Ancora intorno a completamenti di spazi uniformi.

Memoria di GIOVANNI AQUARO (a Bari)

Sunto. - *È contenuto nell'introduzione.*

INTRODUZIONE. - Nel presente lavoro si prosegue lo studio degli spazii uniformizzabili $\mathscr{A}_\alpha$-completi, iniziato in una Nota, apparsa in questi Annali [4], alla quale si rinvia per la terminologia ed il simbolismo qui usati.

Al concetto di spazio $\mathscr{A}_\alpha$-completo fa riscontro il concetto di $\mathscr{A}_\alpha$-completamento (§ 1, def. 1) e nel seguente § 1 viene approfondita l'analisi delle proprietà di entrambi ottenendosi, in una situazione più generale, proprietà analoghe alle piu importanti dei Q-spazii secondo HEWITT.

Successivamente, nel § 2, utilizzando alcuni risultati ottenuti dallo scrivente in [2], viene effettuata una esposizione sistematica ed autonoma dei filtri $\mathscr{U}$-inviluppati, $\mathscr{U}$ essendo una struttura uniforme, riunendo, in un assetto unico, risultati di [11], [1], [10].

Nel § 3, tramite i mezzi forniti dal § 2, si stabiliscono alcune proprietà dei Q-spazii nel quadro delle tecniche sviluppate in [3], [4] e nel presente lavoro. Successivamente, si utilizzano le conclusioni, alle quali così si perviene, per caratterizzare gli spazii uniformizzabili separati il cui $\mathscr{A}_\omega$-completamento, con $\omega = \text{card}\ (\boldsymbol{N})$, è uno spazio di LINDELÖF. Tali spazii sono caratterizzati dalla seguente proprietà.

(**) - *ogni filtro completamente regolare verificante la proprietà della intersezione numerabile è meno fine di un filtro massimale della stessa specie.*

La (**) va posta in relazione con una consimile proprietà introdotta da R. W. BAGLEY e J. D. MCKNIGHT JR. in [6]. La (**), tuttavia, sembra prestarsi meglio agli scopi prefissici consentendo di ottenere non solo la caratterizzazione di cui sopra ma anche qualche miglioramento dei risultati dei suddetti autori.

(*) Lavoro eseguito nel Gruppo di Ricerca n. 9 del Comitato Nazionale per la Matematica del Consiglio Nazionale delle Ricerche, per l'anno 1961-62.

§ 1 - $\mathcal{A}_{\mathfrak{a}}$-Completamenti ed ulteriori proprietà degli spazii $\mathcal{A}_{\mathfrak{a}}$-completi

1 - Si è osservato in [4] § 2, prop. 7, che, se E è uno spazio uniformizzabile separato ($=$ di HAUSDORFF), se $\mathfrak{a}$ è numero cardinale infinito e se $\mathcal{A}_{\mathfrak{a}}(E)$ è la $\mathfrak{a}$-struttura uniforme su E ([3] § 3, def. 4), esiste uno spazio uniformizzabile separato $\mathcal{A}_{\mathfrak{a}}$-completo ([4] § 2), che denotiamo con

$$\upsilon_{\mathfrak{a}}(E)$$

(che in [4] si denotava, invece, con $\nu_{\mathfrak{a}}(E)$), tale che E sia (ingettivamente) immerso ed ovunque denso in $\upsilon_{\mathfrak{a}}(E)$ e, denotata con $\mathcal{A}_{\mathfrak{a}}(\upsilon_{\mathfrak{a}}(E))$ la $\mathfrak{a}$-struttura uniforme di $\upsilon_{\mathfrak{a}}(E)$ e con $\mathcal{A}_{\mathfrak{a}}(\upsilon_{\mathfrak{a}}(E))_E$ la struttura uniforme indotta da $\mathcal{A}_{\mathfrak{a}}(\upsilon_{\mathfrak{a}}(E))$ su E, risulti

$$\mathcal{A}_{\mathfrak{a}}(E) = \mathcal{A}_{\mathfrak{a}}(\upsilon_{\mathfrak{a}}(E))_E. \tag{1}$$

DEF. 1 - *Lo spazio uniformizzabile separato $\upsilon_{\mathfrak{a}}(E)$ ora descritto chiamasi $\mathcal{A}_{\mathfrak{a}}$-completamento di E.*

Si deve subito segnalare la seguente proprietà caratterizzante $\upsilon_{\mathfrak{a}}(E)$.

PROP. 1 - *Se E è uno spazio uniformizzabile separato, se $\mathfrak{a}$ è un numero cardinale infinito e se $\upsilon_{\mathfrak{a}}(E)$ è l'$\mathcal{A}_{\mathfrak{a}}$-completamento di E* (def. 1), *$\upsilon_{\mathfrak{a}}(E)$ è uno ed è omeomorfo a ciascuno degli spazii uniformizzabili separati E^* che sono $\mathcal{A}_{\mathfrak{a}}$-completi* ([4] § 2, def. 2) *ed a ciascuno dei quali si può associare un'ingezione j^* di E in E^* con le seguenti condizioni:*

a) *j^* (E) è ovunque denso in E^*,*

b) *detta k^* la bigezione (ridotta) di E su $j^*(E)$ definita da j^*, tale k^* è un omeomorfismo di E su $j^*(E)$.*

c) *per ogni applicazione continua f di E in uno spazio uniformizzabile separato $\mathcal{A}_{\mathfrak{a}}$-completo X, esiste una (ed una sola) applicazione continua $\bar{f}$ di E^* in X, tale che $\bar{f} \circ j^* = f$.*

OSSERVAZIONE - Si può, equivalentemente, descrivere E^* come uno spazio uniformizzabile separato in cui E sia contenuto e ovunque denso e tale che ogni applicazione continua f di E in uno spazio uniformizzabile separato $\mathcal{A}_{\mathfrak{a}}$-completo X, possa prolungarsi in una applicazione continua $\bar{f}$ di E^* in X. In appresso di frequente le proprietà di E^* descritte da a), b) e c) della prop. 1, si intederanno espresse in questi termini.

PROP. 2 - *Se E, $\mathfrak{a}$ e $\upsilon_{\mathfrak{a}}(E)$ sono quelli della prop. 1, le seguenti proposizioni sono equivalenti:*

a) *E è $\mathscr{A}_{\mathfrak{a}}$-completo* (cfr. [4] § 2, def. 2)

b) *risulta* $E = \upsilon_{\mathfrak{a}}(E)$

DIM. a) *implica* b). In forza di (1), $(E, \mathscr{A}_{\mathfrak{a}}(E))$ è uno sottospazio uniforme completo dello spazio uniforme $(\upsilon_{\mathfrak{a}}(E), \mathscr{A}_{\mathfrak{a}}(\upsilon_{\mathfrak{a}}(E)))$: ciò, poichè $\upsilon_{\mathfrak{a}}(E)$ è separato (= di HAUSDORFF), implica che E è chiuso in $\upsilon_{\mathfrak{a}}(E)$ e quindi, E essendo ovunque denso in $\upsilon_{\mathfrak{a}}(E)$, si ha la b).

b) *implica* a). È ovvio, dato che $\upsilon_{\mathfrak{a}}(E)$ è $\mathscr{A}_{\mathfrak{a}}$-completo.

In tema di spazii $\mathscr{A}_{\mathfrak{a}}$-completi, torna a proposito segnalare alcuni esempii che dovremo, almeno in parte, utilizzare. All'uopo premettiamo un lemma.

LEMMA 1. – *Supponiamo che E sia uno spazio topologico e che, supposto $\mathfrak{a}$ un numero cardinale infinito, E verifichi la proprietà:*

$(L_{\mathfrak{a}})$ — *se $(U_\iota)_{\iota\in I}$ è un qualunque ricovrimento aperto di E esiste una parte H dell'insieme degli indici I, tale che* card. $(H) \leq \mathfrak{a}$ *e tale che la sottofamiglia $(U_\iota)_{\iota\in H}$ sia un ricovrimento di E.*

Allora, se $(A_\lambda)_{\lambda\in L}$ è una qualunque famiglia localmente finita di parti non vuote di E risulta card $(L) \leq \mathfrak{a}$.

DIM. - Esiste un ricovrimento aperto $(U_\iota)_{\iota\in I}$ di E tale che, per ogni $\iota \in I$, l'insieme L_ι^* dei $\lambda \in L$ tali che $A_\lambda \cap U_\iota \neq \emptyset$ sia finito. *In* forza di $(L_{\mathfrak{a}})$ esiste una parte H di I tale che card $(H) \leq \mathfrak{a}$ e la sottofamiglia $(U_\iota)_{\iota\in H}$ ricopra E. Poichè ogni A_ι non è vuoto, risulta $L = \bigcup_{L\in H} L_\iota^*$: poichè ogni L_ι^* è infinito ed è card $(H) \leq \mathfrak{a}$, si ha card $(L) \leq \mathfrak{a}$.

OSSERVAZIONE 1. – Se è $\mathfrak{a} = \text{card}\,(\boldsymbol{N})$, E verifica $(L_{\mathfrak{a}})$ se e solo se esso è uno spazio di LINDELÖF.

OSSERVAZIONE 2. – Se E è uniformizzabile e verifica la $(L_{\mathfrak{a}})$, la $\mathfrak{a}$-struttura uniforme di E è identica alla struttura uniforme universale ([3] § 3, def. 4). Pertanto, se esiste una struttura uniforme di spazio completo su E, compatibile con la topologia di E, poichè allora la struttura uniforme universale è una struttura di spazio completo, in forza della def. 2 § 2 di [4], E risulta $\mathscr{A}_{\mathfrak{a}}$-completo.

OSSERVAZIONE 3. – Se E è uno spazio regolare paracompatto e verifica la $(L_{\mathfrak{a}})$ esso, per la osservazione 2, è $\mathscr{A}_{\mathfrak{a}}$-completo, poichè, come è noto, la sua struttura uniforme universale è una struttura di spazio completo.

OSSERVAZIONE 4. – Supponiamo che E sia uno spazio di LINDELÖF (cfr. osservazione 1) regolare. Come è noto, E è paracompatto ed allora, in forza della osservazione 3, E è $\mathscr{A}_{\omega}$-completo, con $\omega = \text{card}\,(\boldsymbol{N})$.

OSSERVAZIONE 5. – Se lo spazio topologico E (nessuna restrizione) ha una base per la sua topologia $(T_\lambda)_{\lambda\in L}$ tale che card $(L) \leq \mathfrak{a}$, allora E verifica la proprietà $(L_{\mathfrak{a}})$ del lemma 1.

OSSERVAZIONE 6. - Se E è uno spazio quasi-metrizzabile ed ha una base del tipo descritto nell'osservazione 5, allora E verifica la $(L_{\mathfrak{a}})$ e quindi, essendo regolare paracompatto, risulta $\mathcal{A}_{\mathfrak{a}}$-completo.

OSSERVAZIONE 7. - Ogni spazio quasi-metrizzabile dotato di base numerabile (o, che è lo stesso, regolare e dotato di base numerabile) E risulta $\mathcal{A}_{\mathfrak{a}}$-completo.

Nelle precedenti osservazioni sono contenuti i preannunciati esempii di spazii $\mathcal{A}_{\mathfrak{a}}$-completi.

OSSERVAZIONE 8. - Se lo spazio uniformizzabile E è $\mathcal{A}_{\mathfrak{a}}$-completo ogni spazio topologico omeomorfo ad esso gode delle stesse proprietà. Di questa ovvia osservazione ci serviremo senza esplicito riferimento.

2. - Per stabilire la prop. 3 qui appresso conviene isolare il seguente lemma:

LEMMA 2. - *Supponiamo che E sia uno spazio uniformizzabile, che $\mathfrak{a}$ sia un numero cardinale infinito e che $\mathcal{A}_{\mathfrak{a}}(E)$ sia la $\mathfrak{a}$-struttura uniforme su E. Allora esiste una famiglia $(\mathcal{M}_\beta)_{\beta \in B}$ di strutture uniformi quasi-metrizzabili su E, tutte meno fini di $\mathcal{A}_{\mathfrak{a}}(E)$ tali che per ogni $\beta \in B$, la topologia (di spazio quasi-metrizzabile) $\mathcal{T}_\beta$ dedotta da $\mathcal{M}_\beta$ abbia una base $(T_{\beta\lambda})_{\lambda \in L_\beta}$ tale che* card $(L_\beta) \leq \mathfrak{a}$ *e tale che $\mathcal{A}_{\mathfrak{a}}(E)$ sia la struttura uniforme estrema superiore della famiglia $(\mathcal{M}_\beta)_{\beta \in B}$*(1) *cioè* $\mathcal{A}_{\mathfrak{a}}(E) = \sup_{\beta \in B} \mathcal{M}_\beta$.

DIM. - La tesi viene stabilita quasi immediatamente utilizzando il lemma 2 n. 2 di [5].

Supponiamo che $(V_\beta)_{\beta \in B}$ sia una rappresentazione parametrica dell'insieme delle adiacenze di E per $\mathcal{A}_{\mathfrak{a}}(E)$: se è $\beta \in B$, per definizione di $\mathcal{A}_{\mathfrak{a}}(E)$ esiste un ricovrimento aperto, localmente finito ed $\mathcal{U}$-riducibile $(U_\iota)_{\iota \in I}$ di E tale che

$$\text{card } (I) \leq \mathfrak{a},$$

$$\bigcup_{\iota \in I} (U_\iota \times U_\iota) \subset V_\beta .$$

Per il lemma testé citato di [5] esiste una struttura uniforme quasi-metrizzabile $\mathcal{M}_\beta$ su E, meno fine di $\mathcal{A}_{\mathfrak{a}}(E)$, tale che la topologia $\mathcal{T}_\beta$ su E dedotta da $\mathcal{M}_\beta$ abbia una base $(T_{\beta\lambda})_{\lambda \in L_\beta}$ tale che card $(L_\beta) \leq \mathfrak{a}$ e tale che esista un'adiacenza W di E per $\mathcal{M}_\beta$ tale che $(W(x))_{x \in E}$ sia un raffinamento

(1) Cioè la meno fine delle strutture uniformi su E più fini di ciascuna delle $\mathcal{M}_\beta$ al variare di β in B.

di $(U_\iota)_{\iota \in I}$. Supponiamo che W sia simmetrica. Allora si ha:

$$W \subset W \circ W = \bigcup_{x \in E} (W(x) \times W(x)) \subset \bigcup_{\iota \in I} (U_\iota \times U_\iota) \subset V_\beta .$$

Dunque V_β è un'adiacenza di E per $\mathcal{M}_\beta$ e quindi $\mathcal{A}_\alpha(E)$ è meno fine di $\sup_{\beta \in B} \mathcal{M}_\beta$. D'altra parte ogni $\mathcal{M}_\beta$ è meno fine di $\mathcal{A}_\alpha(E)$ e quindi, ovviamente, la tesi è dimostratata.

La proposizione qui appresso è fondamentale per gli obbiettivi che sono in vista in quanto segue.

PROP. 3. - *Nelle ipotesi per E, α e $\mathcal{A}_\alpha(E)$ fissate nel lemma* 2, *esiste una famiglia $(E_\beta)_{\beta \in B}$ di spazii uniformi quasi-metrizzabili ciascuno dei quali ha una base per la sua topologia $\mathcal{T}_\beta$ che denotiamo con $(T_{\lambda\beta})_{\lambda \in L_\beta}$, tale che* card $(L_\beta) \leq \alpha$ *e tale che lo spazio uniforme $(E, \mathcal{A}_\alpha(E))$ sia isomorfo (nel senso della teoria degli spazii uniformi) con un sottospazio uniforme dello spazio uniforme prodotto*

$$\prod_{\beta \in B} E_\beta .$$

Inoltre se E è separato (= di Hausdorff) ogni E_β può essere supposto, in particolare, uno spazio metrizzabile.

DIM. - L'asserto viene stabilito, tramite il lemma 2, con una argomentazione che, salvo una precisazione, riproduce quella adoperata in [10] prop. 34.6 alla quale si rinvia il lettore per i particolari di dettaglio.

Come il lemma 2 consente, si assuma una famiglia $(\mathcal{M}_\beta)_{\beta \in B}$ di strutture uniformi quasi-metrizzabili su E, tutte meno fini di $\mathcal{A}_\alpha(E)$ tali che, per ogni $\beta \in B$, la topologia (di spazio quasi-metrizzabile) $\mathcal{T}_\beta$ su E dedotta di $\mathcal{M}_\beta$ abbia una base $(T_{\beta\lambda})_{\lambda \in L_\beta}$ tale che card $(L_\beta) \leq \alpha$ e tale che $\mathcal{A}_\alpha(E)$ risulti la struttura uniforme estrema superiore della famiglia $(\mathcal{M}_\beta)_{\beta \in B}$.

Per ogni $\beta \in B$ sia $E_\beta = E$ e muniamo E_β della struttura uniforme $\mathcal{M}_\beta$ (cioè consideriamo lo spazio uniforme $(E_\beta, \mathcal{M}_\beta)$). Consideriamo lo spazio uniforme prodotto

$$P = \prod_{\beta \in B} E_\beta$$

(munito della struttura uniforme prodotto delle $\mathcal{M}_\beta$).

Per ogni $\beta \in B$ sia φ_β l'applicazione identica di E_β e consideriamo la applicazione prodotto $\varphi = \times_{\beta \in B} \varphi_\beta$. Ovviamente φ applica bigettivamente E sulla diagonale Δ di P (insieme degli $(x_\beta)_{\beta \in B} \in P$ tali che, per un certo $x \in E$, risulti $x_\beta = x$ per ogni $\beta \in B$). Si riconosce che φ è isomorfismo dello spazio uniforme $(E, \mathcal{A}_\alpha(E))$ su Δ munito della struttura uniforme indotta su esso dalla struttura prodotto delle $\mathcal{M}_\beta$. Da ciò la prima parte della tesi.

Per quanto concerne la seconda parte, supponiamo E separato e, per ogni $\beta \in B$, consideriamo lo spazio uniforme separato associato ad $(E_\beta, \mathcal{M}_\beta)$ e denotiamolo con $(E^*_\beta, \mathcal{M}^*_\beta)$ dove, appunto, $\mathcal{M}^*_\beta$ è la struttura uniforme associata alla $\mathcal{M}_\beta$. Poichè $\mathcal{M}_\beta$ è una struttura uniforme quasi-metrizzabile, la $\mathcal{M}^*_\beta$ è metrizzabile ed E^*_β munito della topologia $\mathcal{T}^*_\beta$ dedotta da $\mathcal{M}^*_\beta$ è uno spazio metrico.

Sia $\varkappa_\beta$ la surgezione canonica di E_β sopra E^*_β: essa è una applicazione continua, chiusa, aperta e propria ([2]) e poichè E_β ha una base $(T_\lambda)_{\lambda \in L}$ tale che card $(L) \leq \mathfrak{a}$, in forza del lemma 2, n. 2 di [5], altrettanto accade per E^*_β con $\mathcal{T}_\beta$.

Sia $\varkappa = \underset{\beta \in B}{\times} \varkappa_\beta$. Posto $\psi = \varkappa \circ \varphi$, come nella prop. 34.6 di [10], si riconosce che, E essendo separato, ψ è un isomorfismo dello spazio uniforme separato $(E, \mathcal{A}_\mathfrak{a}(E))$ in un sottospazio uniforme del prodotto

$$P^* = \prod_{B \in B} E^*$$

munito della struttura uniforme prodotto delle $\mathcal{M}^*_\beta$. Da ciò la tesi.

3. – Per proseguire più agevolmente l'analisi intrapresa, converrà effettuare qualche richiamo e qualche precisazione di Algebra Topologica.

Per tutti i riferimenti d'Algebra si potrà tener presente [7].

In particolare, se A è un'anello commutativo dotato di unità, dovremo adoperare il concetto di «algebra sopra A» (non necessariamente dotata di unità per la moltiplicazione) conformemente alla def. 1, § 7, cap. II cap. cit. Per ciò che ci riguarda, A sarà il corpo reale $\boldsymbol{R}$.

In primo luogo, supponiamo che E sia un'algebra su A e, detta X una sua parte non vuota sia $E(X)$ la sottoalgebra generata da X.

Notoriamente $E(X))$ è caratterizzata dalle seguenti proprietà:

1) – $E(X)$ è una sottoalgebra di E contenente X.

2) – se H è una qualunque sottoalgebra di E contenente X, risulta $E(X) \subset X$.

Supponiamo che $M(X)$ sia la parte di E stabile per la moltiplicazione di E (come anello) generata da X e sia $V(M(X))$ il sottomodulo di E, considerato come A-modulo unitario in modo canonico, generato da $M(X)$. Come è ben noto si ha

$$E(X) = V(M(X)).$$

([2]) Cfr. N. BOURBAKI; *Topologie Générale*; Actual. Scient. et Ind. 1142, Hermann (Parigi), terza edizione (1961): cap. II § 3, n. 9 prop. 17 Remarque.

Supponiamo ora, molto più particolarmente che E sia un'algebra di BANACH, cioè un'algebra normata, con noma $\| \ \|$, completa. Ora è $A = \boldsymbol{R}$. ([8] cap. 9, § 3, n. 7, def. 9).

Sia B una qualunque parte di X densã in X, considerato come sottospazio metrico di E, e quindi

$$X \subset \bar{B},$$

e sia $E(B)$ la sottoalgebra generata da B. Poniamo:

$$H = \overline{E(B)}, \quad K = \overline{E(X)}.$$

Notoriamente H e K sono sottoalgebre chiuse di E e, più precisamente, le più piccole (per inclusione) delle sottoalgebre chiuse di E contenenti B e, rispett., X. Risultando $B \subset E(B) \subset E(X)$ si ha $X \subset \bar{B} \subset H \subset K$ e quindi $X \subset H$, donde, H essendo un'algebra, per 2) risulta $E(X) \subset H$ nonchè $K = \overline{E(X)} \subset H = H$. In conclusione è

$$H = K.$$

Detta $M(B)$ la parte di E stabile per la moltiplicazione generata da B (analoga di $M(X)$) e $V(M(B))$ il sottospazio vettoriale di E generato da $M(B)$ (analogo di $M(X)$), anche ora si ha

$$E(B) = V(M(B)),$$

e quindi è

$$K = \overline{V(M(B))}.$$

Denotato con $\boldsymbol{Q}$ l'insieme dei numeri razionali, sia

$$M_{\boldsymbol{Q}}(B)$$

l'insieme delle combinazioni lineari, a coefficienti in $\boldsymbol{Q}$, di elementi di $M(B)$. Ovviamente risulta $M_{\boldsymbol{Q}}(B) \subset V(M(B)) = V(M(X))$ e da ciò

$$M_{\boldsymbol{Q}}(B) \subset K.$$

Riconosciamo ora che risulta

$$\overline{M_{\boldsymbol{Q}}(B)} = K. \tag{1}$$

A tal fine, ricordato che $V(M(B))$ è il sottospazio vettoriale di E generato da $M(B)$, se è $x \in K$ ed ε è un elemento positivo di $\boldsymbol{R}$, esistono una famiglia finita $(m_\iota)_{\iota\in I}$ di elementi di $M(B)$ ed una famiglia finita $(a_\iota)_{\iota\in I}$ di elementi di $\boldsymbol{R}$, tali che

$$\| x - \sum_{\iota\in I} a_\iota m_\iota \| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Supponiamo come è, ovviamente, lecito che sia $m_\iota \neq 0$ per ogni $\iota \in I$ e quindi che per ogni $\iota \in I$ sia

$$\| m_\iota \| \neq 0.$$

Allora, poichè $\boldsymbol{Q}$ è ovunque denso in $\boldsymbol{R}$, detto n il numero degli elementi dell'insieme finito I, esiste un $q_\iota \in \boldsymbol{Q}$, per ogni $\iota \in I$, tale che

$$| q_\iota - a_\iota | < \frac{\varepsilon}{2n \| m_\iota \|}.$$

Consegue:

$$\| x - \sum_{\iota\in I} q_\iota m_\iota \| < \varepsilon.$$

e quindi $x \in \overline{M_{\boldsymbol{Q}}(B)}$ e da ciò la (1).

Ora osserviamo che, come è noto, $M(B)$ è l'insieme dei composti moltiplicativamente delle famiglie finite $(x_k)_{0\leq k\leq n}$ di elementi di B. Consegue:

$$\text{card}\ (M(B)) = \text{card}\ (B).$$

Poichè $\boldsymbol{Q}$ è numerabile consegue card $(M_{\boldsymbol{Q}}(B)) =$ card $(M(B))$ e da ciò

$$\text{card}\ (M_{\boldsymbol{Q}}(B)) = \text{card}\ (B).$$

4. - Supponiamo che (E, d) sia uno spazio metrico con distanza d. Sostituendo eventualmente d con $d/(1 + d)$, possiamo supporre d limitata senza alterare la struttura uniforme di (E, d).

Denotiamo con $\mathcal{B}(E)$ l'algebra di BANACH delle funzioni reali continue e limitate su (E, d) con la norma $\|\ \|$ definita ponendo

$$\| f \| = \sup_{x\in E} | f(x) |$$

per ogni $f \in \mathcal{B}(E)$. Essendo $\| f \cdot g \| \leq \| f \| \cdot \| g \|$ la moltiplicazione in $\mathcal{B}(E)$ è continua oltre, che l'addizione e la moltiplicazione scalare, come ci è garantito dal fatto che $\|\ \|$ è una norma.

Sia φ: $E \to \mathcal{B}(E)$ l'applicazione di E in $\mathcal{B}(E)$ definita ponendo $\varphi(a) = f_a$ per ogni $a \in E$ avendo indicato con f_a l'elemento di $\mathcal{B}(E)$ definito ponendo $f_a(x) = d(a, x)$ per ogni $x \in E$.

Come ha rilevato K. KURATOWSKI, da $a \in E$, $b \in E$ consegue

$$\| \varphi(a) - \varphi(b) \| = d(a, b). \tag{1}$$

Consegue, in primo luogo, che risulta $\varphi(a) = \varphi(b)$ se e solo se è $a = b$, e quindi φ è ingettiva.

Inoltre, posto $E^* = \varphi(E)$ e detta ψ l'applicazione ridotta di φ, applicazione di E su E^* definita ponendo $\psi(x) = \varphi(x)$ per ogni $x \in E$, e considerato E^* quale sottospazio metrico di $\mathcal{B}(E)$ (con distanza $\| f - g \|$ per due elementi f e g di $\mathcal{B}(E)$), la ψ risulta una isometria di E sopra E^*.

Sia

$$A(E)$$

la sottoalgebra chiusa di $\mathcal{B}(E)$ generata di E^* cioè l'aderenza nello spazio metrico $\mathcal{B}(E)$ della sottoalgebra di $\mathcal{B}(E)$ generata da E^* nel senso precisato nel n. 3.

Ovviamente $A(E)$ è una sottoalgebra di BANACH di $\mathcal{B}(E)$.

Sia B una parte ovunque densa di E e sia $B^* = \psi(B)$. Per quanto si è riconosciuto nel n. 3, esiste una parte C di $A(E)$ che ha lo stesso numero cardinale di B^* cioè di B. Dunque

LEMMA 3. - *Supponiamo che E sia uno spazio metrico e che $\mathfrak{a}$ sia un numero cardinale infinito. Allora esiste un' algebra di Banach $A(E)$ tale che E sia isometrico ad un sottospazio metrico di $A(E)$ e se B è una parte di E ovunque densa tale che* card $(B) \leq \mathfrak{a}$, *esiste una parte C di $A(E)$ ovunque densa tale che* card $(C) \leq \mathfrak{a}$.

Se si osserva ora, che detta parte B può esistere, E essendo metrico, se e solo se esiste una base $(T_\lambda)_{\lambda \in L}$ della topologia di E tale che card $(L) \leq \mathfrak{a}$ si conclude:

LEMMA 4. - *Se E e $\mathfrak{a}$ sono quelli del lemma 3 e se $(T_\lambda)_{\lambda \in L}$ è una base della topologia di E tale che* card $(L) \lesssim \mathfrak{a}$, *esiste un' algebra di Banach $A(E)$ tale che E sia isometrico ad un sottospazio metrico di $A(E)$ e, a sua volta, $A(E)$ abbia una base per la sua topologia $(U_\iota)_{\iota \in I}$ tale che* card $(I) \leq \mathfrak{a}$.

5. - Dopo questi preliminari si può stabilire che:

PROP. 4. - *Supponiamo che E, $\mathfrak{a}$ e $\mathcal{A}_\mathfrak{a}(E)$ siano quelli della prop. 3. Allora supposto che E sia separato ($=$ di Hausdorff), esiste una famiglia $(A_\beta)_{\beta \in B}$ di algebre Banach ciascuna delle quali ha per la sua topologia una base $(T_{\beta\lambda})_{\lambda \in L_\beta}$ tale che* card $(L_\beta) \leq \mathfrak{a}$ *e tale che lo spazio uniforme $(E, \mathcal{A}_\mathfrak{a}(E))$ sia isomorfo ad un sottospazio uniforme dello spazio uniforme prodotto*

$$\prod_{\beta \in B} A_\beta$$

(munito della struttura uuiforme prodotto delle strutture uniformi metrizzabili di cui ciascun A_β è munito canonicamente).

Dim. - L'asserto è ovvia conseguenza della prop. 3 e del lemma 4.

Sussiste ora la proposizione seguente che caratterizza la $\mathcal{A}_\mathfrak{a}$-completezza:

Prop. 5. - *Se E, $\mathfrak{a}$ e $\mathcal{A}_\mathfrak{a}(E)$ sono quelli della prop. 4 e se E è separato, le seguenti proposizioni sono equivalenti:*

a) *E è $\mathcal{A}_\mathfrak{a}$-complelo (cioè lo spazio uniforme $(E, \mathcal{A}_\mathfrak{a}(E))$ è completo),*

b) *esiste una famiglia $(A_\beta)_{\beta \in B}$ di algebre di Banach, ciascuna delle quali A_β ha una base $(T_{\beta\lambda})_{\lambda \in L_\beta}$ della sua topologia tale che* card $(L_\beta) \leq \mathfrak{a}$ *e posto*

$$P = \prod_{\beta \in B} A_\beta \tag{1}$$

E è omeomorfo ad un sottospazio chiuso E^* dello spazio prodotto P.

Dim. - a) *implica* b). Supposta vera la *a)* supponiamo che $(A_\beta)_{\beta \in B}$ sia una famiglia di algebre di Banach prevista dalla prop. 4 e P sia definito da (1). Per la prop. 4 esiste un sottospazio uniforme E^* di P, munito della struttura uniforme prevista nella prop. 4, tale che E munito di $\mathcal{A}_\mathfrak{a}(E)$ sia isomorfo ad E^*. Poichè $(E, \mathcal{A}_\mathfrak{a}(E))$ è completo, E^*, quale sottospazio uniforme, è completo e, poichè P è separato, E^* è chiuso in P. Da ciò consegue la b).

b) *implica* a). Sia vera la b). In forza della osservazione 6 al lemma 1 ciascun A_β è $\mathcal{A}_\mathfrak{a}$-completo e quindi P, in forza della prop. 5, n. 2 di [4], è $\mathcal{A}_\mathfrak{a}$-completo. Ma allora E^*, previsto in b), essendo chiuso in P in forza della prop. 3, n. 2 di [4], è $\mathcal{A}_\mathfrak{a}$-completo ed allora E è $\mathcal{A}_\mathfrak{a}$-completo (osservazione 8 al lemma 1).

Osservazione. - E' noto che ogni spazio metrizzabile dotato di base numerabile e, più in generale, ogni spazio di Lindelöf regolare, risulta un Q-spazio secondo E. Hewitt (real-compatto secondo [9]). Inoltre il prodotto di una qualunque famiglia di Q-spazii è un Q-spazio e ogni sottospazio chiaro di un Q-spazio è un Q-spazio. Allora la prop. 5, per $\mathfrak{a} =$ card $(\boldsymbol{N})$, dimostra che uno spazio uniformizzabile separato risulta $\mathcal{A}_\mathfrak{a}$-completo se e solo se è un Q-spazio, (cfr. [4] § 2, prop. 2) a causa del teor. 11.12 di [9].

Si conclude il presente § con la proposizione:

Prop. - *Supponiamo che T sia uno spazio uniformizzabile separato e che E sia un sottospazio di T ovunque denso. Supponiamo, inoltre, che $\mathfrak{a}$ sia un numero cardinale infinito e che $\upsilon_\mathfrak{a}(T)$ e $\upsilon_\mathfrak{a}(E)$ siano gli $\mathcal{A}_\mathfrak{a}$-completamenti di T e di E* (def. 1). *Allora le seguenti proposizioni sono equivalenti:*

a) *se A è un'algebra di Banach avente una base $(T_\lambda)_{\lambda \in L}$ per la sua sua topologia tale che* card $(L) \leq \mathfrak{a}$ *e se $f: E \to A$ è un'applicazione continua* *di E in A esiste un'applicazione continua $\bar{f}$: $T \to A$ dell'intero T in A la cui restrizione a E sia f:*

b) *se X è un qualunque spazio uniformizzabile separato e $\mathcal{A}_{\mathfrak{a}}$-completo e se f: $E \to X$ è un'applicazione continua di E in X esiste un'applicazione continua $\bar{f}$: $T \to X$ dell'intero T in A la cui restrizione ad E sia f.*

c) *risulta* $\upsilon_{\mathfrak{a}}(T) = \upsilon_{\mathfrak{a}}(E)$ (*topologicamente*).

d) *risula* $E \subset T \subset \upsilon_{\mathfrak{a}}(E)$ (*ingettivamente*).

Dimostriamo l'asserto stabilendo che a) $\Longrightarrow$ b) $\Longrightarrow$ c) $\Longrightarrow$ d) $\Longrightarrow$ b) $\Longrightarrow$ a).

a) *implica* b). Supponiamo che X sia quello previsto da b) e supponiamo che $(A_\beta)_{\beta \in B}$ sia una famiglia di algebre di BANACH la cui esistenza è assicurata dalla *b*) della prop. 5 con tutte le condizioni ivi dichiarate. sostituende E con X. Possiamo identificare, in modo del tutto lecito, X con X^* previsto in detta b) prop. 5 riferita ad X pertanto la f può essere riguardata un'applicazione continua di E in P.

Per ogni $\iota \in I$ sia pr_β la β-esima proiezione di P (su A_β) e poniamo $f_\beta = pr_\beta \circ f$. La f_β è un'applicazione continua di E in A_β: in forza di a), detta j_E l'ingezione canonica di E in T. esiste un'applicazione continua g_β di T in A_β la cui restrizione ad E sia f_β cioè sia tale che

$$g_\beta \circ j_E = pr_\beta \circ f \tag{1}$$

Sia $g = (g_\beta)_{\beta \in B}$ cioè sia g l'applicazione di T in P tale che per ogni $x \in T$ sia $g(x) = (g_\beta(x))_{\beta \in B}$. Poichè ogni g_β è continua anche g è una applicazione continua di T in P. A causa della (1) si ha $g \circ j_E = f$.

Inoltre, essendo $g(E) = g(j_E(E)) = g \circ j_E(E) = f(E)$ risulta

$$g(T) = g(\bar{E}^{(T)}) \subset g(\bar{E})^{(P)} = f(\bar{E})^{(P)} \subset \bar{X}^{(P)} = X.$$

Pertanto la g definisce un'applicazione continua $\bar{f}$ di T in X al modo seguente: per ogni $x \in T$ risulta $\bar{f}x) = g(x)$. Evidentemente $\bar{f} \circ j_E = f$ e da ciò segue la *b*).

b) *implica* c). Sia vera la b) e sia f: $E \to X$ una qualunque applicazione continua di E in uno spazio uniformizzabile separato ed $\mathcal{A}_{\mathfrak{a}}$-completo X. Per *b*) la f si può estendere in una applicazione continua g di T in X e, considerato T come (ingettivamente) immerso quale sottospazio ovunque denso di $\upsilon_{\mathfrak{a}}(T)$, per la osservazione alla prop. 1, esiste una estensione cotinua $\bar{f}$ di g a $\upsilon_{\mathfrak{a}}(T)$. Poichè E è ovunque denso in T, esso è anche ovunque denso in $\upsilon_{\mathfrak{a}}(T)$ e ciò, $\upsilon_{\mathfrak{a}}(T)$ essendo $\mathcal{A}_{\mathfrak{a}}$-completo, dimostra che, a meno di un omeomorfismo, risulta $\upsilon_{\mathfrak{a}}(T) = \upsilon_{\mathfrak{a}}(E)$ (cfr. ancora prop. 1)

c) *implica* d). È ovvio, in forza della prop. c) e del fatto che è $E \subset T$.

d) *implica* b). È ovvio, in forza della prop. 1.

b) *implica* a). È ovvia per la osservazione 6 al lemma 1.

§ 2. - Filtri $\mathcal{U}$-inviluppati

La seguente definizione ha origine da P. SAMUEL [11].

DEF. 1. - *Se* $(E, \mathcal{U})$ *è uno spazio uniforme, una base di filtro* $\mathfrak{B}$ *su* E *si dice* $\mathcal{U}$*-inviluppata se per ogni* $B \in \mathfrak{B}$ *esistono un* $B' \in \mathfrak{B}$ *ed una adiacenza* V *di* $(E, \mathcal{U})$ *tali che* $V(B') \subset B$.

OSSERVAZIONE 1. - La precedente definizione si applica ai filtri che sono, come è noto, particolari basi di filtro.

OSSERVAZIONE 2. - Ogni filtro $\mathcal{U}$- inviluppato ha una base formata da insiemi chiusi ed una base formata da insiemi aperti.

OSSERVAZIONE 3. - Se $\mathcal{U}'$ è una ulteriore struttura uniforme su E più fine di $\mathcal{U}$ ogni base di filtro $\mathcal{U}$-inviluppata è anche $\mathcal{U}'$ inviluppata.

PROP. 1 - *Se* $(E, \mathcal{U})$ *è uno spazio uniforme e se* $\mathfrak{F}$ *è un filtro su* E *le seguenti proposizioni sono equivalenti:*

a) $\mathfrak{F}$ *è* $\mathcal{U}$*-inviluppato* (def. 1)

b) *ogni base di* $\mathfrak{F}$ *è* $\mathcal{U}$*-inviluppata*

c) *esiste una base* $\mathcal{U}$*-inviluppata per* $\mathfrak{F}$.

DIM. - Che a) $\Rightarrow$ b) $\Rightarrow$ c) è ovvio.

c) *implica* a). Sia $\mathfrak{B}$ una base $\mathcal{U}$-inviluppata di $\mathfrak{F}$ e sia $F \in \mathfrak{F}$. Esiste un $B \in \mathfrak{B}$ tale che $B \subset F$ ed esistono un $B' \in \mathfrak{B}$ de un'adiacenza V di $(E, \mathcal{U})$ tali che $V(B') \subset B$. Ciò, essendo $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{F}$ dimostra la a).

Un esempio di filtro $\mathcal{U}$-inviluppato è fornito dalla seguente

PROP. 2. - *Se* $(E, \mathcal{U})$ *è uno spazio uniforme, per ogni* $x \in E$, *il filtro* $\mathfrak{B}(x)$ *degli intorni di* x *è* $\mathcal{U}$*-inviluppato.*

DIM. - Sia $W \in \mathfrak{B}(x)$: esiste un'adiacenza V di $(E, \mathcal{U})$ tale che $V \circ V(x) \subset W$. Poichè. $V(x)$ è un intorno di x e risulta $V(V(x)) = V \circ V(x) \subset W$ la tesi è vera.

Ulteriori esempii di filtri $\mathcal{U}$-inviluppati sono forniti dalla seguente proposizione:

PROP. 3. - *Se* $(E, \mathcal{U})$ *è uno spazio uniforme e se* $\mathfrak{F}$ *è un filtro su* E, *esiste un filtro* $\mathcal{U}$*-inviluppato* $\mathfrak{F}_{\mathcal{U}}$ *su* E (def. 1) *che è meno fine di* $\mathfrak{F}$ *ed è tale che, supposto che* $\mathfrak{S}$ *sia un sistema fondamentale di adiacenze di* $(E, \mathcal{U})$ *e che* $\mathfrak{B}$ *sia base di* $\mathfrak{F}$, *l'insieme* $\mathfrak{B}_{\mathfrak{S}}$ *delle parti* B *di* E *della forma* $B = V(A)$ *con* $V \in \mathfrak{S}$ *ed* $A \in \mathfrak{B}$, *è base di* $\mathfrak{F}_{\mathcal{U}}$.

DIM. - Che $\mathfrak{B}_{\mathfrak{S}}$ sia una base di filtro consegue dal fatto che $\mathfrak{S}$ e $\mathfrak{B}$ sono basi di filtro.

Riconosciamo che $\mathfrak{B}_{\mathfrak{S}}$ è $\mathcal{U}$-inviluppato. Infatti se è $B \in \mathfrak{B}_{\mathfrak{S}}$ esistono $V \in \mathfrak{S}$ ed $A \in \mathfrak{B}$ tali che $B = V(A)$. Poichè $\mathfrak{S}$ è un sistema fondamentale di adiacenze per $(E, \mathcal{U})$ esiste un $W \in \mathfrak{S}$ tale che $W \circ W \subset V$. Posto $B' = W(A)$ risulta $B' \in \mathfrak{B}_{\mathfrak{S}}$ e $W(B') \subset B$ il che, essendo $W \in \mathfrak{S}$, dimostra che la base $\mathfrak{B}_{\mathfrak{S}}$ è $\mathcal{U}$-inviluppata.

Sia $\mathfrak{A}$ il filtro delle adiacenze di $(E, \mathcal{U})$ (del quale $\mathfrak{S}$, per ipotesi, è una base). Se in quanto sopra si assume $\mathfrak{B} = \mathfrak{F}$ ed $\mathfrak{S} = \mathfrak{A}$ risulta che $\mathfrak{F}_{\mathfrak{A}}$ è una base di filtro $\mathcal{U}$-inviluppata (osservazione 1 alla def. 1) ed il filtro $\mathfrak{F}_{\mathcal{U}}$ da essa generato e, del pari, $\mathcal{U}$-inviluppato.

Inoltre ogni $\mathfrak{B}_{\mathfrak{S}}$ è base di $\mathfrak{F}_{\mathcal{U}}$ ed $\mathfrak{F}_{\mathcal{U}}$ è meno fine di $\mathfrak{F}$.

Dopo ciò è giustificata la definizione che avrà ufficio essenziale, in appresso.

Def. 2. – *Se $\mathfrak{F}_{\mathcal{U}}$ è il filtro $\mathcal{U}$-inviluppato previsto nella prop. 2 della quale conseviamo notazioni e definizioni, ad $\mathfrak{F}_{\mathcal{U}}$ si attribuisce il nome di $\mathcal{U}$-inviluppo di $\mathfrak{F}$ oppure di filtro $\mathcal{U}$-inviluppato generato da $\mathfrak{F}$.*

Osservazione 1. – Se $\mathcal{U}$ e $\mathcal{U}'$ sono strutture uniformi su E ed $\mathcal{U}$ è meno fine di $\mathcal{U}'$ e se $\mathfrak{F}$ e $\mathfrak{F}'$ sono filtri su E', l' $\mathcal{U}$-inviluppo $\mathfrak{F}_{\mathcal{U}}$ di $\mathfrak{F}$ è meno fine dell'$\mathcal{U}'$-inviluppo di $\mathfrak{F}'$.

Osservazione 2. – Se $\mathfrak{F}$ gode della proprietà dell'intersezione numerabile (cfr. il seguente § 3. def. 1) altrettanto accade ad $\mathfrak{F}_{\mathcal{U}}$.

Come è ovvio:

Prop. 4. – *Se $(E, \mathcal{U})$ è uno spazio uniforme, se $\mathfrak{F}$ è un filtro sull'insieme E se $\mathfrak{F}_{\mathcal{U}}$ è il filtro $\mathcal{U}$-inviluppato generato da $\mathfrak{F}$* (def. 2) *le seguenti proposizioni sono equivalenti*;

a) *$\mathfrak{F}$ è $\mathcal{U}$-inviluppato.*

b) *risulta* $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_{\mathcal{U}}$.

Dim. – a) *implica* b). Dalla def. 2 e dalla prop. 3 consegue $\mathfrak{F}_{\mathcal{U}} \subset \mathfrak{F}$ mentre, poichè $\mathfrak{F}$ è $\mathcal{U}$- inviluepato si ha $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{F}_{\mathcal{U}}$. Da ciò la b).

b) *implica* a). É ovvia conseguenza della def. 2 e della prop. 3.

Osservazione. – Se $\mathfrak{F}$ è $\mathcal{U}$-inviluppato e se $\mathfrak{F}'$ è un filtro più fine di $\mathfrak{F}$ l'$\mathcal{U}$-inviluppo $\mathfrak{F}'_{\mathcal{U}}$ di $\mathfrak{F}'$ (def. 2) è più fine di $\mathfrak{F}$. Consegue dalla osservazione 1 alla def. 2 e dalla prop. 4.

Di particolare utilità risulterà la

Prop. 5. – *Se $(E, \mathcal{U})$ e uno spazio uniforme. se $\mathfrak{F}$ è un filtro su E e se $\mathfrak{F}_{\mathcal{U}}$ è il filtro $\mathcal{U}$-inviluppato generato da $\mathfrak{F}$* (def. 2) *le seguenti proposizioni sono equivalenti:*

a) $\mathfrak{F}$ *è un filtro di Cauchy su* $(E, \mathcal{U})$,

b) $\mathfrak{F}_{\mathcal{U}}$ *è un filtro di Cauchy su* $(E, \mathcal{U})$.

DIM. - a) *implica* b). Sia V un'adiacenza di $(E, \mathcal{U})$ e sia W un'adiacenza simmetrica di $(E, \mathcal{U})$ tale che $W \circ W \circ W \subset V$. Se è vera la a) esiste un $F \in \mathfrak{F}$ tale che $F \times F \subset W$: allora $W(F)$ è piccolo di ordine $W \circ W \circ W$ e quindi di ordine V, il che, essendo $W(F) \in \mathfrak{F}_{\mathcal{U}}$ dimostra la b).

b) *implica* a). É ovvia poichè $\mathfrak{F}_{\mathcal{U}}$ è meno fine di $\mathfrak{F}$.

La seguente proposizione ha un notevole interesse tecnico.

PROP. 6. - *Se* $(E, \mathcal{U})$, $\mathfrak{F}$ *ed* $\mathfrak{F}_{\mathcal{U}}$ *sono quelli della prop.* 5, *ogni qual volta* $\mathfrak{F}$ *sia un filtro di Cauchy su* $(E, \mathcal{U})$, *ogni filtro di Cauchy* $\mathfrak{F}'$ *su* $(E. \mathcal{U})$ *meno fine di* $\mathfrak{F}$ *risulta più fine di* $\mathfrak{F}_{\mathcal{U}}$.

DIM. - Sia $A \in \mathfrak{F}_{\mathcal{U}}$: eistono $B \in \mathfrak{F}$ ed un'adiacenza V di $(E, \mathcal{U})$ tali che $A = V(B)$. Poichè $\mathfrak{F}'$ è un filtro di CAUCHY su $(E, \mathcal{U})$ esiste $F' \in \mathfrak{F}'$ tale che $F' \times F' \subset V$: poichè $\mathfrak{F}'$ è meno fine di $\mathfrak{F}$, risulta anche $F' \in \mathfrak{F}$ e quindi $B \cap F' \neq \emptyset$ donde, F' essendo piccolo di ordine V, consegue $F' \subset V(B) = A$. Per un assioma di filtro, è $A \in \mathfrak{F}'$ ed $\mathfrak{F}'$ è più fine di $\mathfrak{F}_{\mathcal{U}}$.

COROLLARIO 1. - *Se* $(E, \mathcal{U})$, $\mathfrak{F}$ *ed* $\mathfrak{F}_{\mathcal{U}}$ *sono quelli della prop.* 6 *e se* $\mathfrak{F}$, *e quindi* $\mathfrak{F}_{\mathcal{U}}$ (prop. 5), *è un filtro di Cauchy su* $(E, \mathcal{U})$, *allora* $\mathfrak{F}_{\mathcal{U}}$ *è l'unico filtro di Cauchy minimale su E, meno fine di* $\mathfrak{F}$, *sull'insieme, ordinato per finezza, dei filtri di Cauchy su* $(E, \mathcal{U})$.

DIM. - Detto $\mathfrak{F}'$ un filtro di CAUCHY su $(E, \mathcal{U})$, se risulta che $\mathfrak{F}'$ è meno fine di $\mathfrak{F}_{\mathcal{U}}$, $\mathfrak{F}'$ è meno fine di $\mathfrak{F}$ (def. 2 e prop. 3) e quindi, per la prop. 6, $\mathfrak{F}'$ risultando più fine di $\mathfrak{F}$, si ha $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}'$.

Se, invece, si suppone che $\mathfrak{F}'$ sia un filtro di CAUCHY minimale e meno fine di $\mathfrak{F}$, per la prop. 6, si ha che $\mathfrak{F}'$ è più fine di $\mathfrak{F}_{\mathcal{U}}$ e, per la minimaiità $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}'$.

COROLLARIO 2. - (H-J. KOWALSKI [10]). *Se* $(E, \mathcal{U})$ *è uno spazio uniforme se* $\mathfrak{F}'$ *è un filtro* $\mathcal{U}$*-inviluppato e se* $\mathfrak{F}''$ *è un filtro di* CAUCHY *su* $(E, \mathcal{U})$, *ogni volta che esista un filtro* $\mathfrak{F}$ *su E più fine di* $\mathfrak{F}'$ *ed* $\mathfrak{F}''$, *allora* $\mathfrak{F}'$ *è meno fine di* $\mathfrak{F}''$.

DIM. - Sia $\mathfrak{F}_{\mathcal{U}}$ il filtro $\mathcal{U}$-inviluppato su E generato da $\mathfrak{F}$ (def. 2.). Poichè $\mathfrak{F}$ è più fine del filtro di CAUCHY $\mathfrak{F}''$ anche $\mathfrak{F}$ è un filtro di CAUCHY su $(E, \mathcal{U})$ e quindi, per la prop. 6, $\mathfrak{F}_{\mathcal{U}}$ è meno fine di $\mathfrak{F}''$.

Allora. per l'osservazione alla prop. 4, $\mathfrak{F}_{\mathcal{U}}$ e più fine di $\mathfrak{F}'$. Poichè $\mathfrak{F}_{\mathcal{U}}$ è meno fine di $\mathfrak{F}''$ (prop. 6) la tesi è dimostrata.

COROLLARIO 3. - *Se* $(E, \mathcal{U})$ *è uno spazio uniforme, se* $\mathfrak{F}'$ *è un filtro* $\mathcal{U}$*--inviluppato su E* (def. 1) *più fine del filtro di Cauchy* $\mathfrak{F}''$ *su* $(E, \mathcal{U})$, *si ha* $\mathfrak{F}' = \mathfrak{F}''$.

DIM. - Nel corollario 2 ora può assumersi $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}'$ è quindi $\mathfrak{F}'$ è meno fine di $\mathfrak{F}''$; poichè, per ipotesi, $\mathfrak{F}''$ è meno fine di $\mathfrak{F}'$, la tesi è vera.

OSSERVAZIONE. - Se $\mathfrak{F}$ è un filtro di CAUCHY su $(E, \mathcal{U})$, sappiamo, per la prop. 4, che anche l'$\mathcal{U}$-inviluppo $\mathfrak{F}_{\mathcal{U}}$ di $\mathfrak{F}$ è un filtro di CAUCHY, per cui, se $\mathfrak{F}'$ è un filtro $\mathcal{U}$-inviluppato su $(E, \mathcal{U})$ più fine di $\mathfrak{F}_{\mathcal{U}}$ si ha $\mathfrak{F}' = \mathfrak{F}_{\mathcal{U}}$. Dunque $\mathfrak{F}_{\mathcal{U}}$ è un filtro $\mathcal{U}$-inviluppato massimale, cioè un elemento massimale dell' insieme dei filtri $\mathcal{U}$-inviluppati, ordinato per finezza. Si rilevi che l'esistenza di $\mathfrak{F}_{\mathcal{U}}$ è stabilita senza l'ausilio del lemma di ZORN e, se $(E, \mathcal{U})$ non è compatto esistono filtri $\mathcal{U}$-inviluppati massimali oltre quelli previsti dalla prop. 2.

Del lemma di ZORN, al contrario ci si serve per stabilire l'esistenza di ultrafiltri non banali e di ciò si fa uso nella seguente

PROP. 7. - *Supponiamo che $(E, \mathcal{U})$ sia uno spazio uniforme precompatto e che $\mathfrak{F}$ sia un filtro $\mathcal{U}$-inviluppato su E* (def. 1). *Allora esiste un filtro $\mathcal{U}$--inviluppato di Cauchy su $(E, \mathcal{U})$ più fine di $\mathfrak{F}$.*

DIM. - Sia $\mathfrak{A}$ un ultrafiltro su E più fine di $\mathfrak{F}$ e sia $\mathfrak{A}_{\mathcal{U}}$ il filtro $\mathcal{U}$-inviluppato generato da $\mathfrak{A}$ (def. 2). Poichè $\mathfrak{A}$ è un filtro di CAUCHY su $(E, \mathcal{U})$ (stante la precompatezza) $\mathfrak{A}_{\mathcal{U}}$ è del pari un filtro di CAUCHY (prop. 5). Ciò per la osservazione 1 alla def. 2 e per la prop. 4, dimostra che $\mathfrak{A}_{\mathcal{U}}$ è più fine di $\mathfrak{F}$.

OSSERVAZIONE. - Per quanto precisato nella osservazione al corollario 3, $\mathfrak{A}_{\mathcal{U}}$ è un filtro $\mathcal{U}$-inviluppato massimale.

LEMMA 2. - *Supponiamo che $(E, \mathcal{U})$ sia uno spazio uniforme, che $\mathfrak{F}$ sia un filtro di Cauchy su $(E, \mathcal{U})$ e che A e B siano parti di E tali che sia $V(A) \subset B$ per almeno un' adiacenza V di $(E, \mathcal{U})$. Allora o risulta $B \in \mathfrak{F}$ oppure risulta $\complement A \in \mathfrak{F}$.*

DIM. - Se per ogni $F \in \mathfrak{F}$ risulta $F \cap A \neq \emptyset$, poichè $\mathfrak{F}$ è un filtro di CAUCHY esiste un $F \in \mathfrak{F}$ tale che $F \times F \subset V$ e quindi si ha $F \subset V(A) \subset B$. Se, invece, esiste $F \in \mathfrak{F}$ tale che $F \cap A = \emptyset$ si ha $F \subset \complement A$ e quindi $\complement A \in \mathfrak{F}$.

Si dovrà utilizzare un risultato noto, relativo alla teoria generale delle strutture uniformi di spazio precompatto.

LEMMA 3. - *Se $(E, \mathcal{U})$ è uno spazio uniforme esiste una (ed una sola) struttura uniforme $\mathcal{A}(\mathcal{U})$ su E, compatibile con la topologia dedotta da $\mathcal{U}$ su E e che risulta la più fine delle strutture uniformi di spazio precompatto su E meno fini di $\mathcal{U}$. Inoltre, una parte V di $E \times E$ è una adiacenza di $(E, \mathcal{A}(\mathcal{U}))$ se e solo se esistono un ricovrimento chiuso $(F_k)_{0 \leq k \leq n}$ ed un ricovrimento aperto $(G_k)_{0 \leq k \leq n}$ di E ed una adiacenza W di $(E, \mathcal{U})$ tali che risulti, per ogni $k=0, \dots, n$*

$$W(F_k) \subset G_k$$

e si abbia:

$$\bigcup_{k=0}^{n} (G_k \times G_k) \subset V$$

DIM. - Consegue dal coroll. 1 alla prop. 3 e dal lemma 3 di [2] § 2.

OSSERVAZIONE. - Per brevità, uniformandoci alla def. 1 del § 2 di [2], la $\mathcal{A}(\mathcal{U})$ sarà denominata «la struttura uniforme associata ad $\mathcal{U}$» cioè assumiamo la seguente definizione:

DEF. 3 - *Se* $(E, \mathcal{U})$ *ed* $\mathcal{A}(\mathcal{U})$ *sono quelli previsti nel lemma* 3, $\mathcal{A}(\mathcal{U})$ *dicesi la struttura uniforme associata ad* $\mathcal{U}$.

LEMMA 4. - *Se* $(E, \mathcal{U})$ *è uno spazio uniforme, se* $\mathcal{A}(\mathcal{U})$ *è la struttura uniforme associata ad* $\mathcal{U}$ (def. 3) *e se* A *e* B *sono parti di* E *tali che per un'adiacenza* V *di* $(E, \mathcal{U})$ *sia* $V(A) \subset B$, *allora esiste un'adiacenza* W *di* $(E, \mathcal{A}(\mathcal{U}))$ *tale che* $W(\bar{A}) \subset B$.

DIM. - La tesi consegue dal lemma 1, § 2, dalla def. 2, § 2 e dalla prop. 2, § 1 di [3].

PROP. 8 - *Se* $(E, \mathcal{U})$ *e* $\mathcal{A}(\mathcal{U})$ *sono quelli del lemma* 4 *e se* $\mathfrak{F}$ *è un filtro su* E, *le seguenti sono equivalenti*:

a) $\mathfrak{F}$ *è* $\mathcal{U}$*-inviluppato* (def. 1)

b) $\mathfrak{F}$ *è* $\mathcal{A}(\mathcal{U})$*-inviluppato.*

DIM. - a) *implica* b). Consegue dalla def. 1 e dal lemma 4.

b) *implica* a). Consegue dal fatto che $\mathcal{A}(\mathcal{U})$ è meno fine di $\mathcal{U}$.

La seguente proposizione ha ufficio fondamentale in seguito.

PROP. 9. - *Se* $(E, \mathcal{U})$ *e* $\mathcal{A}(\mathcal{U})$ *sono quelli del lemma* 4 *e se* $\mathfrak{F}$ *è un filtro* $\mathcal{U}$*-inviluppato su* $(E, \mathcal{U})$ (def. 1) *le seguenti proposizioni sono equivalenti*:

a) $\mathfrak{F}$ *è un filtro di Cauchy su* $(E, \mathcal{A}(\mathcal{U}))$,

b) *se* A *e* B *sono parti di* E *tali che per un'adiacenza* V *di* $(E, \mathcal{A}(\mathcal{U}))$ *sia* $V(A) \subset B$, *allora risulta* $B \in \mathfrak{F}$ *oppure* $\complement A \in \mathfrak{F}$,

c) *se* $(A_k)_{0 \leq k \leq n}$ *e* $(B_k)_{0 \leq k \leq n}$ *sono famiglie finite di parti di* E, *se esiste un'adiacenza* V *di* $(E, \mathcal{A}(\mathcal{U}))$ *tale che, per ogni* $k = 0, 1, \ldots, n$, *sia* $V(A_k) \subset B_k$ *e se risulta* $\bigcup_{k=0}^{n} A_k \in \mathfrak{F}$, *allora esiste un* $k = 0, 1, \ldots, n$ *tale che risulti* $B_k \in \mathfrak{F}$.

d) *Se* $(A_k)_{0 \leq k \leq n}$ *e* $(B_k)_{0 \leq k \leq n}$ *sono ricovrimenti di* E *ed esiste un'adiacenza* V *di* $(E, \mathcal{A}(\mathcal{U}))$ *tale che per ogni* $k = 0, 1, \ldots, n$ *risulti* $V(A_k) \subset B_k$, *allora esiste un* $k = 0, 1, \ldots, n$ *tale che sia* $B_k \in \mathfrak{F}$.

Dim. - a) *implica* b). Consegue dal lemma 2.

b) *implica* c). Se per ogni $k=0, 1, \ldots, n$ fosse $\complement A_k \in \mathfrak{F}$, per un assioma di filtro risulterebbe $\complement(\bigcup_{k=0}^{n} A_k) = (\bigcap_{k=0}^{n} (\complement A_k)) \in \mathfrak{F}$, contro l'ipotesi $\bigcup_{k=0}^{n} A_k \in \mathfrak{F}$. Dunque è $B_k \in \mathfrak{F}$ per almeno un k.

c) *implica* d). Infatti è $\bigcup_{k=0}^{n} A_k = E \in \mathfrak{F}$.

d) *implica* a). Consegue dalla def. 3 e dal lemma 3.

Osservazione. - In forza del lemma 4, in b), c) e d), $\mathcal{A}(\mathcal{U})$ può essere sostituito da $\mathcal{U}$.

Prop. 10. - *Se $(E, \mathcal{U})$ è uno spazio uniforme, se $\mathfrak{F}$ è un filtro $\mathcal{U}$-inviluppato e se è $x \in E$, le seguenti proposizioni sono equivalenti.*

a) *risulta* $x \in \bigcap_{F \in \mathfrak{F}} \overline{F}$,

b) *risulta* $x \in \bigcap_{F \in \mathfrak{F}} F$.

Dim. - a) *implica* b). Se è vera la a) in forza della def. 1 e del lemma 4, poichè $\mathcal{U}$ è meno fine di $\mathcal{A}(\mathcal{U})$, si ha la b).

b) *implica* a). É ovvia.

Def. 4 - *Se $(E, \mathcal{U})$ è uno spazio uniforme chiamasi filtro $\mathcal{U}$-inviluppato* (def. 1) *massimale ogni elemento massimale dell'insieme dei filtri $\mathcal{U}$-inviluppati su E, ordinato per « finezza ».*

Osservazione. - Di questa nozione ci siamo già serviti nella osservazione al corollario 3 della prop. 6. Tale osservazione ha fornito esempi rilevanti di filtri $\mathcal{U}$-inviluppati massimali.

Prop. 11 - *Se $(E, \mathcal{U})$ è uno spazio uniforme, se $\mathfrak{F}$ è un filtro $\mathcal{U}$-inviluppato* (def. 1) *su E e se $\mathcal{A}(\mathcal{U})$ è la struttura uniforme associata ad $\mathcal{U}$* (def. 3), *le seguenti proposizioni sono equivalenti:*

a) *$\mathfrak{F}$ è un filtro di Cauchy su $(E, \mathcal{A}(\mathcal{U}))$,*

b) *$\mathfrak{F}$ è un filtro $\mathcal{U}$-inviluppato massimale* (def. 4).

Dim. - a) *implica* b). Sia $\mathfrak{F}'$ un filtro $\mathcal{U}$-inviluppato più fine di $\mathfrak{F}$. A causa della prop. 8, $\mathfrak{F}$ ed $\mathfrak{F}'$ sono $\mathcal{A}(\mathcal{U})$-inviluppati e quindi, in forza del corollario 3 alla prop. 6, da a) consegue b).

b) *implica* a). Supponiamo che $\mathfrak{F}$ sia un filtro $\mathcal{U}$-inviluppato massimale. Ancora per la prop. 8, $\mathfrak{F}$ è $\mathcal{A}(\mathcal{U})$-inviluppato e quindi per la precompattezza di $(E, \mathscr{A}(\mathfrak{U}))$ esiste, per la prop. 7, un filtro $\mathscr{A}(\mathfrak{U})$-inviluppato di CAUCHY su $(E, \mathscr{A}(\mathfrak{U}))$ più fine di $\mathfrak{F}$ che, per la massimalità di $\mathfrak{F}$, coincide con $\mathfrak{F}$.

Chiarito in questo modo la struttura dei filtri $\mathfrak{U}$-inviluppati massimali, riconosciamo che:

PROP. 12 - *Se* $(E, \mathfrak{U})$ *è uno spazio uniforme, se* $\mathfrak{F}$ *è un filtro* $\mathfrak{U}$*-inviluppato massimale e se è* $x \in E$, *le seguenti proposizioni sono equivalenti:*

a) *risulta* $x \in \bigcap_{F \in \mathfrak{F}} \overline{F}$,

b) *risulta* $x \in \bigcap_{F \in \mathfrak{F}} F$.

c) $\mathfrak{F}$ *converge verso* x.

DIM. - a) *implica* b). È ovvia conseguenza della prop. 10.

b) *implica* c). Poichè $\mathfrak{F}$ è $\mathfrak{U}$-inviluppato da b) consegue che ogni $F \in \mathfrak{F}$ è intorno di x e quindi $\mathfrak{F}$ è meno fine del filtro $\mathfrak{U}$-inviluppato (prop. 2) $\mathfrak{B}(x)$ degli intorni di x e quindi per la def. 4 è $\mathfrak{F} = \mathfrak{B}(x)$.

c) *implica* a). È ovvia.

OSSERVAZIONE. - Se lo spazio uniforme $(E, \mathfrak{U})$ di cui sopra è separato, se $\mathfrak{F}$ ha intersezione non vuota esso converge verso ciascun elemento dell'intersezione e quindi, a causa dell'assioma di HAUSDORFF, la sua intersezione è formata da un unico punto $x(\mathfrak{F})$ di E. Inoltre due filtri $\mathfrak{U}$-inviluppati massimali non possono avere uno stesso punto di E come loro intersezione senza coincidere (come consegue dalla b) $\Longleftrightarrow$ c) e dalla massimalità). Dunque la $\mathfrak{F} \to x(\mathfrak{F})$ è un'applicazione bigettiva dell'insieme dei filtri $\mathfrak{U}$-inviluppati massimali, aventi intersezione non vuota, sull'insieme E.

Si osservi anche che:

PROP. 13 - *Se* $(E, \mathfrak{U})$ *è uno spazio uniforme e se* $\mathfrak{F}$ *è un filtro* $\mathfrak{U}$*-inviluppato* (def. 1) *le seguenti proposizioni sono equivalenti:*

a) $\mathfrak{F}$ *converge,*

b) $\mathfrak{F}$ *è un filtro* $\mathfrak{U}$*-inviluppato massimale* (def. 4) *e risulta non vuota la sua intersezione.*

DIM. - La necessità è stata chiarita da quanto sopra e la sufficienza consegue dalla prop. 12.

PROP. 14 - *Se* $(E, \mathfrak{U})$ *ed* $\mathfrak{F}$ *sono quelli della prop.* 13, *esiste un filtro* $\mathfrak{U}$*-inviluppato massimale più fine di* $\mathfrak{F}$ (def. 4).

DIM. - Consegue dalle propp. 7, 8 e 11.

OSSERVAZIONE. - Si noterà che la proposizione stabilita consegue dalla prop. 7 ed in conseguenza del lemma di ZORN e quindi dall'assioma della scelta. Ciò va posto in contrasto con l'osservazione al corollario 3 della prop. 6.

La precompattezza di uno spazio uniforme può essere caratterizzato mediante filtri $\mathcal{U}$-inviluppati massimali. A tal fine premettiamo un lemma del quale si farà uso anche altrove.

LEMMA 5. - *Se V è una parte simmetrica contenente la diagonale dell'insieme $E \times E$ prodotto dall'insieme E per se stesso, esiste una parte A di E tale che da $x \in A$, $y \in A$ e $x \neq y$ consegua $y \in \complement V(x)$ e tale che sia $E = \bigcup_{x \in A} V(x)$.*

DIM. - Detto $\mathfrak{A}$ l'insieme delle parti X di E tali che da $x \in X$, $y \in Y$ $x \neq y$ consegua $y \in \complement V(x)$, si riconosce che $\mathfrak{A}$ ordinato per inclusione è induttivo e quindi, per il lemma di ZORN, esiste un suo elemento massimale per inclusione A che è quello previsto dalla tesi.

PROP. 15. - *Se $(E, \mathcal{U})$ è uno spazio uniforme non precompatto esistono una parte infinita A di E ed un'adiacenza V di $(E, \mathcal{U})$ tali che da $x \in A$, $y \in A$ e $x \neq y$ consegua $y \in \complement V(x)$ ed inoltre risulti $E = \bigcup_{x \in A} V(x)$.*

DIM. - Se $(E, \mathcal{U})$ non è precompatto esiste un'adiacenza W di $(E, \mathcal{U})$ tale che E non sia riunione di alcuna famiglia finita di sue parti piccole di ordine W. Sia V un'adiacenza simmetrica di $(E, \mathcal{U})$ tale che $V \circ V \subset W$. Costituita, in relazione a questo V, la parte A di E prevista nel lemma 5, ogni $V(a)$, per $a \in A$, è piccolo di ordine W ed essendo $E = \bigcup_{a \in A} V(a)$, se A fosse finita si contradirebbe la definizione di W.

OSSERVAZIONE. - Consegue che se $(E, \mathcal{U})$ è numerabilmente compatto esso è anche precompatto per ciò, se in più, si assume che $\mathcal{U}$ sia metrizzabile, lo spazio E ha base numerabile e quindi (§ 1 osservazioni 5 ed 1 al lemma 1), F è uno spazio di LINDELÖF. Pertanto essendo numerabilmente compatto, E è compatto: ciò è ben noto.

Sussiste la seguente caratterizzazione della precompattezza, già dimostrata, per altra via, in [1] n. 1, teor. 2, pag. 100.

PROP. 16. - *Se $(E, \mathcal{U})$ è uno spazio uniforme le seguenti proposizioni sono equivalenti:*

a) *$(E, \mathcal{U})$ è precompatto.*

b) *Ogni filtro $\mathcal{U}$-inviluppato massimale* (def. 4) *è un filtro di Cauchy su $(E, \mathcal{U})$.*

DIM. - *a) implica b)*. Se è vera la *a)*, detta $\mathcal{A}(\mathcal{U})$ la struttura uniforme associata ad $\mathcal{U}$ (def. 3), per la precompattezza di $(E, \mathcal{U})$, per la def. 3 e per il lemma 3, risulta $\mathcal{U} = \mathcal{A}(\mathcal{U})$ e da ciò, in forza della prop. 11, consegue la attuale *b)*.

b) implica a) Sia vera la *b)* e, ragionando per assurdo, supponiamo che $(E, \mathcal{U})$ non sia precompatto. Allora, in forza della prop. 13, esistono una parte infinita A di E ed un'adiacenza V di $(E, \mathcal{U})$ tale, che $x \in A$, $y \in A$ e $x \neq y$ consegua $y \in \complement V(x)$.

Sia $\mathfrak{A}$ l'insieme delle pàrti X di E della forma $A \cap (\complement B)$ dove B è una parte finita di A: è subito visto che $\mathfrak{A}$ è base di un filtro $\mathfrak{B}$ e denotiamo con $\mathfrak{F}$ il filtro $\mathcal{U}$-inviluppato generato da $\mathfrak{B}$ (def. 2) e, mediante la prop. 14, consideriamo un filtro $\mathcal{U}$-inviluppato massimale $\mathfrak{M}$ (def. 4) più fine di $\mathfrak{F}$.

Sia W un'adiacenza aperta simmetrica di $(E, \mathcal{U})$ tale che $W \circ W \circ W \circ \subset V$.

Per *b)*, $\mathfrak{M}$ e un filtro di CAUCHY su $(E, \mathcal{U})$ e quindi esiste un $M \in \mathfrak{M}$ piccolo di ordine W (cioè $M \times M \subset W$). Evidentemente, per ogni $B \in \mathfrak{A}$, risultando $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{B}$, si ha $W(B) \in \mathfrak{F} \subset \mathfrak{M}$ e quindi $W(B) \cap M \neq \emptyset$.

Poichè risulta $W(B) = \bigcup_{b \in B} W(b)$, esiste $a \in B$ tale che $W(a) \cap M \neq \emptyset$.

Ora sia $B' = B \cap (\complement \{a\})$. Poichè è $B' \in \mathfrak{A}$, come prima si deduce che esiste $b \in B'$ tale che $W(b) \cap M \neq \emptyset$. Poichè M è piccolo di ordine W, dalla simmetria di W, consegue $(a, b) \in W \circ W \circ W \subset V$ e quindi $b \in V(a)$. D'altra parte è $a \in A$, $b \in A$ e $a \neq b$: per definizione di A consegue $b \in \complement V(a)$ ciò che è escluso.

Dunque vera è la *a)*.

Indichiamo ora una caratterizzazione degli spazii uniformi compatti. A tal fine, premettiamo la

PROP. 17. - *Se $(E, \mathcal{U})$ è uno spazio uniforme, se $\mathfrak{F}$ è un filtro su E e se $\mathfrak{F}$ è il filtro $\mathcal{U}$-inviluppato generato da $\mathfrak{F}$ l'aderenza di $\mathfrak{F}$ è identica a quella di $\mathfrak{F}_{\mathcal{U}}$.*

DIM. - Poichè $\mathfrak{F}_{\mathcal{U}}$ è meno fine di $\mathfrak{F}$, l'aderenza A di $\mathfrak{F}$ è contenuta nell'aderenza B di $\mathfrak{F}_{\mathcal{U}}$. Dimostriamo che, reciprocamente, è $B \subset A$. Notiamo che, in forza della prop. 12, si ha $B = \bigcap_{H \in \mathfrak{F}_{\mathcal{U}}} H$. Sia dunque $x \in B$ e, ragionando per assurdo supponiamo $x \in \complement A$ e quindi che esista un'adiacenza V, che possiamo supporre simmetrica, di $(E, \mathcal{U})$ tale che $V(x) \cap F = \emptyset$ per almeno un $F \in \mathfrak{F}$. Si ha $x \in V(F)$ e quindi esiste $y \in F$ tale che $x \in V(y)$, donde, per la simmetria di V, risulta $y \in V(x)$ e poi $y \in V(x) \cap F \neq \emptyset$. Dunque è $B \subset A$.

Dopo ciò la notevole

PROP. 18. - *Se $(E, \mathcal{U})$ è uno spazio uniforme le seguenti proposizioni sono equivalenti:*

a) $(E, \mathcal{U})$ *è compatto,*

b) $(E, \mathcal{U})$ *è precompatto e completo,*

c) *ogni filtro* $\mathcal{U}$*-inviluppato massimale* (def 4) *ha intersezione non vuota,*

d) *ogni filtro* $\mathcal{U}$*-inviluppato* (def. 1) *ha intersezione non vuota.*

DIM. - *a*) *implica b*). È ovvia.

b) *implica c*). Se è vera la *b*), per la prop. 16, ogni filtro $\mathcal{U}$-inviluppato massimale è di CAUCHY, per la completezza, converge e, per la prop. 13, ha intersezione non vuota.

c) *implica d*). Consegue dalla prop. 14 se si suppone vera la *c*).

d) *implica a*). Se $\mathfrak{F}$ è un qualunque filtro su E, se è vera la *d*), il filtro $\mathcal{U}$-inviluppato generato da $\mathfrak{F}$ (def. 1) ha intersezione non vuota e quindi anche $\mathfrak{F}$, essendo vera la prop. 12.

PROP. 19. - *Se f è un'applicazione uniformemente continua dello spazio uniforme $(E, \mathcal{U})$ sullo spazio uniforme $(E', \mathcal{U}')$ $(f(E) = E)$ e se $\mathfrak{F}'$ è un filtro $\mathcal{U}'$-inviluppato su $(E', \mathcal{U}')$ la sua immagine reciproca $f^{-1}(\mathfrak{F}')$ è base di un filtro $\mathfrak{F}$ $\mathcal{U}$-inviluppato su $(E, \mathcal{U})$.*

DIM. - È ovvia conseguenza della def. 1 e della surgettività di f.

Segnaliamo, poichè dovremo adoperarlo, un ulteriore risultato.

LEMMA 7 - *Supponiamo che $(E, \mathcal{U})$ sia uno spazio uniforme, che A sia una parte di E e che $\mathcal{U}_A$ sia la struttura uniforme indotta da $\mathcal{U}$ su A. Allora, se $\mathfrak{F}$ è un qualunque filtro su A, il filtro $\mathcal{U}_A$-inviluppato $\mathfrak{F}_{\mathcal{U}_A}$ generato da $\mathfrak{F}$ su $(A, \mathcal{U}_A)$* (def. 2) *è identico alla traccia su A che denotiamo con $\mathfrak{F}_{\mathcal{U}, A}$ del filtro $\mathcal{U}$-inviluppato $\mathfrak{F}_{\mathcal{U}}$ generato da $\mathfrak{F}$ su $(E, \mathcal{U})$.*

DIM. - Sia $X \in \mathfrak{F}_{\mathcal{U}, A}$: esiste un'adiacenza V di $(E, \mathcal{U})$ tale che, per un certo $F \in \mathfrak{F}$, sia $X = V(F) \cap A$. Detta V_A la traccia di V su $A \times A$ (cioè $V_A = V \cap (A \times A)$), risulta $X = V_A(F)$ e quindi, poichè V_A è una adiacenza di $(A, \mathcal{U}_A)$, consegue $X \in \mathfrak{F}_{\mathcal{U}_A}$. Dunque $\mathfrak{F}_{\mathcal{U}, A}$ è meno fine di $\mathfrak{F}_{\mathcal{U}_A}$.

Reciprocamente in maniera analoga si riconosce che $\mathfrak{F}_{\mathcal{U}_A}$ è meno fine di $\mathfrak{F}_{\mathcal{U}, A}$ e da ciò consegue la tesi.

§ 3. - **Spazii prelindelöfiani.**

1. Si dovranno adoperare appresso alcune proprietà dei filtri che godono della proprietà descritta dalla seguente

DEF. 1. - *Si dice che il filtro $\mathfrak{F}$ sull'insieme E verifica la proprietà della intersezione numerabile se ogni intersezione numerabile di elementi di $\mathfrak{F}$ non è vuota.*

Equivalentemente, se ogni successione $(F_n)_{n \in N}$ di elementi di $\mathfrak{F}$ ha intersezione non vuota.

La seguente proposizione viene qui esplicitamente stabilita per comodità del lettore, benchè, almeno in parte, debba considerarsi implicitamente nota.

PROP. 1. - *Se $\mathfrak{F}$ è un filtro sull'insieme E le seguenti proposizioni sono equivalenti:*

a) $\mathfrak{F}$ verifica la proprietà dell'intersezione numerabile (def. 1),

b) per ogni ricovrimento numerabile $(A_n)_{n \in N}$ di E, esiste un $n \in \boldsymbol{N}$ tale che la traccia di $\mathfrak{F}$ su A_n sia un filtro verificante la proprietà dell'intersezione numerabile,

c) per ogni ricovrimento numerabile $(A_n)_{n \in N}$ di E, esiste un $n \in \boldsymbol{N}$ tale che la traccia di $\mathfrak{F}$ su A_n sia un filtro.

DIM. - Supposta vera la $a)$, $(A_n)_{n \in N}$ sia un ricovrimento di E. Per assurdo, se per ogni $n \in \boldsymbol{N}$, esistesse una successione $(F_{np})_{p \in N}$ di elementi di $\mathfrak{F}$, tale che $A_n \cap (\bigcap_{p \in N} F_{np}) = \emptyset$, sarebbe $A_n \subset \bigcup_{p \in N} (\complement F_{np})$ e quindi, insieme ad $(A_n)_{n \in N}$, la $(\complement F_{np})_{(n,p) \in N \times N}$ sarebbe un ricovrimento di E e quindi sarebbe vuota l'intersezione della famiglia numerabile $(F_{np})_{(n,p) \in N \times N}$, contro la $a)$. Dunque è vera la $b)$.

Supposta vera la $b)$ la $c)$ ne è ovvia conseguenza.

Supponiamo vera la $c)$ e, per assurdo, supponiamo che esista una successione $(F_n)_{n \in N}$ di elementi di $\mathfrak{F}$ avente intersezione vuota. Consegue che $(\complement F_n)_{n \in N}$ è un ricovrimento di E e ciò è contro la $c)$ poichè risulta $F_n \cap \cap (\complement F_n) = \emptyset$ e $F_n \in \mathfrak{F}$ per ogni $n \in \boldsymbol{N}$. Dunque è vera la $a)$.

2. Si procede a fornire alcune definizioni di uso particolarmente conveniente in quanto segue.

Innanzi tutto conveniamo che, salvo contrario esplicito avviso, si abbia che

CONVENZIONE 1. - *E è uno spazio uniformizzabile.*

CONVENZIONE 2. - *$\mathcal{A}(E)$ è la struttura uniforme di Tychonoff-Čech su E secondo la terminologia di* [2] § 3, def. 4. *Pertanto $\mathcal{A}(E)$ è la più fine delle strutture uniformi di spazio precompatto su E compatibili con la topologia di E. È noto* (cfr. [2] § 3, def. 4) *che V è un'adiacenza dello spazio uniforme $(E, \mathcal{A}(E))$ se e solo se esiste un ricovrimento aperto finito $\mathcal{U}$-riducibile* (cfr. [2 § 3, def. 6) *$(U_k)_{0 \leq k \leq n}$ tale che*

$$\bigcup_{k=0}^{n} (U_k \times U_k) \subset V.$$

CONVENZIONE 3 - *Detto, come al solito, $\boldsymbol{N}$ l'insieme degli interi naturali, lo zero incluso, indichiamo con ω il numero cardinale di $\boldsymbol{N}$, cioè*

$$\omega = \text{card}\ (\boldsymbol{N}).$$

(cioè ω è alef-zero).

CONVENZIONE 4. - *$\mathcal{A}_\omega(E)$ è la ω-struttura uniforme su E secondo la terminologia di* [3] § 3, def. 4. *Pertanto, $\mathcal{A}_\omega(E)$ è la struttura uniforme su E caratterizzata dal fatto che una parte V di $E \times E$ è un' adiacenza dello spazio uniforme $(E, \mathcal{A}_\omega(E))$ se e solo se esiste un ricovrimento aperto, numebile, localmente finito ed $\mathcal{U}$-riducible $(U_n)_{n \in N}$ di E* (cfr. [3] §, def. 6) *tale che*

$$\bigcup_{n \in N} (U_n \times U_n) \subset V.$$

Ovviamente $\mathcal{A}(E)$ è meno fine di $\mathcal{A}_\omega(E)$ e quindi, essendo la più fine delle strutture uniformi di spazio precompatto su E compatibili con la topologia di E, $\mathcal{A}(E)$ risulta, esattamente, la struttura uniforme associata ad $\mathcal{A}_\omega(E)$ secondo la def. 1, § 2 *di* [2].

OSSERVAZIONE. - Se $\mathfrak{a}$ è un numero cardinale infinito e se $\mathcal{A}_\mathfrak{a}(E)$ è la $\mathfrak{a}$-struttura uniforme su E, $\mathcal{A}(E)$ seguita ad essere la struttura uniforme associata ad $\mathcal{A}_\mathfrak{a}(E)$ in quanto $\mathcal{A}_\omega(E)$ è meno fine di $\mathcal{A}_\mathfrak{a}(E)$.

2. - Di particolare importanza per il seguito è la:

DEF. 2. - *Chiamasi filtro completamente regolare su E ogni filtro su E che sia $\mathcal{A}(E)$-inviluppato* (§ 2, def. 1).

OSSERVAZIONE 1. - Dunque il filtro $\mathfrak{F}$ su E è completamente regolare se e solo se per ogni $F \in \mathfrak{F}$ esistono un $F' \in \mathfrak{F}$, un insieme chiuso A un insieme aperto B di E tali che $F' \subset A$, A sia $\mathcal{U}$-contenuto in A e $B \subset F$ (cfr. [3] § 3, def. 2 e [2] § 3, def. 4).

OSSERVAZIONE 2. - Se $\mathfrak{a}$ è un numero cardinale infinito, in forza della osservazione alla Convenzione 4 del n. 1, il filtro $\mathfrak{F}$ su E è completamente regolare se e solo se esso è $\mathcal{A}_\mathfrak{a}(E)$-inviluppato ed in, particolare, se e solo se è $\mathcal{A}_\omega(E)$-inviluppato.

OSSERVAZIONE 3. - Se A è un qualunque sottospazio di E, la traccia su A di un qualunque filtro completamente regolare su E, se risulta un filtro, è completamente regolare (cfr. osservazione 1).

Def. 3. - *Se $\mathfrak{B}$ è una base di filtro su E chiamasi filtro completamente regolare generato da $\mathfrak{B}$, il filtro $\mathscr{A}(E)$-inviluppato generato dal filtro su E di cui $\mathfrak{B}$ è base secondo la def.* 2, §2.

Osservazione 1. - Richiamata la osservazione 1 della def. 1, F è un elemento del filtro completamente regolare generato da $\mathfrak{B}$ se e solo se esistono un $F' \in \mathfrak{B}$, un insieme chiuso A ed un insieme aperto B di E tali che sia $F' \subset A$, A sia $\mathscr{U}$-contenuto in B e $B \subset F$.

Osservazione 2. - Se $\mathfrak{F}$ è un filtro completamente regolare su E meno fine dell'ulteriore filtro $\mathfrak{F}'$ su E, in forza del corollario alla prop. 4, §2, il filtro completamente regolare su E generato da $\mathfrak{F}'$ è più fine di $\mathfrak{F}$.

Osservazione 3. - Se $\mathfrak{F}$ gode della proprietà dell'intersezione numerabile (def. 1), in forza della osservazione 2 alla def. 2, §2 e della def. 3 qui sopra, anche il filtro completamente regolare da $\mathfrak{F}$, gode della stessa proprietà.

Def. 4 - *Chiamasi filtro completamente regolare massimale su E, ogni filtro $\mathscr{A}(E)$-inviluppato massimale su E* (cfr. def. 4 §2 e def. 2 di questo §).

Osservazione 1. - Affinchè il filtro completamente regolare $\mathfrak{F}$ su E sia massimale, per la prop. 11, §2 e la def. 2, è necessario e sufficiente che $\mathfrak{F}$ sia un filtro di Cauchy su $(E, \mathscr{A}(E))$.

n. 3. - In questo n. 3 si stabiliscono alcuni risultati dei quali si dovrà fare uso successivamente e nei quali interverranno le nozioni fino ad ora esposte.

Lemma 1. - *Se $\mathcal{S}$ è un sistema uniformizzante di Tukey sull'insieme E* (cfr. [3] § 1, def. 9), *se $\mathscr{U}(\mathcal{S})$ è la struttura uniforme su E generata da $\mathcal{S}$* ([3] § 1, def. 8) *e se $\mathfrak{F}$ è un filtro su E, le seguenti proposizioni sono equivalenti*:

a) *$\mathfrak{F}$ e un filtro di Cauchy su $(E, \mathscr{U}(\mathcal{S}))$,*

b) *per ogni ricovrimento $(U_\iota)_{\iota \in I}$ di $\mathcal{S}$, esiste $\iota \in I$ tale che $U_\iota \in \mathfrak{F}$.*

Dim. - *a*) *implica b*) Supponiamo vera la *a*) e sia $(U_\iota)_{\iota \in I}$ un elemento di $\mathcal{S}$.

In forza della prop. 6, § 1 di [3], esiste un'adiacenza B di $(E, \mathscr{U}(\mathcal{S}))$ tale che $(B(x))_{x \in E}$ sia un raffinamento di $(U_\iota)_{\iota \in I}$. Per *a*) esiste un $F \in \mathfrak{F}$ tale che sia $F \times F \subset B$. Sia $x \in F$ e $\iota \in I$ tale che $B(x) \subset U_\iota$: se è $y \in F$, risulta $(x, y) \in F \times F \subset B$ e quindi $y \in B(x) \subset U_\iota$ donde $F \subset U_\iota$ e quindi ancora, per ua assioma di filtro, risulta $U_\iota \in \mathfrak{F}$. Ciò implica *b*).

b) *implica a*). Supponiamo vera la *b*) e V sia una qualunque adiacenza di $(E, \mathscr{U}(\mathcal{S}))$. Allora, in forza della def. 8 e del lemma 6, § 1 di [3] esiste un elemento $(U_\iota)_{\iota \in I}$ di $\mathcal{S}$ tale che $\bigcup_{\iota \in I} (U_\iota \times U_\iota) \subset V$. Ciò, per *b*) implica *a*).

Lemma 2. – *L'insieme* $\mathcal{M}_\omega(E)$ *dei ricovrimenti aperti numerabili ed* $\mathcal{U}$*-riducibili di* E (cfr. [3] § 3, def. 6) *è un sistema uniformizzante di* Tukey ([3] § 1, def. 9) *e la struttura uniforme* $\mathcal{U}(\mathcal{M}_\omega(E))$ *da esso generata* ([3] § 1, def. 8) *è identica ad* $\mathcal{A}_\omega(E)$.

Dim. – La tesi consegue osservando che $\mathcal{M}_\omega(E)$ è esattamente l'insieme dei ricovrimenti aperti numerabili ed $\mathfrak{R}(E)$-riducibili di E (cfr. [3] § 3, deff. 5 e 6) dove $\mathfrak{R}(E)$ è il reticolo esteso universale su E (ibidem, def. 3), e tenendo presente la prop. 5, § 2 di [3].

Osservazione. – Dunque, affinchè V sia un'adiacenza di $(E, \mathcal{A}_\omega(E))$ occorre e basta che esiste un ricovrimento aperto numerabile, $\mathcal{U}$-riducibile (ma non necessariamente localmento finito) di E tale che, indicatolo con $(U_n)_{n \in N}$, risulti:

$$\bigcup_{n \in N} (U_n \times U_n) \subset V.$$

Prop. 2. – *Se* $\mathfrak{F}$ *è un filtro completamente regolare su* E (def. 2), *le seguenti proposizioni sono equivalenti:*

a) $\mathfrak{F}$ *è un filtro completamente regolare massimale* (def. 4) *e verifica la proprietà dell'intersezione numerabile* (def. 1),

b) $\mathfrak{F}$ *è un elemento massimale dell'insieme dei filtri completamente regolari e verificanti la proprietà dell'intersezione numerabile,*

c) Per ogni ricovrimento aperto numerabile ed $\mathcal{U}$*-riducibile* ([3] § 3, def. 6) $(U_n)_{n \in N}$ *di* E, *esiste un* $n \in \boldsymbol{N}$ *tale che sia* $U_n \in \mathfrak{F}$,

d) $\mathfrak{F}$ *è un filtro di Cauchy sullo spazio uniforme* $(E, \mathcal{A}_\omega(E))$.

Dim. – *a) implica b)*. È ovvia.

b) implica c). Supponiamo vera la *b)* e sia $(U_n)_{n \in N}$ un ricovrimento aperto numerabile ed $\mathcal{U}$-riducibile di E e $(F_n)_{n \in N}$ sia una sua $\mathcal{U}$-riduzione. Dunque, secondo la def. 5, § 3 di [3], $(F_n)_{n \in N}$ è un ricovrimento chiuso di E tale che, per ogni $n \in \boldsymbol{N}$, F_n sia $\mathcal{U}$-contenuto in U_n. Poichè, per *b)*; $\mathfrak{F}$ verifica la proprietà dell'intersezione numerabile, per la prop. 1 equivalenza di *a)* e *b)*, esiste un $n \in \boldsymbol{N}$ tale che la traccia di $\mathfrak{F}$ su F_n sia un filtro verificante la stessa proprietà sicchè posto $\mathfrak{F}' = \mathfrak{F} \cup \{F_n\}$, $\mathfrak{F}'$ risulta base di un filtro $\mathfrak{F}''$ su E del pari verificante la proprietà dell'intersezione numerabile. Ovviamente $\mathfrak{F}$ è meno fine di $\mathfrak{F}''$ sicchè, in forza della osservazione 2 della def. 3 il filtro completamente regolare $\mathfrak{F}''_\omega$ generato da $\mathfrak{F}''$ è più fine di $\mathfrak{F}$ e, per la osservazione 3 alla def. 3, gode della proprietà dell'intersezione numerabile. In forza di *b)*, tutto ciò, $\mathfrak{F}$ essendo massimale, implica $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}''_\omega$. Consegue che è $U_n \in \mathfrak{F}$. Infatti, F_n è $\mathcal{U}$-contenuto in U_n e ciò, per la osservazione 1 alla def. 3, dimostra l'asserto.

c) implica d). Consegue dai lemma 2 e 1.

d) implica a). Sia vera la *d)* e sia $(F_n)_{n \in N}$ una successione di elementi di $\mathfrak{F}$, che, ragionando per assurdo, supponiamo abbia intersezione vuota.

Poichè, per ipotesi, $\mathfrak{F}$ è completamente regolare, in forza della def. 2 e della osservazione 1 ad essa, per ogni $n \in N$, esistono un $F'_n \in \mathfrak{F}$, un insieme chiuso A_n e un insieme aperto B_n di E tali che $F'_n \subset A_n$, A_n sia $\mathcal{U}$-contenuto in B_n e $B_n \subset F_n$: per un assioma di filtro, da $F'_n \in \mathfrak{F}$ e $F_n \subset A_n$ consegue $A_n \in \mathfrak{F}$. Consegue $\bigcap_{n \in N} B_n = \emptyset$ e quindi, $(\complement B_n)_{n \in N}$ è un ricovrimento chiuso di E; inoltre per note proprietà della $\mathcal{U}$-inclusione risulta che $\complement B_n$ è $\mathcal{U}$-contenuto in $\complement A_n$. Consegue ancora che $(\complement A_n)_{n \in N}$ è un ricovrimento aperto numerabile $\mathcal{U}$-riducibile di E e $(\complement B_n)_{n \in N}$ è una sua $\mathcal{U}$-riduzione. In forza di d) e dei lemmi 2 e 1, esiste $n \in N$ tale che $\complement A_n \in \mathfrak{F}$ il che è contro la $A_n \in \mathfrak{F}$ sopra osservata. Dunque la intersezione di $(F_n)_{n \in N}$ non può essere vuota e da ciò consegue la a).

Una conseguenza immediata della proposizione dimostrata è la seguente caratterizzazione dei Q-spazi (necessariamente separati nonchè uniformizzabili) secondo HEWITT:

PROP. 3 - *Le seguenti proposizioni sono equivalenti*:

a) *E è $\mathcal{A}_\omega$-completo,*

b) *ogni filtro completamente regolare massimale* (def. 2) *e verificante la proprietà dell'intersezione numerabile ha intersezione non vuota,*

c) *ogni elemento massimale dell'insieme dei filtri completamente regolari e verificanti la proprietà dell'intersezione numerabile, ordinato per finezza, ha intersezione non vuota.*

OSSERVAZIONE 1. - Dunque se E è separato, in forza della osservazione alle prop. 5 § 1. la precedente a) può sostituirsi con: E è un Q-spazio (cioè E è realcompatto).

OSSERVAZIONE 2. - In forza della prop. 10 § 2, nelle b) e c) di cui sopra si può leggere anzichè « intersezione non vuota » l'altra « aderenza non vuota ».

OSSERVAZIONE 3. - Uno spazio topologico E è di Lindelöf (§ 1 osservazione 1 al lemma 1) se e solo se ogni filtro avente base chiusa e verificante la proprieta dell'intersezione numerabile, ha intersezione non vuota. Dalla proposizione di cui sopra consegue ogni spazio di Lindelöf regolare è $\mathcal{A}_\omega$-completo.

OSSERVAZIONE 4. - La prop. 3 sopra stabilita può raffrontarsi con la seguente conseguenza delle deff. 2 e 4 e della prop. 18 del § 2.

Per E le seguenti proprietà sono equivalenti:

a) *E è compatto,*

b) *ogni filtro completamente regolare massimale su E* (def. 4) *ha intersezione non vuota,*

c) *ogni filtro completamente regolare su E* (def. 2) *ha intersezione non vuota.* (Si tenga presente la prop. 10 del § 2).

4. – Se $\mathfrak{F}$ è un filtro completamente regolare su E, in forza delle deff. 2 e 4 e della prop. 14 § 2, esiste un filtro completamente regolare massimale su E più fine di $\mathfrak{F}$.

Anche se si ammette che, in aggiunta, $\mathfrak{F}$ verifichi la proprietà della intersezione numerabile, in generale non può affermarsi che, quale che sia $\mathfrak{F}$, esista un filtro completamente regolare massimale e verificante la proprietà dell'intersezione numerabile più fine di $\mathfrak{F}$, senza imporre una notevole condizione restrittiva sullo spazio uniformizzabile E.

In relazione a ciò ed in relazione strettissima con gli spazii chiamati « I-spaces » da R. W. BAGLEY e J. D. MC KNIGHT JR., è la proprietà descritta nella seguente def. 5. A tale proprietà si perverrà più spontaneamente dopo alcuni preleminari.

LEMMA 3. – *Supponiamo che $\tilde{E}$ sia uno spazio uniformizzabile e che E sia una sua parte ovunque densa e supponiamo che dette $\mathcal{A}_\omega(\tilde{E})$ e $\mathcal{A}_\omega(E)$ le rispettive ω-strutture uniformi* (cfr. n. 2 Convenzione 4) *e detta $\mathcal{A}_\omega(\tilde{E})_E$ la struttura uniforme indotta da $\mathcal{A}_\omega(\tilde{E})$ su E risulti:*

$$\mathcal{A}_\omega(\tilde{E})_E = \mathcal{A}_\omega(E). \tag{1}$$

Allora, supposto che $(F_n)_{n\in N}$ e $(G_n)_{n\in N}$ siano successioni di insieme chiusi e non vuoti e, rispettivamente, aperti di $\tilde{E}$ tali che, per ogni $n \in \boldsymbol{N}$, F_n sia $\mathcal{U}$-contenuto in G_n([3] § 3, def. 2) *relativamente ad $\tilde{E}$, risulta che:*

$$E \cap \Big(\bigcap_{n\in N} G_n \Big) = \emptyset \Rightarrow \bigcap_{n\in N} F_n = \emptyset \tag{2}$$

DIM. – Denotiamo con $\mathfrak{R}(\tilde{E})$ e $\mathfrak{R}(E)$ i reticoli estesi universali su $\tilde{E}$ e, rispett., su E (cfr. [3] § 3, def. 3); risulta che

α) *si ha $(F, G) \in \mathfrak{R}(\tilde{E})$ (rispett. $(F, G) \in \mathfrak{R}(E)$) se e solo se F e G sono insiemi chiusi il primo e aperto il secondo di $\tilde{E}$ (rispett. di E) ed F è $\mathcal{U}$-contenuto in G relativamente ad $\tilde{E}$ (rispett. ad E).*

Ciò osservato, per ogni $n \in \boldsymbol{N}$, poniamo:

$$A'_n = \complement_{\tilde{E}} G_n, \quad B''_n = \complement_{\tilde{E}} F_n. \tag{3}$$

Per α), per là prop. 1 § e def. 1 § 2 di [3], si ha che:

$$A'_n \text{ è } \mathcal{U}\text{-contenuto in } B''_n \text{ relativamente ad } \tilde{E}$$

ed inoltre esistono un insieme aperto B'_n ed un insieme chiuso A''_n di $\tilde{E}$ tali che:

$$A'_n \text{ è } \mathcal{U}\text{-contenuto in } B'_n \text{ relativamente ad } \tilde{E},$$

$$A''_n \text{ è } \mathcal{U}\text{-contenuto in } B''_n \text{ relativamente ad } \tilde{E},$$

$$B'_n \subset A''_n .$$

Ciò premesso sia $E \cap (\bigcap_{n \in N} G_n) = \emptyset$. Consegue $E = \bigcup_{n \in N} (A'_n \cap E)$ ed inoltre, come è ovvio, $A'_n \cap E$ è $\mathcal{U}$-contenuto in $B'_n \cap E$ relativamente ad E.

Dunque $(B'_n \cap E)_{n \in N}$ è un ricovrimento aperto numerabile $\mathcal{U}$-riducibile del sottospazio E e $(A'_n \cap E)_{n \in N}$ è sua $\mathcal{U}$-riduzione.

A causa del lemma 10, § 2 di [3], richiamata la α) qui sopra, si riconosce che esiste un ricovrimento aperto numerabile, localmente finito ed $\mathcal{U}$-riducibile del sottospazio E che denotiamo con $(G^*_n)_{n \in N}$ tale che, per ogni $n \in \boldsymbol{N}$, sia $G^*_n \subset B'_n \cap E$. Ovviamente per ogni $n \in \boldsymbol{N}$ risulta

$$G^*_n \subset A''_n \cap E. \tag{4}$$

Supponiamo che $(F^*_n)_{n \in N}$ sia una $\mathcal{U}$-riduzione di $(G^*_n)_{n \in N}$.

Per la prop. 1, § 1 di [4] risulta che $(F^*_n)_{n \in N}$ è $\mathcal{A}_\omega(E)$-uniformemente localmente finito nel sottospazio E e quindi, per il lemma 2, § 1 ancora di [4] risulta che $(F^*_n)_{n \in N}$ e anche $\mathcal{A}_\omega(\tilde{E})$-uniformemente localmente finito in $\tilde{E}$ (si tenga presente la (1)). Per ciò si ha

$$\tilde{E} = \overline{E}^{(\sim)} = \bigcup_{n \in N} \overline{F^*_n}^{(\sim)}$$

dove $^{-(\sim)}$ denota aderenza relativa all'intero $\tilde{E}$.

Per ogni $n \in \boldsymbol{N}$, richiamata la (4), si ha $F^*_n \subset G^*_n \subset A''_n$ e quindi, A''_n essendo chiuso in $\tilde{E}$, consegue $\overline{F^*_n}^{(\sim)} \subset A''_n$ e per la (9), $\tilde{E} = \bigcup_{n \in N} A''_n$. Dunque deve essere,

$$\bigcap_{n \in N} F_n = \complement_{\tilde{E}}(\bigcup_{n \in N} A''_n) = \emptyset$$

e da ciò la tesi,

LEMMA 4. - *Supposto come al solito che E sia uno spazio uniformizzabile le seguenti proposizioni sono equivalenti*:

a) *E è spazio di Lindelöf,*

b) *Ogni filtro completamente regolare* (def. 2) *e verificante la proprietà della intersezione numerabile* (def. 1) *su E ha intersezione non vuota,*

c) *Se* $(U_\iota)_{\iota \in I}$ *è un ricovrimento aperto* $\mathcal{U}$*-riducibile di* E ([3] § 3, def. 5) *esiste una parte numerabile* H *di* E *tale che la sottofamiglia* $(U_\iota)_{\iota \in H}$ *sia un ricovrimento di* E.

Dim. a) *implica* b). È ovvia, poichè ogni filtro completamente regolare ha una base formata da insiemi chiusi

b) *implica* c). Supponiamo che $(U_\iota)_{\iota \in I}$ sia un ricovrimento aperto $\mathcal{U}$-riducibile di E e $(F_\iota)_{\iota \in I}$ sia una sua $\mathcal{U}$-riduzione.

Ragionando per assurdo supponiamo che

α) *se* H *è una qualunque parte numerabile di* I *risulti* $E \neq \bigcup_{\iota \in H} U_\iota$.

Denotiamo con $\mathfrak{B}$ l'insieme delle parti B di E della forma

$$B = \complement(\bigcup_{\iota \in H} U_\iota) \text{ con } H \text{ parte numerabile di } I.$$

Ovviamente, $\mathfrak{B}$ è base di un filtro $\mathfrak{F}$ su E, verificante la proprietà dell'intersezione numerabile. Se $\mathfrak{F}^*$ è il filtro completamente regolare su E generato da $\mathfrak{F}$ (def. 3) anche $\mathfrak{F}^*$ verifica la proprietà dell'intersezione numerabile (def. 3, osservazione 3) A causa della b) risulta

$$\bigcap_{F \in \mathfrak{F}^*} F \neq \emptyset. \tag{1}$$

Per ogni $\iota \in I$, essendo F_ι $\mathcal{U}$-contenuto in U_ι, si ha che $\complement U_\iota$ è $\mathcal{U}$-contenuto in $\complement F_\iota$ e quindi per l'osservazione 1 alla def. 3, si ha $\complement F_\iota \in \mathfrak{F}^*$ e ciò. poichè $(F_\iota)_{\iota \in I}$ è un ricovrimento di E, è contro la (1). Dunque α) è falsa e c) è vera.

c) *implica* a). Supponiamo vera la c) e supponiamo che $(U_\iota)_{\iota \in I}$ sia un ricovrimento aperto di E. Per ogni $x \in E$ esiste un $\iota_x \in I$ tale che $x \in U_{\iota_x}$ e poichè E è uniformizzabile, in forza del lemma 6,83 di [3], esiste un insieme chiuso F_x di E tale che sia $x \in F_x$ ed F_x sia $\mathcal{U}$-contenuto in U_{ι_x}. Dunque $(U_{\iota_x})^{x \in E}$ è un ricovrimento aperto $\mathcal{U}$-riducibile di E ed $(F_x)_{x \in E}$ è una sua $\mathcal{U}$-riduzione. Da c) consegue che esiste una parte numerabile K di E tale che $E = \bigcup_{x \in k} U_{\iota_x}$: detto H l'insieme degli elementi della famiglia $(\iota_x)_{x \in k}$, si ha $E = \bigcup_{\iota \in H} U_\iota$. Da ciò, H essendo numerabile, la a).

6. – In ciò che segue adopereremo la

Convenzione 5. – $\mathfrak{J}(E)$ *denota l'insieme dei filtri completamente regolari* (def. 2) *e verificanti la proprietà dell'intersezione numerabile* (def. 1).

Def. – *Chiamasi spazio prelindelöfiano ogni spazio uniformizzabile* E *che verifichi l'assioma:*

(PL). - *Per ogni* $\mathfrak{F} \in \mathfrak{J}(E)$ esiste un $\mathfrak{F}^* \in \mathfrak{J}(E)$ *massimale in* $\mathfrak{J}(E)$ *ordinato per* « *finezza* ».

La proprietà (PL) ha origine dalla proprietà consimile adoperata in [6]. La successiva prop. 11 giustificherà il termine « prelindelöfiano ».

PROP. 4. - *Le seguenti proprietà sono equivalenti per* E:

a) E *è prelindelöfiano* (def. 5),

b) *per ogni* $\mathfrak{F} \in \mathfrak{J}(E)$ *esiste un filtro completamente regolare massimale* $\mathfrak{F}^*$ *che è in* $\mathfrak{J}(E)$ *ed è più fine di* $\mathfrak{F}$,

c) *per ogni* $\mathfrak{F} \in \mathfrak{J}(E)$ *esiste un filtro completamente regolare* $\mathfrak{F}^*$ *su* E *più fine di* $\mathfrak{F}$ *e tale che per ogni ricovrimento aperto numerabile e* $\mathcal{U}$*-riducibile* $(U_n)_{n \in N}$ *di* E, *esista* $n \in \boldsymbol{N}$ *tale che* $U_n \in \mathfrak{F}^*$,

d) *per ogni* $\mathfrak{F} \in \mathfrak{J}(E)$ *esiste un filtro completamente regolare* $\mathfrak{F}^*$ *su* E *più fine di* $\mathfrak{F}$ *e che risulta di Cauchy per* $\mathcal{A}_\omega(E)$,

e) *per ogni* $\mathfrak{F} \in \mathfrak{J}(E)$ *esiste un fiiltro di Cauchy su* $(E, \mathcal{A}_\omega(E))$ *più fine di* $\mathfrak{F}$.

DIM. - L'equivalenza di a), b), c) e d) è conseguenza diretta della def. 5 e dalla prop. 2. Inoltre che d) implichi e) è banale e che e) implichi d) risulta da quanto segue.

Supponiamo vera la e) e sia $\mathfrak{F} \in \mathfrak{J}(E)$. In forza della osservazione 2 alla def. 2, $\mathfrak{F}$ è un filtro $\mathcal{A}_\omega(E)$-inviluppato. Per e) esiste un filtro di CAUCHY $\mathfrak{F}'$ su $(E, \mathcal{A}_\omega(E))$ più fine di $\mathfrak{F}$: sia $\mathfrak{F}^*$ il filtro $\mathcal{A}_\omega(E)$-inviluppato generato da $\mathfrak{F}'$. Poichè $\mathfrak{F}'$ è più fine di $\mathfrak{F}$ ed $\mathfrak{F}$ è completamente regolare, per la osservazione 2 alla def. 3, $\mathfrak{F}^*$ è più fine di $\mathfrak{F}$ e, per la prop. 5 del § 2, $\mathfrak{F}^*$ è un filtro di CAUCHY su $(E, \mathcal{A}_\omega(E))$ nella stesso tempo che, per la detta osservazione 2 alla def. 2, esso è completamente regolare.

Un prevedibile esempio di spazio prelindelöfiano è fornito dalla seguente proposizione:

PROP. 5. - *Le seguenti proposizioni sono equivalenti*:

a) E *è prelindelöfiano* (def.5) *ed* $\mathcal{A}_\omega$*-completo* (*cioè* $(E, \mathcal{A}_\omega(E))$ *è completo*).

b) E *è uno spazio di Lindelöf*.

DIM. - a) *implica* b). Supponiamo vera la a) e sia $\mathfrak{F} \in \mathfrak{J}(E)$. Per la def. 5, ed in forza della prop. 4, esiste un filtro di CAUCHY $\mathfrak{F}^*$ su $(E, \mathcal{A}_\omega(E))$ più fine di $\mathfrak{F}$. Poichè E è $\mathcal{A}_\omega$ completo, $\mathfrak{F}^*$ converge e quindi $\mathfrak{F}$ ha almeno un punto aderente che, $\mathfrak{F}$ avendo una base formata da insiemi chiusi, appartiene all'intersezione di $\mathfrak{F}$. Ciò, per il lemma 4, dimostra b).

b) *implica* a). Supponiamo vera la b). Per l'osservazione 3 alla prop. 3, E è $\mathcal{A}_\omega$-completo. Inoltre se $\mathfrak{F}$ è un filtro completamente regolare su E, per il lemma 2, $\mathfrak{F}$ ha aderenza non vuota e quindi esiste un filtro $\mathfrak{F}^*$ su E più fine di $\mathfrak{F}$ e convergente: dunque $\mathfrak{F}^*$ è un filtro di CAUCHY su $(E, \mathscr{A}_\omega(E))$. Ciò, per la prop. 4 (a) equivale e)) dimostra che ha a) di questa prop. 5 è vera.

PROP. 6 - *Se E è $\mathcal{U}$-numerabilmente compatto (cioè pseudocompatto per* [3] § 8 coroll. prop. 1) *secondo la* def. 1. § 6 *di* [3], *allora E è prelindelöfiano.*

DIM. - Per la osservazione alla convenzione 4, $\mathscr{A}(E)$ è meno fine di $\mathscr{A}_\omega(E)$, mentre che per il lemma 2, § 6 di [3], $\mathscr{A}_\omega(E)$ è meno fine di $\mathscr{A}(E)$. Dunque è $\mathscr{A}_\omega(E) = \mathscr{A}(E)$. Per la def. 4 e per la prop. 14 § 2, esiste un filtro di CAUCHY $\mathfrak{F}^*$ su $(E, \mathscr{A}(E))$ più fine di $\mathfrak{F}$. Dunque $\mathfrak{F}^*$ è un filtro di CAUCHY su $(E, \mathscr{A}_\omega(E))$ e quindi per la prop. 4 equivalenza di a) ed e), consegue la tesi.

Indichiamo ora alcune proprietà degli spazi prelindelöfioni.

PROP. 7 - *Se $(E_n)_{n \in N}$ è una successione di sottospazi prelindelofiani di E della quale E sia riunione, allora E è prelindelöfiano.*

DIM. - Denotiamo con $\mathfrak{F}$ un qualunque elemento di $\mathfrak{I}(E)$. In forza della prop. 1, equivalenza di a) e b), esiste $n \in \boldsymbol{N}$, tale che la traccia $\mathfrak{F}_n$ di $\mathfrak{F}$ su E_n sia un filtro su E_n verificante la proprietà della intersezione numerabile. Per l'osservazione 3 alla def. 2, $\mathfrak{F}$ è un filtro completamente regolare sul sottospazio E_n e, poichè il sottospazio E_n è prelindelöfiano, esiste un filtro di CAUCHY $\mathfrak{F}'$ su $(E_n, \mathscr{A}_\omega(E_n))$ (dove $\mathscr{A}_\omega(E_n)$ è la ω-struttura uniforme su E_n (cfr. Convenzione 4) più fine di $\mathfrak{F}$. Sia $\mathscr{A}_\omega(E)_{E_n}$ la struttura uniforme indotta da $\mathscr{A}_\omega(E)$ su E_n: $\mathscr{A}_\omega(E)_{E_n}$ è meno fine di $\mathscr{A}_\omega(E_n)$ e quindi $\mathfrak{F}'$ è anche filtro di CAUCHY su $(E_n, \mathscr{A}_\omega(E)_{E_n})$. Sia $\mathfrak{F}^*$ il filtro su E che ha come base $\mathfrak{F}'$ (cioè generato da $\mathfrak{F}'$): evidentemente $\mathfrak{F}$ è meno fine di $\mathfrak{F}^*$ e $\mathfrak{F}^*$ è filtro di CAUCHY su $(E, \mathscr{A}_\omega(E))$. Per la prop. 4, equivalenza di a) ed e), consegue la tesi.

PROP. 8 - *Se $f\colon E \to E'$ è un'applicazione surgettiva e continua di E sopra uno spazio uniformizzabile E', ogni volta che E sia prelindelöfiano anche E' lo è.*

DIM. - Sia $\mathscr{A}_\omega(E')$ la ω-struttura uniforme su E' (Convenzione 4). Poichè f è continua essa è un'applicazione uniformemente continua di $(E, \mathscr{A}_\omega(E))$ su $(E', \mathscr{A}_\omega(E')$ in conseguenza del lemma 3, § 3 di [4]. Sia $\mathfrak{F}'$ un filtro completamente regolare verificante la proprietà dell' intersezione numerabile su E'. Per la prop. 19 § 2 e per la def. 2, f essendo surgettiva, l'immagine reciproca $f^{-1}(\mathfrak{F}')$ di $\mathfrak{F}'$ per f è base di un filtro $\mathfrak{F}$ su E appartenente ad $\mathfrak{I}(E)$. Poichè E è prelindelöfiano, per l'equivalenza di a) ed e) nella prop. 4, esiste un filtro di CAUCHY $\mathfrak{F}^*$ su $(E, \mathscr{A}_\omega(E))$ più fine di $f^{-1}(\mathfrak{F})$: la sua immagine $f(\mathfrak{F}^*)$ per f è un filtro di CAUCHY su $(E', \mathscr{A}_\omega(E'))$ più fine di $\mathfrak{F}'$ donde, ancora per la prop. 4, a) equivale e), E' risulta prelindelöfiano.

PROP. 9 - *Supponiamo che E sia uno spazio regolare (non necessariamente* *separato = di Hausdorff) normale (e quindi uniformizzabile) prelindelöfiano e supponiamo che F sia un insieme chiuso di E. Allora il sottospazio F è prelindelöfiano.*

DIM. - Siano $\mathcal{A}_\omega(E)$ le ω-strutture uniformi su E e, rispettivamente, su F, secondo la Convenzione 4. Detta $\mathcal{A}_\omega(E)_F$ la struttura uniforme indotta da $\mathcal{A}_\omega(E)$ su F, poichè E è normale, in forza della prop. 7, § 3 di [3], risulta

$$(1) \qquad \mathcal{A}_\omega(E)_F = \mathcal{A}_\omega(F).$$

Sia $\mathfrak{F} \in \mathfrak{I}(F)$ (l'analogo di $\mathfrak{I}(E)$ della Convenzione 5) e sia $\mathfrak{F}'$ il filtro su E che ha come base $\mathfrak{F}$ e sia $\mathfrak{F}'_\omega$ il filtro complementare regolare generato da $\mathfrak{F}'$ nell'intero spazio E (def. 3). Al pari di $\mathfrak{F}$, prima $\mathfrak{F}'$ e poi $\mathfrak{F}'_\omega$ verificano la proprietà dell'interesse numerabile. Per il lemma 7 § 2, la traccia $\mathfrak{F}'_{\omega F}$ di $\mathfrak{F}'_\omega$ su F è identica ad $\mathfrak{F}$.

Poichè E è prelindelôfiano, per l'equivalenza di a) e d) nella prop. 4, esiste un filtro completamente regolare di CAUCHY $\mathfrak{F}^*$ su $(E, \mathcal{A}_\omega(E))$ più fine di $\mathfrak{F}'_\omega$. Riconosciamo che la traccia $\mathfrak{F}^*_F$ di $\mathfrak{F}^*$ su F è un filtro. Ragionando per assurdo, supponiamo che esista un $H \in \mathfrak{F}^*$ tale che $F \cap H = \emptyset$: poichè $\mathfrak{F}^*$ ha una base chiusa, si può supporre che H sia chiuso. Allora $\complement H$ è aperto e contiene F e, poichè E è normale, F risulta $\mathcal{U}$-contenuto in $\complement H$ (cfr. [3] § 3, prop. 1, osservazione) e quindi per l'osservazione 1 alla def. 3, risulta $\complement H \in \mathfrak{F}'_\omega$ ed $\mathfrak{F}'_\omega$ essendo meno fine di $\mathfrak{F}'$, si ha $\complement H \in \mathfrak{F}^*$ contro la $H \in \mathfrak{F}^*$. Dunque $\mathfrak{F}^*_F$ è un filtro su F che è un filtro di CAUCHY per $\mathcal{A}_\omega(E)_F$ ossia, per (1), filtro di CAUCHY su $(F, \mathcal{A}_\omega(F))$, ciò che, $\mathfrak{F}^*_F$ essendo più fine di $\mathfrak{F}'_{\omega F} = \mathfrak{F}$, dimostra la tesi in forza della prop. 4, a) implica e).

Sussiste ora la proposizione conclusiva che procediamo a dimostrare con ogni dettaglio.

PROP. 10 - *Supponiamo che $\tilde{E}$ sia uno spazio uniformizzabile e supponiamo che E sia una parte ovunque densa di $\tilde{E}$ tale che, dette $\mathcal{A}_\omega(\tilde{E})$ e $\mathcal{A}_\omega(E)$ le ω-strutture uniformi su $\tilde{E}$ e, rispett., su E (Convenzione 4) la $\mathcal{A}_\omega(\tilde{E})$ sia una struttura uniforme di spazio completo e, detta $\mathcal{A}_\omega(\tilde{E})_E$ la struttura uniforme indotta da $\mathcal{A}_\omega(\tilde{E})$ su E, risulti:*

$$(1) \qquad \mathcal{A}_\omega(\tilde{E})_E = \mathcal{A}_\omega(E).$$

Allora le seguenti sono equivalenti:

a) *ogni $\mathfrak{F} \in \mathfrak{I}(E)$ è meno fine di almeno un $\mathfrak{F}^* \in \mathfrak{I}(E)$ massimale su $\mathfrak{I}(E)$ ordinato per « finezza ».*

b) *$\tilde{E}$ è uno spazio di Lindelöf.*

DIM. - a) *implica* b). Sia vera la a) e denotiamo con $\mathfrak{F}$ un qualunque elemento di $\mathfrak{I}(\tilde{E})$ (analogo di $\mathfrak{I}(E)$ della Convenzione 5); a causa della equivalenza di a) e b) nel lemma 4, la presente b) sarà dimostrata stabilendo che $\mathfrak{F}$ ha intersezione non vuota.

Poichè $\mathfrak{F}$ ha una base formata da insiemi aperti ed E è ovunque denso in $\tilde{E}$, la traccia $\mathfrak{F}_E$ di $\mathfrak{F}$ su E è un filtro completamente regolare. Poichè $\mathfrak{F}$ ha anche una base formata da insiemi chiusi, ricordata l'osservazione 1 alla def. 2, in forza del lemma 3, $\mathfrak{F}_E$ verifica la proprietà dell'intersezione numerabile al pari di $\mathfrak{F}$. Dunque è $\mathfrak{F}_E \in \mathfrak{I}(E)$ e quindi per a) esiste un $\mathfrak{F}^* \in \mathfrak{I}(E)$ massimale nel modo descritto da a). In forza della equivalenza di b) e d) nella prop. 4, $\mathfrak{F}^*$ è un filtro di CAUCHY su $(E, \mathscr{A}_\omega(E))$ e quindi, per l'ipotesi (1), un filtro di CAUCHY su $(E, \mathscr{A}_\omega(\tilde{E})_E)$. Pertanto $\mathfrak{F}^*$ è base di un filtro di CAUCHY su $(\tilde{E}, \mathscr{A}_\omega(\tilde{E}))$ che denotiamo con $\tilde{\mathfrak{F}}^*$ e sia $\tilde{\mathfrak{F}}^*_\omega$ il filtro completamente regolare su $(\tilde{E}, \mathscr{A}_\omega(\tilde{E}))$ generato da $\tilde{\mathfrak{F}}^*$. Per la prop. 5, § 2, tale $\tilde{\mathfrak{F}}^*_\omega$ è un filtro di CAUCHY su $(\tilde{E}, \mathscr{A}_\omega(\tilde{E}))$. Poichè, per ipotesi, $(\tilde{E}, \mathscr{A}_\omega(\tilde{E}))$ è completo, risulta:

$$\bigcap F \neq \emptyset \text{ per } F \text{ variabile in } \tilde{\mathfrak{F}}^*_\omega. \tag{2}$$

A sua volta $\mathfrak{F}_E$ è base di un filtro su $\tilde{E}$ che denotiamo con $\tilde{\mathfrak{F}}_E$.

Poichè è $\mathfrak{F} \subset \tilde{\mathfrak{F}}_E \subset \tilde{\mathfrak{F}}^*$, in forza dell'osservazione 2 alla def. 3, si ha $\mathfrak{F} \subset \tilde{\mathfrak{F}}^*_\omega$ e quindi, per la (2), l'intersezione di $\mathfrak{F}$ non è vuota. Dunque è vera la b).

b) *implica* a). Supponiamo vera la b) e supponiamo che $\mathfrak{F}$ sia un filtro in $\mathfrak{I}(E)$ (Convenzione 5): per la osservazione 2 alla def. 2, $\mathfrak{F}$ è $\mathscr{A}_\omega(E)$-inviluppato.

Sia $\tilde{\mathfrak{F}}$ il filtro su $\tilde{E}$ generato da $\mathfrak{F}$ e sia $\tilde{\mathfrak{F}}_\omega$ il filtro $\mathscr{A}_\omega(\tilde{E})$-inviluppato su $\tilde{E}$ generato da $\tilde{\mathfrak{F}}$: per il lemma 7, § 2, la traccia $\tilde{\mathfrak{F}}_{\omega E}$ di $\tilde{\mathfrak{F}}_\omega$ su E è identica al filtro $\mathscr{A}_\omega(E)$-inviluppato su E generato da $\mathfrak{F}$ cioè, per la prop. 4 § 2, il filtro $\mathfrak{F}$ stesso (che per ipotesi è $\mathscr{A}_\omega(E)$ inviluppato; osservazione 2 alla def. 2).

Osserviamo che $\tilde{\mathfrak{F}}$, al pari di $\mathfrak{F}$ verifica la proprietà dell'intersezione numerabile e quindi anche $\tilde{\mathfrak{F}}_\omega$ la verifica. Dalla equivalenza di a) e b) nel lemma 4 esiste un punto x di $\tilde{E}$ appartenente all'intersezione o, se si vuole, all'aderenza di $\tilde{\mathfrak{F}}_\omega$. Consegue che esiste un filtro $\tilde{\tilde{\mathfrak{F}}}$ su $\tilde{E}$ convergente verso x e più fine di $\tilde{\mathfrak{F}}_\omega$. Dunque detto $\mathfrak{B}(x)$ il filtro degli intorni di x in E risulta

$$\mathfrak{B}(x) \text{ meno fine di } \tilde{\tilde{\mathfrak{F}}} \tag{3}$$

$$\tilde{\mathfrak{F}} \text{ meno fine di } \tilde{\tilde{\mathfrak{F}}}. \tag{4}$$

Sia $\tilde{\tilde{\mathfrak{F}}}_\omega$ il filtro $\mathscr{A}_\omega(\tilde{E})$-inviluppato su $\tilde{E}$ generato da $\tilde{\tilde{\mathfrak{F}}}$. Da (3) e (4) e per la osservazione alla prop. 12 § 2, poichè $\mathfrak{B}(x)$ e $\tilde{\mathfrak{F}}_\omega$ sono $\mathscr{A}_\omega(E)$ — inviluppati, per la osservazione 2 alla def. 3, risulta:

(5) $$\mathfrak{B}(x) \text{ meno fine di } \breve{\mathfrak{F}}_\omega$$

(6) $$\tilde{\mathfrak{F}}_\omega \text{ meno fine di } \breve{\mathfrak{F}}_\omega .$$

La traccia $\breve{\mathfrak{F}}_{\omega E}$ di $\breve{\mathfrak{F}}_\omega$ su E è un filtro poichè E è ovunque denso in $\tilde{E}$ $\breve{\mathfrak{F}}_\omega$ ha una base formata da insiemi aperti.

Dalla (5) consegue che $\breve{\mathfrak{F}}_\omega$, oltre ad essere completamente regolare su $\tilde{E}$ converge verso x e quindi è un filtro di CAUCHY su $(\tilde{E}, \mathscr{A}_\omega(\tilde{E}))$. Pertanto, $\breve{\mathfrak{F}}_{\omega E}$, oltre ad essere completamente regolare sul sottospazio E, è un filtro di CAUCHY su $(E, \mathscr{A}_\omega(E))$ in forza di (1).

A causa della equivalenza di b) e d) nella prop. 4, si ha $\breve{\mathfrak{F}}_{\omega E} \in \mathfrak{J}(E)$ ed è massimale (cfr. la a)). Inoltre, richiamata la (6), risulta

$$\mathfrak{F} = \tilde{\mathfrak{F}}_{\omega E} \text{ meno fine di } \breve{\mathfrak{F}}_{\omega E} .$$

Dunque la a) è vera.

Ed ora, dimostrata la prop. 10, non c'è che da far ricorso alla definizione dell'$\mathscr{A}_\omega$-completamento di uno spazio uniformizzabile E, per concludere:

PROP. 11. - *Se lo spazio E è uniformizzabile separato, le seguenti proposizioni sono equivalenti:*

a) *E è prelindelöfiano* (def. 5),

b) *$\upsilon_\omega(E)$ è uno spazio di Lindelöf.*

In particolare, se E è separato, $\upsilon_\omega(E)$ è l'estensione di HEWITT di E e quindi E è prelindelöfiano se e solo se l'estensione di HEWITT di E è uno spazio di LINDELÖF.

Si desidera segnalare che, in conseguenza di quest'ultima osservazione, o, se si vuole della prop. 11, per E separato si può dare una agevole dimostrazione indiretta delle precedenti prop. 7, 8, 9.

BIBLIOGRAFIA

[1] ALFSEN E. M. e FENSTAD J. E., *A note on completion and compactification;* «Math. Scand.», vol. 8 (1960) pp. 97-104.

[2] AQUARO G, *Strutture uniformi di spazio precompatto,* «Ann. Scuola Norm. Sup. di Pisa», serie III, vol. XI (1957) pp. 149-181.

[3] — —, *Ricovrimenti aperti e strutture uniformi etc. ..* , «Ann. di Mat. pura ed applic.» (IV), vol. XLVII (1959) pp. 319-390.

[4] — —, *Completamenti di spazii uniformi*, «Ann di Mat. pura ed applic.» (IV), vol. LVI (1961) pp. 87-98.

[5] — —, *Spazii collettivamente normali ed estensione etc....*, «Riv. Mat. Univ. Parma» (2) vol. 2 (1961) pp. 77-90.

[6] BAGLEY R. W. e MCKNIGHT J. D. JR., *On Q-spaces and collections of closed sets* etc..., «Quart. J. Math. Oxford» Ser. (2) vol. 10 (1959) pp. 233-235.

[7] BOURBAKI N., *Algèbre*, Actual. Scient. et Ind. n. 934-1144 (1951) e n. 1032 (1947), Hermann e Co., Paris.

[8] — —, *Topologie Générale*, Actual Scient. et Ind. n. 858-1142 (1951) n. 1045 (nouv. edit.) (1958), Hermann e Co., Paris.

[9] GILLMAN L. e JERISON M., *Rings of continuous functions*, Van Nostrand Princeton (N. J.) (1960).

[10] KOWALSKI H.-J., *Topologische Räume*, Birkauser Ver. Basel-Stutgart (1961).

[11] SAMUEL P., *Ultrafilters and compactification of uniform spaces*, «Trans. Amer. Math. Soc.» vol. 64 (1948) pp. 100-132.