Ondes asymptotiques non linéaires (*).

GUY BOILLAT (Clermont-Ferrand)

A DARIO GRAFFI à l'occasion de son 70-ème anniversaire

Résumé. — *Le terme du premier ordre de l'onde asymptotique a une forme particulièrement simple non seulement quand la solution de base est constante mais aussi, en ce qui concerne sa norme, lorsque les équations dérivent d'un principe variationnel. Par un changement des variables de champ les équations d'évolution d'Euler s'écrivent comme un système symétrique du premier ordre avec second membre antisymétrique dont toutes les matrices sont constantes sauf celle qui multiplie la dérivée temporelle et qui est un double gradient.*

Un champ $u(x^\alpha)$ ($\alpha = 0, 1, 2, \dots, n$) fonction du temps ($x^0 = t$) et des variables d'espace x^i ($i = 1, 2, \dots, n$) satisfait à un ensemble d'équations aux dérivées partielles ramené à un système du premier ordre quasi linéaire [1],

$$(1) \quad A^\alpha(u, x^\beta) u_\alpha = f(u, x^\beta), \quad A^0 = I,$$

où les A^α sont des matrices carrées $N \times N$.

Nous poserons

$$(2) \quad u = u_0(x^\alpha) + \frac{1}{\omega} u_1(x^\alpha; \xi) + \frac{1}{\omega^2} u_2(x^\alpha; \xi) + \dots$$

suivant J. LERAY, L. GÄRDING et T. KOTAKE [2] qui ont traité le cas linéaire en généralisant les développements de P. D. LAX et D. LUDWIG [3], [4] et Mme Y. CHOQUET [5] qui a étudié le cas non linéaire. $u_0(x^\alpha)$ est une solution de (1), ω une constante et $\xi = \omega\varphi$ où $\varphi(x^\alpha)$, la phase, est une fonction à déterminer.

On voit immédiatement que les ondes de discontinuités seront obtenues formellement en choisissant

$$u_p(x^\alpha; \xi) = \frac{\xi^p}{p!} \pi_p(x^\alpha)$$

et en supposant que (2) est valable d'un côté de la surface d'onde ($\varphi > 0$) tandis que de l'autre côté ($\varphi < 0$) on aura simplement $u = u_0$.

(*) Entrata in Redazione il 15 giugno 1975.

On a,

$$\begin{aligned} A^\alpha(u, x^\beta) &= A^\alpha(u_0, x^\beta) + \frac{1}{\omega} \nabla A^\alpha(u_0, x^\beta) u_1 + O\left(\frac{1}{\omega^2}\right), \\ \partial_\alpha u &= u_{0\alpha} + \frac{1}{\omega} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x^\alpha} + \omega \frac{\partial u_1}{\partial \xi} \varphi_\alpha \right) + \frac{1}{\omega} \frac{\partial u_2}{\partial \xi} \varphi_\alpha + O\left(\frac{1}{\omega^2}\right), \\ f(u, x^\alpha) &= f(u_0, x^\alpha) + \frac{1}{\omega} \nabla f(u_0, x^\alpha) u_1 + O\left(\frac{1}{\omega^2}\right), \end{aligned}$$

où $\varphi_\alpha = \partial_\alpha \varphi$ et le nabla est le gradient par rapport aux composantes de u . On en déduit en portant dans (1),

$$(3) \quad A_0^\alpha \varphi_\alpha \frac{\partial u_1}{\partial \xi} = 0, \quad A_0^\alpha = A^\alpha(u_0, x^\beta),$$

$$(4) \quad A_0^\alpha \left(\frac{\partial u_1}{\partial x^\alpha} + \varphi_\alpha \frac{\partial u_2}{\partial \xi} \right) + \nabla A_0^\alpha u_1 \left(u_{0\alpha} + \frac{\partial u_1}{\partial \xi} \varphi_\alpha \right) = \nabla f_0 u_1.$$

Définissons le vecteur normal unitaire $n(x^\alpha)$ de composantes $n_i = \varphi_i / |\text{grad } \varphi|$, $\sum n_i^2 = 1$. Le système (1) est hyperbolique si la matrice $A_n = A^i n_i$ admet N vecteurs propres linéairement indépendants correspondant à des valeurs propres $\lambda(u, x^\alpha; n)$ réelles. On distingue les vecteurs propres droits et gauches, $d(u, x^\alpha; n)$, $l(u, x^\alpha; n)$,

$$(5) \quad (A_n - \lambda I) d_I = 0, \quad l_{I'} (A_n - \lambda I) = 0, \quad I, I' = 1, 2, \dots, m$$

où λ est de multiplicité m .

La solution de l'équation (3) s'écrit,

$$(6) \quad u_1 = u^I(x^\alpha; \xi) d_I(u_0, x^\alpha; n) + v_1(x^\alpha)$$

avec m fonctions scalaires u^I et un vecteur v_1 que l'on peut choisir nul, où la phase φ vérifie l'équation,

$$(7) \quad \psi(u_0, x^\alpha; \varphi_\beta) = 0, \quad \psi(u, x^\alpha; \varphi_\beta) = \varphi_i + |\text{grad } \varphi| \lambda(u, x^\alpha; n).$$

Les rayons d'onde sont donnés par,

$$(8) \quad \frac{dx^\alpha}{d\sigma} = \frac{\partial \psi_0}{\partial \varphi_\alpha}, \quad \frac{d\varphi_\alpha}{d\sigma} = - \frac{\partial \psi_0}{\partial x^\alpha}, \quad \psi_0(x^\alpha; \varphi_\beta) = \psi(u_0(x^\alpha), x^\alpha; \varphi_\beta).$$

C'est un système différentiel non linéaire pour les $2n$ inconnues x^i, φ_i ; il est inutile de considérer φ_0 qui ne figure pas dans les seconds membres et $x^0 = \sigma$. Si $(x^i)_{\sigma=0} = x_0^i$, on se donnera la valeur de la phase à l'instant initial

$$(\varphi)_{t=0} = \phi(x_0^i)$$

et on aura ainsi, $(\varphi_i)_{i=0} = \phi_i(x_0^j)$ qui définira la normale n_0 au point x_0^i . Le système (8) fournira alors après intégration l'équation des rayons

$$(9) \quad x^i = x^i(x_0^j, \sigma), \quad x^i(x_0^j, 0) = x_0^i, \quad t = \sigma.$$

Si le jacobien

$$J = D(x^i)/D(x_0^i)$$

est fini et non nul on pourra inverser ces formules

$$(9') \quad x_0^i = x_0^i(x^j, t), \quad \sigma = t$$

et on aura,

$$(10) \quad \varphi(x^\alpha) = \phi(x_0^i(x^j, t)).$$

En prenant $v_1 = 0$ et en portant (6) dans (4) multipliée par $l_{I'}(u_0, x^\alpha; n)$ afin d'en chasser u_2 , il vient,

$$(11) \quad l_{I'} A_0^\alpha \left(\frac{\partial u^I}{\partial x^\alpha} d_{I'} + u^I \partial_\alpha d_{I'} \right) + l_{I'} \nabla A_0^\alpha u_1 \left(u_{0\alpha} + \varphi_\alpha \frac{\partial u^I}{\partial \xi} d_{I_0} \right) = l_{I'} \nabla f_0 u_1.$$

D'une part [6],

$$l_{I'} A_0^\alpha d_{I'} = \frac{\partial \psi_0}{\partial \varphi_\alpha} l_{I'} d_{I'}$$

et, d'autre part, en dérivant

$$A^\alpha \varphi_\alpha d_I = \psi d_I$$

dans la direction de u_1 ,

$$\nabla A^\alpha \varphi_\alpha u_1 d_I + (A^\alpha \varphi_\alpha - \psi I) \nabla d_I u_1 = (\nabla \psi u_1) d_I,$$

d'où,

$$l_{I'} \nabla A^\alpha \varphi_\alpha u_1 d_I = (\nabla \psi u_1) l_{I'} d_I.$$

On peut réécrire (11),

$$(12) \quad \left\{ \frac{\partial u^I}{\partial \sigma} + (\nabla \psi_0 u_1) \frac{\partial u^I}{\partial \xi} \right\} (l_{I'} d_I)_0 + c_{I'I}^0 u^I = f_{I'I}^0 u^I, \quad u_1 = u^I d_{I'}$$

où les coefficients

$$(13) \quad c_{I'I}^0 = l_{I'} (A_0^\alpha \partial_\alpha d_{I'} + \nabla A_0^\alpha d_{I'} u_{0\alpha}), \quad f_{I'I}^0 = (l_{I'} \nabla f d_I)_0$$

deviennent des fonctions de σ par la substitution (9). On retrouve le système aux discontinuités en posant $u^I = \xi \pi^I(x^\alpha)$ ⁽¹⁾.

Les équations (12) ne sont pas linéaires sauf dans le cas exceptionnel,

$$\nabla \lambda d_I \equiv 0 .$$

En effet,

$$\nabla \psi_0 u_1 = |\text{grad } \varphi| \nabla \lambda_0 d_{I^0} u^I .$$

Cependant (12) s'intègre par des quadratures lorsque l'onde est simple ($m = 1$). La non-linéarité provoque, comme l'a montré Mme Choquet, une distorsion du facteur de forme tandis que l'onde se propage sans déformation si elle est exceptionnelle [5].

Beaucoup de systèmes de la physique sont, par chance, conservatifs, c'est-à-dire peuvent se mettre sous la forme,

$$(14) \quad \partial_\alpha f^\alpha(u) = f(u, x^\beta), \quad f^0 = u$$

et leurs ondes multiples sont, en conséquence, exceptionnelles [7]. Il en résulte que (12) se résout encore facilement. De plus, on a,

$$\begin{aligned} A^\alpha(u) &= \nabla f^\alpha, \\ \nabla A^\alpha d_I u_\alpha &= \nabla \nabla f^\alpha d_I u_\alpha = \nabla \nabla f^\alpha u_\alpha d_I = \nabla A^\alpha u_\alpha d_I = \partial_\alpha A^\alpha d_I, \end{aligned}$$

de sorte que,

$$(15) \quad c_{I'I}^0 = l_{I'^0} \partial_\alpha (A_0^\alpha d_{I^0})$$

qui se réduit simplement dans le cas unidimensionnel ($n = 1$) à

$$c_{I'I}^0 = l_{I'^0} \left(\frac{\partial d_{I^0}}{\partial \sigma} + \frac{\partial \lambda_0}{\partial x} d_{I^0} \right).$$

1. – Variation de l'élément de volume.

Avant de poursuivre nous rappellerons une formule bien connue. On sait que le jacobien J mesure le rapport des éléments de volume composés des mêmes particules à l'instant t et à l'instant initial. En appliquant la règle de dérivation d'un

⁽¹⁾ On notera que $\partial \xi / \partial \sigma = \omega(\partial \psi_0 / \partial \varphi_\alpha) \varphi_\alpha = \omega \psi_0 = 0$ d'après le théorème d'Euler sur les fonctions homogènes et (7).

déterminant,

$$\begin{aligned} \frac{1}{J} \frac{\partial J}{\partial \sigma} &= \frac{D(x_0^i)}{D(x^i)} \left\{ \frac{D(\partial x^1 / \partial \sigma, \dots, x^n)}{D(x_0^1, \dots, x_0^n)} + \dots + \frac{D(x^1, \dots, \partial x^n / \partial \sigma)}{D(x_0^1, \dots, x_0^n)} \right\} = \\ &= \frac{D(A_0^1, \dots, x^n)}{D(x^1, \dots, x^n)} + \dots + \frac{D(x^1, \dots, A_0^n)}{D(x^1, \dots, x^n)} = \partial_i A_0^i, \end{aligned}$$

où les $A_0^i = \partial \psi_0 / \partial \varphi_i$ sont les composantes de la vitesse radiale. Pour la suite il est utile d'introduire

$$(16) \quad \theta(\sigma, x_0^i) = \sqrt{J}.$$

2. — Solution de base constante.

Un premier cas intéressant est celui où $u_0 = \text{Cte}$ ce qui suppose que $f(u_0, x^\alpha) = 0$. Si les matrices A^α ne dépendent pas explicitement des coordonnées on voit immédiatement d'après (8) que les φ_i sont constants le long des rayons et que

$$(17) \quad x^i = x_0^i + A^i(u_0, n_0) \sigma,$$

tandis que (13) fournit [6],

$$c_{I'I}^0 = l_{I'} A_0^i \frac{\partial d_{I'}}{\partial \varphi_\beta} \varphi_{\alpha\beta} = (l_I d_I)_0 \frac{\partial}{\partial \sigma} \text{Log } \theta.$$

θ^2 est un polynôme de degré $n-1$ au plus en σ et s'exprime à l'aide des courbures totale et moyenne de la surface $\phi(x_0^i) = \text{Cte}$ lorsque la vitesse λ_0 est indépendante de n [6], [8].

Si l'onde est simple, (12) fournit l'équation,

$$\frac{\partial u^1}{\partial \sigma} + (\nabla \psi d)_0 u^1 \frac{\partial u^1}{\partial \xi} + \frac{1}{\theta} \frac{\partial \theta}{\partial \sigma} u^1 = v_0 u^1,$$

$$u_1 = u^1 d_0, \quad v_0 = (l \nabla f d / l d)_0,$$

qui se ramène à [9],

$$(18) \quad \frac{\partial v}{\partial \tau} + v \frac{\partial v}{\partial \xi} = 0$$

avec

$$(19) \quad u^1 = \frac{v}{\theta} e^w, \quad \tau = \int_0^\sigma (\nabla \psi d)_0 \frac{e^w}{\theta} d\sigma, \quad w = \int_0^\sigma v_0 d\sigma.$$

En particulier si le second membre de (1) ne dépend que de u , $w = v_0 \sigma$. On se donne à l'instant initial,

$$u^1 = F(x_0^i; \xi_0), \quad \xi_0 = \omega \phi$$

et v est déterminé par l'équation implicite,

$$(20) \quad v = F(x_0^i; \xi - v\tau)$$

qui met en évidence la distorsion de l'onde ⁽¹⁾. Les singularités de u apparaîtront quand $\theta = 0$ (caustique) ou lorsque la dérivée de (20) par rapport à v sera nulle,

$$1 + \tau \frac{\partial F}{\partial \xi_0}(x_0^i; \xi - v\tau) = 0.$$

Au contraire si l'onde est exceptionnelle, on aura simplement,

$$(21) \quad u^I = \frac{1}{\theta} w_I^I(x_0^i, \sigma) F^{I'}(x_0^i; \xi)$$

où les coefficients w_I^I vérifient,

$$(22) \quad (l_I d_I)_0 (\partial w_I^I / \partial \sigma) = f_{I'}^0 w_I^I, \quad (w_I^I)_{\sigma=0} = \delta_I^I,$$

système différentiel à coefficients constants si $f = f(u)$. La substitution de (9') permet alors d'écrire les u^I en fonction des x^α .

3. – Systèmes à intégrale d'énergie.

Un système conservatif (14),

$$\partial_i u + \partial_j f^j(u) = f(u, x^\beta)$$

qui admet une intégrale d'énergie

$$(23) \quad \partial_\alpha h^\alpha(u) = g(u, x^\beta), \quad h^0 = h,$$

où $h(u)$ est une fonction convexe (le hessien $H = \nabla \check{\nabla} h$ est une matrice $N \times N$ définie positive; $\check{}$ indique la transposition) peut se mettre sous une forme symétrique [10]

⁽¹⁾ En prenant $F(x_0^i; \xi_0) = \xi_0 \pi(x_0^i)$ on retrouve la loi d'évolution des discontinuités du premier ordre (des dérivées premières) [6].

et même peut s'écrire [11] ⁽¹⁾,

$$(24) \quad A'^{\alpha} u'_{\alpha} = f, \quad A'^{\alpha} = \nabla' \check{\nabla}' h'^{\alpha}, \quad h'^0 = h', \quad A'^0 = H' = H^{-1}$$

où les

$$(25) \quad h'^{\alpha} = \check{u}' f^{\alpha} - h^{\alpha}$$

sont $n+1$ fonctions des variables nouvelles de champ,

$$u' = \check{\nabla} h.$$

Entre les matrices A^{α} et A'^{α} et les vecteurs propres existent les relations,

$$(26) \quad A'^{\alpha} = A^{\alpha} H', \quad d'_I = H d_I, \quad l'_I = l_I.$$

De plus, en raison de la symétrie des matrices A'^{α} ,

$$\check{l}'_I = d'_I$$

et si l'on impose, ce qui est toujours possible puisque le système de vecteurs propres est complet, la condition,

$$(27) \quad l_I d_{I'} = l'_I H' d'_{I'} = \delta_{II'},$$

ces vecteurs seront orthonormés par H ,

$$(28) \quad \check{d}'_I H d_I = \delta_{II}.$$

Il reste encore un certain arbitraire pour les vecteurs propres. Donnons-nous m vecteurs propres indépendants $\bar{d}_I$ et posons

$$\Delta_{I'I} = \check{d}'_I H \bar{d}_I.$$

Le changement

$$\bar{d}_{I'} = \alpha^I_{I'} d_I, \quad \det \alpha = \det (\alpha^I_{I'}) \neq 0$$

et (28) impliquent

$$\Delta = \alpha \check{\alpha}.$$

⁽¹⁾ On notera que les matrices A^i ne peuvent être symétriques si les composantes de u n'ont pas toutes la même dimension physique. En effet, si elles le sont, il existe la densité d'énergie $h = \frac{1}{2} \check{u} u$ et les termes de cette somme doivent évidemment avoir la même dimension.

Comme $\Delta = (\Delta_{IT})$ est une matrice $(m \times m)$ symétrique définie positive, il est toujours possible de trouver α telle que cette condition soit vérifiée. Mais on voit que αT convient aussi, où T est une matrice unitaire: $\tilde{T} = T^{-1}$. Bien entendu, si $m = 1$, le vecteur propre d sera défini au signe près par (28).

4. — Equations variationnelles.

A partir d'un lagrangien,

$$L = L(q_\alpha^s, q^s), \quad q_\alpha^s = \partial_\alpha q^s(x^\beta), \quad s = 1, 2, \dots, \bar{N},$$

on déduit les équations d'Euler,

$$(29) \quad \partial_\alpha \left(\frac{\partial L}{\partial q_\alpha^s} \right) - \frac{\partial L}{\partial q^s} = 0,$$

que l'on peut mettre sous la forme (14) avec ⁽¹⁾,

$$(30) \quad u = \begin{bmatrix} \frac{\partial L}{\partial q_0^s} \\ q_i^s \\ q^s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_s^0 \\ u_i^s \\ u^s \end{bmatrix}, \quad f^j = \begin{bmatrix} \frac{\partial L}{\partial q_j^s} \\ -q_0^s \delta_i^j \\ 0 \end{bmatrix}, \quad f = \begin{bmatrix} \frac{\partial L}{\partial q^s} \\ 0 \\ q_0^s \end{bmatrix}$$

où la seconde colonne indique les noms des composantes de u . Les indices s et i sont muets et u a $N = (n+2)\bar{N}$ composantes tandis que les zéros qui figurent dans f^j et f représentent respectivement $\bar{N}$ et $n\bar{N}$ zéros.

Il s'y ajoute les contraintes,

$$\partial_i u^s - u_i^s = 0$$

qui ne font intervenir que des dérivées spatiales de u et qui sont vraies à un instant quelconque pourvu qu'elles le soient à l'instant initial. En effet,

$$\partial_t(\partial_i u^s - u_i^s) = \partial_i(\partial_t u^s) - \partial_t u_i^s = \partial_i q_0^s - \partial_t q_0^s = 0$$

compte tenu des équations d'évolution (30).

Si l'on écrit le développement (2),

$$u_i^s = u_{i(0)}^s + \frac{1}{\omega} u_{i(1)}^s + \dots, \quad u^s = u_{(0)}^s + \frac{1}{\omega} u_{(1)}^s + \frac{1}{\omega^2} u_{(2)}^s + \dots,$$

⁽¹⁾ Si $L = L(q_\alpha^s)$, on ne fera pas figurer q^s dans u et f sera nul.

on voit tout de suite que les contraintes imposent,

$$\frac{\partial u_{(1)}^s}{\partial \xi} = 0,$$

c'est-à-dire (avec le choix $v_1 = 0$ dans l'équation (6)) $u_{(1)}^s = 0$ ainsi que

$$u_{i(1)}^s = q_i^s \frac{\partial u_{(2)}^s}{\partial \xi},$$

conditions à satisfaire par les données initiales.

Il est facile de vérifier l'existence de (23) où,

$$h = q_0^s \frac{\partial L}{\partial q_0^s} - L, \quad h^i = q_0^s \frac{\partial L}{\partial q_i^s}, \quad g = 0$$

et on supposera, en plus de l'hyperbolicité de (29), que h est convexe comme toute bonne densité d'énergie.

Il vient alors,

$$(31) \quad u' = \begin{bmatrix} q_0^s \\ -\frac{\partial L}{\partial q_i^s} \\ -\frac{\partial L}{\partial q^s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_0'^s \\ u_s'^i \\ u_s' \end{bmatrix}, \quad f^j = \begin{bmatrix} -u_s'^j \\ -u_0'^s \delta_i^j \\ 0 \end{bmatrix}, \quad f = \begin{bmatrix} -u_s' \\ 0 \\ u_0'^s \end{bmatrix}$$

puis, d'après (25),

$$(32) \quad h' = L - q_i^s \frac{\partial L}{\partial q_i^s} - q^s \frac{\partial L}{\partial q^s}, \quad h'^i = h^i = -u_0'^s u_s'^i.$$

On déduit immédiatement de (31) ou (32) que

$$(33) \quad A'^i = \text{Cte}$$

et comme f est fonction linéaire de u' la seule non-linéarité de (24) résidera dans le coefficient $H'(u')$ de la dérivée temporelle,

$$H'(u')u'_i + A'^i u'_i = B' u', \quad \check{H}' = H', \quad \check{A}'^i = A'^i$$

et B' est une matrice antisymétrique. En effet,

$$(34) \quad B' = \nabla' f = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -I \\ 0 & 0 & 0 \\ I & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \check{B}' = -B'.$$

Passons maintenant au calcul des coefficients de (12). D'après (15), (26),

$$\begin{aligned} c_{II'} &= l_I' \partial_\alpha (A^\alpha d_I') = l_I' \partial_\alpha (A'^\alpha d_I') = l_I' \partial_i (H' d_I') + l_I' A'^i \partial_i d_I' = a_{II'} + b_{II'} + l_I' \partial_i H' d_I', \\ a_{II'} &= l_I' A'^i \partial_i d_I', \quad b_{II'} = l_I' H' \partial_i d_I'. \end{aligned}$$

En vertu de (27),

$$\partial_i l_I' H' d_I' + l_I' H' \partial_i d_I' + l_I' \partial_i H' d_I' = 0$$

et, par transposition,

$$\partial_i l_I' H' d_I' = l_I' H' \partial_i d_I',$$

si bien que

$$b_{(II')} = -\frac{1}{2} l_I' \partial_i H' d_I'.$$

et

$$(35) \quad c_{II'} = a_{II'} - b_{II'}.$$

En dérivant l'identité,

$$(A'_n - \lambda H') d_I' = 0,$$

par rapport à u' ,

$$(A'_n - \lambda H') \nabla' d_I' - H' d_I' \nabla' \lambda - \lambda \nabla' H' d_I' = 0,$$

d'où,

$$\lambda l_I' \nabla' H' d_I' + \delta_{II'} \nabla' \lambda = 0$$

et, en multipliant par u'_t ,

$$(36) \quad b_{(II')}^0 = \frac{1}{2\lambda} \nabla' \lambda u'_t \delta_{II'} = \frac{1}{2\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial t} \delta_{II'},$$

la dérivée temporelle de $\lambda(u; n)$ étant prise à n constant.

D'autre part,

$$\partial_\alpha (l_I' A'^\alpha d_I') = \partial_\alpha \left(\frac{\partial \psi}{\partial \varphi_\alpha} \right) \delta_{II'} = \partial_i (l_I' A'^i d_I') = a_{II'} + a_{II'},$$

c'est-à-dire,

$$a_{(II')} = \frac{1}{2} \operatorname{div} A \delta_{II'},$$

soit, en raison de (16), (35),

$$(37) \quad c_{(II')}^0 = \frac{1}{2} \left(\operatorname{div} A_0 - \frac{1}{\lambda_0} \frac{\partial \lambda_0}{\partial t} \right) \delta_{II'} = \left(\frac{\partial}{\partial \sigma} \operatorname{Log} \theta - \frac{1}{2\lambda_0} \frac{\partial \lambda_0}{\partial t} \right) \delta_{II'}.$$

Enfin,

$$f_{II} = l_I \nabla f d_I = l'_I B' d'_I = \check{d}'_I \check{B}' l'_I = -l'_I B' d'_I = -f_{II'},$$

soit

$$(38) \quad f_{(II')}^0 = 0.$$

Le système (12) devient donc,

$$(39) \quad \left\{ \frac{\partial u^I}{\partial \sigma} + |\text{grad } \varphi| (\nabla \lambda_0 u_1) \frac{\partial u^I}{\partial \xi} \right\} \delta_{II} + c_{II}^0 u^I = f_{II}^0 u^I.$$

On pose,

$$(40) \quad |u_1| = \sqrt{\sum_1^m (u^I)^2}$$

et on se donne

$$|u_1|_{t=0} = F(x_0^i; \xi_0).$$

Si l'onde n'est pas exceptionnelle, donc simple, $|u_1|$ est fourni par (16), (19), (20),

$$(41) \quad |u_1| = \frac{v}{\theta} e^w, \quad v = F(x_0^i; \xi - v\tau)$$

avec maintenant,

$$(42) \quad w = \int_0^\sigma \frac{1}{2\lambda_0} \frac{\partial \lambda_0}{\partial t} d\sigma.$$

Si l'onde, au contraire, est exceptionnelle, on obtiendra, en multipliant (39) par u^I , une équation linéaire dont la solution est,

$$(43) \quad |u_1| = F(x_0^i; \xi) \frac{e^w}{\theta},$$

où w est toujours donné par (42). w sera une fonction croissante de σ si $\partial|\lambda_0|/\partial t > 0$. Si u_0 est un champ stationnaire, $w = 0$, tandis que $u_0 = u_0(t)$ entraîne, d'après (8), $n(x^i) = n(x_0^i)$ et $\partial\lambda_0/\partial\sigma = \partial\lambda_0/\partial t$, d'où il découle,

$$e^w = \sqrt{\frac{\lambda_0(u_0(\sigma); n)}{\lambda_0(u_0(0); n)}}.$$

Les expressions (41), (43) restent valables pour un choix quelconque des vecteurs propres droits à condition de définir (de manière intrinsèque) la norme de u_1 par,

$$|u_1| = (\check{u}_1 H_0 u_1)^{\frac{1}{2}}$$

qui, avec le choix (28), se réduit bien à (40).

Pour terminer nous rappellerons que le critère d'exceptionnalité s'exprime d'une manière covariante [12] commode à utiliser quand les équations du champ ont elles-mêmes une forme covariante.

Spécialement intéressants sont, d'autre part, les systèmes conservatifs strictement exceptionnels [13] pour lesquels les seules surfaces de choc possibles sont les surfaces d'ondes (caractéristiques). Cette classe comprend évidemment tous les systèmes linéaires mais est plus restreinte que celle des systèmes complètement exceptionnels ⁽¹⁾.

Note ajoutée sur les épreuves. — Les systèmes de la forme (24) ont été introduits par GODUNOV [15] sur trois exemples dont, en particulier, les équations d'Euler pour $L = L(q_x^*)$ ⁽²⁾.

En posant $q = |\text{grad } \varphi| \lambda$, l'équation (8) correspondant à φ_t montre immédiatement que

$$\frac{1}{\lambda_0} \frac{\partial \lambda_0}{\partial t} = \frac{d}{d\sigma} \text{Log } |q|,$$

de sorte que (42) donne simplement,

$$e^w = \sqrt{\left| \frac{q(\sigma)}{q(0)} \right|}.$$

⁽¹⁾ Les ondes du fluide relativiste qui a l'équation d'état:

$$\text{densité d'énergie} = \text{pression} + \text{fonction de l'entropie},$$

sont toutes exceptionnelles mais la fonction doit se réduire à une constante pour que le système, soit strictement exceptionnel [14].

⁽²⁾ Nous remercions M. FABRIZIO de nous avoir signalé cet article.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] R. COURANT - D. HILBERT, *Methods of Mathematical Physics*, vol. II, Interscience Publ. New York (1962).
- [2] J. LERAY, *Cahiers Phys.*, **15** (1961), p. 373; L. GÄRDING - T. KOTAKE - J. LERAY, *Bull. Soc. Math. Fr.*, **92** (1964), p. 263.
- [3] P. D. LAX, *Duke Math. Journ.*, **24** (1957), p. 627.
- [4] D. LUDWIG, *Comm. Pure Appl. Math.*, **13** (1960), p. 473. Voir aussi [1].
- [5] Y. CHOQUET-BRUHAT, *J. Math. pures appl.*, **48** (1969), p. 117; Y. CHOQUET-BRUHAT, *Couplage d'ondes gravitationnelles et électromagnétiques à haute fréquence*, in *Ondes et radiations gravitationnelles*, colloque C.N.R.S., Paris (juin 1973). Editions du C.N.R.S., Paris.
- [6] L. LAMOUREUX, *Ondes asymptotiques dans les milieux élastiques relativistes*, Ibid.
- [7] G. BOILLAT, *La propagation des ondes*, Gauthier-Villars, Paris (1965).
- [8] G. BOILLAT, *C. R. Acad. Sc. Paris*, **274 A** (1972), p. 1018.
- [9] T. Y. THOMAS, *Journ. Math. Mech.*, **6** (1957), p. 455.
- [10] T. TANIUTI, *Progr. Theor. Phys.*, Suppl. no. 55 (1974), p. 1, obtient une équation similaire dans le cas unidimensionnel en faisant un changement des variable x, t aussi utilisé

- par C. S. GARDNER - G. K. MORIKAWA, Comm. Pure Appl. Math., **18** (1965), p. 35.
Voir aussi, A. JEFFREY - T. KAKUTANI, SIAM Review, **14** (1972), p. 582 et les articles
de R. M. MIURA et G. B. WHITHAM dans Nonlinear Waves, edited by S. LEIBOVICH -
A. R. SEEBASS, Cornell University Press, Ithaca-London (1974), ainsi que le supplément
no. 55 cité plus haut.
- [10] K. O. FRIEDRICHS - P. D. LAX, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, **68** (1971), p. 1686.
 - [11] G. BOILLAT, C. R. Acad. Sc. Paris, **278** A (1974), p. 909; **280** A (1975), p. 1325.
 - [12] G. BOILLAT, Journ. Math. Phys., **14** (1973), p. 973.
 - [13] G. BOILLAT, Phys. Lett., **50** A (1974), p. 357.
 - [14] G. BOILLAT, C. R. Acad. Sc. Paris, **275** A (1972), p. 1255.
 - [15] S. K. GODUNOV, Sov. Math., **2** (1961), p. 947.
-