

Legge di Ott sulla trasformazione relativistica del calore (*) (**).

ENRICO OLIVERI (Catania) (***)

A DARIO GRAFFI nel suo 70° compleanno

Sunto. — *In questa Nota, partendo dalle equazioni relativistiche del moto della particella con massa di quiete variabile, come legge della accelerazione e come legge dell'impulso, accettate entrambe come valide, pur di interpretare correttamente i secondi membri, si vuole dare un apporto alla validità della legge di trasformazione relativistica del calore di Ott e indicare i possibili motivi che hanno portato alcuni autori a ritenere invece valida quella di Planck.*

Summary. — *In this work, starting from the relativistic equations of motion of the variable rest mass particle, considering them as acceleration law and impulse law, since we consider them both valid, under condition we give a right interpretation of both right hand sides, we wish to give our contribution to the validity of Ott law on relativistic transformation of heat and to point out the eventual reasons that led some researches to sustain, on the contrary, the validity of Planck law.*

È ben noto che la legge classica di trasformazione relativistica del valore, contenuta nei lavori di MOSENGEIL [1] e PLANCK [2], è

$$(1) \quad dQ = dQ_0 \sqrt{1 - \beta^2}$$

dove dQ_0 è una quantità di calore ceduta o assorbita da una particella materiale P rispetto ad un riferimento inerziale K' in cui è istantaneamente in quiete e dQ la quantità corrispondente nel riferimento inerziale K , mobile uniformemente rispetto a K' con velocità $-v$. Nel 1963 il fisico tedesco OTT [3], osservando che il calore è una forma di energia, è pervenuto alla legge di trasformazione

$$(2) \quad dQ = \frac{dQ_0}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

Indicando con $Q_0 = dQ_0/dt'$ e con $Q = dQ/dt$ rispettivamente le quantità di calore fornite nell'unità di tempo alla particella (P, m_0) nei sistemi K' e K , le (1) e (2) equi-

(*) Entrata in Redazione il 30 giugno 1975.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito del Gruppo Nazionale per la Fisica-Matematica del C.N.R.

(***) Istituto di Meccanica Razionale e Matematiche Applicate all'Ingegneria dell'Università di Catania.

valgono ordinatamente a

$$(3) \quad Q_0 = \frac{Q}{1 - \beta^2},$$

$$(4) \quad Q_0 = Q.$$

OTT osservò che per la deduzione della legge (1) veniva utilizzata una equazione di moto per la particella con massa di quiete m_0 variabile errata e pervenne alla (2) dopo di avere scritto una equazione di moto in una forma adatta per la critica di un certo processo meccanico-termodinamico.

In una mia precedente Nota [4] sono pervenuto ad una forma generale dell'equazione relativistica del moto di una particella con massa di quiete comunque variabile indipendentemente da un qualsiasi assunto sulla legge di trasformazione del calore ed ho provato che essa, accettando la legge di Ott, si riduce all'equazione di G. CARINI [5] che utilizza una quadriforza compatibile con detta legge. In questa nota, anche se non espresso esplicitamente, trovava giustificazione la legge di Ott.

Numerosissimi Autori si sono occupati di questo problema ed una vasta bibliografia può trovarsi sulla « Thermodynamique Relativiste » di A. GUESSOUS [6].

GUESSOUS, servendosi dell'equazione di moto di una particella con massa propria variabile, ha cercato di dare un contributo a favore della legge di trasformazione di Planck.

Assumendo come legge di moto quella dell'impulso e considerando il caso in cui il calore venga fornito in un riferimento inerziale K , in moto rispetto al sistema in cui la particella è istantaneamente in quiete K' , egli giunge ad una conclusione che è in accordo con la legge di trasformazione di Planck. Accettando invece come equazione di moto quella dell'accelerazione e fornendo calore alla particella in modo isotropo nel sistema a riposo della particella stessa, egli perviene alla legge di trasformazione di Ott. Questi, tuttavia, osservando che, per motivi tecnici si può fornire calore in maniera isotropa solo nel sistema inerziale K , propende per la legge di Planck. È ben evidente però che, a prescindere dalla realizzazione fisica, la legge di trasformazione del calore non può dipendere né dal modo con cui si fornisce calore alla particella, né dall'equazione che si sceglie per la descrizione del moto.

Il fatto che i due esempi di Guessous conducano a conclusioni opposte non dipende né dalla diversità dell'esperimento ideale (isotropia nell'uno o nell'altro sistema), né dalla diversità delle equazioni che pone a fondamento della dinamica della particella, bensì da una errata valutazione delle forze che intervengono in queste equazioni.

In un'altra mia Nota [7] viene riesaminato il concetto di quadriforza motrice e si osserva che, se la massa propria di una particella non è costante, pur potendosi accettare come equazione relativistica del suo movimento tanto quella che traduce la legge della accelerazione, quanto quella che traduce la legge dell'impulso, il significato di quadriforza motrice è da attribuirsi solo alla quantità che figura al secondo membro della prima equazione.

Ciò posto, si prova che il calore è invariante relativistico e che pertanto è da ritenersi esatta la legge di Ott.

Nella presente nota vengono riesaminati gli esempi considerati da GUESSOUS a conferma della legge di Planck, mettendo in luce i motivi che hanno portato GUESSOUS ed altri Autori a ritenere esatta tale legge. Vengono quindi fatti altri esempi di carattere più generale che si ritengono accettabili per la convalida della legge di Ott.

1. - L'equazione relativistica del moto della particella con massa propria variabile può scriversi:

$$(1.1) \quad \frac{dt}{d} \left(\frac{m_0 \mathbf{v}}{\sqrt{1-\beta^2}} \right) = \mathbf{F}^*$$

oppure

$$(1.1') \quad m_0 \frac{d}{dt} \left(\frac{\mathbf{v}}{\sqrt{1-\beta^2}} \right) = \mathbf{F}^{**}$$

pur di pronunziarsi sui secondi membri.

Dalla (1.1) e dalla (1.1') scaturiscono per il teorema dell'energia rispettivamente le due equazioni:

$$(1.2) \quad \frac{dE}{dt} = \mathbf{F}^* \times \mathbf{v} + c^2 \frac{dm_0}{dt'} (1-\beta^2),$$

$$(1.2') \quad \frac{dE}{dt} = \mathbf{F}^{**} \times \mathbf{v} + c^2 \frac{dm_0}{dt'},$$

dove m_0 è la massa a riposo della particella, t e t' il tempo misurato rispettivamente nel sistema inerziale K e nel sistema di quiete della particella K' .

Noi ci proponiamo di esaminare il comportamento di \mathbf{F}^* e \mathbf{F}^{**} per poter decidere a quale delle due forze si può attribuire il significato di effettiva forza motrice.

Dall'esame della (1.2) appare strano che la variazione dell'energia totale risulti somma della potenza $\mathbf{F}^* \times \mathbf{v}$ e della variazione dell'energia a riposo $c^2(dm_0/dt')$ moltiplicata per il fattore $1-\beta^2$; sarebbe invece più accettabile, come mostra anche la (1.2'), che tale variazione d'energia totale risultasse somma della potenza $\mathbf{F}^{**} \times \mathbf{v}$ e della variazione dell'energia a riposo.

Si osservi poi che nel caso di variazione di massa senza lavoro meccanico, se \mathbf{F}^* fosse la effettiva forza meccanica, per $\mathbf{F}^* = 0$, dalla (1.2) si otterrebbe

$$\frac{dE}{dt} = c^2 \frac{dm_0}{dt'} (1-\beta^2)$$

e non

$$\frac{dE}{dt} = c^2 \frac{dm_0}{dt'}$$

come effettivamente risulta dalla (1.2') per $\mathbf{F}^{**} = 0$.

Le precedenti considerazioni ci portano già a ritenere che la effettiva forza motrice sia la F^{**} e non la F^* .

Un contributo a sostegno di questa tesi è stato dato recentemente anche da C. MØLLER [8].

Le equazioni (1.1) e (1.2) possono però essere entrambe conservate pur di non intendere F^* come l'effettiva forza motrice e pur di pronunciarsi su di essa.

Quando si ha variazione di massa, la forza motrice F^{**} è la somma della classica forza meccanica F e delle forze convettive; la F^* , invece, è la somma della F^{**} e di un termine dovuto al moto di trasporto [7].

Vogliamo ora occuparci, in particolare, del problema della particella la cui massa propria risulta variabile a causa di variazione di calore. È evidente che la variazione di calore può avvenire in maniera isotropa rispetto alla particella, ovvero in maniera isotropa rispetto allo spazio fisso e che in ciascuno di questi casi il problema ha un aspetto particolare.

Nel primo caso, infatti, non venendosi a creare forze di natura convettiva, non si hanno effetti meccanici; nel secondo caso, invece, si creano forze convettive e quindi si hanno effetti meccanici [6], [7].

2. — Consideriamo ora una particella P in moto rispetto ad un sistema di riferimento galileiano K e sia K' il sistema a riposo di P . Supponiamo che alla particella venga fornita (o sottratta) una quantità di calore nell'unità di tempo Q_0 in maniera isotropa rispetto alla particella stessa.

Dal momento che non si hanno effetti meccanici ($F^{**} = 0$) dall'equazione (1.1) segue

$$m_0 \frac{d}{dt} \left(\frac{\mathbf{v}}{\sqrt{1 - \beta^2}} \right) = 0.$$

Poichè la F^* , dovendo tener conto del termine di trasporto, non è nulla, ma risulta uguale a $(Q_0/c^2)\mathbf{v}$, dalla (1.1) si ottiene

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{m_0 \mathbf{v}}{\sqrt{1 - \beta^2}} \right) = \frac{Q_0}{c^2} \mathbf{v}.$$

Confrontando le due equazioni si ha:

$$\frac{dm_0}{dt} = \frac{Q_0}{c^2}$$

e quindi, dall'equazione (1.2')

$$(2.1') \quad \frac{dE}{dt} = Q_0$$

e dall'equazione (1.2)

$$(2.1) \quad \frac{dE}{dt} = \mathbf{F}^* \times \mathbf{v} + Q_0(1 - \beta^2).$$

La (2.1), con la sostituzione del valore di \mathbf{F}^* , dà come la (2.1'):

$$(2.2) \quad \frac{dE}{dt} = Q_0,$$

cioè: « la variazione di energia nell'unità di tempo in K , è proprio uguale alla quantità di calore fornita o sottratta nell'unità di tempo in K' ».

3. — Supponiamo ora che venga fornita (o sottratta) alla particella una quantità di calore nell'unità di tempo Q in maniera isotropa rispetto al sistema K .

Data l'anisotropia della distribuzione di calore rispetto alla particella, in questo caso si genera sulla particella una forza motrice $-(Q/c^2)\mathbf{v}$.

La (1.1') diviene allora:

$$m_0 \frac{d}{dt} \left(\frac{\mathbf{v}}{\sqrt{1 - \beta^2}} \right) = -\frac{Q}{c^2} \mathbf{v},$$

mentre la (1.1), poichè il termine dovuto al moto di trasporto è l'opposto della forza convettiva $-(Q/c^2)\mathbf{v}$, ci dà:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{m_0 \mathbf{v}}{\sqrt{1 - \beta^2}} \right) = 0.$$

Confrontando le due equazioni si ottiene:

$$\frac{dm_0}{dt'} = \frac{Q}{c^2}.$$

Le equazioni dell'energia sono rispettivamente:

$$(3.1') \quad \frac{dE}{dt} = \mathbf{F}^{**} \times \mathbf{v} + Q,$$

$$(3.1) \quad \frac{dE}{dt} = \mathbf{F}^* \times \mathbf{v} + Q(1 - \beta^2)$$

che, con la sostituzione dei valori di \mathbf{F}^* e \mathbf{F}^{**} , forniscono ambedue:

$$(3.2) \quad \frac{dE}{dt} = Q(1 - \beta^2).$$

Confrontando i due esempi e la (2.2) con la (3.2) sembra che ci sia una ~~incomprensione~~ ^{incomprensione} nella legge di trasformazione del calore, il quale si comporterebbe in questa legge in modo diverso secondo che sia fornito in maniera isotropa nell'un riferimento o nell'altro.

Ciò è dovuto al non aver considerato che il calore, quando è fornito in maniera anisotropa rispetto alla particella, genera una forza motrice. Alcuni Autori propendono per la legge di Planck perchè prendono come valide le (2.1) e (3.1) invece delle (2.1') e (3.1'), non notando che la \mathbf{F}^* non è l'effettiva forza motrice.

Il termine $-Q\beta^2$ deve intendersi nella (3.2) come lavoro di una effettiva forza meccanica, mentre nelle (2.1) e (3.1) è il lavoro dovuto al termine di trasporto; conseguentemente l'effettivo contributo di energia è Q .

Inoltre, come può vedersi dai due esempi precedenti, la variazione nell'unità di tempo della massa di quiete, è uguale al calore fornito (o sottratto) nell'unità di tempo indipendentemente dal sistema di riferimento in cui è fornito (o sottratto); e già ciò ci induce a pensare che tale quantità sia un invariante relativistico.

Ciò potrà essere osservato, anche se non sarà esplicitamente detto, negli esempi che successivamente tratteremo.

4. - A maggior chiarimento di quanto è stato asserito facciamo un ulteriore esempio supponendo di fornire (o sottrarre) una quantità di calore nell'unità di tempo Q_0 in maniera isotropa rispetto alla particella ed una quantità di calore nell'unità di tempo Q in maniera isotropa rispetto allo spazio fisso.

Essendo in tal caso:

$$\mathbf{F}^{**} = -\frac{Q}{c^2} \mathbf{v},$$

$$\mathbf{F}^* = \frac{Q_0}{c^2} \mathbf{v},$$

dalle (1.1) e (1.1') segue:

$$\frac{dm_0}{dt'} = \frac{Q + Q_0}{c^2},$$

mentre le (1.2) e (1.2') diventano rispettivamente:

$$(4.1) \quad \frac{dE}{dt} = \mathbf{F}^* \times \mathbf{v} + (Q_0 + Q)(1 - \beta^2),$$

$$(4.1') \quad \frac{dE}{dt} = \mathbf{F}^{**} \times \mathbf{v} + (Q_0 + Q),$$

che, con la sostituzione dei valori di \mathbf{F}^* e \mathbf{F}^{**} , danno luogo alla medesima equazione:

$$(4.2) \quad \frac{dE}{dt} = Q_0 + Q(1 - \beta^2).$$

Le (2.1), (3.1) e (4.1) mettono in evidenza il motivo che ha portato diversi Autori a ritenere che il contributo all'energia da parte del calore fosse $(Q_0 + Q)(1 - \beta^2)$. Detto equivoco è chiaramente dovuto al fatto che $\mathbf{F}^* \times \mathbf{v}$ non è tutta l'effettiva potenza meccanica.

5. - Come ultimo esempio, che raccoglie quelli precedenti, consideriamo il caso in cui si fornisce calore alla particella in una maniera qualsiasi. Supponiamo di fornire (o sottrarre) una quantità di calore, nell'unità di tempo, Q^* in maniera isotropa rispetto ad un sistema di riferimento K^* in moto traslatorio con velocità \mathbf{w} rispetto al sistema K' della particella. Data l'anisotropia della distribuzione di calore rispetto alla particella si genera una forza motrice $(Q^*/c^2)\mathbf{w}$.

La (1.1') diviene allora:

$$(5.1') \quad m_0 \frac{d}{dt} \left(\frac{\mathbf{v}}{\sqrt{1 - \beta^2}} \right) = \frac{Q^*}{c^2} \mathbf{w}.$$

La (1.1), poichè il termine dovuto al moto di trasporto è Q^*/c^2 , fornisce:

$$(5.1) \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{m_0 \mathbf{v}}{\sqrt{1 - \beta^2}} \right) = \frac{Q^*}{c^2} \mathbf{w} + \frac{Q^*}{c^2} \mathbf{v}.$$

Confrontando le due equazioni si ottiene:

$$\frac{dm_0}{dt'} = \frac{Q^*}{c^2}.$$

Le equazioni dell'energia sono rispettivamente:

$$(5.2') \quad \frac{dE}{dt} = \mathbf{F}^{**} \times \mathbf{v} + Q^*,$$

$$(5.2) \quad \frac{dE}{dt} = \mathbf{F}^* \times \mathbf{v} + Q^*(1 - \beta^2),$$

che, con la sostituzione dei valori di \mathbf{F}^* e \mathbf{F}^{**} , si riducono entrambe a

$$\frac{dE}{dt} = Q^* \left(\frac{\mathbf{w} \times \mathbf{v}}{c^2} + 1 \right).$$

Questo risultato finale mette maggiormente in luce quali sono stati i motivi che hanno portato a diverse formulazioni della legge di trasformazione relativistica del calore.

Innanzitutto osserviamo che i casi evidenti $\boldsymbol{w} = 0$ e $\boldsymbol{w} = -\boldsymbol{v}$ ridanno quelli precedenti, unici casi considerati da vari Autori.

Se si utilizza l'espressione finale di dE/dt (espressione identica qualunque sia la legge di moto considerata) si può essere portati ad accettare come valida la legge di Ott, oppure la legge classica di Planck, a seconda che si consideri una distribuzione di calore isotropa rispetto alla particella ($\boldsymbol{w} = 0$ e quindi $dE/dt = Q_0$) oppure una distribuzione isotropa rispetto al sistema inerziale K ($\boldsymbol{w} = -\boldsymbol{v}$ e quindi $dE/dt = Q(1 - \beta^2)$).

D'altra parte, sempre prendendo l'espressione finale di dE/dt , l'ultimo esempio da noi fatto porterebbe ad una ulteriore legge di trasformazione relativistica del calore nel caso in cui questo sia fornito in maniera anisotropa, sia rispetto al sistema inerziale, sia rispetto al sistema della particella.

GUESSOUS cerca di scavalcare il problema della scelta della « buona » equazione di moto della particella, criticando alla base il concetto di isotropia e spostando quindi la propria attenzione sul modo con cui si può fornire calore ad una particella.

Si è già osservato che, a parte la realizzazione fisica, non si vede il motivo per cui, almeno da un punto di vista puramente concettuale, non si possa fornire comunque del calore alle particelle; naturalmente, comunque si fornisca tale calore, la legge di trasformazione relativistica deve essere la stessa.

La critica che invece deve essere mossa è quella di non isolare il contributo al lavoro meccanico dovuto al calore.

Se si prendesse come valida per il moto delle particelle la legge dell'impulso e per dE/dt l'espressione

$$\frac{dE}{dt} = \boldsymbol{F}^* \times \boldsymbol{v} + Q^*(1 - \beta^2)$$

se ne potrebbe dedurre la legge di trasformazione del calore di Planck; ma anche in questo caso non si metterebbe in evidenza l'effettivo lavoro meccanico, in quanto \boldsymbol{F}^* non è l'effettiva forza motrice, ma differisce da questa (come precisato in precedenza) per il termine di trasporto.

La quantità $-Q^*\beta^2$ che figura nell'espressione dell'energia deve interpretarsi come potenza meccanica dovuta a questo termine. L'equivoco si elimina se si prende come valida la legge dell'accelerazione e per dE/dt , l'espressione,

$$\frac{dE}{dt} = \boldsymbol{F}^{**} \times \boldsymbol{v} + Q^*$$

in cui al secondo membro si isola il contributo all'energia dovuto all'effettivo lavoro meccanico dal contributo dovuto alla variazione di calore.

Da quanto detto, si deduce che il calore si comporta come qualsiasi altra forma di energia e che quindi per esso è valida la legge di trasformazione relativistica di Ott.

BIBLIOGRAFIA

- [1] K. V. MOSENGEIL, *Ann. d. Phys.*, **22** (1907), p. 867.
 - [2] M. PLANCK, *Ann. d. Phys.*, **26**, 1 (1908).
 - [3] H. OTT, *Lorentz-Transformation der Wärme und der Temperature*, *Zeits. f. Phys.*, **157** (1963), pp. 70-104.
 - [4] E. OLIVERI, *Sulla dinamica relativistica del punto con massa di quiete comunque variabile*, *Atti del 1° Congresso Nazionale di Meccanica Teorica ed Applicata*, Udine, 26-30 giugno 1971, vol. I, pp. 267-279.
 - [5] G. CARINI, *Sulla dinamica del punto a massa variabile*, *Ist. Lombardo (Rend. Sc.)*, A **101** (1967).
 - [6] A. GUESSOUS, *Thermodynamique Relativiste*, Gauthier-Villars, Paris (1970).
 - [7] E. OLIVERI, *Concetto di quadriforza e legge di trasformazione relativistica del calore*, *Atti del 2° Congresso Nazionale di Meccanica Teorica ed Applicata*, Napoli, 16-19 ottobre 1974, vol. I, pp. 239-248.
 - [8] C. MØLLER, *The Theory of relativity*, Clarenton Press, Oxford (1972), Second Edition.
-