = 0$ oppure $\mathscr{E} = 0$, supponendo però:

$$\text{(II.6)} \qquad \mathscr{E}' = \pm \mathscr{E}\,, \qquad \mathscr{B}' = \pm \mathscr{B}\,.$$

Supponiamo dapprima $\mathscr{B} = \mathscr{B}' = 0$; allora dalle formule di Toupin e Rivlin segue, usando gli stessi simboli:

$$\text{(II.7)} \qquad \boldsymbol{\Phi} = \alpha_1 \boldsymbol{I} + \alpha_7 \mathscr{E} \otimes \mathscr{E}\,, \quad \boldsymbol{\Lambda} = \beta_1 \boldsymbol{I} + \beta_7 \mathscr{E} \otimes \mathscr{E}\,, \quad \boldsymbol{\Psi} = \alpha_3 \mathscr{E} \times, \quad \boldsymbol{\Omega} = \beta_2 \mathscr{E} \times$$

dove α_i e β_i sono funzioni di $\mathscr{E}^2$, mentre $\boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{b}$ indica la diade di vettori $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ (se $\boldsymbol{m}$ è un vettore generico si ha pertanto $\boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{b}\boldsymbol{m} = (\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{m})\boldsymbol{a}$).

Le prime due relazioni di (II.5) sono senz'altro soddisfatte, le due ultime se:

$$\text{(II.8)} \qquad \alpha_3 = \beta_2 \quad \text{se } \mathscr{E}' = -\mathscr{E}\,, \qquad \alpha_3 = -\beta_2 \quad \text{se } \mathscr{E}' = \mathscr{E}$$

Supponiamo ora $\mathscr{B}$ e $\mathscr{B}' \neq 0$, ma $\mathscr{E}' = \mathscr{E} = 0$. Si ha allora:

$$\text{(II.9)} \quad \boldsymbol{\Phi} = \alpha_1 \boldsymbol{I} + \alpha_2 \mathscr{B} \times + \alpha_{16} \mathscr{B} \otimes \mathscr{B}\,, \quad \boldsymbol{\Lambda} = \beta_1 \boldsymbol{I} + \beta_3 \mathscr{B} \times + \beta_{16} \mathscr{B} \otimes \mathscr{B}\,, \quad \boldsymbol{\Psi} = \boldsymbol{\Omega} = 0$$

dove ora α_i e β_i sono funzioni di $\mathscr{B}^2$.

Allora le relazioni (II.5) sono sempre soddisfatte con $\mathscr{B}' = -\mathscr{B}$, mentre se $\mathscr{B}' = \mathscr{B}$ per la loro validità occorre che $\alpha_2 = \beta_3 = 0$.

III. – Altre condizioni sulle α_i e β_i delle equazioni costitutive (II.2) si ottengono nell'ipotesi che il mezzo T.R. non sia dissipativo, ovvero sia trasparente. Ciò significa che il flusso in un periodo del vettore di Poynting attraverso qualunque superficie tracciata nel mezzo è nullo. Tale flusso in un periodo è dato dal flusso della parte reale del vettore di Poynting complesso $\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}^*$ (col simbolo $\boldsymbol{a}^*$ si indica al solito il vettore complesso coniugato del vettore $\boldsymbol{a}$).

Perciò la parte reale di $\operatorname{div}(\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}^*)$ (o, il che è lo stesso, la parte reale di $\operatorname{div}(\boldsymbol{E}^* \times \boldsymbol{H})$) deve essere nulla. Ora si ha, per le equazioni (II.1), (II.2):

$$\text{(III.1)} \qquad \operatorname{div}(\boldsymbol{E}^* \times \boldsymbol{H}) = \operatorname{rot} \boldsymbol{E}^* \cdot \boldsymbol{H} - \boldsymbol{E}^* \cdot \operatorname{rot} \boldsymbol{H} = i\omega(\boldsymbol{B}^* \cdot \boldsymbol{H} - \boldsymbol{E}^* \cdot \boldsymbol{D}) = \\ = i\omega[(\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{E} + \boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{B}) \cdot \boldsymbol{B}^* - \boldsymbol{E}^* \cdot (\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{E} + \boldsymbol{\Psi}\boldsymbol{B})]$$

Affinchè $\operatorname{div}(\boldsymbol{E}^* \times \boldsymbol{H})$ abbia parte reale nulla deve essere reale l'espressione entro parentesi all'ultimo membro di (III.1) per ogni valore di $\boldsymbol{E}$ e $\boldsymbol{B}$, quindi tenendo fisso $\boldsymbol{E}$ e ponendo, in luogo di $\boldsymbol{B}$, $\lambda \boldsymbol{B}$ con λ parametro reale variabile in modo qualsiasi, poi tenendo fisso $\boldsymbol{B}$ e ponendo, in luogo di $\boldsymbol{E}$, $\lambda \boldsymbol{E}$ segue (indicata con $\mathscr{I}(a)$ la parte immaginaria del numero complesso a):

$$\text{(III.2)} \qquad \mathscr{I}(\boldsymbol{E}^* \cdot \boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{E}) = 0\,, \qquad \mathscr{I}(\boldsymbol{B}^* \cdot \boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{B}) = 0\,, \qquad \mathscr{I}(\boldsymbol{B}^* \cdot \boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{E} - \boldsymbol{E}^* \cdot \boldsymbol{\Psi}\boldsymbol{B}) = 0\,.$$

Esaminiamo le (III.2) nel caso $\mathscr{B}=0$. Dalla prima si ottiene:

$$\mathscr{I}[\alpha_1 \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{E}^* + \alpha_7(\mathscr{E}\cdot\boldsymbol{E})(\mathscr{E}\cdot\boldsymbol{E}^*)] = 0 \tag{III.3}$$

da cui per l'arbitrarietà di $\boldsymbol{E}$, considerando dapprima $\boldsymbol{E}\perp\mathscr{E}$, segue α_1 reale e quindi scelto in un secondo tempo $\boldsymbol{E}$ tale che $\boldsymbol{E}\cdot\mathscr{E}\neq 0$ (si ricordi che $\mathscr{E}$ è reale), anche α_7 risulta reale. In modo analogo, sempre nell'ipotesi $\mathscr{B}=0$ dalla seconda di (III.2) segue la realtà di β_1 e β_7 mentre dalla terza si ha:

$$\mathscr{I}(\beta_2\mathscr{E}\times\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{B}^* - \alpha_3\mathscr{E}\times\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{E}^*) = \mathscr{I}(\beta_2\mathscr{E}\cdot\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}^* + \alpha_3\mathscr{E}\cdot\boldsymbol{E}^*\times\boldsymbol{B}) = 0 \tag{III.4}$$

da cui, essendo $\mathscr{E}\cdot\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}^*$ e $\mathscr{E}\cdot\boldsymbol{E}^*\times\boldsymbol{B}$ complessi coniugati, segue $\beta_2=\overset{*}{\alpha}_3$.

Concludendo, se il mezzo è trasparente e $\mathscr{B}=0$, α_1, α_7, β_1 e β_7 sono reali, β_2 e α_3 complessi coniugati. Pertanto per le (II.8), se vale il teorema di reciprocità con $\mathscr{E}=-\mathscr{E}'$, β_2 e α_3 sono uguali e reali, immaginari ed opposti se il teorema è valido con $\mathscr{E}=\mathscr{E}'$.

Esaminiamo ora le (III.2) nel caso $\mathscr{E}=0$. Si ha dalla prima:

$$\mathscr{I}(\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{E}^*) = \mathscr{I}[\alpha_1\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{E}^* + \alpha_2\mathscr{B}\times\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{E}^* + \alpha_{16}(\mathscr{B}\cdot\boldsymbol{E})(\mathscr{B}\cdot\boldsymbol{E}^*)] = 0 \tag{III.5}$$

da cui per l'arbitrarietà di $\boldsymbol{E}$, supposto dapprima $\boldsymbol{E}$ reale e normale a $\mathscr{B}$ (in modo che gli ultimi termini di (III.5) risultino nulli) segue α_1 reale; scelto poi $\boldsymbol{E}$ reale, ma non normale a $\mathscr{B}$, risulta α_{16} reale; infine scelto $\boldsymbol{E}$ complesso (quindi $\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{E}^*$ immaginario) si ottiene α_2 immaginario puro. In modo analogo dalla seconda di (III.2) segue, sempre nell'ipotesi $\mathscr{E}=0$, β_1 e β_{16} reali, β_3 immaginario puro, mentre la terza risulta identicamente soddisfatta.

Altre proprietà delle α_i e β_i si possono ricavare ammettendo, come nel caso ordinario, che la densità dell'energia elettrica $\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D}$ e dell'energia magnetica $\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{B}$ siano positive. Deve perciò essere positivo il valor medio di tali energie, cioè deve essere positiva la parte reale di $\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D}^*$ e di $\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{B}^*$ per ogni $\boldsymbol{E}$ ed $\boldsymbol{H}$.

Nel caso $\boldsymbol{H}=0$ o $\boldsymbol{E}=0$ tali condizioni portano alle relazioni

$$\operatorname{Re}(\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{E}^*)>0\,,\qquad \operatorname{Re}(\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{B}^*)>0 \tag{III.6}$$

Dalla prima si ha, nel caso $\mathscr{B}=0$:

$$\alpha_1\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{E}^* + \alpha_7(\mathscr{E}\cdot\boldsymbol{E})(\mathscr{E}\cdot\boldsymbol{E}^*)>0 \tag{III.7}$$

e quindi, supposto dapprima $\boldsymbol{E}$ reale e $\perp\mathscr{E}$, $\alpha_1>0$; supposto poi $\boldsymbol{E}$ con direzione generica, si ha anche $\alpha_7>0$. Analogamente dalla seconda di (III.6) si ottiene $\beta_1>0$, $\beta_7>0$.

IV. – Consideriamo ora la propagazione di un'onda elettromagnetica armonica piana ordinaria nel mezzo considerato, supponendo che su esso agisca solo un forte campo elettrico $\mathscr{E}$, che supporremo, per fissare le idee, orientato come il versore $\boldsymbol{k}$ di un sistema cartesiano ortogonale: $\boldsymbol{\mathscr{E}} = \mathscr{E}\boldsymbol{k}$.

Sia $\boldsymbol{n}$ il versore che individua la direzione e il verso di propagazione; il campo elettrico e il campo magnetico saranno allora rappresentati dai vettori complessi:

$$\text{(IV.1)} \qquad \boldsymbol{E} = \operatorname{esp} i\omega[t - \gamma(P-O)\cdot\boldsymbol{n}]\,\boldsymbol{e}\,, \qquad \boldsymbol{H} = \operatorname{esp} i\omega[t - \gamma(P-O)\cdot\boldsymbol{n}]\,\boldsymbol{h}$$

dove $1/\gamma$ rappresenta, se reale, la velocità di fase dell'onda.

Dalle equazioni di Maxwell si ha pertanto:

$$\text{(IV.2)} \qquad \gamma\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{e} - \boldsymbol{b} = 0\,, \qquad \gamma\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{h} + \boldsymbol{d} = 0$$

dove $\boldsymbol{d}$ e $\boldsymbol{b}$ moltiplicati per l'esponenziale di (IV.1) rappresentano rispettivamente i vettori $\boldsymbol{D}$ e $\boldsymbol{B}$.

In base alle (II.2), da (IV.2) segue:

$$\text{(IV.3)} \qquad \{\boldsymbol{\Phi} + \gamma\boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{n}\times\ ) + \gamma\boldsymbol{n}\times[\boldsymbol{\Omega} + \gamma\boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{n}\times\ )]\}\,\boldsymbol{e} = \boldsymbol{\chi}\boldsymbol{e} = 0$$

ove si è posta la parentesi graffa uguale a $\boldsymbol{\chi}$.

Sostituendo le (II,7) in (IV.3) si ottiene:

$$\text{(IV.4)} \qquad \begin{aligned} &\alpha_1\boldsymbol{e} + \alpha_7\mathscr{E}^2(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{e})\boldsymbol{k} + \gamma\alpha_3\mathscr{E}[(\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{k})\boldsymbol{n} - (\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{k})\boldsymbol{e}] + \beta_1\gamma^2[-\boldsymbol{e} + (\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{n})\boldsymbol{n}] + \\ &\qquad + \gamma\beta_2\mathscr{E}[(\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{n})\boldsymbol{k} - (\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{n})\boldsymbol{e}] + \beta_7\gamma^2\mathscr{E}^2\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{e})\boldsymbol{k} = 0\,. \end{aligned}$$

Detto φ l'angolo minore di π fra $\boldsymbol{k}$ e $\boldsymbol{n}$ e scelto il piano xz in modo che $\boldsymbol{n}$ sia parallelo a questo piano, si ha:

$$\text{(IV.5)} \qquad \boldsymbol{n} = \boldsymbol{i}\operatorname{sen}\varphi + \boldsymbol{k}\cos\varphi$$

e quindi, sostituendo in (IV.4) e proiettando sugli assi l'equazione vettoriale ivi rappresentata, si ha il sistema:

$$\text{(IV.6)} \qquad \begin{cases} [\alpha_1 - \gamma\mathscr{E}(\alpha_3+\beta_2)\cos\varphi - \gamma^2\beta_1\cos^2\varphi]\,e_x + e_z(\alpha_3\gamma\mathscr{E} + \gamma^2\beta_1\cos\varphi)\operatorname{sen}\varphi = 0 \\ [\alpha_1 - \gamma\mathscr{E}(\alpha_3+\beta_2)\cos\varphi - \gamma^2(\beta_1 + \beta_7\mathscr{E}^2\operatorname{sen}^2\varphi)]\,e_y = 0 \\ e_x(\gamma^2\beta_1\cos\varphi + \gamma\beta_2\mathscr{E})\operatorname{sen}\varphi + (\alpha_1 + \alpha_7\mathscr{E}^2 - \gamma^2\beta_1\operatorname{sen}^2\varphi)\,e_z = 0 \end{cases}$$

Tale sistema, che si spezza in un'equazione in e_y e in un sistema in e_x ed e_z, ammette soluzioni non nulle se è:

$$P(\gamma) = \gamma^2(\beta_1 + \beta_7\mathscr{E}^2\operatorname{sen}^2\varphi) + \gamma\mathscr{E}(\alpha_3+\beta_2)\cos\varphi - \alpha_1 = 0$$

oppure

$$\text{(IV.7)} \qquad \begin{aligned} Q(\gamma) = {} &\gamma^2[\alpha_1\beta_1 + \mathscr{E}^2(\beta_1\alpha_7\cos^2\varphi + \beta_2\alpha_3\operatorname{sen}^2\varphi)] + \\ &+ \gamma\mathscr{E}\cos\varphi(\alpha_3+\beta_2)(\alpha_1+\alpha_7\mathscr{E}^2) - \alpha_1(\alpha_1+\alpha_7\mathscr{E}^2) = 0\,. \end{aligned}$$

Da queste equazioni si può ricavare γ che risulterà, come vedremo, reale nel caso del mezzo non assorbente, complesso nell'altro caso. Nel primo caso l'onda si propaga senza attenuazione, nel secondo si attenua.

Consideriamo dapprima la propagazione in direzione parallela al campo influente, supponiamo cioè $\varphi = {0 \atop \pi}$, ovvero $\boldsymbol{n} = \pm \boldsymbol{k}$. In tale ipotesi da (IV.7) si ha:

$$Q(\gamma) = (\alpha_1 + \alpha_7 \mathscr{E}^2) P(\gamma) = 0 \tag{IV.8}$$

ossia $Q(\gamma) = 0$ e $P(\gamma) = 0$ risultano avere le stesse radici, in corrispondenza delle quali si hanno due onde; affinchè queste siano ordinarie senza assorbimento deve essere γ reale, e cioè:

$$\mathscr{E}^2(\alpha_3 + \beta_2)^2 + 4\alpha_1\beta_1 \geqslant 0 \tag{IV.9}$$

relazione certamente soddisfatta, come si è visto in par. III, in un mezzo trasparente, perchè ivi è $\alpha_3 + \beta_2$ reale e α_1, β_1 positive. Come vedremo tali onde risulteranno T.E.M.

Escluso il caso particolare ora studiato, non è possibile in generale che $P(\gamma) = 0$ e $Q(\gamma) = 0$ abbiano le stesse radici. Consideriamo allora i valori di γ per cui risulta:

$$Q(\gamma) \neq 0\,, \qquad P(\gamma) = 0 \tag{IV.10}$$

In tal caso il sistema delle e_x ed e_z si riduce ad un sistema omogeneo in cui il determinante dei coefficienti è diverso da zero, segue $e_x = e_z = 0$. Pertanto, in corrispondenza dei valori di γ per cui valgono le (IV.10) si hanno onde con il campo elettrico parallelo all'asse y e quindi perpendicolare ad $\boldsymbol{n}$. Tali onde sono in generale solo T.E. e non T.M., infatti per esse risulta, essendo $\boldsymbol{e} = e_y \boldsymbol{j}$ e ricordando (IV.2):

$$\begin{aligned}\boldsymbol{h}\cdot\boldsymbol{n} &= (\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{e} + \boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{n} = \\ &= \beta_2\mathscr{E}\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{n} + \gamma[\beta_1 + \beta_7\mathscr{E}^2(\boldsymbol{k}\otimes\boldsymbol{k})]\,\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{n} = (-\beta_2 + \mathscr{E}\beta_7\gamma\cos\varphi)\,\mathscr{E}e_y \operatorname{sen}\varphi \neq 0\,.\end{aligned} \tag{IV.11}$$

Ora il termine entro parentesi è in generale non nullo, pertanto l'onda è T.E.M. solo se $\operatorname{sen}\varphi = 0$, cioè solo se la propagazione avviene parallelamente al campo elettrico $\mathscr{E}$.

Studiamo ora la velocità di propagazione di queste onde, limitandoci al caso del mezzo non assorbente. Posto:

$$\mathscr{E}^2(\alpha_3 + \beta_2)^2\cos^2\varphi + 4\alpha_1(\beta_1 + \beta_7\mathscr{E}^2\operatorname{sen}^2\varphi) = \Delta^2 \tag{IV.12}$$

e osservato che in un mezzo trasparente è sempre $\Delta^2 > 0$ (si ricordi quanto dedotto nel par. III), si ha che le radici di $P(\gamma) = 0$ sono reali; essendo poi $\alpha_1 > 0$,

$\beta_1 + \mathscr{E}^2\beta_7 \operatorname{sen}^2\varphi > 0$, esse risultano di segno opposto, in particolare uguali in valore assoluto se la direzione di propagazione dell'onda è normale a quella del campo elettrico $\boldsymbol{\mathscr{E}}$ o se per il mezzo T.R. in esame vale il teorema di reciprocità con $\boldsymbol{\mathscr{E}} = \boldsymbol{\mathscr{E}}'$.

Tali radici sono:

$$\gamma = \frac{-\mathscr{E}(\alpha_3 + \beta_2)\cos\varphi \pm \Delta}{2(\beta_1 + \beta_7\mathscr{E}^2\operatorname{sen}^2\varphi)}\,. \tag{IV.13}$$

Indicata con γ_1 la radice negativa e con γ_2 la radice positiva, possiamo affermare di avere un'onda che si propaga nel verso di $\boldsymbol{n}$ con velocità $1/\gamma_2$, un'altra che si propaga in verso opposto con velocità $1/|\gamma_1|$.

Ora si noti che ponendo in luogo di $\boldsymbol{n}$, $-\boldsymbol{n}$ bisognerà nelle formule relative cambiare φ in $\pi - \varphi$; avremo allora, poichè nella (IV.13) cambia solo il segno del coefficiente di $-\mathscr{E}(\alpha_3 + \beta_2)$, due onde corrispondenti ai valori γ_1', γ_2' tali che $\gamma_2' = -|\gamma_1|$, $\gamma_1' = -\gamma_2$. Pertanto nella direzione e nel verso di $-\boldsymbol{n}$ avremo un'onda propagantesi con velocità $1/\gamma_2' = 1/|\gamma_1|$, in verso opposto un'onda propagantesi con velocità $1/|\gamma_1'| = 1/\gamma_2$.

Si ritrovano cioè le due onde già prese in esame in corrispondenza al versore di propagazione $\boldsymbol{n}$. Concludendo possiamo affermare che esistono due onde T.E. che si propagano nella direzione di $\boldsymbol{n}$, una in un verso, l'altra in verso opposto con velocità in generale diversa (uguale solo se $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{k} = 0$).

Consideriamo ora i valori di γ per cui risulta:

$$Q(\gamma) = 0\,, \qquad P(\gamma) \neq 0 \tag{IV.14}$$

e quindi da (IV.11):

$$\boldsymbol{e} = e_x\boldsymbol{i} + e_z\boldsymbol{k}\,, \qquad \boldsymbol{h} = \beta_2\mathscr{E}e_x\boldsymbol{j} + \beta_1\gamma(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{e}) \tag{IV.15}$$

per cui $\boldsymbol{h}\cdot\boldsymbol{n} = 0$. In corrispondenza dei valori di γ per cui valgono le (IV.14) si ottengono pertanto onde T.M., ma non in generale T.E. Infatti per esse risulta dalle (IV.2) e (II.2), moltiplicando scalarmente per $\boldsymbol{n}$:

$$\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{d} = -\gamma(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{h})\cdot\boldsymbol{n} = \boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{n}(\alpha_1 - \alpha_3\gamma\mathscr{E}\cos\varphi) + \alpha_7\mathscr{E}^2e_z\cos\varphi + \alpha_3\gamma\mathscr{E}e_z = 0 \tag{IV.16}$$

Ora se fosse $\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{n} = 0$ si avrebbe per la (IV.16) $e_z = 0$, quindi $\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{n} = e_x\operatorname{sen}\varphi = 0$; allora se $\operatorname{sen}\varphi \neq 0$, risulterebbe $e_x = 0$ e quindi $\boldsymbol{e} = 0$, cioè il sistema (IV.6) ammetterebbe solo soluzioni nulle, il che è escluso per la scelta di γ.

Determiniamo ora la velocità di tali onde. Per risolvere l'equazione $Q(\gamma) = 0$ calcoliamone dapprima il discriminante:

$$\begin{aligned}\Delta^2 = {} & [\mathscr{E}(\alpha_3 + \beta_2)(\alpha_1 + \alpha_7\mathscr{E}^2)\cos\varphi]^2 + \\ & + 4\alpha_1(\alpha_1 + \alpha_7\mathscr{E}^2)[\alpha_1\beta_1 + \mathscr{E}^2(\beta_1\alpha_7\cos^2\varphi + \beta_2\alpha_3\operatorname{sen}^2\varphi)]\end{aligned} \tag{IV.17}$$

e osserviamo che per le condizioni cui devono soddisfare le α_i e β_i ($\alpha_1 > 0$, $\alpha_7 > 0$, $\beta_1 > 0$, come si è indicato a par. III), e inoltre, essendo β_2 e α_3 complessi coniugati $\beta_2 + \alpha_3$ reale, $\beta_2\alpha_3 > 0$) risulta $\Delta^2 > 0$; le radici di $Q(\gamma) = 0$ sono pertanto reali, di segno opposto, uguali in valore assoluto solo se $\cos\varphi = 0$ ossia se la direzione di propagazione è normale a quella del campo magnetico influente. Tali radici sono:

$$\gamma = \frac{-\mathscr{E}(\alpha_3 + \beta_2)(\alpha_1 + \alpha_7\mathscr{E}^2)\cos\varphi \pm \Delta}{2[\alpha_1\beta_1 + \mathscr{E}^2(\beta_1\alpha_7\cos^2\varphi + \beta_2\alpha_3\,\mathrm{sen}^2\varphi)]}\,. \tag{IV.18}$$

Indicata ancora con γ_1 la radice negativa e con γ_2 la positiva, possiamo affermare di avere un'onda che si propaga nel verso di $\boldsymbol{n}$ con velocità $1/\gamma_2$, un'altra che si propaga in verso opposto con velocità $1/|\gamma_1|$, cioè esistono due onde T.M. che si propagano nella direzione di $\boldsymbol{n}$, una in un verso, l'altra in verso opposto. Se prendiamo in esame la propagazione delle onde nel verso di $-\boldsymbol{n}$ ritroviamo, come nel caso precedente, le stesse onde.

Possiamo perciò concludere che, fissato un versore $\boldsymbol{n} \neq \boldsymbol{k}$, esistono due onde una T.E. e una T.M. che si propagano nella direzione e nel verso di $\boldsymbol{n}$ e altre due onde analoghe che si propagano in verso opposto. Se la propagazione avviene invece nella direzione del campo elettrico $\mathscr{E}$ tali onde risultano tutte T.E.M. È bene notare che, sia per le onde T.E., sia per le onde T.M., le velocità di propagazione nei versi opposti sono in generale differenti, uguali solo se la direzione di propagazione risulta normale a quella del campo elettrico influente. È da osservare che, nel caso di propagazione parallela ad $\mathscr{E}$ la differenza di velocità nei due versi era già stata notata da TOUPIN e RIVLIN [1].

V. – Consideriamo ora la propagazione dell'onda piana sinusoidale nel mezzo T.R. in esame, supponendo che su esso agisca solo un forte campo magnetico di induzione $\mathscr{B} = \mathscr{B}\boldsymbol{k}$.

Dalle (IV.2) e (II.2) si ha, osservando che nelle nostre ipotesi è $\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\Psi} = 0$:

$$\boldsymbol{\chi}\boldsymbol{e} = \{\boldsymbol{\Phi} + \gamma\boldsymbol{n}\times[\boldsymbol{\Lambda}(\gamma\boldsymbol{n}\times\ )]\}\,\boldsymbol{e} = 0 \tag{V.1}$$

e quindi, proiettando sugli assi:

$$\begin{cases} (\alpha_1 - \beta_1\gamma^2\cos^2\varphi)\,e_x + (\mathscr{B}\alpha_2 - \beta_3\mathscr{B}\gamma^2\cos^2\varphi)\,e_y + \gamma^2\beta_1\,\mathrm{sen}\,\varphi\cos\varphi e_z = 0 \\ (\gamma^2\mathscr{B}\beta_3\cos^2\varphi - \mathscr{B}\alpha_2)\,e_x + [\alpha_1 - \gamma^2(\beta_1 + \mathscr{B}^2\beta_{16}\,\mathrm{sen}^2\varphi)]\,e_y - \gamma^2\mathscr{B}\beta_3\,\mathrm{sen}\,\varphi\cos\varphi e_z = 0 \\ -\gamma^2\beta_1\,\mathrm{sen}\,\varphi\cos\varphi e_x + \gamma^2\mathscr{B}\beta_3\,\mathrm{sen}\,\varphi\cos\varphi e_y + [(\alpha_1 + \alpha_{16}\mathscr{B}^2) - \gamma^2\beta_1\,\mathrm{sen}^2\varphi]\,e_z = 0\,. \end{cases} \tag{V.2}$$

Affinchè il sistema abbia soluzioni non nulle deve essere nullo il determinante dei coefficienti, che costituisce un'equazione di secondo grado in γ^2.

Eseguendo i calcoli, dopo qualche semplificazione, si ottiene infatti la seguente relazione che determina γ^2, un pò diversa, almeno formalmente, da quella di

RIVLIN [2]:

$$\text{(V.3)}\qquad \begin{aligned}&\gamma^4[(\beta_1^2+\beta_1\beta_{16}\mathscr{B}^2\operatorname{sen}^2\varphi+\beta_3^2\mathscr{B}^2\cos^2\varphi)(\alpha_1+\alpha_{16}\mathscr{B}^2\cos^2\varphi)-\\&-\gamma^2\{[\beta_1\alpha_1(1+\cos^2\varphi)+2\alpha_2\beta_3\mathscr{B}^2\cos^2\varphi+\mathscr{B}^2\alpha_1\beta_{16}\operatorname{sen}^2\varphi](\alpha_1+\alpha_{16}\mathscr{B}^2)+\\&+\beta_1(\alpha_1^2+\alpha_2^2\mathscr{B}^2)\operatorname{sen}^2\varphi\}+(\alpha_1+\alpha_{16}\mathscr{B}^2)(\alpha_1^2+\alpha_2^2\mathscr{B}^2)=0\,.\end{aligned}$$

Notiamo che se $\beta_3=\beta_{16}=0$ si ricade nella equazione dei plasmi soggetti ad un campo magnetico; le proprietà di propagazione in questo caso sono ben note e su esse non insisteremo.

Consideriamo dapprima il caso particolare $\varphi=\frac{0}{\pi}$ ossia $\boldsymbol{n}=\pm\boldsymbol{k}$. Allora da (V.2) si ha subito $e_z=0$, cioè $\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{n}=0$, quindi l'onda è T.E. Risulta inoltre, ricordando che per le (IV.2), $\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{n}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{k}=0$

$$\text{(V.4)}\qquad \boldsymbol{h}\cdot\boldsymbol{n}=\boldsymbol{\Lambda b}\cdot\boldsymbol{k}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{\Lambda}^T\boldsymbol{k}=0$$

Concludendo, per $\varphi=\frac{0}{\pi}$, ossia per propagazione parallela al campo magnetico influente, si hanno onde T.E.M. Inoltre per $\varphi=\frac{0}{\pi}$ la (V.3) diviene:

$$\text{(V.5)}\qquad \gamma^4(\beta_1^2+\beta_3^2\mathscr{B}^2)-2\gamma^2(\beta_1\alpha_1+\beta_3\alpha_2\mathscr{B}^2)+\alpha_1^2+\alpha_2^2\mathscr{B}^2=0$$

e ricordando che nel caso di un mezzo non assorbente α_2 e β_3 sono immaginari puri, posto $\alpha_2=i\alpha_2'$, $\beta_3=i\beta_3'$, da (V.5) si ottiene

$$\text{(V.6)}\qquad \gamma_1^2=\frac{\alpha_1+\alpha_2'\mathscr{B}}{\beta_1+\beta_3'\mathscr{B}}=\frac{1}{(v_1'')^2}\,,\qquad \gamma_2^2=\frac{\alpha_1-\alpha_2'\mathscr{B}}{\beta_1-\beta_3'\mathscr{B}}=\frac{1}{(v_2'')^2}$$

e, come hanno dimostrato RIVLIN e TOUPIN, queste onde sono polarizzate circolarmente in senso opposto.

Se nel mezzo vale il teorema di reciprocità con $\mathscr{B}=\mathscr{B}'$, sarà $\alpha_2=\beta_3=0$, pertanto avremo due onde T.E.M. propagantesi con ugual velocità.

Consideriamo poi il caso particolare $\varphi=\pi/2$ e quindi $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{i}$. In questo caso (V.3) diviene:

$$\text{(V.7)}\qquad (\alpha_1+\alpha_{16}\mathscr{B}^2-\gamma^2\beta_1)[\alpha_1^2+\alpha_2^2\mathscr{B}^2-\gamma^2\alpha_1(\beta_1+\beta_{16}\mathscr{B}^2)]=0\,.$$

In corrispondenza al valore $\gamma^2=(\alpha_1+\alpha_{16}\mathscr{B}^2)/\beta_1$ (reale e positivo, perchè tali sono α_1, α_{16}, β_1) si annulla il primo fattore e dal sistema (V.2) si ha in generale $e_x=e_y=0$, $e_z\neq0$, cioè si ha un'onda T.E. Ma ricordando (V.2): $\boldsymbol{h}\cdot\boldsymbol{n}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{\Lambda}^T\boldsymbol{n}=$ $=\gamma\beta_3\mathscr{B}e_z\neq0$ e l'onda non è T.M.

Per $\gamma^2 = (\alpha_1^2 + \alpha_2^2 \mathscr{B}^2)/\alpha_1(\beta_1 + \beta_{16}\mathscr{B}^2)$ (anch'esso reale e positivo, perchè β_1, β_{16} e α_1 sono reali e se vale il teorema di reciprocità con $\mathscr{B} = \mathscr{B}'$, perchè allora $\alpha_2 = 0$; se non vale il teorema di reciprocità, si può ritenere ancora γ^2 reale almeno per piccoli valori di $\mathscr{B}$) s'annulla il secondo fattore e dal sistema (V.2) si ha $e_z = 0$, $e_x \neq 0$, $e_y \neq 0$.

L'onda non è T.E., però, essendo $\boldsymbol{n} \equiv \boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{b} = \gamma(\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{e}) = \gamma e_y \boldsymbol{k}$, si ha:

$$\boldsymbol{h}\cdot\boldsymbol{n} = \gamma\beta_3\mathscr{B}\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{n} + \beta_{16}\mathscr{B}^2(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{n} = 0 \tag{V.8}$$

cioè l'onda è T.M.

VI. – Vogliamo infine provare che è possibile avere onde T.E., T.M., T.E.M. nel mezzo T.R. soggetto ad un campo magnetico, solo nei casi particolari già considerati.

Riprendiamo in esame la (V.1) e supponiamo che i coefficienti α_2 e β_3 che ivi compaiono in $\boldsymbol{\Phi}$ e $\boldsymbol{\Lambda}$ rispettivamente e che sappiamo essere funzioni di $i\omega$ e polinomi in $\mathscr{B}^2$ siano, per $\mathscr{B} = 0$ non nulli.

In tale ipotesi ricerchiamo in quali casi si possono avere onde T.E., imponiamo pertanto la condizione $\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{n} = 0$. Segue per le (II.2) ed essendo per le (IV.2) $\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{n} = 0$:

$$\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{n} = \alpha_2\mathscr{B}\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{n} + \alpha_{16}\mathscr{B}^2(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{e})(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{n}) = 0 \tag{VI.1}$$

Ora essendo $\alpha_2 \neq 0$ per $\mathscr{B} = 0$ il primo addendo nell'ultimo membro di (VI.1) risulta un polinomio in $\mathscr{B}$ con termini di grado $\geqslant 1$, mentre il secondo addendo risulta un polinomio in $\mathscr{B}$ con termini di grado $\geqslant 2$. Poichè la (VI.1) deve essere soddisfatta, se l'onda è T.E., per ogni $\mathscr{B}$, occorre che:

$$\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{n} = 0\,, \qquad (\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{e})(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{n}) = 0 \tag{VI.2}$$

(Osserviamo che se $\boldsymbol{e}$ è complesso, va sostituito ad $\boldsymbol{e}$ nel sistema precedente prima la sua parte reale, poi la sua parte immaginaria).

La prima equazione di (VI.2) ci dice che $\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{e}$, $\boldsymbol{n}$ sono complanari, la seconda che o $\boldsymbol{k} \perp \boldsymbol{e}$, o $\boldsymbol{k} \perp \boldsymbol{n}$. Se $\boldsymbol{k} \perp \boldsymbol{e}$, poichè $\boldsymbol{e} \perp \boldsymbol{n}$ e $\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{e}$, $\boldsymbol{n}$ sono complanari, segue $\boldsymbol{k} = \pm\boldsymbol{n}$, cioè la propagazione avviene in direzione parallela al campo magnetico influente. In tal caso come si è visto, l'onda è T.E.M. Se invece $\boldsymbol{k} \perp \boldsymbol{n}$ la propagazione è perpendicolare alla direzione del campo magnetico influente e, come si è visto, l'onda è T.E., ma non T.M.

Ricerchiamo poi quando si hanno onde T.M. Dalla relazione:

$$\boldsymbol{h}\cdot\boldsymbol{n} = \gamma\beta_3\mathscr{B}\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{n} + \beta_{16}\mathscr{B}^2(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{b})\,\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{n} = 0 \tag{VI.3}$$

sempre nell'ipotesi che sia $\beta_3 \neq 0$ per $\mathscr{B} = 0$ si ritrovano le (VI.2).

Concludendo: si possono avere onde T.E.M. solo per propagazione parallela al campo magnetico influente, onde solo T.E. o solo T.M. soltanto per propagazione normale al campo magnetico esterno.

BIBLIOGRAFIA

[1] A. TOUPIN - R. S. RIVLIN, *Electro-magneto-optical effects*, Arch. Rational Mechanics and Analysis, **7** (1961), p. 434.

[2] R. S. RIVLIN, *Magneto-optical effects*, Accad. Naz. dei Lincei, **9** (1968-69), p. 231.