Processi ergodici non stazionari e loro proprietà.

Memoria di BRUNO FORTE (*) (a Pisa)

Sunto. - *Si stabilisce la condizione necessaria e sufficiente per l'equivalenza ad una costante della media empirica di una qualunque funzione misurabile, in un processo discreto*

1. - Premesse.

Sia $((X, \mathfrak{F}, m_k\ T_k))$ un processo discreto [1], con k variabile nell'insieme K degli interi relativi. Sia $\widehat{L}$ la classe delle funzioni f a valori reali definite su $X \times K$ misurabili in $(X, \mathfrak{F}, m_k)$ per ogni $k \in K$, per le quali inoltre esiste il limite $\widehat{f}$ delle medie:

$$\frac{1}{n} \sum_{0}^{n-1}{}_{j}\, f(T_h^{(j)} x,\ k + j), \tag{1, 1}$$

per ogni $k \in K$ e $x \in X - A_k$ con $m_k(A_k) = 0$.

Si intendono qui caratterizzare quei processi discreti per i quali il limite $\widehat{f}$ della media (1, 1) per *ogni* funzione in $\widehat{L}$ è equivalente ad una costante in $(X, \mathfrak{F}, m_k)$ per ogni $k \in K$.

Al fine di comprendere l'utilità di tale caratterizzazione si può interpretare la generica funzione $f(x, k)$ in $\widehat{L}$ come una successione di variabili aleatorie e conseguentemente la media (1, 1) quale media empirica dei loro valori nel processo in èsame. Da questo punto di vista si riconosce che il problema che si intende affrontare è il problema ergodico nella sua formulazione classica (vedi [2], [3], [4], [5]) risolto per ciò che concerne una variabile aleatoria e per un processo stazionario e che si intende perciò estendere, nei termini precisati, ad una successione di variabili aleatorie e per un processo generico.

Verranno poi presi in particolare considerazione i processi periodici [1].

2. - Processi ergodici discreti.

Un processo discreto $((X, \mathfrak{F}, m_k, T_k))$, nel quale si conservi o meno la misura, è ergodico se dall'essere per un $k \in K$ e per un insieme $A \in \mathfrak{F}$

$$T_k^{(j)} A \cap T_k^{(j)}(X - A) = \emptyset \ \text{ per ogni } \ j > 0 \tag{2, 1}$$

(*) Lavoro eseguito per la realizzazione del programma del gruppo n° 9 del C. N. R. (1961-62).

segue

(2, 2) $$\text{o} \quad m_k(A) = 0$$
$$\text{o} \quad m_k(X - A) = 0.$$

Teorema *(ergodico)*. – Condizione necessaria e sufficiente perchè in un processo discreto $((X, \mathfrak{F}, m_k, T_k))$ il limite $\widehat{f}$ della media (1, 1) di ogni funzione f in $\widehat{L}$ sia equivalente ad una costante è che il processo sia ergodico.

Dimostrazione.

a) La condizione è necessaria. Infatti si supponga: (i) che per ogni funzione $f \in \widehat{L}$ sia $\widehat{f} \equiv \text{cost}$ e (ii) che il processo non sia ergodico. Per la ipotesi (ii) si può trovare un $k \in K$ e un insieme $A \in \mathfrak{F}$ tali che sia

(α) $$T_k^{(j)} A \cap T_k^{(j)}(X - A) = \emptyset \quad \text{per ogni intero } j > 0$$

(β) $$m_k(A) > 0, \ m_k(X - A) > 0.$$

Si consideri ora la funzione $\chi(x, k)$ così definita

$$\chi(x, k) = \begin{cases} 1 & \text{per } x \in A \\ 0 & \text{per } x \in X - A \end{cases}$$

$$\chi(x, k+j) = \begin{cases} 1 & \text{per } x \in T_k^{(j)} A \\ 0 & \text{per } x \in X - T_k^{(j)} A \end{cases}$$

e per ogni intero $j > 0$,

$$\chi(x, k+j) = 0 \quad \text{per ogni } x \in X \text{ e per ogni intero } j < 0.$$

Se $x \in A$ le sue immagini mediante le trasformazioni $T_k^{(j)}$ appartengono agli insiemi $T_k^{(j)} A$ e se $x \in X - A$ le sue immagini mediante le trasformazioni $T_k^{(j)}$ appartengono a $T_k^{(j)}(X - A)$ e quindi per la (α) a $X - T_k^{(j)} A$. Da ciò segue che è

$$\widehat{\chi}(x, k) = \begin{cases} 1 & \text{per } x \in A \\ 0 & \text{per } x \in X - A \end{cases}$$

poichè d'altra parte è $\chi(x, k) \in \widehat{L}$ viene contraddetta l'ipotesi (i).

b) La condizione è sufficiente.

Si procede ancora per assurdo. Si supponga quindi: (i) che il processo sia ergodico, (ii) che esista una funzione f in $\widehat{L}$ per la quale $\widehat{f}(x, k)$ per un $k \in K$ non sia equivalente ad una costante.

Per la (ii) si può trovare un numero reale a tale che per i due insiemi

$$A = \{ x : \widehat{f}(x, k) > a \}$$

$$X - A = \{ x : \widehat{f}(x, k) \leq a \},$$

misurabili, sia $m_k(A) > 0$, $m_k(X - A) > 0$.

D'altra parte la funzione $\widehat{f}(x, k)$ è un'invariante nel processo preso in esame [1], di qui segue che è

$$T_k^{(j)} A \cap T_k^{(j)} (X - A) = \emptyset .$$

Se ne conclude contro la (i) che il processo non è ergodico.

L'imporre ad un processo non stazionario $((X, \mathfrak{F}, m_k, T_k))$ di essere ergodico è una condizione alquanto restrittiva. Basti osservare che se le trasformazioni T_k sono invertibili (e quindi anche $T_k^{(j)}$) è

$$T_k^{(j)}(A) \cap T_k^{(j)}(X - A) = \emptyset,$$

per ogni $k \in K$, ogni intero $j > 0$ e qualunque sia A in $\mathfrak{F}$. Ne segue che i soli processi ergodici non stazionari sono in questo caso quelli per i quali $\mathfrak{F}$ consta di X e di $\emptyset$.

Per processi particolari o per classi di funzioni più ristrette della $\widehat{L}$ potranno tuttavia trovarsi condizioni meno restrittive perchè sia per esse:

$$\widehat{f}(x, k) \equiv \text{cost.}, \quad \text{per ogni } k \in K.$$

A titolo di esempio prenderemo in esame i processi periodici $((X, \mathfrak{F}, m_k, T_k))$ di periodo intero h (dei quali sono un caso particolare i processi stazionari) e la classe $\widehat{L}_h$ delle funzioni a valori reali definite in $X \times K$, misurabili in $(X, \mathfrak{F}, m_k)$ e periodiche in k di periodo commensurabile con h.

3. - La condizione di ergodicità per i processi periodici.

Un processo periodico $((X, \mathfrak{F}, m_k, T_k))$ di periodo intero h si dirà intrinsecamente ergodico se dall'essere per un insieme A in $\mathfrak{F}$, ed ogni $k \in K$ e un intero positivo q

$$T_k^{(qh)}(A) = A \qquad \text{e} \qquad T_k^{(qh)}(X - A) = X - A, \tag{3, 1}$$

segue che è

$$\begin{aligned} &\text{o} \quad m_k(A) = 0 \\ &\text{o} \quad m_k(X - A) = 0. \end{aligned} \tag{3, 2}$$

TEOREMA. – Condizione necessaria e sufficiente perchè in un processo periodico $((X, \mathfrak{F}, m_k, T_k))$ di periodo intero h il limite delle medie (1, 1) di ogni funzione f in $\widehat{L}_h$ sia equivalente ad una costante, è che il processo sia intrinsecamente ergodico.

Dimostrazione.

a') La condizione è necessaria. Si supponga: (i) che il processo non sia intrinsecamente ergodico, (ii) che per ogni f in $\widehat{L}_h$ e ogni $k \in K$ il limite delle medie, $\widehat{f}(x, k)$, sia equivalente ad una costante. Per l' ipotesi (i) si potrà trovare un intero $q > 0$ e un insieme $A \in \mathfrak{F}$ tali che

$$(\alpha') \qquad T_k^{(qh)} A = A \qquad T_k^{(qh)}(X - A) = X - A,$$

$$(\beta') \qquad m_k(A) > 0 \qquad m_k(X - A) > 0, \quad \text{per almeno un } k \in K,$$

Si consideri la funzione $\chi_h(x, k)$ definita come segue:

$$\chi_h(x, k) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \in X - A \end{cases}$$

$$\chi_h(x, k + j) = \begin{cases} 1 & x \in T_k^{(j)} A \\ 0 & x \in X - T_k^{(j)} A \quad \text{con } j > 0 \end{cases}$$

$$\chi_h(x, k + j) = \begin{cases} 1 & \text{se } T_k^{(j)} x \in X - \mathrm{A} \\ 0 & \text{se } T_k^{(j)} x \in X - A \quad \text{per } j < 0. \end{cases}$$

Tale funzione $\chi_h(x, k)$ è periodica nella variabile k di periodo $q \cdot h$, basti osservare per questo che gli insiemi A e $T_k^{(qh)} A$ coincidono (per gli x appartenenti ad essi la χ_h assume valore 1), e ricordare inoltre che il processo in esame è periodico di periodo h.

È quindi senz'altro

$$\chi_h(x, k) = \chi_h(x, k + qh) \quad \text{per ogni } k \in K.$$

D'altra parte per tale funzione risulta

$$\widehat{\chi}_h(x, k) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \in X - A \end{cases}$$

per la funzione $\chi_h(x, k)$ così costruita e che certo appartiene a $\widehat{L}_h$ il limite delle medie non è quindi equivalente a una costante, ciò contraddice l'ipotesi (ii).

b') La condizione è sufficiente. Si supponga: (i) il dato processo intrinsecamente ergodico, e (ii) che vi sia una funzione $f \in \widehat{L}_h$ per la quale il limite $\widehat{f}$ delle medie (1, 1) non sia equivalente ad una costante per un $k \in K$. Si potrà allora trovare un numero reale a tale che gli insiemi, misurabili,

$$A = \{ x : \widehat{f}(x, k) > a \}$$

$$X - A = \{ x : \widehat{f}(x, k) \leq a \}$$

hanno entrambi misura non nulla. Ma per l'invarianza del limite anzidetto, $\widehat{f}(x, k)$, e per la (ii) è:

$$T_k^{(qh)} A = A$$

$$T_k^{(qh)} (X - A) = X - A$$

per ogni intero $q > 0$ per il quale sia:

$$f(x, k + qh) = f(x, k) \quad \text{per ogni } k \in K,$$

e quindi il processo contro l'ipotesi (i) non risulterebbe intrinsecamente ergodico.

Con procedimento del tutto simile si può riconoscere valida la seguente proposizione:

Condizione necessaria e sufficiente perchè, in un dato processo $((X, \mathfrak{F}, m_k, T_k))$ periodico di periodo h, il limite $\widehat{f}(x, k)$ di ogni funzione in $\widehat{L}_h$ periodica di periodo h sia equivalente ad una costante, per ogni $k \in K$, è che dall'essere per un insieme $A \in \mathfrak{F}$ e per un $k \in K$

$$T_k^{(h)} A = A \qquad \text{e} \qquad T_k^{(h)} (X - A) = X - A$$

segue che è:

$$\text{o} \quad m_k(A) = 0 \qquad \text{ovvero} \qquad m_k(X - A) = 0.$$

Sarà utile osservare che quest'ultimo teorema ergodico contiene come caso particolare quello classico di Birkhoff. Si noti altresí che per i teoremi ergodici qui riportati non si è formulata l'ipotesi che i processi cui si riferiscono conservino la misura.

BIBLIOGRAFIA

[1] B. FORTE, Sulla convergenza delle medie nei processi non stazionari (in corso di pubblicazione).

[2] D. G. BIRKHOFF, *Proof. of the ergodic theory*, «Proc. Nat. Acad. Sci USA», 17, 656-660 (1931).

[3] P. R. HALMOS, *Lectures on ergodic theory* «ed. by the Math. Soc. of Japan», Tokio (1956).

[4] S. KAKUTANI, *Random ergodic theorems and Markoff processes with a stable distribution*, «Proc. of the Second Berkley Symposium», (1951) pag. 237.

[5] K. JACOBS, *Neure Methoden und Ergebnisse der Ergoden Theorie*, «Erg. der Math. Springer Verlag Berlin«, (1960) cap. 7.