

Sur la magnétohydrodynamique anisotrope relativiste (*).

MAHDY CISSOKO (Antony, France) (**)

Summary. – *This paper is concerned with the relativistic phenomenological theory of anisotropic magnetohydrodynamics. An anisotropic fluid scheme is defined and studied. The main system of anisotropic magnetohydrodynamics is deduced. This system may describe a collisionless anisotropic plasma embedded in a strong magnetic field. The main system is shown to yield to three types of waves as in isotropic (perfect) magnetohydrodynamics: the entropic waves, the magnetosonic waves and the Alfvén waves. For the rays associated respectively to the magnetosonic and Alfvén waves the fundamental property concerning the propagation of infinitesimal discontinuities of variables is established. The conditions under which the velocities of propagation of magnetosonic and Alfvén waves are real are derived: these conditions imply as in the classical theory the absence of fire hose and mirror instabilities in the fluid. The study of wave cones allows, on the one hand to point out some particularities of the propagation of waves in anisotropic magnetohydrodynamics, and on the other hand to clear up the hyperbolicity character of differential operators associated to various waves.*

Introduction.

La mécanique relativiste des fluides a pour cadre géométrique un espace-temps (V_4, \underline{g}) , variété différentiable de dimension quatre, munie d'une métrique riemannienne \underline{g} de type hyperbolique normal et de signature $+- - -$. Localement

$$\underline{g} = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta \quad (\alpha, \beta \text{ tout indice grec} = 0, 1, 2, 3).$$

La métrique \underline{g} est astreinte à vérifier les équations d'Einstein

$$E_{\alpha\beta} = \chi T_{\alpha\beta}.$$

Le premier membre $E_{\alpha\beta}$ est un tenseur symétrique appelé tenseur d'Einstein: il définit la structure géométrique de l'espace-temps (V_4, \underline{g}) . $T_{\alpha\beta}$ est également un tenseur symétrique appelé tenseur d'impulsion-énergie ou plus brièvement tenseur d'énergie: il doit assurer une représentation aussi complète que possible d'une distribution énergétique déterminée.

(*) Entrata in Redazione il 23 aprile 1975.

(**) Laboratoire de Physique Mathématique, Collège de France.

Un fluide est donc décrit dans un domaine de (V_4, g) par un champ de tenseur $T_{\alpha\beta}$ qui selon A. LICHNEROWICZ doit admettre un vecteur propre U orienté dans le temps pour lequel le scalaire $T_{\alpha\beta} U^\alpha U^\beta$ est positif. U est appelé 4-vecteur vitesse unitaire du fluide et ses trajectoires définissent les lignes de courant.

Selon le problème étudié, on est conduit à faire une décomposition géométrique de $T_{\alpha\beta}$, décomposition qui correspond à la séparation et à l'interaction des phénomènes mécaniques, thermodynamiques et électromagnétiques. Ainsi le schéma fluide pur a fait l'objet de nombreux mémoires devenus classiques, en particulier ceux de L. P. EISENHART et de A. LICHNEROWICZ. Le schéma fluide thermodynamique a été étudié par C. ECKART et par PHAM MAU QUAN. Le schéma fluide-champ électromagnétique a fait l'objet de nombreuses études de A. LICHNEROWICZ, de PHAM MAU QUAN, qui ont suscité depuis de nombreux mémoires notamment ceux de G. PICHON; il a conduit dans un cas particulier à la magnétohydrodynamique relativiste dont l'étude a fait l'objet de nombreux travaux qui sont un modèle d'élégance et de rigueur de Madame Y. CHOQUET-BRUHAT et de A. LICHNEROWICZ. Mais dans tous ces travaux, le fluide étudié était supposé isotrope, c'est à dire parfait au sens de Taub et de Lichnerowicz. Comme il est bien connu, l'hypothèse de pression isotrope n'est plus valable en magnétohydrodynamique sans collisions. Les plasmas anisotropes à collisions rares constituent essentiellement l'état de la matière en dehors du voisinage immédiat du soleil, des planètes. L'étude de tels plasmas revêt donc une grande importance en Astrophysique; elle a fait l'objet, dans le cas classique, de nombreux travaux [1], [2], [3], [4], [5], [6], [7], [8], etc.

Le présent travail vise, par des arguments physiques et mathématiques simples, à la construction d'une théorie relativiste phénoménologique de la magnétohydrodynamique anisotrope que nous définissons ici comme étant l'étude des propriétés d'un fluide relativiste de conductivité infinie, soumis à un champ magnétique fort créant l'anisotropie. Notre étude peut être considérée comme une approche théorique qualitative du problème des plasmas anisotropes à collisions rares.

Ce travail est divisé en quatre sections. La première section est consacrée à une description macroscopique du fluide anisotrope étudié. Dans cette section nous avons construit un schéma fluide anisotrope relativiste chargé non dissipatif et de conductivité infinie. Nous avons été amenés à adopter pour le fluide envisagé les hypothèses suivantes portant sur les équations d'état:

$$P_{\perp} = P_{\perp}(r, s_{\perp}, |h|), \quad P_{\parallel} = P_{\parallel}(r, s_{\parallel}, |h|)$$

$$\frac{\partial P_{\perp}}{\partial r} > 0, \quad \frac{\partial P_{\perp}}{\partial s_{\perp}} > 0, \quad \frac{\partial P_{\perp}}{\partial |h|} > 0$$

$$\frac{\partial P_{\parallel}}{\partial r} > 0, \quad \frac{\partial P_{\parallel}}{\partial s_{\parallel}} > 0, \quad \frac{\partial P_{\parallel}}{\partial |h|} < 0$$

où P_{\perp} et P_{\parallel} sont respectivement la composante transversale et la composante longitudinale de la pression, S_{\perp} et S_{\parallel} celles de l'entropie spécifique, r la densité propre

matérielle du fluide et $|h|$ le module du champ magnétique. Nous avons déduit le système fondamental de la magnétohydrodynamique anisotrope relativiste. Ce système est susceptible de décrire un plasma anisotrope non collisionnel, plongé dans un champ magnétique fort.

Les variétés caractéristiques du système fondamental ont fait l'objet de la seconde section. Par la technique des distributions, nous avons mis en évidence trois types d'ondes comme en magnétodynamique isotrope (parfaite): les ondes d'entropie, les ondes magnétosoniques et les ondes d'Alfvén.

Dans la troisième section, nous avons établi, pour les rayons associés respectivement aux ondes magnétosoniques et aux ondes d'Alfvén mises en évidence, la propriété fondamentale des rayons concernant la propagation des discontinuités infinitésimales des variables caractérisant le champ et le fluide.

Nous avons étudié dans la quatrième section, la propagation des ondes en magnétohydrodynamique anisotrope relativiste. Nous avons mis en lumière les conditions sous lesquelles les vitesses de propagation des ondes d'Alfvén et des ondes magnétosoniques sont réelles. Ces conditions sont définies par des inégalités satisfaites par les quantités η_{\parallel} et η_{\perp} données par:

$$\eta_{\parallel} = \frac{P_{\parallel}}{\mu|h|^2}, \quad \eta_{\perp} = \frac{P_{\perp}}{\mu|h|^2}$$

où μ est la perméabilité magnétique du fluide. Ces inégalités impliquent l'absence d'instabilités « fire hose » et « mitror » qui peuvent apparaître dans le fluide anisotrope considéré. Nous avons étudié pour un fluide anisotrope supposé satisfaire à

$$1 - \frac{r}{P_{\parallel}} \frac{\partial P_{\parallel}}{\partial r} - \frac{|h|}{P_{\parallel}} \frac{\partial P_{\parallel}}{\partial |h|} > 0$$

la position, les unes par rapport aux autres, des vitesses de propagation des ondes soniques, magnétosoniques, d'Alfvén et les conséquences géométriques et physiques qui en découlent. Cette étude a permis de mettre en lumière certaines particularités de la propagation des ondes en magnétohydrodynamique anisotrope. Ainsi, on a montré qu'à la différence de la magnétohydrodynamique isotrope, les vitesses de propagation des ondes magnétosoniques lentes et rapides n'encadrent pas toujours la vitesse de propagation des ondes d'Alfvén. Sous les hypothèses faites, on a établi que l'opérateur différentiel associé aux ondes magnétosoniques est hyperbolique strict dans quatre cas définis par des inégalités vérifiées par les quantités η_{\perp} , η_{\parallel} et hyperbolique non strict dans le cas où avec nos notations

$$(1 + e\sigma_{\parallel})\eta_{\parallel} = 1 + \eta_{\perp}.$$

Dans ce dernier cas le cône d'ondes a deux génératrices doubles dans le 2-plan (U, h) défini par le vecteur vitesse unitaire U du fluide et le champ magnétique h .

I: Le fluide anisotrope relativiste.**1. – Le tenseur d'énergie de la magnétohydrodynamique anisotrope relativiste.**

(a) Considérons sur la variété espace-temps (V_4, g) un domaine Ω occupé par le fluide. On appelle repère propre en un point x de Ω un repère orthonormé $V^{(\lambda)}$ dont le premier vecteur $V^{(0)}$ coïncide avec le vecteur vitesse unitaire U et dont les trois autres $V^{(i)}$ définissent l'espace associé à U . Ce repère doit être identifié au repère galiléen local, U définissant la direction temporelle.

(b) Dans le domaine Ω envisagé de (V_4, g) considérons un schéma fluide quelconque chargé non dissipatif, de conductivité infinie, soumis à un champ électromagnétique. En tout point de Ω le schéma fluide considéré et le champ électromagnétique correspondant peuvent être décrits par un tenseur d'énergie total [9]

$$(1.1) \quad T_{\alpha\beta} = \varrho U_\alpha U_\beta + \Pi_{\alpha\beta} + \tau_{\alpha\beta}$$

où ϱ est la densité d'énergie propre du fluide, U_α les composantes de son vecteur unitaire et $\Pi_{\alpha\beta}$ son tenseur des pressions propres satisfaisant à $\Pi_{\alpha\beta} U^\beta = 0$; $\tau_{\alpha\beta}$ désigne le tenseur d'énergie du champ électromagnétique. Le courant j est sensiblement la somme de deux termes, un courant de convection et un courant de conduction:

$$j^\alpha = \nu U^\alpha + \sigma e^\alpha$$

où ν est la densité propre de charge électrique et σ la conductivité du fluide, e le champ électrique. Le courant j étant essentiellement fini, on a nécessairement, sous les hypothèses faites, $e = 0$. Le tenseur $\tau_{\alpha\beta}$ se réduit alors par rapport à la direction temporelle U à sa partie magnétique [10]

$$(1.2) \quad \tau_{\alpha\beta} = \mu |h|^2 (U_\alpha U_\beta - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta}) - \mu h_\alpha h_\beta$$

où μ (constante donnée) est la perméabilité magnétique du fluide, $|h|$ le module du champ magnétique défini par $|h|^2 = -h_\alpha h^\alpha$, h étant le vecteur champ magnétique supposé relié au vecteur induction magnétique b par la relation $b_\alpha = \mu h_\alpha$. Les vecteurs h et b sont orthogonaux à U donc spatiaux

$$h_\alpha U^\alpha = b_\alpha U^\alpha = 0 .$$

Le tenseur d'énergie $T_{\alpha\beta}$ défini par (1.1) devient d'après (1.2)

$$(1.3) \quad T_{\alpha\beta} = (\varrho + \mu |h|^2) U_\alpha U_\beta + \Pi_{\alpha\beta} - \mu \frac{|h|^2}{2} g_{\alpha\beta} - \mu h_\alpha h_\beta$$

(c) La magnétohydrodynamique anisotrope est ici l'étude des propriétés d'un fluide relativiste chargé, de conductivité infinie, plongé dans un champ magnétique fort créant l'anisotropie. Le fluide considéré est un ensemble de particules chargées à collisions rares interagissant par l'intermédiaire du champ magnétique. Le fluide anisotrope ainsi en visage peut-être un mélange de deux fluides, un plasma d'ions et d'électrons par exemple.

Déterminons pour le fluide anisotrope considère l'expression du tenseur $\Pi_{\alpha\beta}$ des pressions. Pour cela, plaçons-nous en un point x du domaine de (V_4, \underline{g}) occupé par le fluide et au voisinage duquel est rapporté l'espace-temps au repère propre en ce point. Dans ce repère la matière est au repos au point envisagé. Le schéma fluide-champ électromagnétique considéré y est caractérisé par sa densité d'énergie $T_{0'0'}$ et le tenseur des pressions $T_{i'j'}$. On a d'après (1.3):

$$(1.4) \quad \begin{cases} T_{0'0'} = \rho + \mu \frac{|\mathbf{h}|^2}{2} \\ T_{i'j'} = \Pi_{i'j'} + \mu \frac{|\mathbf{h}|^2}{2} \delta_{i'j'} - \mu h_{i'} h_{j'}. \end{cases}$$

En magnétohydrodynamique isotrope, la quadrique des pressions $\Pi_{i'j'}$ est une sphère:

$$(1.5) \quad \Pi_{i'j'} = p \delta_{i'j'}$$

où p est la pression du fluide. Cette définition n'est plus valable en magnétohydrodynamique anisotrope. Nous nous proposons, par des considérations physiques et mathématiques, de déterminer pour le fluide anisotrope étudié l'expression de $\Pi_{i'j'}$. La seule anisotropie physique considérée ici est créée par le champ magnétique. Il y a isotropie par rapport au 2-plan invariant par rotation orthogonal au 2-plan défini par (U, \mathbf{h}) . On a donc relativement au champ magnétique deux degrés de liberté dans les directions transversales et un degré de liberté dans la direction longitudinale. Nous sommes ainsi conduits à séparer dans $\Pi_{i'j'}$ relativement au champ magnétique, une pression P_{\parallel} dans la direction longitudinale et une pression P_{\perp} dans les directions transversales. Les pressions P_{\parallel} et P_{\perp} sont différentes car il n'y a pas d'échange d'énergie entre les degrés de liberté. Il y a seulement transfert d'énergie qui peut engendrer des instabilités. Dans le repère propre dont l'un des axes, $X^{3'}$ par exemple, est orienté le long du champ magnétique, le tenseur $\Pi_{i'j'}$ a pour composantes d'après ce qui précède:

$$\Pi_{i'j'} = \begin{bmatrix} & P_{\perp} & \\ 0 & P_{\perp} & 0 \\ & P_{\parallel} & \end{bmatrix}.$$

Introduisons le vecteur unitaire $\hat{\mathbf{h}} = \mathbf{h}/|\mathbf{h}|$. Le tenseur $\Pi_{i'j'}$, défini par (1.6) s'écrit de façon invariante dans le repère propre

$$(1.7) \quad \Pi_{i'j'} = (P_{\parallel} - P_{\perp}) \hat{h}_{i'} \hat{h}_{j'} + P_{\perp} \delta_{i'j'}.$$

DÉFINITION. — Un fluide est dit ici anisotrope si la quadrique des pressions est définie dans le repère propre par (1.7).

Les composantes $\Pi_{\alpha\beta}$ du tenseur des pressions dans un repère quelconque se déduisent de ses composantes $\Pi_{i'j'}$ dans le repère propre par des formules de transformations tensorielles connues

$$(1.8) \quad \Pi_{\alpha\beta} = A_{\alpha}^{i'} A_{\beta}^{j'} \Pi_{i'j'}$$

où $(A_{\alpha}^{\beta'})$ est la matrice de changement de repère, les $A_{\alpha}^{\beta'}$ étant les composantes covariants du vecteur $V^{(\alpha')}$ du repère propre dans le nouveau repère [11] (1.8) peut s'écrire alors

$$(1.9) \quad \Pi_{\alpha\beta} = V_{\alpha}^{(\alpha')} V_{\beta}^{(\beta')} \Pi_{i'j'}$$

En portant (1.7) dans (1.8) où (1.9) il vient :

$$(1.10) \quad \Pi_{\alpha\beta} = (P_{\parallel} - P_{\perp}) \hat{h}_{\alpha} \hat{h}_{\beta} - P_{\perp} \gamma_{\alpha\beta}$$

où l'on a posé

$$(1.11) \quad \begin{cases} \hat{h}_{\alpha} = A_{\alpha}^{i'} \hat{h}_{i'} = -V_{\alpha}^{(\alpha')} \hat{h}_{i'} = \frac{h_{\alpha}}{|h|} \\ \gamma_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} - U_{\alpha} U_{\beta} \quad \text{qui est le projecteur d'espace.} \end{cases}$$

Le quadrivecteur \hat{h} est manifestement un vecteur spatial. En effet on a

$$\hat{h}_{\alpha} \hat{h}^{\alpha} = g_{\alpha\beta} V^{(\alpha')\alpha} V^{(\beta')\beta} \hat{h}_{i'} \hat{h}_{j'} = -\sum (\hat{h}_{i'})^2 = -1.$$

(d) En portant (1.10) dans (1.3) nous obtenons le tenseur d'énergie de la magnétohydrodynamique anisotrope relativiste

$$(1.12) \quad T_{\alpha\beta} = W U_{\alpha} U_{\beta} - q_{\perp} g_{\alpha\beta} - \bar{\mu} h_{\alpha} h_{\beta}$$

où l'on a posé

$$(1.13) \quad \begin{cases} (1.13) \quad W = \varrho + p_{\perp} + \mu |h|^2 \\ q_{\perp} = p_{\perp} + \mu \frac{|h|^2}{2} \\ \bar{\mu} = \mu(1 - \lambda), \quad \lambda = \eta_{\parallel} - \eta_{\perp}, \quad \eta_{\parallel} = \frac{P_{\parallel}}{\mu |h|^2}, \quad \eta_{\perp} = \frac{P_{\perp}}{\mu |h|^2}. \end{cases}$$

Ainsi, en tout point x de la variété espace-temps (V_4, g) , un fluide anisotrope chargé, non dissipatif est de conductivité infinie est décrit par un tenseur d'énergie $T_{\alpha\beta}$ défini par (1.2) dans un repère quelconque auquel est rapporté l'espace-temps au point considéré.

2. – Etude hydro-thermodynamique du fluide anisotrope envisagé.

Toutes les variables thermodynamiques introduites sont considérées comme des scalaires et doivent nécessairement être évaluées par rapport au repère propre.

(a) Soit r la densité propre matérielle du fluide. Nous définissons sa densité spécifique d'énergie interne ε selon le point de vue de TAUB [12] et de LICHTNEROWICZ [10] par

$$(2.1) \quad \varrho = r(c^2 + \varepsilon)$$

où c est la vitesse de la lumière.

Le scalaire W défini par (1.13) peut s'écrire:

$$(2.2) \quad W = c^2 r f + \mu |h|^2,$$

où l'on a introduit la variable thermodynamique f définie par:

$$(2.3) \quad (f-1)c^2 = \varepsilon + \frac{P_{\perp}}{r}.$$

En introduisant la variable thermodynamique g définie par

$$(2.4) \quad (g-1)c^2 = \varepsilon + \frac{P_{\parallel}}{r}$$

le scalaire W s'écrit:

$$(2.5) \quad W = c^2 r g + \bar{\mu} |h|^2.$$

On déduit de (2.2) et (2.5)

$$(2.6) \quad c^2 r (g-f) = P_{\parallel} - P_{\perp}.$$

(b) Dans la suite nous postulons la conservation de r au cours du mouvement:

$$(2.7) \quad \nabla_{\alpha}(rU^{\alpha}) = 0$$

où ∇ désigne l'opérateur de dérivation covariante dans la connexion associée.

Pour le fluide envisagé, les équations de Maxwell s'écrivent:

$$(2.8) \quad \nabla_{\alpha} \dot{H}^{\alpha\beta} = 0 \quad \text{où} \quad \dot{H}^{\alpha\beta} = U^{\beta} h^{\alpha} - U^{\alpha} h^{\beta},$$

et les équations de la dynamique relativiste sont fournies par les conditions de con-

servation:

$$(2.9) \quad \nabla_{\alpha} T^{\alpha\beta} = 0 \quad \text{où} \quad T^{\alpha\beta} = W U^{\alpha} U^{\beta} - q_{\perp} g^{\alpha\beta} - \bar{\mu} h^{\alpha} h^{\beta}.$$

(c) Outre la pression, les grandeurs thermodynamiques telles que l'énergie spécifique interne, l'entropie spécifique, la température etc., seront considérées comme dédoublées par rapport au champ magnétique, les composantes transversale et longitudinale de chacune de ces quantités étant différentes. Nous introduisons formellement les « tenseurs » d'énergie interne $\varepsilon_{\alpha\beta}$, d'entropie $S_{\alpha\beta}$ et de température $\theta_{\alpha\beta}$, définis par des relations analogues à (1.10)

$$(2.10) \quad \varepsilon_{\alpha\beta} = (\varepsilon_{\parallel} - \varepsilon_{\perp}) \hat{h}_{\alpha} \hat{h}_{\beta} - \varepsilon_{\perp} \gamma_{\alpha\beta}$$

$$(2.11) \quad S_{\alpha\beta} = (S_{\parallel} - S_{\perp}) \hat{h}_{\alpha} \hat{h}_{\beta} - S_{\perp} \gamma_{\alpha\beta}$$

$$(2.12) \quad \theta_{\alpha\beta} = (\theta_{\parallel} - \theta_{\perp}) \hat{h}_{\alpha} \hat{h}_{\beta} - \theta_{\perp} \gamma_{\alpha\beta}$$

ε_{\perp} et ε_{\parallel} étant les composantes transversale et longitudinale de l'énergie interne, S_{\perp} et S_{\parallel} celles de l'entropie, θ_{\perp} et θ_{\parallel} celles de la température.

L'énergie interne totale ε et l'entropie totale S sont des grandeurs additives, elles sont définies par:

$$(2.13) \quad \varepsilon = -\varepsilon_{\alpha}^{\alpha} = -\gamma^{\alpha\beta} \varepsilon_{\alpha\beta} = 2\varepsilon_{\perp} + \varepsilon_{\parallel}$$

$$(2.14) \quad S = -S_{\alpha}^{\alpha} = -\gamma^{\alpha\beta} S_{\alpha\beta} = 2S_{\perp} + S_{\parallel}.$$

(d) Si τ désigne le temps propre, l'opérateur de dérivation $U^{\alpha} \nabla_{\alpha}$ le long des lignes de courant peut être défini par:

$$U^{\alpha} \nabla_{\alpha} = \frac{d}{d\tau}.$$

Pour des processus quasi-statiques d'échange d'énergie, la relation fondamentale de la thermodynamique peut s'écrire pour le fluide envisagé sous la forme différentielle [8]

$$(2.15) \quad d\varepsilon = \frac{II^{\alpha\beta}}{r} \nabla_{\alpha} U_{\beta} d\tau + \theta_{\alpha\beta} dS^{\alpha\beta}.$$

La loi de conservation (2.7) et les équations (2.8) de Maxwell permettent de développer le membre de droite de la relation précédente. En effet les équations de Maxwell s'explicitent sous la forme:

$$(2.16) \quad \nabla_{\alpha} \dot{H}^{\alpha\beta} = U^{\beta} \nabla_{\alpha} h^{\alpha} + h^{\alpha} \nabla_{\alpha} U^{\beta} - U^{\alpha} \nabla_{\alpha} h^{\beta} - h^{\beta} \nabla_{\alpha} U^{\alpha} = 0.$$

En multipliant (2.16) scalairement par U_β et h_β , il vient:

$$(2.17) \quad U_\beta \nabla_\alpha \dot{H}^{\alpha\beta} = \nabla_\alpha h^\alpha - U_\beta U^\alpha \nabla_\alpha h^\beta = 0$$

$$(2.18) \quad h_\beta \nabla_\alpha \dot{H}^{\alpha\beta} = h^\alpha h_\beta \nabla_\alpha U^\beta + U^\alpha \frac{\partial_\alpha |h|^2}{2} + |h|^2 \nabla_\alpha U^\alpha = 0 \quad \left(\text{avec } \partial_\alpha = \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \right).$$

La relation (2.7) donne:

$$(2.19) \quad \nabla_\alpha (r U^\alpha) = r \nabla_\alpha U^\alpha + U^\alpha \partial_\alpha r = 0.$$

En utilisant (1.10), (2.11) (2.12), (2.18) et (2.19), la relation (2.15) donne:

$$(2.20) \quad d\varepsilon = 2\theta_\perp dS_\perp + \theta_\parallel dS_\parallel - P_\parallel dV - \frac{\mu\lambda}{2r} d|h|^2$$

où $V = 1/r$ est le volume spécifique.

Considérée comme une fonction donnée de S_\perp , S_\parallel , V , $|h|$, l'énergie interne ε du fluide est un potentiel thermodynamique: θ_\perp , θ_\parallel , P_\perp et P_\parallel sont définies de façon unique comme des fonctions données de S_\perp , S_\parallel , V , $|h|$ au moyen des relations:

$$\theta_\perp = \frac{1}{2} \frac{\partial \varepsilon}{\partial S_\perp}; \quad \theta_\parallel = \frac{\partial \varepsilon}{\partial S_\parallel}; \quad P_\parallel = - \frac{\partial \varepsilon}{\partial V}; \quad \frac{P_\parallel - P_\perp}{r|h|} = - \frac{\partial \varepsilon}{\partial |h|}.$$

Ainsi on a pour le fluide anisotrope considéré:

$$\theta_\perp = \theta_\perp(V, S_\perp, |h|); \quad \theta_\parallel = \theta_\parallel(V, S_\parallel, |h|); \quad P_\parallel = P_\parallel(V, S_\parallel, |h|); \quad P_\perp = P_\perp(V, S_\perp, |h|).$$

Introduisons l'énergie libre ψ du fluide définie par

$$(2.21) \quad \psi = \varepsilon - \theta_{\alpha\beta} S^{\alpha\beta}.$$

On en déduit d'après (2.10), (2.12) et (2.20):

$$(2.22) \quad d\psi = -2\theta_\perp dS_\perp - \theta_\parallel dS_\parallel - P_\parallel dV - \frac{\mu\lambda}{2r} d|h|^2.$$

$\psi(V, \theta_\perp, \theta_\parallel, |h|)$ est un potentiel thermodynamique: S_\perp , S_\parallel , P_\parallel , P_\perp sont définies de façon unique comme des fonctions données de V , θ_\perp , θ_\parallel , $|h|$ par:

$$S_\perp = - \frac{1}{2} \frac{\partial \psi}{\partial \theta_\perp}; \quad S_\parallel = - \frac{\partial \psi}{\partial \theta_\parallel}; \quad P_\parallel = - \frac{\partial \psi}{\partial V}; \quad \frac{P_\parallel - P_\perp}{r|h|} = - \frac{\partial \psi}{\partial |h|}.$$

Ainsi:

$$S_\perp = S_\perp(V, \theta_\perp, |h|); \quad S_\parallel = S_\parallel(V, \theta_\parallel, |h|); \quad P_\parallel = P_\parallel(V, \theta_\parallel, |h|); \quad P_\perp = P_\perp(V, \theta_\perp, |h|).$$

Pour les scalaires f et g introduits on a d'après (2.20):

$$(2.23) \quad c^2 df = 2\theta_{\perp} dS_{\perp} + \theta_{\parallel} dS_{\parallel} + V dP_{\perp} - \frac{\mu\lambda r}{2} d\left(\frac{|\mathbf{h}|^2}{r^2}\right)$$

$$(2.24) \quad c^2 dg = 2\theta_{\perp} dS_{\perp} + \theta_{\parallel} dS_{\parallel} + V dP_{\parallel} - \frac{\mu\lambda}{2r} d|\mathbf{h}|^2.$$

(e) Dans toute la suite nous adoptons $r, S_{\perp}, S_{\parallel}, |\mathbf{h}|$ comme variables fondamentales de base et considérons

$$(2.25) \quad P_{\perp} = P_{\perp}(r, s_{\perp}, |\mathbf{h}|), \quad P_{\parallel} = P_{\parallel}(r, S_{\parallel}, |\mathbf{h}|)$$

comme des fonctions données définissant pour le fluide envisagé des équations d'état. Nous adoptons les hypothèses suivantes portant sur ces équations d'état:

$$(H_1) \quad \begin{cases} \frac{\partial P_{\perp}}{\partial r} > 0, & \frac{\partial P_{\perp}}{\partial S_{\perp}} > 0, & \frac{\partial P_{\perp}}{\partial |\mathbf{h}|} > 0 \\ \frac{\partial P_{\parallel}}{\partial r} > 0, & \frac{\partial P_{\parallel}}{\partial S_{\parallel}} > 0, & \frac{\partial P_{\parallel}}{\partial |\mathbf{h}|} < 0. \end{cases}$$

Ces inégalités sont satisfaites par un fluide anisotrope polytropique [13].

(f) En multipliant (2.9) scalairement par U_{β} , on obtient l'équation de continuité relativiste:

$$(2.26) \quad U_{\beta} \nabla_{\alpha} T^{\alpha\beta} = \nabla_{\alpha} (W U^{\alpha}) - U^{\alpha} \partial_{\alpha} q_{\perp} - \bar{\mu} h^{\alpha} U_{\epsilon} \nabla_{\alpha} h^{\epsilon} = 0.$$

Ce qui donne compte tenu de (2.7), (2.18) et (2.23) ou (2.24)

$$(2.27) \quad 2\theta_{\perp} U^{\alpha} \partial_{\alpha} S_{\perp} + \theta_{\parallel} U^{\alpha} \partial_{\alpha} S_{\parallel} = 0.$$

Dans la suite nous postulons la conservation de l'entropie totale du fluide au cours du mouvement:

$$(2.28) \quad \nabla_{\alpha} (r S U^{\alpha}) = 0.$$

Soit d'après (2.7):

$$(2.29) \quad U^{\alpha} \partial_{\alpha} S = 0.$$

Ce qui s'écrit d'après (2.14)

$$(2.30) \quad 2U^{\alpha} \partial_{\alpha} S_{\perp} + U^{\alpha} \partial_{\alpha} S_{\parallel} = 0$$

(2.27) et (2.30) entraînent, θ_{\perp} et θ_{\parallel} étant différentes:

$$(2.31) \quad U^{\alpha} \partial_{\alpha} S_{\perp} = 0, \quad U^{\alpha} \partial_{\alpha} S_{\parallel} = 0.$$

Les relations (2.29) et (2.31) indiquent la conservation le long des lignes de courant de l'entropie spécifique et de chacune de ses composantes.

(g) Il résulte de cette étude que le système fondamental de la magnétohydrodynamique anisotrope relativiste est constituée par

$$(S) \left\{ \begin{array}{l} \nabla_{\alpha}(r U^{\alpha}) = 0 \\ \nabla_{\alpha} \dot{H}^{\alpha\beta} = 0 \quad \text{où} \quad \dot{H}^{\alpha\beta} = U^{\beta} h^{\alpha} - U^{\alpha} h^{\beta} \\ \nabla_{\alpha} T^{\alpha\beta} = 0 \quad \text{où} \quad T^{\alpha\beta} = W U^{\alpha} U^{\beta} - q_{\perp} g^{\alpha\beta} - \bar{\mu} h^{\alpha} h^{\beta} \\ U^{\alpha} \partial_{\alpha} S_{\perp} = 0 \\ U^{\alpha} \partial_{\alpha} S_{\parallel} = 0 \\ U^{\alpha} U_{\alpha} = 1. \end{array} \right.$$

C'est un système quasi-linéaire du premier ordre composé de 12 équations pour 12 inconnues r , S_{\perp} , S_{\parallel} , $|h|$, U^{α} , h^{α} . Nous le notons dans la suite système (S). Ce système est susceptible de décrire un plasma anisotrope relativiste, non collisionnel, plongé dans un champ magnétique fort.

II: Les variétés caractéristiques.

3. – Tenseurs-discontinuités à la traversée d'une hypersurface [14], [15].

Dans ce paragraphe nous rappellerons quelques résultats qui nous seront utiles dans l'étude envisagée.

(a) Dans le domaine Ω de (V_4, g) occupé par le fluide et correspondant à des coordonnées locales soit Σ une hypersurface régulière d'équation locale $\varphi = 0$ (φ de classe c^2). Σ partage Ω en deux domaines Ω_0 et Ω_1 correspondant respectivement à $\varphi < 0$ et $\varphi > 0$. Nous notons 1 le gradient de φ . Dans la suite la métrique sera supposée être de classe c^2 .

Nous considérons un p -tenseur T sur Ω satisfaisant les hypothèses suivantes:

(A₁) Sur chacun des domaines Ω_0 et Ω_1 , le tenseur T est un C^1 -tenseur ordinaire;

(A₂) Quand φ tend vers zéro par valeurs négatives (resp. positives).

T et ∇T convergent uniformément vers des fonctions à valeurs tensorielles définies sur Σ et notées $T_0, (\nabla T)_0$, (resp. $T_1, (\nabla T)_1$).

Nous sommes ainsi conduits à introduire les tenseurs-discontinuités sur Σ

$$[T] = T_1 - T_0, \quad [\nabla T] = (\nabla T)_1 - (\nabla T)_0.$$

Supposons en outre T continu sur Ω . On montre [14, 15] qu'il existe un p -tenseur distribution noté δT de support Σ tel que

$$(3.1) \quad \delta[\Delta_\alpha T] = l_\alpha \delta T$$

où δ désigne la distribution de Dirac relative à φ de support Σ .

Les tenseurs satisfaisant à ces hypothèses engendrent de manière naturelle une algèbre et δ est un opérateur de dérivation de cette algèbre δ est appelé opérateur de discontinuité infinitésimale et δT la discontinuité infinitésimale de T .

(b) Plaçons-nous maintenant dans les hypothèses suivantes:

(B₁) Le tenseur T est continu sur Ω . Sur chacun des domaines Ω_0 et Ω_1 , T est un c^2 -tenseur.

(B₂) Quand φ tend vers zéro par valeurs négatives (resp. positives), ∇T et $\nabla \nabla T$ convergent uniformément vers des fonctions tensorielles définies sur Σ et notées $(\nabla T)_0, (\nabla \nabla T)_0$, (resp. $(\nabla T)_1, (\nabla \nabla T)_1$).

Sous ces hypothèses et compte tenu de la continuité du tenseur de courbure de la variété à la traversée de Σ , on démontre [14, 15] qu'il existe un p -tenseur-distribution \bar{T} à support sur Σ tel que

$$(3.2) \quad \delta[\nabla_\alpha \nabla_\beta T] = \nabla_\alpha l_\beta \delta T + l_\alpha \nabla_\beta \delta T + l_\beta \nabla_\alpha \delta T + l_\alpha l_\beta \bar{T}.$$

4. - Les variétés caractéristiques.

On peut mettre les ondes en évidence comme caractéristiques lors de l'étude du problème de Cauchy. Nous nous proposons ici d'étudier, par la technique des distributions, les variétés caractéristiques (ou ondes) du système fondamental (S) de la magnétohydrodynamique anisotrope relativiste.

(a) Compte tenu de (2.26), la relation (2.9) s'explique sous la forme:

$$(4.1) \quad \nabla_\alpha T^{\alpha\beta} = W U^\alpha \nabla_\alpha U^\beta - \gamma^{\alpha\beta} \partial_\alpha q_\perp + \bar{\mu} h^\alpha U_e \nabla_\alpha h^e U^e + \mu h^\alpha h^\beta \partial_\alpha \lambda - \\ - \bar{\mu} [\nabla_\alpha h^\alpha h^\beta + h^\alpha \nabla_\alpha h^\beta] = 0.$$

Soit d'après l'expression de λ

$$(4.2) \quad \nabla_\alpha T^{\alpha\beta} = W U^\alpha \nabla_\alpha U^\beta - \Gamma^{\alpha\beta} \partial_\alpha P_\perp + \hat{h}^\alpha \hat{h}^\beta \partial_\alpha P_\parallel - \frac{\mu}{2} \chi^{\alpha\beta} \partial_\alpha |h|^2 + \bar{\mu} h^\alpha U_e \nabla_\alpha h^\beta U^\beta - \bar{\mu} [\nabla_\alpha h^\alpha h^\beta + h^\alpha \nabla_\alpha h^\beta] = 0$$

où l'on a posé:

$$(4.3) \quad \Gamma^{\alpha\beta} = \gamma^{\alpha\beta} + \hat{h}^\alpha \hat{h}^\beta; \quad \chi^{\alpha\beta} = \gamma^{\alpha\beta} + 2\lambda \hat{h}^\alpha \hat{h}^\beta.$$

La relation (4.1) ou (4.2) constitue le système différentiel aux lignes de courant. (4.2) peut s'écrire en utilisant les équations d'état (2.25)

$$(4.4) \quad W U^\alpha \nabla_\alpha U^\beta - \left(\frac{\partial P_\perp}{\partial r} \Gamma^{\alpha\beta} - \frac{\partial P_\parallel}{\partial r} \hat{h}^\alpha \hat{h}^\beta \right) \partial_\alpha r - \frac{\partial P_\perp}{\partial S_\perp} \Gamma^{\alpha\beta} \partial_\alpha S_\perp + \frac{\partial P_\parallel}{\partial S_\parallel} \hat{h}^\alpha \hat{h}^\beta \partial_\alpha S_\parallel - \left(\frac{1}{|h|} \frac{\partial P_\perp}{\partial |h|} \Gamma^{\alpha\beta} - \frac{1}{|h|} \frac{\partial P_\parallel}{\partial |h|} \hat{h}^\alpha \hat{h}^\beta + \mu \chi^{\alpha\beta} \right) \partial_\alpha \frac{|h|^2}{2} + \bar{\mu} h^\alpha U_e \nabla_\alpha h^\beta U^\beta - \bar{\mu} (\nabla_\alpha h^\alpha h^\beta + h^\alpha \nabla_\alpha h^\beta) = 0.$$

Par produit contracté par h_β , (4.2) donne

$$W h_\beta U^\alpha \nabla_\alpha U^\beta - h^\alpha \partial_\alpha P_\parallel + \mu \lambda h^\alpha \partial_\alpha \frac{|h|^2}{2} + \bar{\mu} |h|^2 \nabla_\alpha h^\alpha = 0.$$

Soit d'après (2.17) et (2.24)

$$(4.5) \quad c^2 r g \nabla_\alpha h^\alpha + h^\alpha \partial_\alpha P_\parallel - \mu \lambda h^\alpha \partial_\alpha \frac{|h|^2}{2} = 0.$$

Cette relation peut s'écrire:

$$c^2 \nabla_\alpha (g h^\alpha) - c^2 r h^\alpha \partial_\alpha g + h^\alpha \partial_\alpha P_\parallel - \mu \lambda h^\alpha \partial_\alpha \frac{|h|^2}{2} = 0.$$

Ce qui donne compte tenu de (2.24)

$$(4.6) \quad \nabla_\alpha (c^2 g h^\alpha) = 2\theta_\perp h^\alpha \partial_\alpha S_\perp + \theta_\parallel h^\alpha \partial_\alpha S_\parallel.$$

De même par produit contracté par h_β on déduit de (4.4) d'après (2.5) et (2.17):

$$(4.7) \quad c^2 r g \nabla_\alpha h^\alpha + \frac{\partial P_\parallel}{\partial r} h^\alpha \partial_\alpha r + \frac{\partial P_\parallel}{\partial S_\parallel} h^\alpha \partial_\alpha S_\parallel + \left(\frac{1}{|h|} \frac{\partial P_\parallel}{\partial |h|} - \mu \lambda \right) h^\alpha \partial_\alpha \frac{|h|^2}{2} = 0.$$

Cette relation se déduit immédiatement de (4.5) par utilisation des équations d'état.

(b) Dans un domaine Ω de (V_4, g) occupé par le fluide, soit Σ une hypersurface régulière d'équation locale $\varphi = 0$ (φ de classe c^2). Nous supposons que les variables hydro-thermodynamiques caractérisant le champ et le fluide sont continus dans Ω

et vérifient, à la traversée de Σ , les hypothèses (A) sur les tenseurs étudiés au paragraphe précédent. Nous avons ainsi d'après (3.1)

$$(4.8) \quad \begin{cases} \bar{\delta}[\nabla_\alpha r] = l_\alpha \delta r, & \bar{\delta}[\nabla_\alpha S_\perp] = l_\alpha \delta S_\perp, & \bar{\delta}[\nabla_\alpha S_\parallel] = l_\alpha \delta S_\parallel \\ \bar{\delta}[\nabla_\alpha |h|^2] = l_\alpha \delta |h|^2, & \bar{\delta}[\nabla_\alpha h^\beta] = l_\alpha \delta h^\beta, & \bar{\delta}[\nabla_\alpha U^\beta] = l_\alpha \delta U^\beta. \end{cases}$$

En écrivant la relation (2.31) de part et d'autre de l'hypersurface Σ et retranchant il vient après produit par $\bar{\delta}$

$$U^\alpha \bar{\delta}[\nabla_\alpha S_\perp] = 0, \quad U^\alpha \bar{\delta}[\nabla_\alpha S_\parallel] = 0.$$

Soit, compte tenu de (4.8)

$$(4.9) \quad l_\alpha U^\alpha \delta S_\perp = 0, \quad l_\alpha U^\alpha \delta S_\parallel = 0.$$

Ainsi, si $l_\alpha U^\alpha = 0$ (resp. $\delta S_\perp = \delta S_\parallel = 0$), nécessairement $\delta S_\perp \neq 0$, $\delta S_\parallel \neq 0$ (resp. $l_\alpha U^\alpha \neq 0$).

Dans la suite nous supposerons l'hypersurface Σ non engendrée par les lignes de courant ($l_\alpha U^\alpha \neq 0$). Cette hypothèse implique

$$(4.10) \quad \delta S_\perp = \delta S_\parallel = 0.$$

(c) Etudions d'abord à quelle condition les distributions δr , $\delta |h|^2$, $l_\beta \delta U^\beta$, $l_\beta \delta h^\beta$ ne sont pas toutes nulles.

En écrivant la relation (4.6) de part et d'autre de Σ et retranchant, il vient compte tenu de (4.10)

$$(4.11) \quad \delta(g l_\alpha h^\alpha) = 0.$$

Ainsi la quantité

$$(4.12) \quad b = g l_\alpha h^\alpha,$$

est invariante par l'opérateur δ de dérivation.

De même, en écrivant les relations (2.7), (2.8) et (2.9) de part et d'autre de Σ et retranchant nous obtenons:

$$(4.13) \quad \delta(r l_\alpha U^\alpha) = 0, \quad \delta(l_\alpha \dot{H}^{\alpha\beta}) = 0, \quad \delta(l_\alpha T^{\alpha\beta}) = 0.$$

Ainsi, le scalaire

$$(4.14) \quad a = r l_\alpha U^\alpha,$$

le vecteur manifestement tangent à Σ

$$(4.15) \quad V^\beta = l_\alpha \dot{H}^{\alpha\beta} = l_\alpha h^\alpha U^\beta - \frac{a}{r} h^\beta$$

et le vecteur

$$(4.16) \quad W^\beta = l_\alpha T^{\alpha\beta} = W l_\alpha U^\alpha U^\beta - q_\perp l^\beta - \bar{\mu} l_\alpha h^\alpha h^\beta$$

sont invariants par la dérivation δ .

Les relations (4.13) s'explicitent sous la forme:

$$(4.17) \quad r l_\beta \delta U^\beta + l_\alpha U^\alpha \delta r = 0$$

$$(4.18) \quad U^\beta l_\alpha \delta h^\alpha + l_\alpha h^\alpha \delta U^\beta - l_\alpha U^\alpha \delta h^\beta - h^\beta l_\alpha \delta U^\alpha = 0$$

$$(4.19) \quad w l_\alpha U^\alpha \delta U^\beta - A^{\alpha\beta} l_\alpha \delta r - B^{\alpha\beta} l_\alpha \delta \frac{|\hbar|^2}{2} + \\ + \bar{\mu} l_\alpha h^\alpha U_\alpha \delta h^\beta U^\beta - \bar{\mu} (l_\alpha h^\alpha \delta h^\beta + h^\beta l_\alpha \delta h^\alpha) = 0$$

où

$$(4.20) \quad A^{\alpha\beta} = \frac{\partial P_\perp}{\partial r} \Gamma^{\alpha\beta} - \frac{\partial P_\parallel}{\partial r} \hat{h}^\alpha \hat{h}^\beta, \quad B^{\alpha\beta} = k_\perp \Gamma^{\alpha\beta} - k_\parallel \hat{h}^\alpha \hat{h}^\beta + \mu \chi^{\alpha\beta}$$

avec

$$(4.21) \quad k_\perp = \frac{1}{|\hbar|} \frac{\partial P_\perp}{\partial |\hbar|}, \quad k_\parallel = \frac{1}{|\hbar|} \frac{\partial P_\parallel}{\partial |\hbar|}.$$

En multipliant (4.18) scalairement par U_β et h_β , il vient:

$$(4.22) \quad l_\beta \delta h^\beta - l_\alpha U^\alpha U_\beta \delta h^\beta = 0,$$

$$(4.23) \quad \frac{1}{2} l_\alpha U^\alpha \delta |\hbar|^2 + |\hbar|^2 l_\alpha \delta U^\alpha - l_\alpha h^\alpha U_\alpha \delta h^\alpha = 0.$$

Par élimination de $U_\beta \delta h^\beta$ entre ces relations, il vient:

$$(4.24) \quad \frac{1}{2} (l_\alpha U^\alpha)^2 \delta |\hbar|^2 + |\hbar|^2 l_\alpha U^\alpha l_\alpha \delta U^\alpha - l_\alpha h^\alpha l_\alpha \delta h^\alpha = 0.$$

Par multiplication contractée par l_β , (4.19) donne compte tenu de (4.22)

$$(4.25) \quad W l_\alpha U^\alpha l_\beta \delta U^\beta - A^{\alpha\beta} l_\alpha l_\beta \delta r - B^{\alpha\beta} l_\alpha l_\beta \frac{\delta |\hbar|^2}{2} - \bar{\mu} l_\alpha h^\alpha l_\beta \delta h^\beta = 0.$$

Enfin on déduit de la relation (4.7) compte tenu de (4.10)

$$(4.26) \quad c^2 r g l_\beta \delta h^\beta + \frac{\partial P_\parallel}{\partial r} l_\alpha h^\alpha \delta r + (k_\parallel - \mu \lambda) l_\alpha h^\alpha \frac{\delta |\hbar|^2}{2} = 0.$$

En éliminant $\delta|h|^2$ entre (4.24) et (4.25) d'une part, d'autre part entre (4.24) et (4.26) nous obtenons:

$$(4.27) \quad D_0 l_\alpha U^\alpha l_\beta \delta U^\beta - A_0 (l_\alpha U^\alpha)^2 \delta r - E_0 l_\alpha h^\alpha l_\beta \delta h^\beta = 0$$

$$(4.28) \quad -\alpha_0 l_\alpha U^\alpha l_\alpha h^\alpha l_\beta \delta U^\beta + \frac{\partial P_\parallel}{\partial r} (l_\alpha U^\alpha)^2 l_\alpha h^\alpha \delta r + G_0 l_\beta \delta h^\beta = 0$$

où

$$(4.29) \quad \begin{cases} D_0 = W(l_\alpha U^\alpha)^2 + |h|^2 B^{\alpha\beta} l_\alpha l_\beta, & A_0 = A^{\alpha\beta} l_\alpha l_\beta, & E_0 = B^{\alpha\beta} l_\alpha l_\beta + \mu(l_\alpha U^\alpha)^2 \\ \alpha_0 = k_\parallel |h|^2 - \pi, & \pi = P_\parallel - P_\perp, & G_0 = c^2 r g (l_\alpha U^\alpha)^2 + \alpha_0 (l_\alpha h^\alpha)^2. \end{cases}$$

Nous avons ainsi obtenus le système homogène suivant de trois équations linéaires aux inconnues δr , $l_\beta \delta U^\beta$, $l_\beta \delta h^\beta$

$$(I) \quad \begin{cases} D_0 l_\alpha U^\alpha l_\beta \delta U^\beta - A_0 (l_\alpha U^\alpha)^2 \delta r - E_0 l_\alpha h^\alpha l_\beta \delta h^\beta = 0 \\ r l_\beta \delta U^\beta + l_\alpha U^\alpha \delta r = 0 \\ -\alpha_0 l_\alpha U^\alpha l_\alpha h^\alpha l_\beta \delta U^\beta + \frac{\partial P_\parallel}{\partial r} (l_\alpha U^\alpha)^2 l_\alpha h^\alpha \delta r + G_0 l_\beta \delta h^\beta = 0. \end{cases}$$

Le déterminant de ce système s'écrit:

$$H = \begin{vmatrix} D_0 l_\alpha U^\alpha & -A_0 (l_\alpha U^\alpha)^2 & -E_0 l_\alpha h^\alpha \\ r & l_\alpha U^\alpha & 0 \\ -\alpha_0 l_\alpha U^\alpha l_\alpha h^\alpha & \frac{\partial P_\parallel}{\partial r} (l_\alpha U^\alpha)^2 l_\alpha h^\alpha & G_0 \end{vmatrix}.$$

Soit après développement et quelques transformations élémentaires:

$$(4.30) \quad H(l) = P(l) (l_\alpha U^\alpha)^3$$

où l'on a posé:

$$(4.31) \quad P(l) = A_1 (l_\alpha U^\alpha)^4 + A_2 (l_\alpha U^\alpha)^2 l_\alpha l^\alpha + A_3 (l_\alpha h^\alpha)^2 l_\alpha l^\alpha + A_4 (l_\alpha h^\alpha)^2 (l_\alpha U^\alpha)^2 + A_5 (l_\alpha h^\alpha)^4$$

avec:

$$(4.32) \quad \begin{cases} A_1 = c^2 r g (c^2 r f - \omega_\perp) \\ A_2 = c^2 r g (\mu |h|^2 + \omega_\perp) \\ A_3 = -\mu |h|^2 \pi_\parallel (1 + \xi) (1 - \alpha) \\ A_4 = \mu |h|^2 \pi_\parallel (1 + \xi) (1 - \alpha) + c^2 r g (\omega_\perp + \pi) - W \pi_\parallel \\ A_5 = -\mu |h|^2 \pi_\parallel [(1 + \xi) (1 - \alpha) - 1 - \lambda] \end{cases}$$

où

$$(4.33) \quad \left\{ \begin{array}{l} \omega_{\perp} = \pi_{\perp} + k_{\perp} |\hbar|^2 \\ \pi_{\perp} = r \frac{\partial P_{\perp}}{\partial r}, \quad \pi_{\parallel} = r \frac{\partial P_{\parallel}}{\partial r} \\ \xi = \frac{\pi_{\perp} P_{\parallel} + \pi_{\parallel} k_{\perp} |\hbar|^2 - \pi_{\perp} k_{\parallel} |\hbar|^2}{\mu |\hbar|^2 \pi_{\parallel}} \\ \alpha = \frac{\sigma_{\perp}}{\sigma_{\parallel}} \frac{\eta_{\perp}^2}{\eta_{\parallel} (1 + \xi)} = \frac{\partial P_{\perp}}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial P_{\parallel}} \frac{\eta_{\perp}}{(1 + \xi)} \\ \sigma_{\perp} = \frac{\pi_{\perp}}{P_{\perp}} = \frac{r}{P_{\perp}} \frac{\partial P_{\perp}}{\partial r}, \quad \sigma_{\parallel} = \frac{\pi_{\parallel}}{P_{\parallel}} = \frac{r}{P_{\parallel}} \frac{\partial P_{\parallel}}{\partial r}. \end{array} \right.$$

Le système (I) admet des solutions autres que la solution nulle si et seulement si :

$$H(l) = 0 \quad \text{soit} \quad P(l) = 0.$$

Rappelons que le problème de Cauchy est dans ce cas indéterminé et que l'hypersurface Σ est singulière au point de vue de ce problème. Les relations (4.17), (4.24), (4.25) et (4.26) fournissent $l_{\beta} \delta U^{\beta}$, $l_{\beta} \delta h^{\beta}$, $\delta |\hbar|^2$ en fonction de δr .

(d) L'étude précédente concernait δr , $\delta |\hbar|^2$ et les composantes normales à Σ de U et h . Décomposons ces vecteurs selon leurs composantes tangentielles et normales à Σ . Il vient :

$$(4.34) \quad U^{\beta} = v^{\beta} + \frac{l_{\alpha} U^{\alpha} l^{\beta}}{l_{\alpha} l^{\alpha}}, \quad h^{\beta} = t^{\beta} + \frac{l_{\alpha} h^{\alpha} l^{\beta}}{l_{\alpha} l^{\alpha}} \quad \text{avec} \quad l_e v^e = l_e t^e = 0.$$

D'après les résultats du (c), les formules (4.18) et (4.19), fournissent des relations de la forme

$$(4.35) \quad -l_{\alpha} h^{\alpha} \delta U^{\beta} + l_{\alpha} U^{\alpha} \delta t^{\beta} \simeq 0$$

$$(4.36) \quad W l_{\alpha} u^{\alpha} \delta U^{\beta} - \bar{\mu} l_{\alpha} h^{\alpha} \delta t^{\beta} \simeq 0$$

où le symbole $\simeq 0$ signifie modulo des termes proportionnels à δr . Le déterminant des équations précédentes aux inconnues δv^{β} et δt^{β} s'écrit :

$$(4.37) \quad Q(l) = W(l_{\alpha} U^{\alpha})^2 - \bar{\mu}(l_{\alpha} h^{\alpha})^2.$$

(e) Nous avons ainsi mis en évidence trois types d'ondes

1) *Les ondes d'entropie* Σ_s , solutions de

$$(4.38) \quad U^{\alpha} \hat{\partial}_{\alpha} \varphi = 0.$$

Dans ces cas toutes les discontinuités sont proportionnelles à δS_{\parallel} et δS_{\perp} . Les ondes d'entropie ont, par rapport au fluide, une vitesse de propagation nulle et sont tangentes en chaque point à la droite support de U duale du plan d'équation

$$(4.39) \quad E(l) = l_{\alpha} U^{\alpha} = 0 .$$

2) *Les ondes magnéto-soniques* Σ_M , solutions de

$$(4.40) \quad P^{\mu\nu\lambda\rho} \partial_{\mu} \varphi \partial_{\nu} \varphi \partial_{\lambda} \varphi \partial_{\rho} \varphi = 0 ,$$

où l'on a posé:

$$P^{\mu\nu\lambda\rho} = A_1 U^{\mu} U^{\nu} U^{\lambda} U^{\rho} + A_2 U^{\mu} U^{\nu} g^{\lambda\rho} + A_3 \hat{h}^{\mu} \hat{h}^{\nu} g^{\lambda\rho} + A_4 U^{\mu} U^{\nu} \hat{h}^{\lambda} \hat{h}^{\rho} + A_5 \hat{h}^{\mu} \hat{h}^{\nu} \hat{h}^{\lambda} \hat{h}^{\rho} .$$

Ces ondes correspondent à l'existence des discontinuités δr , $\delta |h|^2$, $l_{\beta} \delta U^{\beta}$, $l_{\beta} \delta h^{\beta}$. Elles sont tangentes en chaque point au cône caractéristique dual du cône d'équation:

$$(4.41) \quad P(l) = P^{\mu\nu\lambda\rho} l_{\mu} l_{\nu} l_{\lambda} l_{\rho} = 0 .$$

La génératrice de contact de l'onde avec le cône est définie par

$$N^{\beta} = \frac{1}{2} \frac{\partial P(l)}{\partial l_{\beta}}$$

soit:

$$(4.42) \quad N^{\beta} = 2A_1 (l_{\alpha} U^{\alpha})^3 U^{\beta} + A_2 (l_{\alpha} U^{\alpha}) (g^{\lambda\rho} l_{\lambda} l_{\rho} U^{\beta} + l_{\alpha} U^{\alpha} l^{\beta}) + A_3 l_{\alpha} \hat{h}^{\alpha} (g^{\lambda\rho} l_{\lambda} l_{\rho} \hat{h}^{\beta} + l_{\alpha} \hat{h}^{\alpha} l^{\beta}) \\ + A_4 l_{\alpha} U^{\alpha} l_{\alpha} \hat{h}^{\alpha} (l_{\alpha} \hat{h}^{\alpha} U^{\beta} \hat{h}^{\beta}) + 2A_5 (l_{\alpha} \hat{h}^{\alpha})^3 \hat{h}^{\beta} .$$

3) *Les ondes d'Alfven* Σ_A , solutions de:

$$(4.43) \quad Q^{\nu\rho} \partial_{\nu} \varphi \partial_{\rho} \varphi = 0$$

où $Q^{\nu\rho} = W U^{\nu} U^{\rho} - \bar{\mu} h^{\nu} h^{\rho}$.

Les ondes d'Alfven correspondent, en l'absence d'autres discontinuités, à l'existence des discontinuités δv^{β} et δl^{β} qui sont proportionnelles. Ces ondes sont tangentes en chaque point au cône caractéristique dual du cône d'équation

$$(4.44) \quad Q(l) = Q^{\nu\rho} l_{\nu} l_{\rho} = 0 .$$

Supposons $(1 - \lambda) > 0$ et posons pour abrégier $\bar{\beta} = \sqrt{W/\bar{\mu}}$. L'équation aux ondes d'Alfven peut alors s'écrire:

$$\{(\bar{\beta} U^{\alpha} + h^{\alpha}) l_{\alpha}\} \{(\bar{\beta} U^{\alpha} - h^{\alpha}) l_{\alpha}\} = 0 .$$

Ainsi sous l'inégalité $(1 - \lambda) > 0$ les ondes d'Alfvén sont engendrées par les trajectoires soit du champ de vecteurs

$$(4.45) \quad A^\alpha = \bar{\beta} U^\alpha + h^\alpha$$

(ondes d'espèce *A*), soit du champ de vecteurs

$$(4.46) \quad B^\alpha = \bar{\beta} U^\alpha - h^\alpha$$

(ondes d'espèce *B*).

Sous l'inégalité $(1 - \lambda) > 0$, ces vecteurs sont manifestement temporels. En effet on a :

$$A_\alpha A^\alpha = B_\alpha B^\alpha = \bar{\beta}^2 - |h|^2 = \frac{c^2 r g}{\bar{\mu}} > 0.$$

Nous énonçons

THEOREME 1. — Les variétés caractéristiques (ou ondes) du système fondamental (*s*) de la magnétohydrodynamique anisotrope relativiste sont :

- 1) Les ondes entropiques, solutions de

$$U^\alpha \partial_\alpha \varphi = 0.$$

- 2) Les ondes magnéto-soniques, solutions de

$$P^{\mu\nu\lambda\epsilon} \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi \partial_\lambda \varphi \partial_\epsilon \varphi = 0.$$

- 3) Les ondes alfvéniques, solutions de

$$Q^{\nu\epsilon} \partial_\nu \varphi \partial_\epsilon \varphi = 0.$$

III: Propriétés des rayons en magnétohydrodynamique anisotrope relativiste.

Dans cette section nous nous proposons d'étudier, en termes de tenseurs distributions, les rayons correspondant aux ondes mises en évidence.

5. — Propriétés fondamentales des rayons associés aux ondes magnéto-soniques.

(a) Soit $\varphi = 0$ une solution de l'équation (4.41) aux ondes magnéto-soniques Σ_M . Les bicaractéristiques ou rayons associés à ces ondes sont les trajectoires du champ

des vecteurs N^β défini par (4.42). Ces vecteurs sont tangents aux ondes magnéto-soniques. En portant (4.34) dans (4.42) et en tenant compte de (4.41) nous obtenons:

$$(5.1) \quad N^\beta = l_\alpha U^\alpha [2A_1(l_\alpha U^\alpha)^2 + A_2 g^{\lambda\sigma} l_\lambda l_\sigma + A_4 (l_\alpha \hat{h}^\alpha)^2] v^\beta + \\ + l_\alpha \hat{h}^\alpha [A_3 g^{\lambda\sigma} l_\lambda l_\sigma + A_4 (l_\alpha U^\alpha)^2 + 2A_5 (l_\alpha \hat{h}^\alpha)^2] \hat{t}^\beta$$

où $\hat{t}^\beta = t^\beta |h|^{-1}$.

Nous nous proposons de montrer que δr (et par suite les $\delta|h|^2$, δU^β , δh^β) se propage le long des rayons, c'est à dire que δr vérifie un système différentiel de la forme:

$$N^\beta \nabla_\beta \delta r + k \delta r = 0.$$

De la formule (3.2) il résulte qu'il existe des distributions \bar{r} , \bar{S}_\perp , \bar{S}_\parallel , $|\bar{h}|^2$, \bar{U}^λ , \bar{h}^λ telles que:

$$(5.2) \quad \delta[\nabla_\alpha \nabla_\beta r] = \nabla_\alpha l_\beta \delta r + l_\alpha \nabla_\beta \delta r + l_\beta \nabla_\alpha \delta r + l_\alpha l_\beta \bar{r}$$

$$(5.3) \quad \delta[\nabla_\alpha \nabla_\beta S_\perp] = l_\alpha l_\beta \bar{S}_\perp, \quad \delta[\nabla_\alpha \nabla_\beta S_\parallel] = l_\alpha l_\beta \bar{S}_\parallel$$

$$(5.4) \quad \delta[\nabla_\alpha \nabla_\beta |h|^2] = \nabla_\alpha l_\beta \delta |h|^2 + l_\alpha \nabla_\beta \delta |h|^2 + l_\beta \nabla_\alpha \delta |h|^2 + l_\alpha l_\beta |\bar{h}|^2$$

$$(5.5) \quad \delta[\nabla_\alpha \nabla_\beta U^\lambda] = \nabla l_\beta \delta U^\lambda + l_\alpha \nabla_\beta \delta U^\lambda + l_\beta \nabla_\alpha \delta U^\lambda + l_\alpha l_\beta \bar{U}^\lambda$$

$$(5.6) \quad \delta[\nabla_\alpha \nabla_\beta h^\lambda] = \nabla_\alpha l_\beta \delta h^\lambda + l_\alpha \nabla_\beta \delta h^\lambda + l_\beta \nabla_\alpha \delta h^\lambda + l_\alpha l_\beta \bar{h}^\lambda.$$

(b) Considérons la relation:

$$\nabla_\alpha U^\alpha + \frac{U^\alpha}{r} \partial_\alpha r = 0$$

et dérivons la dans Ω . Il vient:

$$\nabla_\beta \nabla_\alpha U^\alpha + \nabla_\beta \left(\frac{U^\alpha}{r} \right) \nabla_\alpha r + \frac{U^\alpha}{r} \nabla_\beta \nabla_\alpha r = 0.$$

En écrivant cette relation de part et d'autre de Σ et retranchant nous obtenons:

$$(5.7) \quad \delta[\nabla_\beta \nabla_\alpha U^\alpha] + \frac{U^\alpha}{r} \delta[\nabla_\beta \nabla_\alpha r] + \delta \left[\nabla_\beta \left(\frac{U^\alpha}{r} \right) \nabla_\alpha r \right] = 0$$

or

$$\delta \left[\nabla_\beta \left(\frac{U^\alpha}{r} \right) \nabla_\alpha r \right] = \{ \nabla_\alpha r \}^1 \delta \left[\nabla_\beta \left(\frac{U^\alpha}{r} \right) \right] + \left\{ \nabla_\beta \left(\frac{U^\alpha}{r} \right) \right\}^0 \delta[\nabla_\alpha r]$$

est une combinaison linéaire des termes en δU^λ et δr est donc proportionnel à δr d'après les résultats du paragraphe quatre. Nous écrivons alors (5.7) sous la forme:

$$(5.8) \quad r \delta[\nabla_\beta \nabla_\alpha U^\alpha] + U^\alpha \delta[\nabla_\beta \nabla_\alpha r] \simeq 0$$

où le symbole $\simeq 0$ signifie modulo des termes proportionnels à δr . En procédant de même sur les relations (2.31) relatives aux entropies, on obtient

$$U^\alpha \delta[\nabla_\alpha \nabla_\beta S_\perp] \simeq 0, \quad U^\alpha \delta[\nabla_\alpha \nabla_\beta S_\parallel] \simeq 0.$$

Soit d'après (5.3)

$$l_\alpha U^\alpha l_\beta \bar{S}_\perp \simeq 0, \quad l_\alpha U^\alpha l_\beta \bar{S}_\parallel \simeq 0.$$

Ainsi $\bar{S}_\perp \simeq 0$, $\bar{S}_\parallel \simeq 0$ et il vient

$$(5.9) \quad \delta[\nabla_\beta \nabla_\alpha S_\perp] \simeq 0, \quad \delta[\nabla_\beta \nabla_\alpha S_\parallel] \simeq 0.$$

Le même raisonnement appliqué aux relations (2.17) et (2.18), conséquences des équations de Maxwell, donne

$$(5.10) \quad \delta[\nabla_\beta \nabla_\alpha h^\alpha] - U^\alpha U^\beta \delta[\nabla_\beta \nabla_\alpha h_\beta] \simeq 0,$$

$$(5.11) \quad \frac{1}{2} U^\alpha \delta[\nabla_\alpha \nabla_\beta |h|^2] + |h|^2 \delta[\nabla_\beta \nabla_\alpha U^\alpha] - h^\alpha U^\beta \delta[\nabla_\beta \nabla_\alpha h_\beta] \simeq 0.$$

En multipliant (5.10) par h^β , (5.11) par U^β et retranchant on obtient:

$$(5.12) \quad \frac{1}{2} U^\alpha U^\beta \delta[\nabla_\alpha \nabla_\beta |h|^2] + |h|^2 U^\beta \delta[\nabla_\beta \nabla_\alpha U^\alpha] - h^\beta \delta[\nabla_\beta \nabla_\alpha h^\alpha] \simeq 0.$$

On déduit de même du système différentiel (4.4) aux lignes de courant compte tenu de (5.9) et (5.10)

$$(5.13) \quad W U^\beta \delta[\nabla_\beta \nabla_\alpha U^\alpha] - A^{\alpha\beta} \delta[\nabla_\alpha \nabla_\beta r] - \frac{B^{\alpha\beta}}{2} \delta[\nabla_\alpha \nabla_\beta |h|^2] - \bar{\mu} h^\beta \delta[\nabla_\beta \nabla_\alpha h^\alpha] \simeq 0.$$

Enfin la relation (4.7) donne compte tenu de (5.9)

$$(5.14) \quad c^2 r g \delta[\nabla_\beta \nabla_\alpha h^\alpha] + \frac{\partial P_\parallel}{\partial r} h^\alpha \delta[\nabla_\alpha \nabla_\beta r] + (k_\parallel - \mu\lambda) \frac{h^\alpha}{2} \delta[\nabla_\alpha \nabla_\beta |h|^2] \simeq 0.$$

Par multiplication par h^β , il vient:

$$(5.15) \quad c^2 r g h^\beta \delta[\nabla_\beta \nabla_\alpha h^\alpha] + \frac{\partial P_\parallel}{\partial r} h^\alpha h^\beta \delta[\nabla_\alpha \nabla_\beta r] + \frac{1}{2} (k_\parallel - \mu\lambda) h^\alpha h^\beta \delta[\nabla_\alpha \nabla_\beta |h|^2] \simeq 0$$

(5.8) donne par multiplication contractée par U^β

$$(5.16) \quad r U^\beta \delta[\nabla_\beta \nabla_\alpha U^\alpha] + U^\alpha U^\beta \delta[\nabla_\beta \nabla_\alpha r] \simeq 0.$$

(c) Considérons les relations (5.12), (5.13), (5.15) et (5.16). Par élimination de $U^\beta \delta[\nabla_\beta \nabla_\alpha U^\alpha]$ et $h^\beta \delta[\nabla_\beta \nabla_\alpha h^\alpha]$, elles entraînent:

$$(5.17) \quad D^{\alpha\beta} \delta[\nabla_\alpha \nabla_\beta r] + \frac{2}{r} F^{\alpha\beta} \delta[\nabla_\alpha \nabla_\beta |h|^2] \simeq 0$$

$$(5.18) \quad K^{\alpha\beta} \delta[\nabla_\alpha \nabla_\beta r] + \frac{r}{2} L^{\alpha\beta} \delta[\nabla_\alpha \nabla_\beta |h|^2] \simeq 0$$

où l'on a posé:

$$(5.19) \quad \begin{cases} D^{\alpha\beta} = W U^\alpha U^\beta + r A^{\alpha\beta} - \bar{\mu} |h|^2 U^\alpha U^\beta = c^2 r g U^\alpha U^\beta + \pi_\perp F^{\alpha\beta} - \pi_\parallel \hat{h}^\alpha \hat{h}^\beta \\ F^{\alpha\beta} = B^{\alpha\beta} + \bar{\mu} U^\alpha U^\beta = k_\perp F^{\alpha\beta} - k_\parallel \hat{h}^\alpha \hat{h}^\beta + \mu \chi^{\alpha\beta} + \bar{\mu} u^\alpha u^\beta \\ K^{\alpha\beta} = |h|^2 M^{\alpha\beta} \quad \text{avec} \quad M^{\alpha\beta} = \pi_\parallel \hat{h}^\alpha \hat{h}^\beta - c^2 r f U^\alpha U^\beta \\ L^{\alpha\beta} = \alpha_0 \hat{h}^\alpha \hat{h}^\beta + c^2 r g U^\alpha U^\beta. \end{cases}$$

Les relations (5.17) et (5.18) s'écrivent compte tenu de (5.2) et (5.4)

$$(5.20) \quad 2D^{\alpha\beta} l_\alpha \nabla_\beta \delta r + r F^{\alpha\beta} l_\alpha \nabla_\beta \delta |h|^2 + D^{\alpha\beta} l_\alpha l_\beta \bar{r} + r F^{\alpha\beta} l_\alpha l_\beta \frac{|\bar{h}|^2}{2} \simeq 0$$

$$(5.21) \quad 2K^{\alpha\beta} l_\alpha \nabla_\beta \delta r + r L^{\alpha\beta} l_\alpha \nabla_\beta \delta |h|^2 + K^{\alpha\beta} l_\alpha l_\beta \bar{r} + r L^{\alpha\beta} l_\alpha l_\beta \frac{|\bar{h}|^2}{2} \simeq 0.$$

Par élimination de $|\bar{h}|^2$ entre ces deux relations, il vient:

$$(5.22) \quad 2(L^{\lambda\varrho} l_\lambda l_\varrho D^{\alpha\beta} l_\alpha - F^{\lambda\varrho} l_\lambda l_\varrho K^{\alpha\beta} l_\alpha) \nabla_\beta \delta r + r(L^{\lambda\varrho} l_\lambda l_\varrho F^{\alpha\beta} l_\alpha - F^{\lambda\varrho} l_\lambda l_\varrho L^{\alpha\beta} l_\alpha) \nabla_\beta \delta |h|^2 + \bar{r}(L^{\lambda\varrho} l_\lambda l_\varrho D^{\alpha\beta} l_\alpha - F^{\alpha\beta} l_\alpha l_\beta K^{\alpha\beta} l_\alpha) \simeq 0.$$

Un calcul assez long mais élémentaire donne à partir de (5.19)

$$L^{\lambda\varrho} l_\lambda l_\varrho D^{\alpha\beta} l_\alpha l_\beta - F^{\lambda\varrho} l_\lambda l_\varrho K^{\alpha\beta} l_\alpha l_\beta = P(l).$$

Ainsi le coefficient de \bar{r} est nul. (5.22) s'écrit alors:

$$(5.23) \quad 2(L^{\lambda\varrho} l_\lambda l_\varrho D^{\alpha\beta} l_\alpha - F^{\lambda\varrho} l_\lambda l_\varrho K^{\alpha\beta} l_\alpha) \nabla_\beta \delta r + r(L^{\lambda\varrho} l_\lambda l_\varrho F^{\alpha\beta} l_\alpha - F^{\lambda\varrho} l_\lambda l_\varrho L^{\alpha\beta} l_\alpha) \nabla_\beta \delta |h|^2 \simeq 0.$$

(d) Reprenons les relations (4.17), (4.24) et (4.25). Il est aisé de montrer qu'elles entraînent:

$$(5.24) \quad 2D^{\lambda\varrho} l_\lambda l_\varrho \delta r + r F^{\lambda\varrho} l_\lambda l_\varrho \delta |h|^2 = 0.$$

De même, les relations (4.17), (4.24) et (4.26) donnent:

$$(5.25) \quad 2K^{\lambda\varrho} l_\lambda l_\varrho \delta r + r L^{\lambda\varrho} l_\lambda l_\varrho \delta |h|^2 = 0.$$

On déduit de (5.24) et (5.25) par dérivation:

$$(5.26) \quad 2D^{\lambda e} l_\lambda l_e \nabla_\beta \delta r + r F^{\lambda e} l_\lambda l_e \nabla_\beta \delta |h|^2 \simeq 0$$

$$(5.27) \quad 2K^{\lambda e} l_\lambda l_e \nabla_\beta \delta r + r L^{\lambda e} l_\lambda l_e \nabla_\beta \delta |h|^2 \simeq 0 .$$

En multipliant (5.26) par $L^{\alpha\beta} l_\alpha$ et (5.27) par $F^{\alpha\beta} l_\alpha$ nous obtenons

$$(5.28) \quad \begin{cases} 2D^{\lambda e} l_\lambda l_e L^{\alpha\beta} l_\alpha \nabla_\beta \delta r + r F^{\lambda e} l_\lambda l_e L^{\alpha\beta} \nabla_\beta \delta |h|^2 \simeq 0 \\ 2K^{\lambda e} l_\lambda l_e F^{\alpha\beta} l_\alpha \nabla_\beta \delta r + r L^{\lambda e} l_\lambda l_e F^{\alpha\beta} \nabla_\beta \delta |h|^2 \simeq 0 . \end{cases}$$

Compte tenu de (5.28), (5.23) donne

$$(5.29) \quad Z^\beta \nabla_\beta \delta r \simeq 0$$

où

$$(5.30) \quad Z^\beta = L^{\lambda e} l_\lambda l_e D^{\alpha\beta} l_\alpha - F^{\lambda e} l_\lambda l_e K^{\alpha\beta} l_\alpha + D^{\lambda e} l_\lambda l_e L^{\alpha\beta} l_\alpha - K^{\lambda e} l_\lambda l_e F^{\alpha\beta} l_\alpha .$$

On vérifie immédiatement que l'on a $l_e Z^e = 0$, en d'autres termes que le vecteur Z^β est tangent à l'onde.

Compte tenu de (5.19) on montre par un calcul long mais élémentaire que le vecteur Z^β défini par (5.30) n'est autre que le vecteur N^β défini par (5.1). Ainsi:

$$N^\beta \nabla_\beta \delta r \simeq 0 .$$

Nous énonçons:

THÉORÈME 2. – Les distributions δr , $\delta |h|^2$, δU^λ , δh^λ à supports sur l'onde magnéto-sonique Σ_M se propagent le long des rayons associés selon les systèmes différentiels

$$N^\beta \nabla_\beta \delta r \simeq 0, \quad N^\beta \nabla_\beta \delta |h|^2 \simeq 0, \quad N^\beta \nabla_\beta \delta U^\lambda \simeq 0, \quad N^\beta \nabla_\beta h^\lambda \simeq 0,$$

où le symbole $\simeq 0$ signifie modulo des termes proportionnels par exemple à δr .

Remarquons que la direction du vecteur N^β n'est pas en général invariante par la dérivation δ .

6. – Propriétés des rayons associés aux ondes d'Alfvén.

(a) La direction du rayon associé à une onde d'Alfvén d'espèce A (resp. B) est naturellement donnée par A^α (resp. B^α). Soit $\varphi = 0$ une solution de l'équation aux ondes d'Alfvén par exemple d'espèce A . On a:

$$(6.1) \quad A^\alpha \partial_\alpha \varphi = (\beta U^\alpha + h^\alpha) l_\alpha = 0 .$$

Pour une onde d'Alfven on a certainement $P(l) \neq 0$ et par suite

$$\delta r = 0, \quad \delta |h|^2 = 0, \quad l_\beta \delta U^\beta = 0, \quad l_\beta \delta h^\beta = 0$$

(5.22) se réduit alors à

$$P(l)\bar{r} = 0,$$

et par suite $\bar{r} = 0$. Ainsi

$$(6.2) \quad \delta[\nabla_\beta \nabla_\alpha r] = 0.$$

Compte tenu de cette relation, (5.8) donne:

$$(6.3) \quad \delta[\nabla_\beta \nabla_\alpha U^\alpha] = 0.$$

De la relation (5.20) ou (5.21) il résulte que $|\bar{h}|^2 = 0$. On a alors:

$$(6.4) \quad \delta[\nabla_\alpha \nabla_\beta |h|^2] = 0.$$

Compte tenu de (6.2) et (6.4), la relation (5.15) où le second membre est nul donne:

$$(6.5) \quad \delta[\nabla_\beta \nabla_\alpha h^\alpha] = 0.$$

(b) Pour les ondes d'Alfven envisagées ici, seules les discontinuités δU^α et δt^α peuvent être différentes de zéro. Des relations (4.35) et (4.36) où les seconds membres sont nuls, on déduit que δt^α est proportionnel à δv^α . Le symbole $\simeq 0$ signifie dans ce paragraphe, modulo des termes linéaires par rapport aux δv^α (ou aux δt^α).

Compte tenu de (6.2), (6.3), (6.4) et (6.5), les équations (2.16) de Maxwell et le système différentiel (4.4) aux lignes de courant donnent par dérivation

$$(6.6) \quad h^\alpha \delta[\nabla_\alpha \nabla_\beta U^\lambda] - U^\alpha \delta[\nabla_\beta \nabla_\alpha h^\lambda] \simeq 0$$

et

$$(6.7) \quad \tilde{\beta}^2 U^\beta \delta[\nabla_\alpha \nabla_\beta U^\lambda] - h^\beta \delta[\nabla_\beta \nabla_\alpha h^\lambda] \simeq 0.$$

En multipliant (6.6) par h^β et (6.7) par U^β et retranchant, on obtient:

$$(\tilde{\beta}^2 U^\alpha U^\beta - h^\alpha h^\beta) \delta[\nabla_\alpha \nabla_\beta U^\lambda] \simeq 0$$

soit en explicitant:

$$(\tilde{\beta}^2 U^\alpha U^\beta - h^\alpha h^\beta)(l_\alpha \nabla_\beta \delta U^\lambda + l_\beta \nabla_\alpha \delta U^\lambda + l_\alpha l_\beta \bar{U}^\lambda) \simeq 0.$$

Le coefficient de \bar{U}^λ étant nul d'après l'équation aux ondes d'Alfven, on obtient:

$$(\tilde{\beta}^2 l_\alpha U^\alpha U^\beta - l_\alpha h^\alpha h^\beta) \nabla_\beta \delta U^\lambda \simeq 0.$$

Soit en utilisant (6.1)

$$\tilde{\beta} l_\alpha U^\alpha A^\beta \nabla_\beta \delta U^\lambda \simeq 0 .$$

Nous obtenons:

$$A^\beta \nabla_\beta \delta v^\lambda \simeq 0 .$$

On établit de façon analogue pour une onde d'Alfven d'espèce B : $B^\beta \nabla_\beta \delta v^\lambda \simeq 0$.
Posons $A_1^\beta = A^\beta$, $A_2^\beta = B^\beta$.

Nous énonçons:

THÉORÈME 3. – Les distributions δv^λ , δt^λ à supports sur une onde d'Alfven Σ_A d'espèce A (resp. B) se propagent le long des rayons associés selon les systèmes différentiels

$$A_i^\beta \nabla_\beta \delta v^\lambda \simeq 0 , \quad A_i^\beta \nabla_\beta \delta t^\lambda \simeq 0 \quad (i = 1, 2)$$

où le symbole $\simeq 0$ signifie modulo des termes linéaires par rapport aux δv^λ (ou δt^λ).

(a) Reprenons une onde d'espèce A et étudions l'action d'une dérivation sur le vecteur $A^\beta = \tilde{\beta} U^\beta + h^\beta$.

D'après l'étude du (a) du présent paragraphe on a:

$$\delta \tilde{\beta} = 0 , \quad l_\beta \delta U^\beta = 0 , \quad l_\beta \delta h^\beta = 0 .$$

Il en résulte

$$\delta A^\beta = \tilde{\beta} \delta v^\beta + \delta t^\beta .$$

Soit d'après (4.35) où le second membre est nul

$$l_\alpha U^\alpha \delta A^\beta = (\tilde{\beta} l_\alpha U^\alpha + l_\alpha h^\alpha) \delta v^\beta .$$

Ce qui donne d'après (6.1) $\delta A^\beta = 0$. Ainsi

THÉORÈME 4. – Pour une onde d'Alfven d'espèce A (resp. B), le vecteur A (resp. B) lui même et sa direction en particulier sont invariants par la dérivation δ .

IV: Propagation des ondes en magnétohydrodynamique anisotrope relativiste.

7. – Vitesses de propagation.

(a) La vitesse de propagation V^Σ par rapport au fluide d'une hypersurface d'onde Σ est donnée par [9], [10], [16]

$$(7.1) \quad \left(\frac{V^\Sigma}{c} \right)^2 = y^\Sigma = \frac{(l_\alpha U^\alpha)^2}{(l_\alpha U^\alpha)^2 - l_\alpha l^\alpha} .$$

C'est la pente spatio-temporelle du 3-plan tangent à Σ .

La relation (7.1) entraîne

$$(7.2) \quad (1 - y^2)(l_\alpha U^\alpha)^2 = -y^2 l_\alpha l^\alpha.$$

Sur cette relation on voit que $V^2/c < 1$ si et seulement si $l_\alpha l^\alpha < 0$, c'est à dire si Σ est orientée dans le temps, ce que nous postulons dans la suite. La composante h_n de h dans la direction spatiale de propagation définie par

$$(7.3) \quad \hat{h}_n^2 = \frac{(l_\alpha \hat{h}^\alpha)^2}{(l_\alpha U^\alpha)^2 - l_\alpha l^\alpha}$$

vérifie le lemme géométrique suivant [15].

LEMME. - On a toujours $\hat{h}_n \leq 1$. Pour que $\hat{h}_n^2 = 1$, il faut et il suffit que 1 appartienne au 2-plan défini par (U, h) .

(b) La quantité $Q(l)$ peut s'exprimer en termes de y d'après (7.2) et (7.3) par:

$$(7.4) \quad \frac{(1-y)}{-l_\alpha l^\alpha} \hat{Q}(l) \equiv D(y) = (1 + \beta)y - (1 - \lambda)\hat{h}_n^2$$

où

$$(7.5) \quad \hat{Q}(l) = \frac{Q(l)}{\mu|h|^2}, \quad \beta = \frac{c^2 r f}{\mu|h|^2}.$$

Ainsi les ondes d'Alfvén admettent par rapport au fluide une vitesse de propagation V^A donnée par:

$$(7.6) \quad \left(\frac{V^A}{c}\right)^2 = y^A = \frac{1 - \lambda}{1 + \beta} \hat{h}_n^2$$

et qui vérifie $y^A < 1$.

Sur la relation (7.6) on voit que la vitesse de propagation des ondes d'Alfvén est réelle si

$$(H_2) \quad (1 - \lambda) \geq 0.$$

De même, compte tenu de (7.2) et (7.3), la quantité $P(l)$ définie par (4.31) peut s'exprimer en termes de y par:

$$(7.7) \quad \frac{(1-y)^2}{(l_\alpha l^\alpha)^2} M(l) \equiv \Pi(y) = Ay^2 - By + C$$

où

$$(7.8) \quad \left\{ \begin{array}{l} M(l) = \frac{P(l)}{\mu|h|^2 \tau_{||}} \\ A = \gamma_{||}(1 + \beta) \\ B = \gamma_{||}(1 + \delta_{\perp})(1 - \hat{h}_n^2) + \gamma_{||}(1 - \lambda)\hat{h}_n^2 + (1 + \beta)\hat{h}_n^2 \\ C = \hat{h}_n^2[(1 - \hat{h}_n^2)(1 + \xi)(1 - \alpha) + \hat{h}_n^2(1 - \lambda)]. \end{array} \right.$$

avec

$$(7.9) \quad \gamma_{\parallel} = c^2 g \frac{\partial r}{\partial P_{\parallel}}, \quad \delta_{\perp} = \frac{\omega_{\perp}}{\mu |\hbar|^2}.$$

La vitesse sonique longitudinale V_{\perp}^s est définie par:

$$\left(\frac{V_{\parallel}^s}{c}\right)^2 = y_{\parallel}^s = \frac{1}{\gamma_{\parallel}}.$$

(c) Considérons le trinôme $\Pi(y)$ dont les racines déterminent les vitesses de propagation par rapport au fluide des ondes magnétosoniques. Le coefficient A est strictement positif. Le trinôme $\Pi(y)$ aura deux racines réelles distinctes comprises entre 0 et 1 si

$$(7.10) \quad B > 0, \quad \Pi(0) = C > 0, \quad A - B > 0.$$

L'inégalité $B > 0$ est satisfaite sous les hypothèses (H_1) et (H_2) . Sous les mêmes hypothèses $\Pi(0) > 0$ pourvu que

$$(H_3) \quad (1 - \alpha) \geq 0,$$

$A - B$ peut s'écrire compte tenu de (7.8)

$$A - B = \gamma_{\parallel}(1 + \beta)(1 - \varkappa)$$

où

$$(7.11) \quad \varkappa = \frac{\gamma_{\parallel}(1 + \delta_{\perp})(1 - \hat{h}_n^2) + \gamma_{\parallel}(1 - \lambda)\hat{h}_n^2 + (1 + \beta)\hat{h}_n^2}{\gamma_{\parallel}(1 + \beta)}.$$

Sous les hypothèses (H_1) , (H_2) , on a $A - B > 0$ si et seulement si

$$(H_4) \quad (1 - \varkappa) > 0.$$

Les hypothèses (H_i) ($i = 1, 2, \dots, 4$) assurent ainsi que les inégalités (7.10) sont satisfaites; elles entraînent $\Pi(1) = A - B + C > 0$.

Considérons les hypothèses (H_2) et (H_3) . Elles conduisent aux inégalités suivantes:

$$(\bar{H}) \quad \frac{\sigma_{\perp}}{\sigma_{\parallel}} \frac{\eta_{\perp}^2}{(1 + \xi)} \leq \eta_{\parallel} \leq 1 + \eta_{\perp}.$$

Ainsi, sous les hypothèses (H_2) et (H_3) , les quantités η_{\parallel} et η_{\perp} ne peuvent prendre des valeurs arbitraires, leurs variations sont astreintes à vérifier les inégalités (\bar{H}) . Du point de vue physique, les hypothèses (H_2) et (H_3) ou, ce qui revient au même, les

inégalités (\bar{H}), assurent que les régimes étudiés sont stables, elles impliquent l'absence d'instabilités « fire hase » et « mirror » qui peuvent apparaître dans le fluide anisotrope envisagé [3, 5, 6, 7]. Nous désignons par y^{M-} et y^{M+} les zéros entre 0 et 1 du trinôme $\Pi(y)$ et appelons V^{M-} et V^{M+} respectivement vitesse magnétosonique lente et vitesse magnétosonique rapide.

Les conditions d'instabilités entraînent que les vitesses de propagation des ondes alfvéniques et des ondes magnétosoniques lentes sont imaginaires.

(d) Etudions la position de la vitesse de propagation V^A des ondes d'Alfven par rapport aux vitesses de propagation V^{M-} et V^{M+} des ondes magnétosoniques. En portant y^A défini par (7.6) dans l'expression (7.7) de $\Pi(y)$ nous obtenons après quelques transformations élémentaires:

$$(7.12) \quad \begin{aligned} \Pi(y^A) &= \left(\frac{1 \pm \delta_{\perp}}{1 + \beta}\right) (1 - \hat{h}_n^2) \hat{h}_n^2 [m(1 + \beta)(1 - \alpha) - \gamma_{\parallel}] (1 - \lambda) = \\ &= \gamma_{\parallel} (1 + \delta_{\perp}) (1 - \hat{h}_n^2) \left(\frac{1}{\gamma_0} - \frac{1}{\gamma_a}\right) \end{aligned}$$

où

$$(7.13) \quad \gamma_0 = \gamma_{\parallel} / m(1 - \alpha); \quad m = (1 + \xi / (1 + \delta_{\perp})); \quad \gamma_a = (1 + \beta) / (1 - \lambda).$$

La relation (7.12) peut s'écrire

$$(7.14) \quad \Pi(y^A) = \frac{(1 + \delta_{\perp})(1 - \hat{h}_n^2) \gamma_{\parallel}}{1 + \beta} [(1 + e\sigma_{\parallel} m) \eta_{\parallel} - (1 + \eta_{\perp} + e\sigma_{\perp} \eta_{\perp}^2 / (1 + \delta_{\perp}))]$$

avec

$$(7.15) \quad e = W/c^2 rg = (c^2 rf + \mu|h|^2) / c^2 rg.$$

Il résulte de cette étude

THÉORÈME 5. — Sous les hypothèses (H_i) ($i = 1, \dots, 4$) il existe par rapport au fluide anisotrope considéré une vitesse de propagation V^A pour les ondes d'Alfven, deux vitesses de propagation V^{M-} et V^{M+} pour les ondes magnétosoniques vérifiant les inégalités suivantes:

$$\begin{aligned} 0 \leq V^{M-} \leq V^A < V^{M+} < C & \quad \text{si } \eta_{\parallel} < (1 / (1 + me\sigma_{\parallel})) (1 + \eta_{\perp} + e\sigma_{\perp} \eta_{\perp}^2 / (1 + \delta_{\perp})) \\ 0 \leq V^A < V^{M-} < V^{M+} < C & \quad \text{si } \eta_{\parallel} > (1 / (1 + me\sigma_{\parallel})) (1 + \eta_{\perp} + e\sigma_{\perp} \eta_{\perp}^2 / (1 + \delta_{\perp})). \end{aligned}$$

8. — Cas particulier.

Nous examinons les résultats précédents concernant la propagation des ondes dans quelques cas particuliers:

- 1) *champ magnétique très intense:* $\eta_{\perp} \ll 1, \eta_{\parallel} \ll 1, \delta_{\perp} \ll 1, \xi \ll 1.$

Dans ce cas les coefficients A , B , C définis par (7.8) deviennent:

$$A = \gamma_{\parallel}(1 + \beta), \quad B = \gamma_{\parallel} + \hat{h}_n^2(1 + \beta), \quad C = \hat{h}_n^2.$$

L'équation $II(y) = 0$ donne alors

$$(8.1) \quad y^{(1)} = \frac{1}{1 + \beta}, \quad y^{(2)} = \hat{h}_n^2/\gamma_{\parallel}.$$

L'équation $D(y) = 0$ donne immédiatement:

$$(8.2) \quad y^A = \frac{1}{1 + \beta}.$$

2) *Propagation longitudinale: $\hat{h}_n^2 = 1$.*

Dans ce cas il vient:

$$A = \gamma_{\parallel}(1 + \beta), \quad B = \gamma_{\parallel}(1 - \lambda) + 1 + \beta, \quad C = 1 - \lambda.$$

L'équation $II(y) = 0$ donne alors

$$(8.3) \quad y_{\parallel}^{(1)} = (1 - \lambda)/1 + \beta, \quad y_{\parallel}^{(2)} = \frac{1}{\gamma_{\parallel}}.$$

On déduit de l'équation $D(y) = 0$

$$(8.4) \quad y^A = \frac{(1 - \lambda)}{1 + \beta}.$$

3) *Propagation transversale: $\hat{h}_n^2 = 0$.*

On obtient alors

$$A = \gamma_{\parallel}(1 + \beta), \quad \beta = \gamma_{\parallel}(1 + \delta_{\perp}), \quad C = 0.$$

Les équations $D(y) = 0$ et $II(y) = 0$ donnent

$$(8.5) \quad y^A = y_{\perp}^{(1)} = 0, \quad y_{\perp}^{(2)} = \frac{B}{A} = \frac{1 + \delta_{\perp}}{1 + \beta}.$$

Nous définissons la vitesse magnétozonique transversale V_{\perp}^M par

$$(8.6) \quad y_{\perp}^M = \left(\frac{V_{\perp}^M}{c}\right)^2 = \frac{1}{\gamma_{\perp}} = \frac{1 + \delta_{\perp}}{1 + \beta}.$$

Pour un fluide polytronique les résultats de ce paragraphe se réduisent à l'approximation classique aux résultats classiques [13].

9. – Etude des cônes d’ondes.

9.1. Opérateurs différentiels hyperboliques stricts [10], [17], [18].

Soit V_n une variété différentiable de classe c^k où k est suffisamment grand. Soit $a(x, \partial)$ un opérateur différentiel agissant sur des fonctions où $x \in V_n$ et où ∂ désigne la dérivation ordinaire $\partial = (\partial_\alpha)$ ($\alpha = 1, 2, \dots, n$). T_x est l’espace vectoriel tangent en x à la variété V_n et T_x^* l’espace dual. Si m est l’ordre de l’opérateur $a(x, \partial)$, alors $a(x, \xi)$ où $\xi \in T_x^*$ est un polynôme réel en ξ de degré m . Nous considérons la partie principale $h(x, \xi)$ de $a(x, \xi)$, qui est constituée par l’ensemble des termes homogènes de degré m de $a(x, \xi)$. Soit $V_x(h)$ le cône de T_x^* défini par l’équation

$$h(x, \xi) = 0 \quad \text{pour } x \text{ fixé.}$$

L’opérateur $a(x, \xi)$ est hyperbolique strict en x si l’hypothèse suivante est vérifiée.

Il existe dans T_x^* des éléments ξ tels que toute droite issue de ξ ne passant pas par le sommet, coupe le cône en m points réels distincts. Ces points ξ constituent l’intérieur de deux demi-cônes convexes fermés opposés $\Gamma_x^+(a)$ et $\Gamma_x^-(a)$ dont les bords appartiennent à $V_x(h)$.

9.2. Représentation des cônes d’ondes dans R^3 . Conséquences.

(a) En chaque point x de la variété espace-temps (V_4, g) les cônes caractéristiques correspondant aux diverses variétés caractéristiques sont des cônes duaux des cônes d’équations (4.4) et (4.44). Ces équations peuvent s’écrire:

$$(9.1) \quad M(l) = L_1(l_\alpha U^\alpha)^4 + L_2(l_\alpha U^\alpha)^2 l_\alpha l^\alpha + L_3(l_\alpha \hat{h}^\alpha)^2 l_\alpha l^\alpha + L_4(l_\alpha \hat{h}^\alpha)^2 (l_\alpha U^\alpha)^2 + L_5(l_\alpha \hat{h}^\alpha)^4 = 0$$

$$(9.2) \quad \hat{Q}(l) = (1 + \beta)(l_\alpha U^\alpha)^2 - (1 - \lambda)(l_\alpha \hat{h}^\alpha)^2 = 0.$$

Dans (9.1) on a posé:

$$(9.3) \quad \begin{cases} L_1 = \gamma_{\parallel}(\beta - \delta_{\perp}) \\ L_2 = \gamma_{\parallel}(1 + \delta_{\perp}) \\ L_3 = -(1 + \xi)(1 - \alpha) \\ L_4 = (1 + \xi)(1 - \alpha) + \gamma_{\parallel}(\delta_{\perp} + \lambda) - (1 + \beta) \\ L_5 = -[(1 + \xi)(1 - \alpha) - (1 - \lambda)]. \end{cases}$$

Sous les hypothèses (H_i) ($i = 1, \dots, 4$) les vitesses de propagation des ondes magnéto-soniques et des ondes d’Alfvén sont réelles et inférieures à la vitesse de la lumière. Les cônes définis par les équations (9.1) et (9.2) contiennent donc dans leur intérieur

le cône fondamental de la métrique d'équation

$$(9.4) \quad G(l) = g^{\alpha\beta} l_\alpha l_\beta = 0 .$$

(b) Nous allons étudier les différents cônes. Pour cela, nous rapportons l'espace-temps (V_4, \underline{g}) en un point x d'un domaine Ω occupé par le fluide au repère propre $V^{(4)}$ en ce point avec $V_x^{(3')} = \hat{h}_x$.

Posons

$$l_0 = t, \quad l_1 = x, \quad l_2 = y, \quad l_3 = z .$$

Avec ces considérations les équations (9.4), (9.1) et (9.2) s'écrivent respectivement:

$$(\Gamma_G) \quad t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 0$$

$$(\Gamma_M) \quad L_1 t^4 + L_2 t^2(t^2 - x^2 - y^2 - z^2) + L_3 z^2(t^2 - x^2 - y^2 - z^2) + L_4 t^2 z^2 + L_5 z^4 = 0$$

$$(\Gamma_A) \quad (1 + \beta)t^2 - (1 - \lambda)z^2 = 0 .$$

Les équations précédentes définissent trois cônes que nous nous proposons d'étudier dans R^3 . Nous appelons « indicatrices d'ondes dans R^3 » les sections de ces cônes par l'hyperplan $t = 1$. Nous obtenons ainsi les indicatrices suivantes:

$$(S_G) \quad 1 - x^2 - y^2 - z^2 = 0$$

$$(S_M) \quad L_1 + L_2(1 - x^2 - y^2 - z^2) + L_3(1 - x^2 - y^2 - z^2)z^2 + L_4 z^2 + L_5 z^4 = 0$$

$$(S_A) \quad (1 + \beta) - (1 - \lambda)z^2 = 0 .$$

Nous allons étudier la forme de ces trois indicatrices. Ce sont trois surfaces de révolution autour de oz ; coupons-les par le plan $x = 0$. Nous obtenons alors les courbes suivantes:

$$(C_G) \quad y^2 + z^2 = 1$$

$$(C_M) \quad (L_5 - L_4)z^4 + (L_4 + L_3 - L_2)z^2 - (L_2 + z^2 L_3)y^2 + L_1 + L_2 = 0$$

$$(C_A) \quad z^2 = (1 + \beta)/(1 - \lambda)$$

(C_G) est un cercle de rayon égal à 1, (C_A) se compose de deux droites et (C_M) est une courbe du quatrième degré ayant oy et oz comme axes de symétrie. L'équation de (C_M) peut s'écrire

$$(9.5) \quad y^2 = \frac{(L_5 - L_4)z^4 + (L_4 + L_3 - L_2)z^2 + L_1 + L_2}{L_3(z^2 + L_2/L_3)} .$$

Soit compte tenu de (9.3)

$$(9.6) \quad y^2 = \frac{(z^2 - \gamma_{\parallel})(z^2 - \gamma_a)}{L_{\delta}(z^2 - \gamma_0)} = - \frac{(1 - \lambda)(z^2 - \gamma_{\parallel})(z^2 - \gamma_a)}{(1 + \xi)(1 - \alpha)(z^2 - \gamma_0)}$$

Pour $z^2 = 0$, on déduit de (9.5) ou (9.6)

$$y^2 = \gamma_{\perp} = (1 + \beta)/(1 + \delta_{\perp})$$

Pour $z^2 = \gamma_a$ et $z^2 = \gamma_{\parallel}$ on a $y^2 = 0$ et la courbe (C_M) admet les asymptotes $z^2 = \gamma_0$. Des expressions de γ_a , γ_{\parallel} et γ_0 on déduit les relations suivantes:

$$(9.7) \quad \begin{cases} \gamma_{\parallel} - \gamma_a = \gamma_{\parallel}(1 + \eta_{\perp} - (1 + e\sigma_{\parallel})\eta_{\parallel})(1 - \lambda)^{-1} \\ \gamma_0 - \gamma_{\parallel} = \gamma_0(\sigma_{\perp}\eta_{\perp}^2/\sigma_{\parallel}\eta_{\parallel}(1 + \delta_{\perp}) - (m - 1)) \\ \gamma_0 - \gamma_a = \gamma_0[1 + \eta_{\perp} + e\sigma_{\perp}\eta_{\perp}^2/(1 + \delta_{\perp}) - (1 + m\sigma_{\parallel})\eta_{\parallel}](1 - \lambda)^{-1} \end{cases}$$

(c) L'étude de la position, les unes par rapport aux autres, des racines γ_0 , γ_{\parallel} , γ_a et des conséquences géométriques qui en découlent nous a conduits à considérer les cinq cas suivants

$$(C_1) \quad \gamma_a < \gamma_{\parallel} < \gamma_0$$

Nous obtenons alors pour la courbe (C_M) la figure suivante:

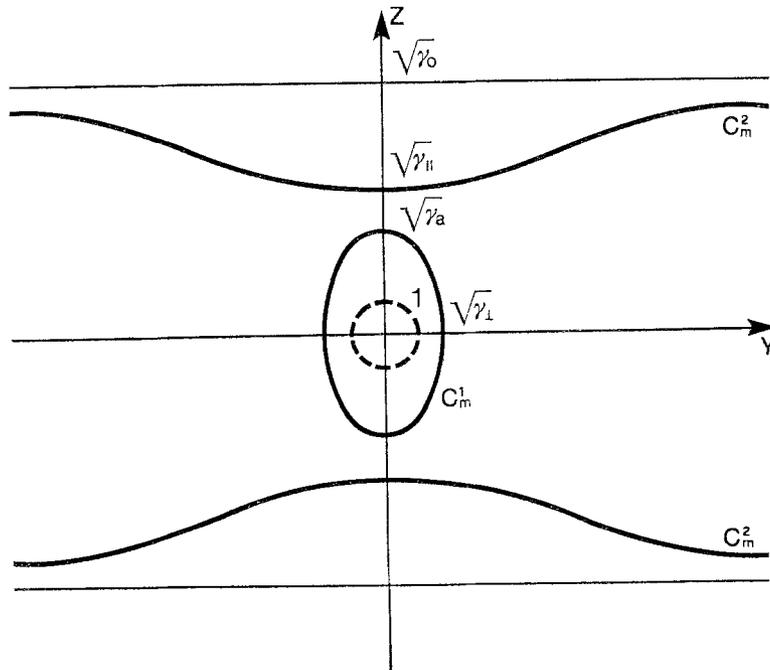


Fig. 1.

$$(C_2) \quad \gamma_{\parallel} < \gamma_a < \gamma_0$$

La figure obtenue dans ce cas est identique à la figure 1, les racines γ_{\parallel} et γ_a étant seulement échangées.

On déduit de l'étude de ces deux cas que le cône (Γ_M) se décompose topologiquement en une nappe intérieure $\Gamma_M^{(1)}$ et une nappe extérieure $\Gamma_M^{(2)}$. La partie intérieure de $\Gamma_M^{(1)}$ correspond aux ondes magnéto-soniques rapides et la partie extérieure de $\Gamma_M^{(2)}$, aux ondes magnéto-soniques lentes.

(C₃) $\gamma_{\parallel} < \gamma_0 < \gamma_a$.

On obtient pour la courbe (C_M) la figure suivante

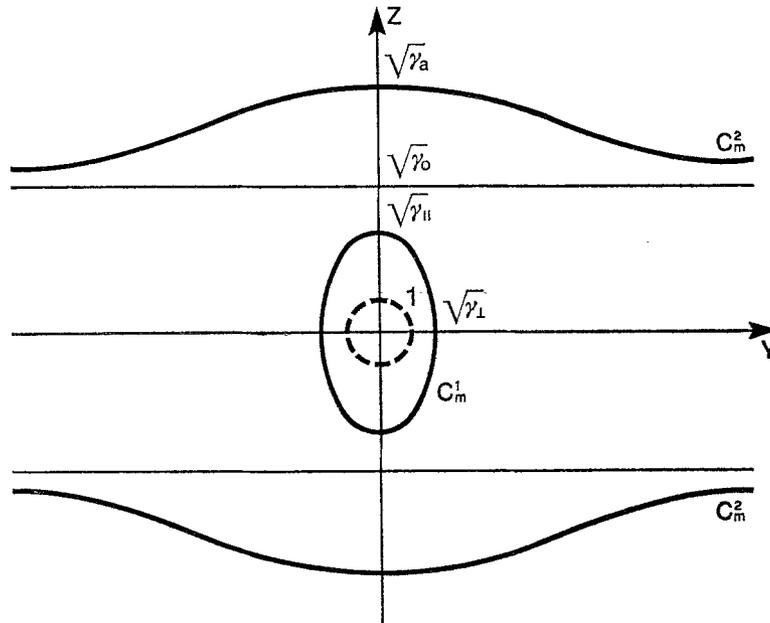


Fig. 2.

(C₄) $\gamma_a < \gamma_0 < \gamma_{\parallel}$.

La figure obtenue dans ce cas est identique à la figure 2, les racines γ_a et γ_{\parallel} étant seulement échangées.

Il résulte de l'étude de ces deux derniers cas que le cône (Γ_M) se compose d'une nappe intérieure $\Gamma_M^{(1)}$ et d'une nappe extérieure $\Gamma_M^{(2)}$. Les parties intérieures de $\Gamma_M^{(1)}$ et de $\Gamma_M^{(2)}$ correspondent respectivement aux ondes magnéto-soniques rapides et aux ondes magnéto-soniques lentes.

(C₅) $\gamma_{\parallel} = \gamma_a < \gamma_0$.

On obtient dans ce cas pour la courbe (C_M) la figure suivante:

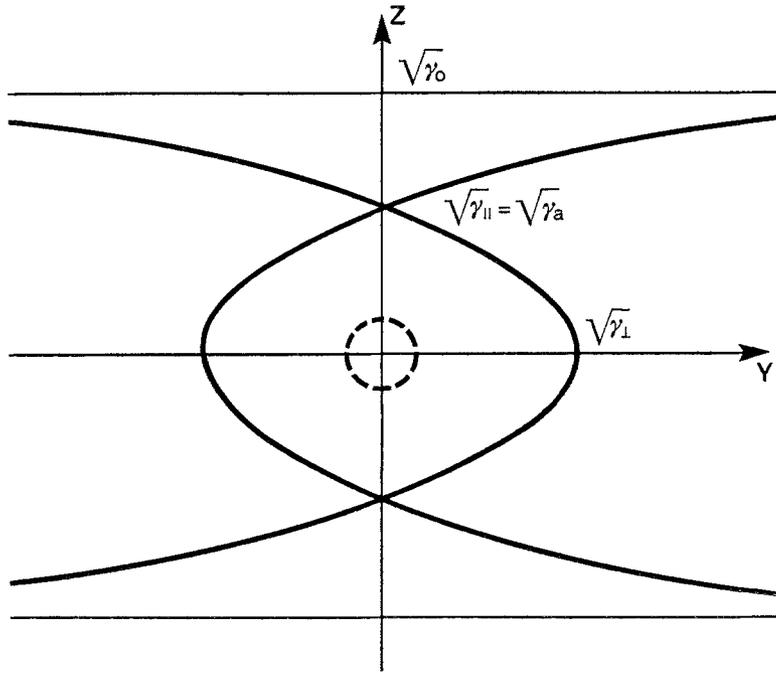


Fig. 3.

On déduit de l'étude de ce cas que le cône (Γ_M) a deux génératrices $x = 0, y = 0, z^2 = (1 - \lambda)^{-1} (1 + \beta) t^2$ contenues dans le 2-plan Π_1 défini par (U, h) .

(d) Sous les hypothèses faites, nous nous proposons d'exprimer en termes de $\eta_{||}$ et η_{\perp} les inégalités $(C_1), (C_2), (C_3)$ et (C_4) et l'égalité (C_5) . On déduit de (C_1) d'après (9.8) et de (H) :

$$(I_1) \quad \sigma_{\perp} \eta_{\perp}^2 / \sigma_{||} (1 + \xi) \leq \eta_{||} < (1 + \eta_{\perp}) / (1 + e\sigma_{||})$$

(C_2) entraîne d'après (9.8)

$$(I_2) \quad (1 + \eta_{\perp}) / (1 + e\sigma_{||}) < \eta_{||} < (1 + \eta_{\perp} + e\sigma_{\perp} \eta_{\perp}^2 / (1 + \delta_{\perp})) / (1 + me\sigma_{||}) .$$

Il résulte de (C_3) d'après (9.8) et des conditions (\bar{H})

$$(I_3) \quad (1 / (1 + me\sigma_{||})) (1 + \eta_{\perp} + e\sigma_{\perp} \eta_{\perp}^2) < \eta_{||} \leq 1 + \eta_{\perp}$$

(C_4) entraîne d'après (9.8)

$$(I_4) \quad \sigma_{\perp} \eta_{\perp}^2 / \sigma_{||} (m - 1) (1 + \delta_{\perp}) < \eta_{||} < (1 / (1 + me\sigma_{||})) (1 + \eta_{\perp} + e\sigma_{\perp} \eta_{\perp}^2 / (1 + \delta_{\perp}))$$

où nous avons supposé $(m - 1) \neq 0$. Nous sommes ainsi conduits ici à adopter l'hypothèse suivante portant sur la quantité m

$$(9.8) \quad (m - 1) > 0 .$$

Cette hypothèse est, d'après (7.12) équivalente à $\xi - \delta_{\perp} > 0$.

Soit d'après (4.33) et l'expression (7.9) de δ_{\perp}

$$(H_5) \quad 1 - \frac{r}{P_{\parallel}} \frac{\partial P_{\parallel}}{\partial r} - \frac{|h|}{P_{\parallel}} \frac{\partial P_{\parallel}}{\partial |h|} > 0 .$$

Soulignons que sous les hypothèses faites, les inégalités (I_4) sont impossibles pour un fluide réel satisfaisant à

$$(m - 1) \leq 0 \Rightarrow 1 - \frac{r}{P_{\parallel}} \frac{\partial P_{\parallel}}{\partial r} - \frac{|h|}{P_{\parallel}} \frac{\partial P_{\parallel}}{\partial |h|} \leq 0 .$$

L'égalité $m - 1 = 0$ est vérifiée par un fluide anisotrope polytropique [17]. Pour un tel fluide le cas (C_4) , et par conséquent les inégalités (I_4) , est impossible.

(C_5) entraîne d'après (9.7)

$$(9.9) \quad (1 + e\sigma_{\parallel})\eta_{\parallel} = 1 + \eta_{\perp} .$$

On déduit de cette étude que, l'opérateur différentiel $P^{\mu\nu\lambda e} \partial_{\mu\nu\lambda e}$ associé aux ondes magnéto-soniques est, sous les hypothèses faites, hyperbolique strict sous les inégalités (I_i) ($i = 1, \dots, 4$) et hyperbolique non strict sous l'égalité (9.9).

Le cône (Γ_A) se compose de deux hyperplans $z = \pm t\sqrt{(1 - \lambda)^{-1}(1 + \beta)}$ tangents à (Γ_M) le long des génératrices du 2-plan Π_1 défini par (U, h) . L'intersection de ces hyperplans est le 2-plan Π_a défini par $z = 0, t = 0$, c'est à dire le 2-plan orthogonal au 2-plan Π_1 . On en déduit que l'opérateur différentiel associé aux ondes d'Alfven est hyperbolique non strict, il est le produit de deux opérateurs hyperboliques stricts correspondant aux deux hyperplans (Γ_A) .

Dans le repère propre considéré, (4.39) est l'hyperplan $t = 0$ dont l'intersection avec (Γ_M) ou chacun des hyperplans (Γ_A) est le 2-plan Π_a .

L'opérateur différentiel $U^e \partial_e$ associé aux ondes d'entropie est hyperbolique strict. Nous énoncerons:

THÉORÈME 6. - L'opérateur différentiel $P^{\mu\nu\lambda e} \partial_{\mu\nu\lambda e}$ associé aux ondes magnéto-soniques est hyperbolique strict sous les inégalités (I_i) ($i = 1, \dots, 4$) et hyperbolique non strict sous l'égalité (9.9). Les opérateurs différentiels $U^e \partial_e$ et $Q^{\nu e} \partial_{\nu e}$ associés aux ondes d'entropie et aux ondes d'Alfven sont respectivement hyperbolique strict et hyperbolique non strict.

Soulignons que si on violait les inégalités (\bar{H}) , par conséquent les inégalités (I_i) ($i = 1, \dots, 4$), certaines vitesses de propagation seraient réelles, d'autres imaginaires;

les opérateurs différentiels $P^{\mu\nu\lambda e}\partial_{\mu\nu\lambda e}$ et $Q^{re}\partial_{re}$ ne seraient ni totalement hyperboliques ni elliptiques.

Le système différentiel fondamental (S) de la magnétohydrodynamique anisotrope relativiste n'est donc pas hyperbolique strictement.

(e) De l'étude du (C) et du (d) du présent paragraphe on déduit immédiatement:

Les vitesses de propagation V_{\perp}^s, V_A, V^{M-} et V^{M+} respectivement des ondes soniques dans la direction longitudinale, des ondes d'Alven, des ondes magnéto-soniques lentes et rapides vérifient les inégalités suivantes:

$$\begin{aligned} 0 < V^{M-} < V_{\parallel}^s < V^A < V^{M+} < C & \text{ sous } (I_1) \\ 0 < V^{M-} < V^A < V_{\parallel}^s < V^{M+} < C & \text{ sous } (I_2) \\ 0 < V^A < V^{M-} < V_{\parallel}^s < V^{M+} < C & \text{ sous } (I_3) \\ 0 < V_{\parallel}^s < V^{M-} < V_A < V^{M+} < C & \text{ sous } (I_4) . \end{aligned}$$

Ainsi, sous les inégalités (I_1) et (I_2) les ondes étudiées possèdent des propriétés similaires à celles obtenues en magnétohydrodynamique isotrope; mais sous les inégalités (I_3) et (I_4) de nouvelles propriétés particulières à la magnétohydrodynamique anisotrope apparaissent.

(f) Supposons que les quantités γ_{\parallel} et γ_{\perp} définissant les vitesses sonique et magnéto-sonique de propagation dans la direction longitudinal et dans la direction transversal soient égales à 1

$$(9.10) \quad \gamma_{\parallel} = 1, \quad \gamma_{\perp} = 1 .$$

(9.10) entraînent d'après la définition des quantités γ_{\parallel} et γ_{\perp} :

$$(9.11) \quad e\sigma_{\parallel}\eta_{\parallel} = 1 + \delta_{\perp} .$$

Géométriquement les conditions (9.10) expriment que la partie de la nappe $\Gamma^{(1)}$ correspondant aux ondes magnéto-soniques rapides coïncide avec (Γ); mais, contrairement à ce qui se passe en magnétohydrodynamiques isotrope, ceci n'implique pas que la partie de la nappe $\Gamma_{\mathbf{M}}^{(2)}$ correspondant aux ondes magnéto-soniques lentes coïncide avec (Γ_A).

(g) Etudions l'intersection $(\Gamma_A) \cap (\Gamma_{\mathbf{M}})$. Si nous portons $z^2 = (1 - \lambda)^{-1}(1 + \beta)t^2$ dans l'équation de $(\Gamma_{\mathbf{M}})$ nous obtenons:

$$(9.12) \quad t^2(x^2 + y^2)[m(1 + \beta)(1 - \alpha) - \gamma_{\parallel}(1 - \lambda)] = t^2(x^2 + y^2)(1/\gamma_0 - 1/\gamma_a)\gamma_{\parallel}(1 + \beta) = 0 .$$

Il en résulte que si $\gamma_a \neq \gamma_0$, c'est à dire d'après (7.11) si $(y^A) \neq 0$, l'intersection $(\Gamma_A) \cap (\Gamma_{\mathbf{M}})$ est alors le 2-plan II_a et les génératrices de $(\Gamma_{\mathbf{M}})$ contenues dans le 2-plan II_1 et définies par $z^2 = (1 - \lambda)^{-2}(1 + \beta)t^2$.

10. – Conclusion.

Le présent travail a été consacré à la construction d'une théorie relativiste phénoménologique de la magnétohydrodynamique anisotrope. Dans la première section de ce travail, nous avons construit un schéma fluide anisotrope relativiste et fait une étude hydro-thermodynamique de ce schéma fluide. Nous avons déduit le système fondamental de la magnétohydrodynamique anisotrope relativiste.

L'étude des variétés caractéristiques (ou ondes) a fait l'objet de la seconde section. Nous avons mis en évidence trois types d'ondes comme en magnétohydrodynamique isotrope (parfaite): les ondes d'entropie, les ondes magnétosoniques et les ondes d'Alven.

Dans la troisième section, nous avons établi, pour les rayons associés aux ondes mises en évidence, la propriété fondamentale des rayons concernant la propagation des discontinuités infinitésimales des variables caractérisant le propagation fluide.

Dans la quatrième section, nous avons mis en lumière les conditions sous lesquelles les vitesses de propagation des ondes magnétosoniques et des ondes d'Alfvén sont réelles. Ces conditions qui impliquent l'absence d'instabilités dans le fluide anisotrope envisagé sont définies par des inégalités satisfaites par les quantités η_{\parallel} et η_{\perp} . L'étude des cônes d'ondes nous a permis, d'une part, de placer les unes par rapport aux autres les vitesses soniques, magnétosoniques et d'Alfvén, d'autre part, de mettre en lumière le caractère d'hyperbolicité des opérateurs différentiels associés aux différentes ondes. Cette étude a permis de mettre en évidence certaines particularités de la propagation des ondes en magnétohydrodynamique anisotrope.

Si, abandonnant le point de vue mathématique nous nous plaçons à un point de vue physique, nous pouvons dire que notre étude constitue une approche théorique qualitative du problème des plasmas anisotropes à collisions rares. A l'approximation classique nos résultats englobent tous les résultats antérieurs et les présentent de manière plus cohérente et rigoureuse.

Remerciements. Ce travail a été réalisé sous la direction de M. A. LICHNEROWICZ. Qu'il trouve ici, l'expression de ma profonde gratitude pour ses conseils et critiques qui m'ont guidé tout le long de ces recherches.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] G. F. CHEW - M. L. GOLDBERGER - F. E. Low, Proc. Roy. Soc., A **236** (1956), pp. 112-118.
- [2] R. V. POLOVIN - L. T. TSINTSADZE, Ukraïnski fizitchni Zhurnal, **4** (1959), pp. 30-38.
- [3] R. LÜST, in Summer Course in Plasma Physics, 1960, p. 201, ed. by C. F. Wandel Danish A.E.C.

- [4] T. F. VOLKOV, *Problems in Plasma Theory*, 1964, Vol. IV, ed. par M. A. LEONTOVICH (Trad. par Ronson Acad. Press, London, 1966).
 - [5] B. A. SHRAUNER, *J. Plasma Phys.*, **1** (1967), pp. 361-381.
 - [6] Y. KATO - M. TAJIRI - T. TANIUTI, *J. Phys. Soc. Japan*, **21** (1967), pp. 765-777.
 - [7] V. BARANOW - M. D. KARTALEV, *izvestiya Akademii Nauk SSSR, mekhanika Zhidkosti i gaza*, **6** (1970), pp. 3-10.
 - [8] M. D. KARTALEV, *Soviet phys. Doklady*, **17** (1973), pp. 744-746.
 - [9] A. LICHNEROWICZ, *Théories relativistes de la gravitation et de l'électromagnétisme*, Paris, Masson, 1955.
 - [10] A. LICHNEROWICZ, *Relativistic Hydrodynamics and Magnetohydrodynamics*, New York, Benjamin, 1967.
 - [11] PHAM MAU QUAN, Thèse, Paris, 1954 (Bologna, Cooperativa tipografica Azzoguidi, 1955).
 - [12] A. H. TAUB, *Relativistic Hydrodynamics*, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, **3** (1959), p. 312; et in *Lectures in Applied Mathematics*, **3** (1967).
 - [13] M. CISSOKO, *Ann. Inst. Henri Poincaré*, vol. **22** (1975), p. 1-27.
 - [14] A. LICHNEROWICZ, *Ann. Inst. Henri Poincaré*, **7** (1967), pp. 271-302.
 - [15] A. LICHNEROWICZ, *Comm. Math. Phys.*, **12** (1969), pp. 145-174.
 - [16] Y. CHOQUET-BRUHAT, *Astr. Acta*, **6** (1960), pp. 354-365.
 - [17] J. LERAY, *Hyperbolic differetial equations*, Institut for advanced Study, Princeton, 1952, multigraphié.
 - [18] A. LICHNEROWICZ, *Comm. Math. Phys.*, **1** (1966), pp. 328-373.
-