Su alcune varietà dello spazio proiettivo sopra un corpo non commutativo.

Nota di LUIGI ANTONIO ROSATI (a Firenze)

Sunto. - *In uno spazio proiettivo sopra un corpo qualunque si introducono delle ipersuperficie generalizzanti le quadriche studiate da* B. SEGRE *e se ne studiano la proprietà. In particolare si considerano superficie e curve del secondo e terzo ordine. Si tratta anche una questione relativa a piani grafici non desarguesiani.*

In una memoria [3] pubblicata sui « Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo » e riportata nel suo libro « Lectures on modern geometry » [4] B. SEGRE ha iniziato lo studio della geometria non lineare sopra un corpo sghembo occupandosi della teoria delle schiere rigate e delle loro sezioni.

Successivamente E. BERZ [1] ha dato altre definizioni di coniche, mettendole a raffronto.

In questa nota, dopo una premessa di carattere algebrico (n° 1), in uno spazio proiettivo S_r sopra un corpo qualunque si introducono e si studiano delle ipersuperficie generalizzanti le quadriche e da noi chiamate P-ipersuperficie. Su di esse si mettono in evidenza due diverse specie di punti, si dà una definizione di retta tangente ad una P-ipersuperficie in un punto di prima specie, si dimostra che tutte le tangenti in un punto di prima specie sono contenute in un iperpiano, si studiano le intersezioni di una P-ipersuperficie con una retta contenente punti di prima specie della P-ipersuperficie (n° 2).

Si collega poi questo lavoro allo studio delle quadriche e delle coniche fatto da B. SEGRE (n° 3) e si dimostra l'esistenza in un piano non desarguesiano finito di insiemi di punti godenti di proprietà analoghe a quelle delle C-configurazioni definite in [3] (n° 4). Infine si considerano le superficie cubiche e si mettono in evidenza due diverse specie di curve cubiche gobbe.

1. Premesse algebriche. – Siano: K un corpo qualunque, $V_n(K)$ lo spazio vettoriale a n dimensioni sopra K, T la trasformazione lineare di $V_n(K)$ in sè di equazioni

$$\lambda_i' = \lambda_1 a_{i1} + \dots + \lambda_n a_{in} \qquad (i = 1, \dots, n), \tag{1}$$

A la relativa matrice.

Secondo che T (e quindi A) sia invertibile o no diremo che il *determinante destro* di A non è equivalente a zero oppure è equivalente a zero e scriveremo rispettivamente

$$|A\| \neq 0, \qquad |A\| = 0.$$

Chiameremo equivalenti due determinanti che entrambi siano equivalenti a zero oppure non equivalenti a zero.

Dalla definizione di determinante destro risultano subito le seguenti proprietà

1.1. *Se la matrice B è ottenuta dalla matrice A moltiplicandone a destra tutti gli elementi di una riga o a sinistra tutti gli elementi di una colonna per un elemento di K diverso da zero allora $|A\|$ e $|B\|$ sono equivalenti.*

1.2. *Matrici ottenute l'una dall'altra mediante lo scambio di righe o di colonne hanno determinanti equivalenti.*

1.3. *Se una matrice ha uguali a zero tutti gli elementi di una riga o di una colonna allora il suo determinante è nullo.*

1.4. *Condizione necessaria e sufficiente perchè il sistema*

$$x_1 a_{i1} + \dots + x_n a_{in} = \alpha_i \qquad (i = 1, \dots, n)$$

sia risolubile e abbia una sola soluzione è che sia $|a_{ij}\| \neq 0$.

1.5. *Condizione necessaria e sufficiente perchè il sistema omogeneo*

$$x_1 a_{i1} + \dots + x_n a_{in} = 0 \qquad (i = 1, \dots, n)$$

abbia soluzioni non banali è che sia $|a_{ij}\| = 0$.

Indicheremo con AB il prodotto colonne per righe delle due matrici dello stesso ordine A, B. Allora da noti teoremi sulle trasformazioni lineari risulta

1.6. *Se B è invertibile allora $|AB\|$ e $|BA\|$ sono equivalenti a $|A\|$.*

In particolare

1.7. *Se B è ottenuta da A aggiungendo a una colonna di A una combinazione lineare con coefficienti a sinistra dalle altre colonne (aggiungendo a una riga di A una combinazione lineare con coefficienti a destra delle altre righe) allora $|A\|$ e $|B\|$ sono equivalenti.*

Risulta facile verificare che

1.8. *Se i minori d'ordine* n-1 *della matrice*

$$\begin{pmatrix} h_{21} & \dots & h_{2n} \\ \dots & & \\ h_{n1} & & h_{nn} \end{pmatrix}$$

sono tutti nulli allora il determinante $|h_{ij}\|$ $(i, j = 1, \dots, n)$ *è nullo, qualunque siano* $h_{11}, h_{12}, \dots, h_{1n}$.

In modo analogo a quello tenuto per introdurre i determinanti destri si potranno definire i determinanti sinistri. Indicheremo con $\|A|$ il determinante sinistro della matrice A.

Assegnati gli elementi di K b_{ij}, β_{ij} $(i, j = 1, \dots, n)$ l'equazione nell'incognita x

$$|b_{ij}x + \beta_{ij}\| = 0 \tag{1}$$

verrà chiamata una Δ-*equazione* e se $|b_{ij}\| \neq 0$ diremo che la Δ-equazione (1) ha *grado n.*

Se A è una qualunque matrice invertibile ad elementi in K e C una matrice invertibile ad elementi del centro di K si ha che, posto $B = \|b_{ij}x + \beta_{ij}\|$, la matrice $D = ABC$ si può scrivere nella forma della matrice B, sicchè anche l'equazione $|D\| = 0$ è una Δ-equazione. Per 1.6. è chiaro che ogni radice della (1) è anche radice dell'equazione $|D\| = 0$ e viceversa. Pertanto diremo *equivalenti* le due matrici B e D e analogamente le due equazioni $|B\| = 0$ e $|D\| = 0$.

Si dimostra facilmente che

1.9. *Se* $x = u$ *verifica l'equazione* (1), *allora esiste una* Δ-*equazione equivalente alla* (1) *nella quale tutti gli elementi di una colonna sono divisibili a destra per* $x - u$.

Non sarà restrittivo supporre $u = 0$ e allora sarà $|\beta_{ij}\| = 0$. Esisteranno pertanto n elementi $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ di K non tutti nulli tali che si abbia

$$\lambda_1\beta_{i1} + \dots + \lambda_n\beta_{in} = 0 \qquad (i = 1, \dots, n).$$

Supponendo, per fissare le idee, che sia $\lambda_n \neq 0$ si moltiplichi a sinistra l'ultima colonna della matrice B per λ_n e si aggiungano poi le rimanenti colonne moltiplicate rispettivamente per $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$. In questa maniera per 1.7. si ottiene una matrice

$$B' = \|b'_{ij}x + \beta'_{ij}\| \qquad (i, j = 1, \dots, n)$$

equivalente a B e nella quale i termini noti β'_{in} $(i = 1, \dots, n)$ degli elementi dell'ultima colonna sono uguali a zero ed il teorema è dimostrato.

In generale non accadrà che, se u verifica la (1), si possa trovare una Δ-equazione equivalente alla (1) in cui tutti gli elementi di una riga siano divisibili a destra per $x - u$. Nel caso che questo avvenga u si dirà una soluzione di *prima specie* della (1), di *seconda specie* nel caso contrario.

1.10. *Se la* (1) *è una Δ-equazione di grado n e u è una sua radice di prima specie allora le sue rimanenti radici verificano una Δ-equazione di grado $n - 1$.*

Senza ledere le generalità potremo supporre che tutti gli elementi della prima riga del primo membro della (1) siano divisibili a destra per $x - u$. Allora, per ogni radice $\bar{x}$ della (1) diversa da u, si avrà

$$\text{(2)} \qquad \left| \begin{matrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ b_{21}\bar{x} + \beta_{21} & \dots & b_{2n}\bar{x} + \beta_{2n} \\ \dots & & \\ b_{n1}\bar{x} + \beta_{n1} & \dots & b_{nn}\bar{x} + \beta_{nn} \end{matrix} \right\| = 0$$

Poichè la (1) ha grado n si avrà $|b_{ij}\| \neq 0$ e perciò $b_{11}, b_{12}, \dots, b_{1n}$ non saranno tutti nulli. Supponiamo che sia $b_{11} \neq 0$; si potranno allora determinare $k_2, \dots, k_n$ in modo che si abbia $b_{1i} = k_i b_{11}$ $(i = 2, \dots, n)$; si sottragga allora dalla i-ma colonna del determinante (2) la prima moltiplicata a sinistra per k_i. Si otterrà l'equazione equivalente alla (2)

$$\left| \begin{matrix} b_{11} & 0 & \dots & 0 \\ b_{21}\bar{x} + \beta_{21} & c_{22}\bar{x} + \gamma_{22} & \dots & c_{2n}\bar{x} + \gamma_{2n} \\ \dots & & & \\ b_{n1}\bar{x} + \beta_{n1} & c_{n2}\bar{x} + \gamma_{n2} & \dots & c_{nn}\bar{x} + \gamma_{nn} \end{matrix} \right\| = 0,$$

con evidente significato per $c_{h,k}$, $\gamma_{h,k}$.

Per 1.5. esisteranno allora $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ non tutti nulli in modo che si abbia

$$\lambda_1 b_{11} = 0$$

$$\lambda_1(b_{i1}\bar{x} + \beta_{i1}) + \lambda_2(c_{i2}\bar{x} + \gamma_{i2}) + \dots + \lambda_n(c_{in}\bar{x} + \gamma_{in}) = 0 \qquad (i = 2, \dots, n).$$

Sarà perciò $\lambda_1 = 0$ e

$$\lambda_2(c_{i2}\bar{x} + \gamma_{i2}) + \dots + \lambda_n(c_{in}\bar{x} + \gamma_{in}) = 0 \qquad (i = 2, \dots, n),$$

e quindi, sempre per 1.5., $\bar{x}$ verifica l'equazione

$$|c_{ij}x + \gamma_{ij}\| = 0 \qquad (i, j = 2, \dots, n)$$

e poichè $|b_{ij}\| \neq 0$, sarà anche $|c_{ij}\| \neq 0$. Rimane dunque dimostrato il teorema.

Se la (3) ha ancora la radice $x = u$ questa si dice *multipla di prima specie* per la (1).

2. ***P*-ipersuperficie e *P*-varietà.** - Sia S_{r-1} $(r > 2)$ lo spazio proiettivo destro sopra il corpo K di dimensione $r-1$. Allora i punti di S_{r-1} sono le r-ple ordinate destre $(x_1, x_2, \dots, x_r)$ di elementi di K non tutti nulli, cioè le classi di r-ple della forma $(x_1 k, \dots, x_r k)$, dove $x_1, \dots, x_r$ sono elementi di K non tutti nulli e k un qualunque elemento di K diverso da zero.

Gli iperpiani di S_{r-1} hanno equazioni del tipo $\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_r x_r = 0$, cosicchè essi sono in corrispondenza biunivoca con le r-ple ordinate sinistre $[\lambda_1, \dots, \lambda_r]$ di elementi non tutti nulli di K. Pertanto, se $\| a_{ij} \| \neq 0$, $\| b_{ij} \| \neq 0$, le trasformazioni lineari

$$x'_i = a_{i1} x_1 + \dots + a_{ir} x_r \qquad (i = 1, \dots, r)$$

$$\lambda'_i = \lambda_1 b_{i1} + \dots + \lambda_r b_{ir} \qquad (i = 1, \dots, r)$$

rappresentano in coordinate di punto e in coordinate di iperpiano collineazioni di S_{r-1}. Chiameremo *proiettività* le collineazioni di S_{r-1} di questo tipo.

Consideriamo ora le n^2 forme $X_{i,j}$ $(i, j = 1, \dots, n)$ lineari e omogenee nelle r variabili $x_1, \dots, x_r$ e a coefficienti a sinistra e supponiamo che non sia identicamente $\| X_{i,j} \| = 0$. Per 1.1. se $(x_1, x_2, \dots x_r)$ è una soluzione dell'equazione $\| X_{i,j} \| = 0$ anche $(x_1 h, x_2 h, \dots, x_r h)$ lo è, qualunque sia $h \neq 0$ in K. Pertanto chiameremo *P-ipersuperficie* di S_{r-1} *d'ordine* n il luogo dei punti di S_{r-1} le cui coordinate verificano un'equazione del tipo

$$\| X_{i,j} \| = 0, \tag{4}$$

ossia il luogo dei punti di S_{r-1} per cui la matrice $\| X_{ij} \|$ risulta non invertibile.

Per 1.5. la P-ipersuperficie (4) è rappresentata parametricamente dal sistema

$$\lambda_1 X_{i1} + \dots + \lambda_n X_{in} = 0 \qquad (i = 1, \dots, n) \tag{5}$$

cioè è il luogo dei punti di S_{r-1} le cui coordinate verificano, per opportuni $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, il sistema (1).

È chiaro che l'ordine d'una P-ipersuperficie è un invariante proiettivo.

Chiameremo poi *P-varietà* di S_{r-1} l'intersezione di due o più P-ipersuperficie di S_{r-1}.

L'intersezione di una P-ipersuperficie $\mathfrak{S}$ di S_{r-1} con un iperpiano S_{r-2} di S_{r-1} è una P-ipersuperficie di S_{r-2} avente lo stesso ordine di $\mathfrak{S}$.

Siano $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ tre P-ipersuperficie di S_r e siano

$$\| X_{i,j} \| = 0, \qquad \| Y_{p,p} \| = 0, \qquad \| Z_{r,s} \| = 0$$

le loro equazioni, n, m, $n+m$ i rispettivi ordini ($i, j=1, \dots, n; p, q=1, \dots, m$; $r, s = 1, \dots, n+m$).

Se $\| Z_{r,s} \|$ è la somma diretta di $\| X_{ij} \|$ e di $\| Y_{pq} \|$ cioè la matrice tale che $Z_{i,j} = X_{i,j}$ ($i, j = 1, \dots, n$), $Z_{p+n, q+n} = Y_{p,q}$ ($p, q = 1, \dots, m$) e con i rimanenti elementi uguali a zero, allora $\| Z_{rs} \|$ risulta non invertibile nei punti, e soltanto in essi, dove una delle due matrici $\| Y_{pq} \|$ e $\| X_{ij} \|$ risulta non invertibile. Questo significa che un punto appartiene a $\mathcal{C}$ se, e solamente se, appartiene ad $\mathcal{A}$ o a $\mathcal{B}$. Diremo perciò che $\mathcal{C}$ è l'unione di $\mathcal{A}$ e di $\mathcal{B}$, $\mathcal{C} = \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$, o anche che $\mathcal{C}$ è riducibile e che $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono le sue componenti. Evidentemente l'ordine di $\mathcal{C}$ è la somma degli ordini di $\mathcal{A}$ e di $\mathcal{B}$.

Se $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_r)$ è una delle intersezioni di una P-ipersuperficie $\mathcal{S}$ di ordine n di S_{r-1} con una retta t allora, eliminando $x_2, \dots, x_{r-1}$ tra l'equazione di $\mathcal{S}$ e le equazioni di t, si ha che $\bar{x}_1$, $\bar{x}_r$ verificano una Δ-equazione

$$\| b_{ij} x_1 + \beta_{ij} x_r \| = 0,$$

dove $b_{i,j}$, $\beta_{i,j}$ sono elementi di K dipendenti da $\mathcal{S}$ e da t e sarà $\| b_{ij} \| \neq 0$ se e solo se, per tutte le intersezioni di $\mathcal{S}$ con t, risulta $x_r \neq 0$, cioè se $\mathcal{S}$ e t non hanno intersezioni improprie.

La prima coordinata non omogenea $x = x_1 x_r^{-1}$ di ciascuna delle intersezioni proprie di $\mathcal{S}$ con t viene determinata dalla Δ-equazione

$$\| b_{ij} x + \beta_{ij} \| = 0. \tag{6}$$

Diremo che un punto P di coordinate non omogenee $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{r-1})$ appartenente a una P-ipersuperficie $\mathcal{S}$ è di *prima specie (multiplo di prima specie)* quando per ogni retta t uscente da P l'equazione (6) ha $\bar{x}_1$ come radice di prima specie (multipla di prima specie).

Un punto di una P-ipersuperficie che non sia di prima specie verrà detto di *seconda specie*.

Se $P(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{r-1})$ è di prima specie, ma non multiplo, e per una retta t uscente da P la (6) ha $\bar{x}_1$ come radice di prima specie multipla, allora t si dice *tangente* a $\mathcal{S}$ in P.

Vogliamo dimostrare che

2.1. *Le tangenti a una P-ipersuperficie $\mathcal{S}$ in un punto semplice A di prima specie sono le rette di un iperpiano π uscente da A.*

Per semplicità supporremo che A abbia le coordinate non omogenee $(0, \ldots, 0)$. I ragionamenti che faremo saranno però validi in generale. Sia $|\,X_{ij}\,\| = 0$ l'equazione omogenea di $\mathfrak{S}$ e si abbia $X_{ij} = a_{ij}^1 x_1 + \ldots + a_{ij}^r x_r$. Se $x_i = t_i x_1$ $(i = 2, \ldots, r-1)$ sono le equazioni di una retta, t, per A e se la (6) è l'equazione che fornisce la prima coordinata non omogenea delle intersezioni proprie di $\mathfrak{S}$ con t, allora si avrà

$$b_{ij}x + \beta_{ij} = (a_{ij}^1 + \ldots + a_{ij}^{r-1} t_{r-1})x + a_{ij}^r,$$

ossia $\beta_{i,j} = a_{ij}^r$ risulta indipendente da $t_2, \ldots, t_{r-1}$.

Siccome per ipotesi A è di prima specie esisteranno due matrici P e Q dello stesso ordine di $\|\,X_{ij}\,\|$, la prima ad elementi in K, la seconda ad elementi nel centro di K, entrambe invertibili, tali che nella matrice

$$P\,\|\,b_{ij}x + \beta_{ij}\,\|\,Q$$

tutti gli elementi di una riga, la prima tanto per fissare le idee, abbiano il termine noto uguale a zero.

D'altra parte si ha

$$P\,\|\,b_{ij}x + \beta_{ij}\,\|\,Q = P\,\|\,b_{ij}x\,\|\,Q + P\,\|\,\beta_{ij}\,\|\,Q.$$

Pertanto tutti gli elementi della prima riga della matrice $P\,\|\,\beta_{ij}\,\|\,Q$ saranno uguali a zero.

Ma, come abbiamo già osservato, la matrice $\|\,\beta_{ij}\,\|$ non dipende dalla retta t. Pertanto per ogni retta t passante per A l'equazione $|\,b_{ij}x + \beta_{ij}\,\| = 0$ che fornisce le prime coordinate non omogenee delle intersezioni di $\mathfrak{S}$ con t è tale che nell'equazione ad essa equivalente $|\,P\,\|\,b_{ij}x + \beta_{ij}\,\|\,Q\,\| = 0$ i termini noti degli elementi della prima riga sono uguali a zero.

Posto $P\,\|\,X_{ij}\,\|\,Q = \|\,Y_{ij}\,\|$, sia h_{ij} il coefficiente di x_r in Y_{ij} e consideriamo l'equazione

$$\text{(7)} \qquad \left|\begin{matrix} Y_{11} & \ldots & Y_{1n} \\ h_{21} & \ldots & h_{2n} \\ \ldots & & \\ h_{n1} & \ldots & h_{nn} \end{matrix}\right\| = 0,$$

che, come abbiamo osservato non dipende dalla retta t. Se tutti i minori d'ordine $n-1$ della matrice

$$\text{(8)} \qquad \begin{pmatrix} h_{21} & \ldots & h_{2n} \\ \ldots & & \\ h_{n1} & \ldots & h_{nn} \end{pmatrix}$$

fossero uguali a zero allora per 1.8. la (7) sarebbe identicamente soddisfatta e perciò, per qualunque retta t uscente da A, l'equazione (6), che ne fornisce le intersezioni proprie con $\mathfrak{S}$, avrebbe 0 come radice multipla di prima specie, mentre invece A è semplice. Quindi almeno uno dei minori della matrice (8) sarà differente da zero. Allora l'equazione (7) rappresenta un iperpiano. Sia infatti M un punto di coordinate omogenee $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_r)$ soddisfacente all'equazione (7). Esisteranno corrispondentemente $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ non tutti nulli in modo che si abbia

$$\lambda_1 Y_{11} + \dots + \lambda_n Y_{1n} = 0$$

$$\lambda_1 h_{i1} + \dots + \lambda_n h_{in} = 0 \qquad (i = 2, \dots, n).$$

Ma per 1.4. il sistema

$$y_1 h_{i1} + \dots + y_n h_{in} = 0 \qquad (1 = 2, \dots, n)$$

ha, a meno di un fattore sinistro, una e una sola soluzione, cosicchè $\lambda_1, \dots \lambda_n$ risultano indipendenti da M. Pertanto l'iperpiano α d'equazione

$$\lambda_1 Y_{11} + \dots + \lambda_1 Y_{1n} = 0$$

risulta il luogo dei punti che verificano l'equazione (7) ed è chiaro che questo iperpiano passa per A.

Sia m una retta qualunque passante per A. Si vede facilmente che la corrispondente equazione (6) che fornisce il valore della prima coordinata non omogenea delle intersezioni di m con $\mathfrak{S}$ ha 0 come radice multipla di prima specie se, e solamente se, m appartiene ad α. L'iperpiano α è dunque il luogo delle tangenti a $\mathfrak{S}$ in A.

Chiameremo α l'*iperpiano tangente* a $\mathfrak{S}$ in A.

Vogliamo ora dimostrare che

2.2. *Una retta passante per $n-1$ punti di prima specie di una P-ipersuperficie $\mathfrak{S}$ d'ordine n e non appartenente ad $\mathfrak{S}$ ha al massimo n intersezioni con $\mathfrak{S}$.*

La specie di un punto non muta per effetto di trasformazioni proiettive. Pertanto potremo supporre che gli $n-1$ punti che consideriamo siano tutti propri e che le loro prime coordinate non omogenee $u_1, u_2, \dots, u_{n-1}$ siano tutte differenti; allora $u_1, u_2, \dots, u_{n-1}$ saranno radici di prima specie dell'equazione

$$|\, b_{ij}x + \beta_{ij} \,|| = 0 \tag{9}$$

che determina anche le ulteriori intersezioni della retta con $\mathfrak{S}$.

Sia poi

$$\| c_{ij}x + \gamma_{ij} \| = 0 \tag{10}$$

un'equazione equivalente alla (9) e tale che gli elementi della prima riga del primo membro siano divisibili a destra per $x - u_1$.

Anzi, come abbiamo visto nella dimostrazione del teorema 1.10., potremo supporre che sia $c_{11}x + \gamma_{11} = c_{11}(x - u_1)$, $c_{1i} = \gamma_{1i} = 0$ $(i = 2, \dots, n)$. Per induzione supporremo che la matrice B del primo membro della (9) sia equivalente alla matrice

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & & & & \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rr} & \dots & 0 \\ a_{r+11} & a_{r+12} & \dots & \dots & & a_{r+1n} \\ \dots & \dots & & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & \dots & & a_{nn} \end{pmatrix},$$

dove $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{rr}$ sono polinomi di primo grado in x divisibili a destra rispettivamente per $x - u_1, \dots, x - u_r$, a_{ij} $(i \neq j;\ i, j = 1, \dots, n)$ polinomi destri di primo grado in x, e dimostreremo che B è equivalente ad una matrice dello stesso tipo di A dove gli elementi della diagonale principale fino a quello di posto $r + 1$ sono divisibili rispettivamente per $x - u_1, \dots, x - u_{r+1}$ e dove nella $(r+1)$-ma riga sono uguali a zero tutti gli elementi dopo l'$(r+1)$-mo.

Intanto esisteranno due matrici d'ordine n, P e $Q = \| q_{ij} \|$, la prima ad elementi in K, la seconda ad elementi nel centro di K, entrambe invertibili, tali che PAQ abbia tutti gli elementi di una riga divisibili a destra per $x - u_{r+1}$. Avrà allora tutti gli elementi di una riga divisibili a destra per $x - u_{r+1}$ anche la matrice $AQ = P^{-1}(PAQ)$.

Se indichiamo con M la matrice avente le prime r colonne in comune con A e gli elementi delle altre colonne uguali a zero e con N la matrice ottenuta da A sostituendo con altrettanti zeri gli elementi delle prime r colonne, abbiamo $A = M + N$ e quindi $AQ = MQ + NQ$.

Tutti gli elementi di MQ non appartenenti alle prime r colonne sono uguali a zero e perciò in una riga di NQ, la t-ma supporremo, tutti gli elementi non appartenenti alle prime r colonne saranno divisibili a destra per $x - u_{r+1}$.

Allora, se consideriamo una qualunque matrice invertibile

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & & \dots & & 0 \\ 0 & 1 & & \dots & & 0 \\ \dots & & & & & \\ 0 & \dots & 0 & q_{tt} & \dots & q_{tn} \\ 0 & \dots & 0 & d_{r+1t} & \dots & d_{r+1n} \\ \dots & & & & & \\ & \dots & & d_{nt} & \dots & d_{nn} \end{pmatrix}$$

con $d_{h,k}$ $(h = r+1, \dots, n;\ k = 1, \dots, n)$ elementi del centro di K, si ha che AU è equivalente ad A e quindi a B, che nella sua p-ma riga $(p = 1, \dots, r)$ il termine p-mo è divisibile a destra per $x - u_p$ e che nella $(r+1)$-ma riga tutti gli elementi situati nelle colonne dalla $(r+1)$-ma all'ultima sono divisibili a destra per $x - u_{r+1}$. A questo punto basta moltiplicare a sinistra AU per una conveniente matrice invertibile ad elementi in K per avere una matrice con le caratteristiche volute.

Esisterà pertanto una matrice triangolare C equivalente a B in cui i primi $n-1$ elementi della diagonale principale saranno divisibili rispettivamente per $x - u_1, \dots, x - u_{n-1}$.

Risulta facile convincersi che l'equazione $|C|| = 0$, oltre le radici di prima specie $u_1, \dots, u_{n-1}$, ammette al massimo un'altra radice (l'ultimo elemento della diagonale principale). Infatti, come del resto abbiamo già osservato, un determinante del tipo

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}\Bigg|$$

risulta uguale a zero se, e solamente se si ha $a_{11} = 0$ oppure $|a_{hk}|| = 0$ $(h, k = 2, \dots, n)$.

Rimane quindi dimostrato il teorema.

Mostriamo ora che

2.3. *Dati in S_{r-1} n sistemi lineari proiettivi di iperpiani di dimensione $n-1$, il luogo dei punti comuni a iperpiani corrispondenti è una P-ipersuperficie di S_{r-1} d'ordine n, passante per i sostegni dei sistemi lineari considerati i punti dei quali sono di prima specie.*

Siano θ e θ' due sistemi proiettivi di iperpiani della stessa dimensione $n-1$. Sia poi $\sum_i \lambda_i X_i = 0$ il generico iperpiano di θ, con $X_i = \sum_j a_{ji} x_j$. Dette $[u_1, \dots, u_r]$, $[u'_1, \dots, u'_r]$ le coordinate di $\sum_i \lambda_i X_i = 0$ e del suo corrispondente, si avrà $u_j = \sum_i \lambda_i a_{ji}$, $u'_h = \sum_j u_j b_{hj} = \sum_j (\sum_i \lambda_i a_{ji}) b_{hj}$, con evidente significato per a_{ji}, b_{hj}.

Ne segue che $[u'_1, \dots, u'_r]$ ha un'equazione $u'_1 x_1 + \dots + u'_r x_r = 0$ del tipo $\sum_i \lambda_i X'_i = 0$ con X'_i forma omogenea di primo grado a coefficienti costanti. Questo basta per concludere che il nostro luogo sarà rappresentato parametricamente da un sistema di tipo (5) e che è quindi una P-ipersuperficie di ordine n.

Il resto del teorema si ottiene tenendo presente che se le coordinate di un punto annullano tutti gli elementi di una riga dell'equazione di una P-ipersuperficie allora il punto appartiene alla P-ipersuperficie stessa per 1.3 e risulta per essa di prima specie.

Come conseguenza di questo teorema si ha subito che

2.4. *La più generale P-ipersuperficie di S_r d'ordine n si può ottenere come intersezione con S_r di una P-ipersuperficie d'ordine n generata al modo del teorema* 2.3. *e appartenente a un S_n di una conveniente dimensione $n > r$.*

3. **Quadriche e coniche.** – Diremo *quadriche* e *coniche* rispettivamente le P-superficie del secondo ordine di S_3 e le P-curve del secondo ordine *di* S_2. E diremo quadriche e coniche *degeneri* rispettivamente le quadriche e le coniche di cui facciano parte i punti di un piano o i punti di una retta. Diremo infine *completamente degeneri* le quadriche e le coniche che siano rispettivamente l'unione di due piani o l'unione di due rette.

La conica

$$\left|\begin{matrix} x_1 & x_2 \\ a x_1 & x_3 \end{matrix}\right|\Bigg| = 0$$

è degenere e risulta completamente degenere se o solo se a appartiene al centro di K.

Una conica semplicemente degenere è costituita da una retta e da un insieme di punti che B. SEGRE in [3] ha chiamato C-configurazione.

Si vede subito che le quadriche e le coniche non degeneri coincidono rispettivamente con le quadriche e con le coniche introdotte da B. SEGRE in [3], cioè una quadrica non degenere è il luogo dei punti delle rette che si appoggiano a tre rette due a due sghembe e una conica non degenere è una sezione di una quadrica con un piano non passante per una retta della quadrica. E risulta facile verificare che i punti di prima specie di una quadrica non degenere si distribuiscono sulle direttrici della quadrica.

Il piano tangente ad una quadrica in un suo punto di prima specie la taglia secondo una conica completamente degenere unione della direttrice e della generatrice passanti per il punto di contatto.

Come ha già visto B. SEGRE in [3] un piano per una generatrice di una quadrica la taglia ulteriormente secondo una direttrice o secondo una C-configurazione.

4. Una questione relativa a piani grafici non desarguesiani. - Nella sua memoria [3] B. SEGRE ha posto il problema, enunciato anche da L. LOMBARDO-RADICE in [2], di vedere se in qualche piano non desarguesiano esistano insiemi di punti dotati di proprietà analoghe a quelle trovate da lui per le C-configurazioni o per le coniche. Per inciso nel piano (non desarguesiano di traslazione) sopra un conveniente quasicorpo associativo R troveremo insiemi di punti dotati di proprietà analoghe a quelle delle C-configurazioni.

Sia R un quasicorpo associativo destro d'ordine q (q numero cardinale finito o infinito), cioè un quasicorpo associativo d'ordine q dove valga la proprietà distributiva a destra $a(b+c) = ab + ac$. Sia H il nucleo di R cioè il corpo formato dagli elementi c di R per cui vale la proprietà distributiva a sinistra $(a+b)c = ac + bc$. Gli elementi di R permutabili con un elemento c di H costituiscono un corpo L contenente, come del resto anche H, il centro C di R. Indicheremo con m l'ordine di L.

Supponiamo poi che R sia tale che H contenga propriamente C e indichiamo con t un elemento dell'insieme $H - C$ degli elementi di H non appartenenti a C.

Siano: α il piano (non desarguesiano di traslazione) sopra R, g la retta impropria di α, I l'insieme dei q punti propri di α le cui coordinate (x, y) soddisfano l'equazione

$$x = yt.$$

Due qualunque punti di I

$$M(ut, u), \qquad M'(u't, u') \qquad (u' \neq u)$$

sono congiunti da una retta che taglia g nel punto (improprio)

$$N(ctc^{-1}, 1, 0)$$

dove $c = u - u'$. Infatti la retta MM' ha l'equazione

$$(u-u')^{-1}(y-u) = t^{-1}(u-u')^{-1}(x-ut).$$

Poichè per ipotesi H contiene propriamente C, se indichiamo con J l'insieme dei punti di g di coordinate $(ctc^{-1}, 1, 0)$, il numero cardinale, finito o infinito, degli elementi di J sarà certamente maggiore di uno.

Ebbene come in [3] si può vedere facilmente che I gode delle proprietà delle C-configurazioni.

Precisamente

a) *Ogni retta congiungente un punto M di I con un punto N di J contiene m punti appartenenti ad I.*

b) *Ogni retta congiungente due distinti punti M, M' appartenenti a I incontra g in un punto N appartenente a J e quindi viene a contenere un punto di I.*

Supponiamo ora che R sia finito d'ordine q.

Se si uniscono i q punti di I con un qualunque punto O di g che non appartenga ad J si ottengono q rette distinte fra loro e da g ciascuna delle quali per b) non contiene altri punti di I. Poichè le rette proprie di α uscenti da O sono precisamente q si ha che

c) *ogni retta di α distinta da g che tagli g in un punto O che non appartenga ad J contiene uno ed un solo punto di I.*

5. **Le superficie cubiche e le curve cubiche gobbe.** - Tenuto conto del teorema 2.3. si ha

5.1. *Se A, B, C sono i centri di tre stelle di piani il luogo dei punti comuni alle terne di piani corrispondenti è una superficie S del terz'ordine avente A, B, C come punti di prima specie.*

Dal teorema 2.2. risulta allora che la retta AB, se non fa parte di S, incontra ulteriormente S al massimo in un punto, mentre le residue intersezioni con S di una retta generica passante per A per il teorema 1.10. dipendono, come le intersezioni di una retta con una quadrica, dalla risoluzione di una Δ-equazione di grado 2. Pertanto per esse potranno capitare i casi trovati da B. SEGRE per le intersezioni di una retta con una quadrica.

5.2. *Dati tre fasci proiettivi di piani ad assi sghembi, il luogo delle intersezioni delle terne di piani corrispondenti è una curva residua intersezione di due quadriche aventi una direttrice in comune.*

Siano a, b, c gli assi dei tre fasci. Il luogo delle rette comuni alle coppie di piani corrispondenti nei primi due fasci è una quadrica avente a, b come direttrici. Analogamente il primo e il terzo generano una quadrica avente le rette a, c come direttrici e il secondo e il terzo una quadrica avente b, c come direttrici. Per i punti dell'intersezione della prime due quadriche non appartenenti alla retta a passa anche la terza quadrica, cosicchè l'intersezione delle tre quadriche è il luogo dei punti comuni alle terne di piani corrispondenti. Diremo *cubica gobba di prima specie* questa curva.

5.3. *Il luogo* $\mathcal{C}$ *dei punti comuni a raggi corrispondenti in due stelle proiettive è una curva passante per i loro centri, residua intersezione di due quadriche aventi una generatrice in comune.*

Siano

$$\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \lambda_3 X_3 = 0, \qquad \lambda_1 Y_1 + \lambda_2 Y_2 + \lambda_3 Y_3 = 0$$

due stelle proiettive di piani di centri rispettivamente X e Y. Esse inducono una proiettività tra le due stelle di raggi di centri X e Y che alla generica retta x del fascio di centro X

$$\lambda_1' X_1 + \lambda_2' X_2 + \lambda_3' X_3 = 0, \qquad \lambda_1'' X_1 + \lambda_2'' X_2 + \lambda_3'' X_3 = 0$$

fa corrispondere la retta y del fascio di centro Y

$$\lambda_1' Y_1 + \lambda_2' Y_2 + \lambda_3' Y_3 = 0, \qquad \lambda_1'' Y_1 + \lambda_2'' Y_2 + \lambda_3'' Y_3 = 0.$$

Ora, supposti fissi λ_1', λ_2', λ_3', λ_1'', λ_2'', λ_3'', il sistema nelle incognite u_1, u_2, u_3

$$\lambda_1' u_1 + \lambda_2' u_2 + \lambda_3' u_3 = 0, \qquad \lambda_1'' u_1 + \lambda_2'' u_2 + \lambda_3'' u_3 = 0$$

ammette, a meno di un fattore sinistro, una e una sola soluzione cosicchè, se x e y sono incidenti in un punto (x_1, x_2, x_3, x_4), in esso sarà

$$Y_1 = X_1 h, \qquad Y_2 = X_2 h, \qquad Y_3 = X_3 h;$$

pertanto per 1.1. tutti i minori d'ordine due della matrice

$$\begin{pmatrix} X_1 & X_2 & X_3 \\ Y_1 & Y_2 & Y_3 \end{pmatrix}$$

saranno uguali a zero. Ne viene che $\mathcal{C}$ è il luogo dei punti comuni alle tre quadriche

$$\begin{Vmatrix} X_1 & X_2 \\ Y_1 & Y_2 \end{Vmatrix} = 0, \quad \begin{Vmatrix} X_1 & X_3 \\ Y_1 & Y_3 \end{Vmatrix} = 0, \quad \begin{Vmatrix} X_2 & X_3 \\ Y_2 & Y_3 \end{Vmatrix} = 0$$

aventi due a due una generatrice in comune. Evidentemente per i punti comuni alle prime due che non stanno sulla retta $X_1 = Y_1 = 0$ passa anche la terza. Diremo $\mathcal{C}$ *cubica gobba di seconda specie.*

BIBLIOGRAFIA

[1] E. BERZ, *Kegelschitte in desarguesschen Ebenen*, «Math. Zeitschrift», Bd 78, pp 55-85.
[2] L. LOMBARDO-RADICE, *Piani grafici finiti non desarguesiani*, G, Denaro, Palermo.
[3] B. SEGRE, *Elementi di geometria non lineare sopra un corpo sghembo*, «Rend. Circolo Mat. di Palermo», s. II, t. 7 (1958) pp. 81-122.
[4] B. SEGRE, *Lectures on modern geometry*, Cremonese, Roma, 1961.