Teoremi di unicità in domini non limitati e teoremi di Liouville per le soluzioni dei problemi al contorno relativi alle equazioni ellittiche.

Memoria (*) di CARLO MIRANDA (a Napoli)

Sunto. - *Come nell'introduzione.*

Se si eccettuano alcuni interessanti risultati recentemente stabiliti da A. DOUGLIS e L. NIRENBERG in [2] e da S. AGMON, A. DOUGLIS e L. NIRENBERG in [1] per le soluzioni delle equazioni ellittiche a coefficienti costanti contenenti soltanto le derivate di ordine massimo, non sembra che le questioni richiamate nel titolo siano state finora approfondite, almeno per quanto riguarda le equazioni di ordine superiore (1). Credo perciò che i risultati al riguardo, che esporremo in questo lavoro, abbiano qualche interesse, anche se è molto probabile che essi possano essere notevolmente migliorati. Tali risultati sono contenuti nei nn. 4, 5, 6, 7 di questa memoria. Di essi alcuni (n. 4) consistono in teoremi di unicità per problemi al contorno, astrattamente formulati, in domini non limitati; altri (n. 4) forniscono delle condizioni sufficienti affinchè le funzioni di una certa classe, definita in relazione a un certo sistema di equazioni ellittiche, si riducano a polinomi rispetto a tutte o ad alcune delle variabili da cui dipendono.

Nel n. 6 particolare attenzione è stata posta nello studio delle soluzioni dei sistemi di equazioni che, essendo definite in tutto lo spazio, verificano su di una frontiera degenere, costituita dall'intersezione di due o più iperpiani, delle condizioni di DIRICHLET del tipo di quelle considerate da S. L. SOBOLEV [11] per le funzioni poliarmoniche (2).

I risultati ottenuti sono stati poi ulteriormente precisati nel n. 7 per le equazioni a coefficienti costanti, con speciale riguardo al caso di una sola equazione fortemente ellittica contenente soltanto le derivate di ordine

---

(*) Lavoro nell'ambito dell'attività del Gruppo di Ricerche n. 13 del Comitato per la Matematica del C. N. R. per l'anno 1991-62.

(1) Per la bibliografia relativa alle equazioni del secondo ordine rimandiamo a [9], Cap. VII n. 49, in proposito vedi anche [6].

(2) Per il caso delle equazioni fortemente ellittiche generali vedi M. I. VISIK [13].

massimo, caso nel quale è stato stabilito un teorema di unicità per i problemi sopra indicati.

Nei nn. 1, 2, 3 sono indicate le notazioni adottate e sono stabiliti alcuni risultati preliminari. Tra questi sono particolarmente importanti, ai fini della presente memoria, i lemmi di crescenza del n. 3 che generalizzano un precedente risultato di G. STAMPACCHIA [12].

1. Campi e funzioni. Consideriamo un S_n euclideo di cui indicheremo con $x \equiv (x_1, x_2, \dots, x_n)$ il punto generico, designando poi con $|x|$ la distanza di questo dall'origine.

Se $\sigma \equiv i_1 i_2, \dots, i_n$ è un qualsiasi sistema di interi non negativi, porremo anche:

$$|\sigma| = i_1 + i_2 + \dots + i_n,$$

$$x^\sigma = x_1^{i_1} x_2^{i_2} \dots x_n^{i_n}, \quad D^\sigma = \frac{\partial^{|\sigma|}}{\partial x_1^{i_1}, \dots, \partial x_n^{i_n}}.$$

Sia ora Ω un aperto non limitato, dotato della proprietà di cono, e la cui frontiera indicheremo con $\partial\Omega$. Per ogni aperto limitato $\mathfrak{D} \subset \Omega$ diremo $C^{(m)}(\bar{\mathfrak{D}})$ la classe delle funzioni reali o complesse continue nella chiusura $\bar{\mathfrak{D}}$ di $\mathfrak{D}$ insieme con tutte le derivate di ordine $k \leq m$ e $C_0^{(m)}(\mathfrak{D})$ la sottoclasse di $C^{(m)}(\bar{\mathfrak{D}})$ costituita dalle funzioni di $C^{(m)}(\bar{\mathfrak{D}})$ a supporto compatto in $\mathfrak{D}$.

Per ogni funzione $g \in C^{(m)}(\bar{\mathfrak{D}})$ porremo:

$$|g|_{k,\mathfrak{D}} = \left[\int_{\mathfrak{D}} \sum_{|\sigma|=k} |D^\sigma g|^2 dx\right]^{\frac{1}{2}}, \qquad k \leq m, \tag{1.1}$$

$$\|g\|_{m,\mathfrak{D}} = \left[\sum_{k=0}^{m} |g|_{k,\mathfrak{D}}^2\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{1.2}$$

Indicheremo poi con $H^{(m)}(\mathfrak{D})$, $H_0^{(m)}(\mathfrak{D})$ i completamenti di $C^{(m)}(\bar{\mathfrak{D}})$, $C_0^{(m)}(\mathfrak{D})$ rispetto alla norma (1.2) e per ogni funzione $g \in H^{(m)}(\mathfrak{D})$ adopreremo il simbolo $D^\sigma g$ nel senso della derivazione debole; in tal senso continueremo anche a valerci delle posizioni (1.1) e (1.2).

Se poi $u = (u_1, u_2, \dots, u_p)$ è un vettore, il cui modulo indicheremo con $|u|$, che ha per componenti funzioni di classe $H^{(m)}(\mathfrak{D})$ diremo che tale vettore è di classe $H^{(m)}(\mathfrak{D})$ e porremo:

$$|u|_{k,\mathfrak{D}} = \left(\sum_{i=1}^{p} |u_i|_{k,\mathfrak{D}}^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Diremo ancora che un vettore è di classe $U^{(m)}(\Omega)$ se esso è di classe $H^{(m)}(\mathfrak{D})$ per ogni aperto limitato $\mathfrak{D} \subset \Omega$. Diremo infine che un vettore $u \in U^{(m)}(\Omega)$ è di classe $U_0^{(m)}(\Omega)$ se esso è a supporto compatto in Ω.

Fissato una volta per tutte un punto $x_0 \equiv (x_{01}, \dots, x_{0n})$ di S_n indichiamo con Q_R l'ipercubo aperto $|x_i - x_{0i}| < R$ e poniamo

$$\Omega_R = \Omega \quad Q_R$$

Diciamo poi Γ_R il trasformato di Ω_R nell'omotetia $x_i = x_{0i} + Ry_i$ e per ogni vettore $u \in H^{(m)}(\Omega_R)$ poniamo $u(x) = v(y)$. Un noto lemma di G. EHRLING e L. NIRENBERG (3) assicura che ad ogni Γ_R si possono associare due numeri ε_0 e C tali che per $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ e qualunque sia il vettore $v \in H^{(m)}(\Gamma_R)$ riesca per $k < m$:

$$|v|_{k,\Gamma_R} \leq \varepsilon |v|_{m,\Gamma_R} + C\varepsilon^{\frac{k}{m-k}} |v|_{0,\Gamma_R}. \tag{1.3}$$

Ora, se

$$|v|_{0,\Gamma_R} \leq \varepsilon_0^{\frac{m}{m-k}} |v|_{m,\Gamma_R},$$

posto:

$$\varepsilon = \left(\frac{|v|_{0,\Gamma_R}}{|v|_{m,\Gamma_R}}\right)^{\frac{m-k}{m}},$$

si ha dalla (1.3):

$$|v|_{k,\Gamma_R} \leq (1 + C) |v|_{m,\Gamma_R}^{\frac{k}{m}} |v|_{0,\Gamma_R}^{\frac{m-k}{m}}.$$

Se invece è

$$|v|_{0,\Gamma_R} \geq \varepsilon_0^{\frac{m}{m-k}} |v|_{m,\Gamma_R},$$

si ha dalla (1.3) scritta per $\varepsilon = \varepsilon_0$:

$$|v|_{k,\Gamma_R} \leq (1 + C)\varepsilon_0^{-\frac{k}{m-k}} |v|_{0,\Gamma_R}.$$

Ad ogni R si può dunque associare una costante K_0 tale da risultare

(3) Per il caso che Γ_R sia sufficientemente regolare una dimostrazione si trova in [10]; per il caso generale qui considerato vedi [3].

per $v \in H^{(m)}(\Gamma_R)$ e per $k < m$:

$$| v |_{k,\Gamma_R} \leq K_0 \left[| v |_{m,\Gamma_R}^{\frac{k}{m}} | v |_{0,\Gamma_R}^{\frac{m-k}{m}} + | v |_{0,\Gamma_R} \right], \qquad (^4)$$

Ne segue che per $u \in H^{(m)}(\Omega_R)$ si ha:

$$| u |_{k,\Omega_R} \leq K_0 \left[| u |_{m,\Omega_R}^{\frac{k}{m}} | u |_{0,\Omega_R}^{\frac{m-k}{m}} + R^{-k} | u |_{0,\Omega_R} \right]. \tag{1.4}$$

Nel corso di questo lavoro noi supporremo costantemente che l'aperto Ω sia tale che la (1.4) valga uniformemente rispetto ad R, almeno per R abbastanza grande, faremo cioè l'ipotesi che:

i_1) *Esistono due numeri positivi K_0 ed R_0 tali che la* (1.4) *sussiste per $k < m$ e per tutti i vettori $u \in H^{(m)}(\Omega_R)$, qualunque sia $R \geq R_0$.*

Fissato ora un intero $s < n$ indichiamo con Ω'_R e Ω''_R le proiezioni di Ω_R sulle varietà lineari S' ed S'' di S_n rispettivamente di equazioni $x_{s+1} = x_{s+2} = \dots = x_n = 0$ e $x_1 = x_2 = \dots = x_s = 0$ e per ogni x di S_n diciamo x' e x'' le sue proiezioni su S' ed S'' e poniamo: $x = (x', x'')$. Per ogni $x'' \in \Omega''_R$ resta allora determinato un aperto di S':

$$\omega_R = \omega_R(x'') \subset \Omega'_R$$

costituito da tutti e soli i punti $x' \in \Omega'_R$ tali che $(x', x'') \in \Omega_R$. In alcune parti di questo lavoro faremo su Ω la seguente ipotesi, relativa anche ad un fissato valore di s:

$\mathrm{i}_1^{(s)}$) *Ad ogni indice k si possono associare due costanti K_0 ed R_0 tali che per $v(x') \in H^{(m+k)}(\omega_R)$ si abbia:*

$$| v |_{k,\omega_R} \leq K_0 \left[| v |_{m+k,\omega_R}^{\frac{k}{m+k}} | v |_{0,\omega_R}^{\frac{m}{m+k}} + R^{-k} | v |_{0,\omega_R} \right]. \tag{1.5}$$

---

(4) Tale formula si trova già nell'appendice della memoria [4] di E. GAGLIARDO come caso particolare di un teorema molto più generale; qui si è preferito dedurla più rapidamente dalla (1.3).

Considerato ora un vettore $u(x) = u(x', x'')$ indichiamo con $\nabla'_k u$ il suo gradiente di ordine k rispetto a x', cioè il vettore che ha per componenti tutte le derivate di ordine k delle componenti di u fatte esclusivamente rispetto alle variabili $x_1, x_2, \dots, x_s$ e prese in un ordine convenzionalmente stabilito. Applicando la (1.5) ad un vettore $u \in C^{(m+k)}(\bar{\Omega}_R)$, considerato come dipendente solo da x', si ha per $x'' \in \Omega''_R$ e per $R \geq R_0$:

$$| \nabla'_k u |_{0, \omega_R} \leq K_0 \left[| \nabla'_{m+k} u |_{0, \omega_R}^{\frac{k}{m+k}} | u |_{0, \omega_R}^{\frac{m}{m+k}} + R^{-k} | u |_{0, \omega_R} \right].$$

Di qui quadrando e integrando rispetto a x'' su Ω''_R, valendosi della disuguaglianza di SCHWARZ e tenendo conto che:

$$\int_{\Omega''_R} | \nabla'_{m+k} u |_{0, \omega_R}^2 dx'' \leq | \nabla'_k u |_{m, \Omega_R}^2$$

si ha facilmente:

$$(1.6) \qquad | \nabla'_k |_{0, \Omega_R} \leq K_0 \sqrt{2} \left[| \nabla'_k u |_{m, \Omega_R}^{\frac{k}{m+k}} | u |_{0, \Omega_R}^{\frac{m}{m+k}} + R^{-k} | u |_{0, \Omega_R} \right].$$

Se ora indichiamo con $H'_k(\mathfrak{D})$ lo spazio delle funzioni g ottenuto per completamento di $C^{(k)}(\bar{\mathfrak{D}})$ rispetto alla norma

$$\left[\sum_{h=0}^{k} | \nabla'_h g |_{0, \mathfrak{D}}^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

e se conveniamo di dire che un vettore è di classe $H'_k(\mathfrak{D})$ se tali sono tutte le sue componenti, si può facilmente concludere che:

LEMMA 1.1. - *Nell'ipotesi* $\mathrm{i}_1^{(s)}$) *la* (1.6) *sussiste per* $R \geq R_0$ *e per tutti i vettori* $u \in H'_k(\Omega_R)$ *tali che* $\nabla'_k u \in H^{(m)}(\Omega_R)$.

Si noti che il risultato sussiste anche per $s = n$, intendendosi che sia allora $H'_k = H^{(k)}$; in tal caso infatti la (1.6) si identifica con la (1.5), la quale a sua volta non è altro che la (1.4) scritta con $m + k$ al posto di m.

Un'altra ipotesi relativa all'aperto Ω che nel seguito dovremo talvolta supporre verificata è la seguente:

i_2) *Ogni polinomio $u(x)$ che per un α reale soddisfi alla limitazione*

$$\lim_{R\to\infty}{}' \, R^{-(2\alpha+n)} \, |u|^2_{0,\Omega_R} < +\infty, \qquad [5].$$

è necessariamente di grado non superiore ad α se $\alpha \geq 0$, è nullo se $\alpha < 0$.

Si verifica facilmente che tale ipotesi è, per esempio, soddisfatta se si ha:

$$\lim_{R\to\infty}{}'' \, R^{-n} \operatorname{mis} \Omega_R > 0.$$

Un'ipotesi dello stesso genere della i_2) e che pure dovremo in certi casi utilizzare è la seguente:

$\mathrm{i}_2^{(s)}$) *Ogni polinomio $u(x)$ nelle variabili $x_1, \dots, x_s$, con coefficienti funzioni di $x_{s+1}, \dots, x_n$ che per un $\alpha \geq 0$ soddisfi alla limitazione*

$$\lim_{R\to\infty}{}' \, R^{-\alpha} \sup_{\Omega_R} |u| < +\infty$$

è necessariamente di grado non superiore ad α.

Tale ipotesi è per esempio verificata se Ω è tale che, quando $(x_1, \dots, x_n) \in \Omega$, anche $(\lambda x_1, \dots, \lambda x_s, x_{s+1}, \dots, x_n) \in \Omega$ qualunque sia $\lambda > 1$ (oppure qualunque sia $\lambda < 1$).
Notiamo anche che:

LEMMA 1.2. - *Le ipotesi* i_1), $\mathrm{i}_1^{(s)}$), i_2), $\mathrm{i}_2^{(s)}$) *sono certo verificate se $\Omega \equiv S_n$ oppure se Ω si ottiene da S_n privandolo dei punti di un iperpiano oppure dell'intersezione di due o più iperpiani, essendo inoltre $x_0 \in \partial\Omega$.*

Invero nei casi indicati l'aperto Γ_R è indipendente da R e ciò basta per quanto riguarda i_1) e $\mathrm{i}_1^{(s)}$). Per quanto concerne poi le i_2) e $\mathrm{i}_2^{(s)}$) l'asserto segue dalle osservazioni già fatte a proposito di queste ipotesi.

---

[5] Adopreremo i simboli lim′ e lim″ al posto di $\underline{\lim}$ e $\overline{\lim}$.

Avvertiamo inoltre che nel seguito porremo per semplicità:

$$|u|_{k,\Omega_R} = |u|_{k,R}$$

e che adopreremo sovente la funzione $\zeta_R(x)$ definita dalla posizione:

$$\zeta_R(x) \begin{cases} = \prod_{i=1}^{n} (R^2 - x_i^2)^m & per\ x \in Q_R \\ = 0 & per\ x \in S_n - Q_R . \end{cases}$$

2. **Problemi uniformemente V_R-ellittici.** Consideriamo una qualsiasi varietà lineare V di $U^{(m)}(\Omega)$ che soddisfi alla seguente condizione:

i$_3$) *Si ha* $V \supset U_0^{(m)}(\Omega)$ *e se* $u \in V$ *si ha anche* $u\zeta_R \in V$.

Talvolta, detto α un qualsiasi numero reale positivo, faremo anche l'ipotesi che:

i$^{(\alpha)}$) *È identicamente nullo ogni vettore* $u \in V$ *le cui componenti siano polinomi di grado non superiore ad* α.

Nel seguito indicheremo poi con V_R la varietà lineare di V costituita da tutti i vettori $u \in V$ che hanno supporto contenuto in $Q_R + \partial Q_R$.

Ciò premesso consideriamo un sistema di p equazioni a derivate parziali di ordine $2m$ nel vettore incognito u:

$$\mathfrak{M}_i(u) = \sum_{j=1}^{p} \sum_{|\sigma|,|\tau|}^{0\ldots m} (-1)^{|\sigma|} D^\sigma(m_{i,j,\sigma,\tau} D^\tau u_j) = f_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, p) \tag{2.1}$$

e proponiamoci di studiare per tale sistema il *problema al contorno* consistente nella ricerca delle soluzioni verificanti la condizione:

$$u \in V \tag{2.2}$$

e l'ulteriore condizione all'infinito:

$$\lim_{R \to \infty}{}' R^{-(2\alpha+n)} |u|_{0,R}^2 < +\infty, \tag{2.3}$$

nella quale si indica con α un qualunque numero reale soddisfacente alla limitazione:

$$2\alpha + n > 0\,. \tag{2.4}$$

Osserviamo che la (2.3) è per esempio soddisfatta se, essendo $\alpha \geq 0$, riesce:

$$\lim_{R \to \infty}{}' \, R^{-\alpha} \sup_{x \in \Omega_R} |\, u(x)\,| < \infty\,.$$

e quindi, in particolare, se si ha, sempre con $\alpha \geq 0$:

$$\sup_{x \in \Omega R} |\, u(x)\,| = O(R^{\alpha})$$

Supposto il vettore $f \equiv (f_1, f_2, \dots, f_p)$ di classe $U^{(0)}(\Omega)$, porremo il problema in senso debole, ricercheremo cioè un vettore $u \in V$ tale che per ogni R e per ogni altro vettore $v \in V_R$ riesca:

$$B[u, \bar{v}] = \sum_{i=1}^{p} \int_{\Omega} f_i \bar{v}_i dx\,,$$

avendo indicato con $\bar{v}$ il coniugato di v e avendo posto:

$$B[u, v] = \sum_{i,j}^{1,\dots,p} \sum_{|\sigma|,|\tau|}^{0,\dots,m} \int_{\Omega} m_{i,j,\sigma,\tau} D^{\sigma} v_i D^{\tau} u_j dx\,.$$

In questo studio supporremo verificate le seguenti ipotesi:

i_4) *I coefficienti* $m_{i,j,\sigma,\tau}$ *sono definiti quasi ovunque in* Ω *e ivi misurabili e limitati.*

i_5) *Il problema considerato è* V_R*-ellittico uniformemente rispetto a* R*, esiste cioè una costante* c *tale da risultare, qualunque sia* R *e per ogni* $v \in V_R$:

$$|\, v\,|_{m,R}^{2} \leq c\,|\, B[v, \bar{v}]\,|\,. \tag{2.5}$$

Osserviamo anche che, conformemente all'ipotesi i_4), risulta finita la quantità:

$$M_h = \sup_{\substack{i,j,x \\ |\sigma| + |\tau| = h}} |\, m_{i,j,\sigma,\tau}(x)\,|\,.$$

Ci tornerà inoltre assai utile una disuguaglianza che si ottiene dalla (2.5) ponendo in essa $v = u\zeta_R$, essendo u un arbitrario vettore di V.
A questo proposito osserviamo innanzitutto che, essendo:

$$D^\sigma \zeta_R = O(R^{2mn-|\sigma|}),$$

si ha facilmente:

$$| B(u\zeta_R, \bar{u}\xi_R) | \leq | B(u, \bar{u}\zeta_R^2) |$$

$$+ K \sum_{h,k}^{0,\dots,m} \sum_{\substack{p=0 \\ p+q<h+k}}^{h} \sum_{q=0}^{k} M_{h+k} | u |_{p,R} R^{4mn-h-k+p+q},$$

dove K è una costante dipendente solo da m ed n.
Per $0 < r \leq R$ si ha parimenti:

$$(R^2 - r^2)^{2mn} | u |_{m,r}^2 \leq | u\zeta_R |_{m,R}^2$$

$$+ K' \sum_{\substack{p=0 \\ p+q<2m}}^{m} \sum_{q=0}^{m} | u |_{p,R} | u |_{q,R} R^{4mn-2m+p+q}.$$

Da tali formule e dalla (2.5) si trae:

$$(2.6) \qquad (R^2 - r^2)^{2mn} | u |_{m,r}^2 \leq c | B[u, \bar{u}\zeta_R^2] |$$

$$+ (cK + K') \sum_{h,k}^{0,\dots,m} \sum_{\substack{p=0 \\ p+q<h+k}}^{h} \sum_{q=0}^{k} M'_{h+k} R^{4mn-h-k} (R^p | u |_{p,R})(R^q | u |_{q,R}),$$

dove:

$$M'_h \begin{cases} = M_h & per\ h < 2m \\ = M_{2m} + 1 & per\ h = 2m. \end{cases}$$

Ora, se vale l'ipotesi i_1) si ha dalla (1.4):

$$(R^p | u |_{p,R})(R^q | u |_{q,R}) \leq 3K_0^2 \left[(R^m | u |_{m,R})^{\frac{p+q}{m}} (| u |_{0,R})^{\frac{2m-p-q}{m}} + | u |_{0,R}^2 \right]$$

e quindi dalla (2.6) segue una limitazione del tipo

$$(R^2 - r^2)^{2mn} | u |^2_{m, r} \leq c | B[u, \bar{u}\zeta_R^2] |$$

$$+ c' \sum_{h=1}^{2m} M'_h \left[R^{4mn-1} | u |_{m,R}^{\frac{h-1}{m}} | u |_{0,R}^{\frac{2m-h+1}{m}} + R^{4mn-h} | u |^2_{0, R} \right],$$

essendo c' una costante che dipende soltanto da m, n, Ω ed R_0. Di qui, se si fa l'ulteriore ipotesi che sia:

i$_6$) $M_h = 0$ *per* $0 < h < m_0$,

si trae, tenendo sempre presente che $R \geq R_0$:

$$(2.7) \qquad (R^2 - r^2)^{2mn} | u |^2_{m, r} \leq c | B[u, \bar{u}\zeta_R^2] |$$

$$+ c_1 \left\{ R^{4mn-1} \left[\left(| u |^2_{m, R} \right)^{\frac{2m-1}{2m}} \left(| u |^2_{0, R} \right)^{\frac{1}{2m}} + \left(| u |^2_{m, R} \right)^{\frac{m_0-1}{2m}} \left(| n |^2_{0, R} \right)^{\frac{2m-m_0+1}{2m}} \right] \right.$$

$$\left. + R^{4mn-m_0} | u |^2_{0, R} \right\},$$

dove anche c_1 dipende solo da m, n, Ω ed R_0.
Riassumendo possiamo enunciare il seguente:

LEMMA 2.1. - *L'aperto* Ω, *la varietà* V *e gli operatori* $\mathfrak{M}_i$ *soddisfino alle ipotesi* i$_1$), i$_3$), i$_4$), i$_5$), i$_6$). *Esiste allora una costante* c_1, *dipendente solo da* m, n, Ω *ed* R_0, *tale che per essa valga la* (2.7) *qualunque siano* $R \geq R_0$, $r \leq R$ *e* $u \in V$.

3. **Lemmi di crescenza.** Prima di proseguire dobbiamo soffermarci su alcuni lemmi di crescenza, i quali, pur essendo enunciati in forma alquanto diversa, possono essere considerati come una generalizzazione di un risultato di G. STAMPACCHIA [12] e si dimostrano con un procedimento analogo a quello seguito da questo autore. In una forma un pò più generale di quanto strettamente ci occorra, tali lemmi sono i seguenti:

LEMMA 3.1. - *Siano* β e γ (< 1) *due numeri positivi e siano* $A(t)$, $B(t)$, $\varphi(t)$ *tre funzioni definite nell'intervallo* $I_T \equiv (t_0, T)$ *aperto a destra ed ivi non* *negative e verificanti la relazione:*

$$(t-\tau)^{\beta}\varphi(\tau) \leq A(t) + B(t)[\varphi(t)]^{\gamma} \tag{3.1}$$

per ogni coppia t, $\tau(< t)$ *di punti di tale intervallo. Se, posto:*

$$\nu = \frac{\beta}{1-\gamma}$$

riesce per $t \to T$:

$$\varphi(t) = o\left(\frac{1}{(T-t)^{\nu}}\right) \tag{3.2}$$

si ha anche:

$$(T-\tau)^{\beta}\varphi(\tau) \leq 2^{\beta}\sup_{I_T} A(t) + 2^{\nu}\sup_{I_T} B(t)[\varphi(\tau)]^{\gamma}. \tag{3.3}$$

Osserviamo innanzitutto che si può senz'altro supporre che le funzioni A e B siano limitate e che inoltre la B non sia identicamente nulla, altrimenti la (3.3) sarebbe ovvia. Inoltre basta dimostrare la (3.3) per i valori di τ per i quali $\varphi(\tau) \neq 0$.

Procedendo per assurdo supponiamo che esista un punto t_1 di I_T per il quale riesca:

$$(T-t_1)^{\beta}\varphi(t_1) - 2^{\beta}\sup_{I_T} A(t) > 2^{\nu}\sup_{IT} B(t)[\varphi(t_1)]^{\gamma} > 0. \tag{3.4}$$

Posto:

$$t_n = T - \frac{T-t_1}{2^{n-1}}$$

si avrebbe allora, come ora vedremo:

$$\varphi(t_n) \geq \varphi(t_1)2^{\nu(n-1)}, \tag{3.5}$$

da cui seguirebbe in contraddizione con la (3.2):

$$\varphi(t_n)(T-t_n)^{\nu} \geq \varphi(t_1)(T-t_1)^{\nu}.$$

Il nostro lemma sarà perciò dimostrato se faremo vedere che dalla (3.4) seguirebbe la (3.5). Per questo osserviamo che la (3.5) è già soddisfatta per $n=1$, onde basta far vedere che, se essa sussistesse per $n=m$, essa varrebbe anche per $n = m + 1$. Ora dalla (3.1) scritta per $t = t_{m+1}$, $\tau = t_m$, si trae:

$$\sup_{I_T} B(t)[\varphi(t_{m+1})]^\gamma \geq \frac{(T - t_1)^\beta}{2^{m\beta}} \varphi(t_m) - \sup_{I_T} A(t)$$

e quindi, se sussistesse la (3.5) per $n = m$, tenuto anche conto che $\nu\gamma m - \nu + \beta > 0$, si avrebbe:

$$\sup_{I_T} B(t)[\varphi(t_{m+1})]^\gamma \geq 2^{\nu\gamma m - \nu}[(T - t_1)^\beta \varphi(t_1) - 2^\beta \sup_{I_T} A(t)]$$

e di qui, in forza della (3.4), seguirebbe la (3.5) per $n = m + 1$.

LEMMA 3.2. - *Siano $A_0(t)$, $B_1(t), \dots, B_s(t)$, $s + 1$ funzioni definite nell'intervallo $(t_0 + \infty)$ ed ivi non negative. Siano poi β, $\gamma_1(< 1), \dots, \gamma_s(< 1)$, dei numeri positivi e sia infine $\varphi(t)$ nna funzione definita nell'intervallo $(t_0, +\infty)$ ed ivi non negativa e verificante la relazione:*

$$(t - \tau)^\beta \varphi(\tau) \leq A_0(t) + \sum_{i=1}^{s} B_i(t)[\varphi(t)]^{\gamma_i} \tag{3.6}$$

per ogni coppia t, $\tau(< t)$ di punti di tale intervallo. Se, detto γ il più grande dei γ_i e qualunque sia $T > t_0$, la $\varphi(t)$ soddisfa alla (3.2) *per $t \to T - 0$ e se inoltre si ha:*

$$\lim_{T \to \infty}{}' \; T^{-\beta} \sup_{I_T} [A_0(t) + \sum_{i=1}^{s} B_i(t)] = 0, \tag{3.7}$$

la $\varphi(t)$ è identicamente nulla in $(t_0, +\infty)$.

Invero, detto γ il più grande dei numeri γ_i e posto:

$$A = A_0 + \sum_{i=1}^{s} B_i, \qquad B = \sum_{i=1}^{s} B_i$$

si ha che $\varphi(t)$ soddisfa alla (3.1). Poichè $\varphi(t)$ soddisfa anche alla (3.2) varrà la (3.3) e da quest'ultima, dividendo per $(T - \tau)^\beta$ e passando al limite per $T \to \infty$ su di una particolare successione di valori di T, segue in forza della (3.7): $\varphi(\tau) = 0$.

4. **Alcuni teoremi di unicità.** Siamo oramai in grado di dimostrare il seguente teorema di unicità:

I - *L'aperto* Ω, *la varietà lineare* V *e il sistema* (2.1) *soddisfino alle ipotesi* i_1), i_3), i_4), i_5), i_6). *Detto* α *un qualunque numero reale tale che:*

$$0 < 2\alpha + n < \frac{2m}{2m - m_0 + 1}, \tag{4.1}$$

due soluzioni del sistema (2.1) *soddisfacenti alle condizioni* (2.2) *e* (2.3) *differiscono per un vettore che ha per componenti dei polinomi di grado* $m-1$ *al più. Se poi* Ω *soddisfa anche all'ipotesi* i_2) *e, nel caso* $\alpha \geq 0$, *si suppone che la varietà* V *soddisfi all'ipotesi* $i^{(\alpha)}$), *esiste al più una soluzione del sistema* (2.1) *che soddisfi le* (2.2) *e* (2.3).

Applicando invero la (2.7) ad una soluzione u del problema omogeneo associato, per la quale riesce dunque:

$$B[u, \bar{u}\zeta_R^2] = 0,$$

si ha che tale disuguaglianza, posto:

$$t = R^2, \qquad \tau = r^2, \qquad |u|_{m,R}^2 = \varphi(t),$$

si presenta come una limitazione del tipo (3.6), laddove la (4.1), unitamente alla (3.3), assicura, com'è facile verificare, il sussistere della (3.7). Ne segue, in forza del Lemma 3.2: $|u|_{m,R} = 0$ per ogni $R \geq R_0$ e quindi le componenti di u sono polinomi al più di grado $m-1$. Se è $\alpha < 0$ dalla (3.3) e dall'ipotesi i_2) segue $u = 0$. Se invece è $\alpha \geq 0$ l'ipotesi i_2) porta di conseguenza che le componenti di u sono polinomi al più di grado α e dall'ipotesi $i^{(\alpha)}$) segue di nuovo $u = 0$.

A proposito del teorema ora dimostrato potrebbe sembrare conveniente di sostituire l'ipotesi $i^{(\alpha)}$) con l'ipotesi $i^{(m-1)}$), ma ciò non sarebbe di alcun vantaggio perchè il verificarsi della (4.1) implica che è: $\alpha < m-1$. Vogliamo invece far vedere che un teorema analogo sussiste senza alcuna limitazione per α del tipo (4.1) e rinunciando anche a supporre verificate le ipotesi i_2) e $i^{(\alpha)}$), a condizione però di sostituire l'ipotesi i_5) con l'altra più restrittiva:

i_5') *Esiste una costante* c_0 *tale da risultare, qualunque sia* R *e per ogni* $v \in V_R$:

$$|v|_{m,R}^2 + |v|_{0,R}^2 \leq c_0 \, |B[v, \bar{v}]|, \tag{4.2}$$ [6].

Si ha infatti che:

II. - *L'aperto* Ω, *la varietà lineare* V *e il sistema* (2.1) *soddisfino alle ipotesi* i_1), i_3), i_4), i_5'). *Qualunque sia il numero reale* α, *esiste al più una soluzione del sistema* (2.1) *verificante le condizioni* (2.2) *e* (2.3).

[6] Si noti che, almeno in certi casi particolari e per esempio se $V \equiv U_0^{(m)}(\Omega)$, il sussistere di una disuguaglianza del tipo (4.2) con c_0 dipendente da R sarebbe conseguenza immediata della i_5); qui peraltro si suppone che la (4.2) valga con un c_0 indipendente da R.

Per la dimostrazione basta osservare che nell'ipotesi i'_5) sussiste una disuguaglianza come la (2.7) con $m_0 = 1$, nel cui primo membro, però, ad $|u|^2_{m,r}$ subentra:

$$U(r) = |u|^2_{m,r} + |u|^2_{0,r}.$$

Allora, se u è una soluzione del problema omogeneo associato, si trae dalla formula ora richiamata una limitazione del tipo:

$$(R^2 - r^2)^{2mn} U(r) \leq c'_1 R^{4mn-1} [U(R)]^{1-\varepsilon} |u|^{2\varepsilon}_{0,R}, \tag{4.3}$$

dove ε può essere preso piccolo a piacere. Ora, poichè u soddisfa alla (2.3) è certo possibile scegliere ε in modo che sia:

$$\lim_{R \to \infty} R^{-1} |u|^{2\varepsilon}_{0,R} = 0$$

Dopo ciò si ha dal Lemma 3.2: $U = 0$ e quindi $u = 0$.

5. **Alcuni teoremi generali del tipo di Liouville.** In questo paragrafo. detti k, q, $s (\leq n)$ tre interi positivi, supporremo sempre che sia:

$$p = q \binom{s + k + 1}{k}.$$

Ciò premesso diremo che un vettore w a q componenti $w_1, w_2, \ldots w_q$ è di classe $\{k, s, V, \mathfrak{M}\}$ se:

a) *riesce per ogni* R: $w \in H'_k(\Omega_k)$, $\nabla'_k w \in H^{(m)}(\Omega_R)$,

b) *il vettore* $u = \nabla'_k w$ *è soluzione debole del sistema* (2.1) *e soddisfa alla* (2.2).

Sussiste il seguente teorema del tipo di LIOUVILLE:

III. - *L'aperto* Ω, *la varietà lineare* V *e il sistema* (2.1) *soddisfino alle ipotesi* i_1), $i_1^{(s)}$), i_3), i_4), i_5), i_6). *Detto* α *un qualunque numero reale tale che:*

$$0 < 2\alpha + n < \frac{2(m + k)}{2m - m_0 + 1}, \tag{5.1}$$

ogni vettore $w \in \{k, s, V, \mathfrak{M}\}$ *che verifichi l'ulteriore condizione*

$$\lim_{R \to \infty}{}' \, R^{-(2\alpha+n)} |w|^2_{0,R} < +\infty \tag{5.2}$$

ha tutte le componenti della forma:

$$w_i = P_i(x) + Q_i(x),$$

essendo i $P_i(x)$ dei polinomi nelle variabili $x_1, \dots, x_n$ di grado non superiore ad $m + k - 1$ rispetto al complesso di tutte le variabili, di grado non superiore ad $m - 1$ rispetto alle $x_{s+1}, \dots, x_n$ e non contenenti termini di grado inferiore a k ed essendo i $Q_i(x)$ dei polinomi di grado non superiore a $k - 1$ nelle variabili $x_1, \dots, x_s$ con coefficienti funzioni di $x_{s+1}, \dots, x_n$.

Se poi si suppone verificata anche l'ipotesi i_2) ed è $\alpha \geq k$, il grado dei $P_i(x)$ rispetto al complesso delle variabili non supera α e quello rispetto alle variabili $x_{s+1}, \dots, x_n$ non supera $\alpha - k$.

Se infine, sempre essendo verificata l'ipotesi i_2), si ha $0 \leq \alpha < k$ i polimoni $P_i(x)$ sono nulli. Nella stessa ipotesi e se inoltre si suppone che per Ω valga anche la $\mathrm{i}_2^{(s)}$) e che w soddisfi, invece che alla (5.2), alla condizione più restrittiva:

$$\lim_{R \to \infty}{}' \; R^{-\alpha} \sup_{\Omega_R} |w| < +\infty \tag{5.3}$$

il grado del polinomio $Q_i(x)$ rispetto alle variabili $x_1, \dots, x_s$ non supera α.

Per dimostrare questo teorema potremo di nuovo ricorrere alla (2.7), che scriveremo questa volta ponendo $u = \nabla'_k w$. Tenendo conto anche del Lemma 1.1 si trova che per $R \geq R_0$ sussiste una disuguaglianza del tipo:

$$(R^2 - r^2)^{2mn} \, |\nabla'_k w|^2_{m,r} \leq K \, \Sigma \, R^{4mn - \varepsilon_i} \, |\nabla'_k w|^{2\gamma_i}_{m,R} \, |w|^{2\eta_i}_{0,R} \tag{5.4}$$

dove gli esponenti ε_i, η_i, γ: sono dati dalle relazioni:

$$\gamma_i + \eta_i = 1,$$

$$\eta_1 = \frac{1}{2(m+k)}, \qquad \eta_2 = \frac{1}{2m}, \qquad \eta_3 = \frac{2m - m_0 + 1}{2(m+k)},$$

$$\eta_4 = \frac{2m - m_0 + 1}{2m}, \qquad \eta_5 = \frac{m}{m+k}, \qquad \eta_6 = 1,$$

$$\varepsilon_1 = 1, \qquad \varepsilon_2 = \frac{m+k}{m}, \qquad \varepsilon_3 = 1,$$

$$\varepsilon_4 = \frac{m + k(2m - m_0 + 1)}{m}, \qquad \varepsilon_5 = m_0, \qquad \varepsilon_6 = m_0 + 2k.$$

Si verifica facilmente che per tutti i valori di i si ha:

$$\frac{\varepsilon_i}{\eta_i} \geq \frac{\varepsilon_3}{\eta_3} = \frac{2(m+k)}{2m - m_0 + 1}$$

e di qui, in conseguenza della (5.1), si ha:

$$-\varepsilon_i + (2\alpha + n)\eta_i < 0. \tag{5.5}$$

Dopo di ciò, se si pone:

$$R^2 = t, \qquad r^2 = \tau, \qquad |\nabla'_k w|^2_{0,R} = \varphi(t),$$

la (5.4) si presenta come una disuguaglianza del tipo (3.6) per la quale, in forza della (5.5), è soddisfatta la (3.7). Dal Lemma 3.2 segue $|\nabla'_k w|_{m,R} = 0$ e di qui il teorema, per tutto ciò che può stabilirsi senza ricorrere all'ipotesi i_2). Dal risultato ottenuto segue però ancora, tenendo conto della (1.6):

$$R^{-[2(\alpha-k)+n]} |\nabla'_k w|^2_{0,R} \leq K_0 \sqrt{2} R^{-(2\alpha+n)} |w|^2_{0,R}$$

e quindi, se si suppone verificata l'ipotesi i_2), si trae dalla (5.2) che $\nabla'_k w$ ha per componenti dei polinomi di grado non superiore ad $\alpha - k$ se $\alpha \geq k$ ed è nullo se $\alpha < k$. In quest'ultimo caso si ha: $w_i = Q_i$ e pertanto, se w soddisfa alla (5.3) e se si suppone che Ω soddisfi alla $\mathrm{i}_2^{(s)}$), il grado dei $Q_i(x)$ rispetto alle $x_1, \dots, x_s$ non può superare α. Con ciò il teorema III è completamente dimostrato.

Vogliamo ora far vedere come questo teorema possa, sotto certi aspetti, essere reso più espressivo se all'ipotesi i_5) si sostituisce la i'_5). Si ha invero:

IV. *L'aperto* Ω, *la varietà lineare* V *e il sistema* (2.1) *soddisfino alle ipotesi* i_1), $\mathrm{i}_1^{(s)}$), i_3), i_4), i'_5). *Qualunque sia il numero reale* α, *ogni vettore* $w \in \{k, s, V, \mathfrak{M}\}$ *che soddisfi la* (5.2) *ha per componenti dei polinomi, di grado non superiore a* $k-1$, *nelle variabili* $x_1, \dots x_s$, *con coefficienti funzioni di* $x_{s+1}, \dots, x_n$.

Nel caso che $0 \leq \alpha < k$ *e nell'ipotesi che per* Ω *valga la* $\mathrm{i}_2^{(s)}$) *e che* w *soddisfi alla* (5.3), *invece che alla* (5.2), *i detti polinomi hanno grado non superiore ad* α.

Per la dimostrazione cominciamo con l'osservare che, nelle ipotesi poste, si può, ragionando come per il teorema II, pervenire ad una limitazione del tipo (4.3) in cui però ad $U(r)$ subentra:

$$W(r) = |\nabla'_k w|^2_{m,r} + |\nabla'_k w|^2_{0,r}.$$

In forza della $i_1^{(s)}$) si ha, valendosi della (1.6) del Lemma 1.1:

$$(R^2 - r^2)^{2mn} W(r) \leq c_2' R^{4mn-1} \Big\{ [W(R)]^{1-\frac{m\varepsilon}{m+k}} [\,|w|^2_{0,k}]^{\frac{m\varepsilon}{m+k}} + R^{-2k\varepsilon} [W(R)]^{1-\varepsilon} [\,|w|^2_{0,R}]^{\varepsilon} \Big\}. \tag{5.6}$$

Se ora si sceglie ε in modo che riesca:

$$\frac{m\varepsilon}{m+k}(2\alpha + n) < 1, \qquad \varepsilon(2\alpha + n - 2k) < 1,$$

dalla (5.6) e dal Lemma 3.2 segue $W = 0$ e quindi anche $\nabla_k' w = 0$. Con ciò il teorema è dimostrato.

6. **Alcune applicazioni a casi particolari.** In questo paragrafo ci proponiamo di meglio chiarire la portata dei teoremi III IV applicandoli allo studio di alcuni casi particolari che si ottengono specializzando l'aperto Ω, la varietà V e la classe $\{k, s, V, \mathfrak{N}\}$.

Cominciamo a considerare un sistema di q operatori differenziali lineari di ordine $2m$ nel vettore $w \equiv (w_1, \dots, w_q)$, che scriveremo nella forma:

$$\mathfrak{N}_i(w) = \sum_{j=1}^{q} \sum_{|\sigma|=0}^{2m} n_{i,j,\sigma} D^\sigma w_j, \qquad i = 1, 2, \dots, q.$$

Fissati due indici non negativi $h < 2m$ ed $s \leq n$, quest'ultimo in modo che riesca:

$$l = m - \left[\frac{n-s}{2}\right] - 1 \geq 0, \tag{6.1}$$

faremo sugli operatori $\mathfrak{N}_i$ le seguenti ipotesi:

i_7) *I coefficienti $n_{i,j,\sigma}$ sono di classe $C^{(m+h)}$ in S_n e risultano limitati in S_n con tutte le loro derivate fino a quelle di ordine $m + h$.*

i_8) *Per tutte le combinazioni $\sigma = i_1 i_2, \dots, i_n$ tali che $i_1 + \dots + i_s < h$ i coefficienti $n_{i,j,\sigma}$ sono funzioni delle sole variabili $x_{s+1}, \dots, x_n$ (sono costanti se $s = n$).*

i_9) ***Il sistema degli operatori $\mathfrak{N}_i$ è fortemente ellittico nel senso che esiste una costante N tale da risultare, per qualunque $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ reale:***

$$\mathcal{R}e \sum_{i,j}^{1,\dots,q} \sum_{|\sigma|=m} n_{i,j,\sigma}\xi^{\sigma}\bar{\eta}_i\eta_j \geq \mathrm{N}(\sum_{i=1}^{q}\xi_i^2)^m \sum_{i=1}^{q}|\eta_i|^2,$$

Consideriamo poi un secondo sistema di operatori differenziali $\mathfrak{N}'_i$ di ordine non superiore a $2m$ e tali da verificare le seguenti ipotesi:

i_{10}) *I coefficienti degli* $\mathfrak{N}'_i$ *soddisfano anch'essi all'ipotesi* i_7) *e inoltre sono funzioni delle sole variabili* $x_{s+1}, \dots, x_n$.

i_{11}) *Esiste una costante* N' *tale da risultare per qualunque vettore* $w \in U_0^{(m)}(\Omega)$:

$$\mathcal{R}e \sum_{i=1}^{q} \int_{\Omega} \bar{w}_i \mathfrak{N}'_i(w)dx \geq N' |w|^2_{0,\Omega} \qquad (^7).$$

Ciò premesso, e avendo indicato con Ω l'intero spazio nel caso $s = n$ il semispazio $x_n > 0$ nel caso $s = n-1$, l'aperto che si ottiene da S_n privandolo dell'intersezione degli iperpiani $x_{s+1} = 0, \dots, x_n = 0$ nel caso $s < n-1$, prendiamo in considerazione le soluzioni del sistema

$$\mathfrak{N}_i(w) + \lambda\mathfrak{N}'_i(w) = f_i, \qquad i = 1, 2, \dots, q, \tag{6.2}$$

definite in Ω e che su $\partial\Omega$ (nel caso $s < n$) verifichino le condizioni:

$$D^{\sigma}w_i = f_{i\sigma} \tag{6.3}$$

con

$$\sigma = 0 \dots 0 i_{s+1} \dots i_n, \qquad 0 \leq |\sigma| \leq l.$$

Lo studio di tali soluzioni verrà condotto nell'ipotesi che:

i_{12}) *le funzioni* f_i *ed* $f_{i,\sigma}$ *siano dei polinomi di grado inferiore ad* h *nelle variabili* $x_1, \dots, x_s$, *le* f_i *con coefficienti funzioni di* $x_{s+1}, \dots, x_n$, *le* $f_{i,\sigma}$ *con coefficienti costanti.*

Sussiste il teorema:

V. - *Supposte verificate tutte le ipotesi dalla* i_7) *alla* i_{12}), *nonchè la* (6.1), *esiste un* λ_0 *tale che per* $\lambda > \lambda_0$ *ogni vettore* w *che, per qualunque* R, *sia di classe* $C^{(2m+h)}(\Omega) \cap C^{(l+h)}(\bar{\Omega}) \cap H^{(m+h)}(\Omega_R)$ *e che soddisfi alle* (6.2), (6.3), (5.2) *ha per componenti dei polinomi, di grado non superiore ad* $h-1$ *nelle variabili* $x_1, \dots, x_s$, *con coefficienti funzioni di* $x_{s+1}, \dots, x_n$. *Se poi* w *soddisfa alla* (5.3) *con* $\alpha \geq 0$ *il grado di tali polinomi non può superare* α.

---

(7) Vogliamo esplicitamente rilevare che tale ipotesi non implica che il sistema degli $\mathfrak{N}'_i$ sia ellittico; tali operatori potrebbero perciò essere anche di ordine dispari.

Cominciamo con l'osservare che derivando h volte le (6.2) rispetto alle variabili $x_1, \ldots, x_s$ si trova che $\nabla'_h w$ soddisfa a un sistema del tipo

$$\mathcal{M}_i(D^\beta w) + \mathcal{M}_{i,\beta}(\nabla'_h w) + \lambda \mathcal{M}'_i(D^\beta w) = 0, \tag{6.4}$$
$$i = 1, 2, \ldots, q, \qquad \beta = i_1, \ldots, i_s 0, \ldots, 0, \qquad |\beta| = h,$$

nel quale gli $\mathcal{M}_{i,\beta}$ sono operatori differenziali di ordine non superiore a $2m - 1$. Inoltre derivando le (6.3) si trova, conservando i significati indicati per β e σ:

$$D^\sigma D^\beta w_i = 0 \text{ per } x \in \partial\Omega. \tag{6.5}$$

Osserviamo anche che i coefficienti del sistema (6.4) sono tutti di classe $C^{(m)}$ e quindi il sistema stesso può essere scritto in forma analoga alla (2.1). Detta allora $V^{(0)}$ la varietà lineare di $U^{(m)}(\Omega)$ costruita da tutti i vettori v tali che per ogni R sia $v\zeta_R \in H_0^{(m)}(\Omega_R)$ e tenendo conto che $\nabla'_h w \in H^{(m)}(\Omega_R)$ si si deduce dalle (6.5) che:

$$\nabla'_h w \in V^{(0)}.$$

D'altra parte, poichè per il Lemma 1.2 Ω soddisfa all'ipotesi i_1) si può, ripetendo un ragionamento di L. GÅRDING [5], dimostrare che, in forza delle i_7), i_9), i_{10}), i_{11}), esiste un λ_0 tale che per $\lambda > \lambda_0$ il sistema (6.4) soddisfa alla ipotesi i'_6).

Dopo ciò, essendo verificate anche tutte le altre ipotesi del teorema IV (con $k = h$), il teorema V segue da esso come caso particolare.

Il teorema ora dimostrato si semplifica notevolmente se avviene che per ogni $\beta = i_1 i_2, \ldots, i_s 0, \ldots, 0$ il vettore $D^\beta w$ soddisfa ad un sistema che ha lo stesso primo membro di quello soddisfatto da w.

Per chiarire ciò riprendiamo in considerazione gli operatori già considerati nel n. 2 e alle ipotesi i_4) e i_5) aggiungiamo ancora l'altra che:

i_{13}) *i coefficienti* $m_{i,j,\sigma,\tau}$ *siano funzioni delle sole variabili* $x_{s+1}, \ldots, x_m$.

Sia poi $w = (w_1, w_2, \ldots, w_p)$ un vettore soddisfacente al sistema

$$\mathcal{M}_i(w) = f_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, p, \tag{6.6}$$

e alle condizioni al contorno (6.3), in relazione alle quali supporremo ancora verificata la (6.1). Valendoci del teorema III, invece che del teorema IV, possiamo dimostrare che:

VI. - *Supposte verificate le ipotesi* i_4), i_{12}), i_{13}) *e* i_5), *quest'ultima in relazione alla varietà* $V^{(0)}$, *ogni vettore* w *che, per qualunque* R, *sia di classe* $C^{(2m)}(\Omega) \cap C^{(l)}(\bar{\Omega}) \cap H^{(m)}(\Omega_R)$ *e che soddisfi alle* (6.5), (6.3), (5.3) *con un* $\alpha \geq 0$, *ha per componenti dei polinomi, di grado non superiore ad* α, *nelle variabili* $x_1, \dots x_s$ *con coefficienti funzioni delle variabili* $x_{s+1}, \dots, x_n$.

Cominciamo con l'osservare che esiste certo un vettore w_0 avente per componenti dei polinomi e tale che $w - w_0$ soddisfi ad un sistema che è dello stesso tipo del sistema (6.6) e a condizioni del tipo (6.3) con le $f_{i,\sigma} = 0$. Dopo ciò un noto procedimento di L. NIREMBERG [10], basato sull'applicazione della (2.5) ai rapporti incrementali di $w - w_0$, permette di dimostrare che, qualunque siano k ed R, si ha:

$$w - w_0 \in H'_k(\Omega_R), \qquad \nabla'_k(w - w_0) \in H^{(m)}(\Omega_R),$$

da cui anche:

$$w \in H'_k(\Omega_R), \qquad \nabla'_k w \in H^{(m)}(\Omega_R).$$

Scelto $k \geq h$ per ogni $\beta = i_1, \dots i_s 0, \dots, 0$ con $|\beta| = k$ si ha, derivando le (6.6) e (6.3):

$$\mathfrak{M}_i(D^\beta w) = 0, \tag{6.7}$$

$$D^\sigma D^\beta w_i = 0, \qquad \text{per } x \in \partial\Omega, \tag{6.8}$$

dove σ verifica le stesse limitazioni indicate per la (6.3). Le (6.7) e (6.8) costituiscono un sistema di equazioni e di condizioni al contorno per il vettore $\nabla'_k w$, il cui verificarsi rende possibile l'applicazione del teorema III con $m_0 = 1$. Scelto k in modo che risulti:

$$2\alpha + n < \frac{2(m+k)}{2m},$$

segue da tale teorema che le componenti di w sono polinomi di grado non superiore ad α.

Il teorema ora dimostrato contiene anche un risultato negativo che vogliamo esplicitamente enunciare:

VIII. - *Nelle stesse ipotesi del teorema* VI *e se, essendo* $\alpha < h - 1$, *fra i polinomi* f_i *ed* $f_{i,\sigma}$ *ve n'è almeno uno di grado non inferiore ad* $h - 1$, *non esiste alcuna soluzione del sistema* (6.6) *verificante le* (6.3) *e* (5.3).

7. Il caso delle equazioni a coefficienti costanti. I teoremi del numero precedente sono senz'altro applicabili quando il sistema soddisfatto da w è a coefficienti costanti. A questo proposito si può osservare che, per un noto teorema di L. GÅRDING [5], l'ipotesi i_5) è certo verificata se:

i_{14}) *Esiste una costante M_0 tale che, per qualsiasi $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ reale riesca:*

$$\mathcal{R}e \sum_{i,j}^{1,\dots,p} \sum_{|\sigma|,|\tau|=m} m_{i,j,\sigma,\tau} \xi^\sigma \xi^\tau \bar{\eta}_i \eta_j \geq M_0 (\sum_{i=1}^{p} \xi_i^2)^m \sum_{i=1}^{p} |\eta_i|^2.$$

Sussiste pertanto il teorema:

VIII - *Se il sistema* (6.6) *è a coefficienti costanti e se sono soddisfatte le ipotesi* i_{12}) *e* i_{14}) *ogni vettore w che, per qualunque R, sia di classe $C^{(2m)}(\Omega) \cap C^{(l)}(\bar{\Omega}) \cap H^{(m)}(\Omega_R)$ e che soddisfi alle* (6.6), (6.3), (5.3), *quest'ultima con un $\alpha \geq 0$, ha per componenti dei polinomi, di grado non superiore ad α, nelle variabili $x_1, \dots, x_s$ con coefficienti funzioni di $x_{s+1}, \dots, x_n$.*

Nel caso $s = n$ e se gli $\mathfrak{M}_i$ contengono solo le derivate di ordine $2m$, tale teorema rientra come caso particolare in un risultato di A. DOUGLIS e L. NIREMBERG [2]. Nella stessa ipotesi per gli $\mathfrak{M}_i$ e se $s = n - 1$ il teorema è poi molto affine ad un altro di S. AGMON, A. DOUGLIS e L. NIRENBERG [1] di cui diviene caso particolare, però, solo nell'ipotesi che le f_i siano dei polinomi anche rispetto alla variabile x_n. In tal caso peraltro il risultato dei predetti autori è più significativo perchè afferma che anche le componenti di w sono dei polinomi rispetto a tutte le variabili ([8]).

Per terminare questa memoria vogliamo ora considerare il caso di una sola equazione, contenente soltanto le derivate di ordine massimo, in una sola incognita $w(x)$:

$$\mathfrak{M}(w) = \sum_{|\sigma|=2m} n_\sigma D^\sigma w = f. \tag{7.1}$$

al fine di stabilire un teorema di unicità per il problema al contorno che si ottiene associando alla (7.1) le condizioni sulla frontiera:

$$D^\sigma w(x) = f_\sigma \ \ per \ \ x \in \partial\Omega \tag{7.2}$$

$$\sigma = 0, \dots, 0 i_{s+1}, \dots, i_n, \qquad 0 \leq |\sigma| \leq l$$

e la condizione all'infinito (5.3). Tale teorema è il seguente:

([8]) Veramente il teorema ora citato si riferisce al caso di una sola equazione, ma sembra assai presumibile che esso valga anche per i sistemi. Da notare inoltre che il teorema stesso è dimostrato nell'ipotesi che l'equazione sia ellittica, senza ricorrere all'ipotesi di ellitticità forte.

IX. - *I coefficienti n_σ siano tutti costanti e il polinomio $\mathcal{R}e\Sigma n_\sigma \xi^\sigma$ sia definito positivo per ξ reale. Se $f \in C^{(0)}(\Omega)$ ed $f_\sigma \in C^{(l-|\sigma|)}(\partial\Omega)$ esiste al più una soluzione della* (7.1) *che per ogni R sia di classe $C^{(2m)}(\Omega) \cap C^{(l)}(\bar{\Omega}) \cap H^{(m)}(\Omega_R)$ e che soddisfi alle condizioni* (7.2) *e* (5.3), *quest'ultima con $0 \leq \alpha < l + 1$.*

Invero per il teorema precedente ogni soluzione del problema omogeneo associato è un polinomio nelle variabili $x_1, \dots, x_s$ di grado $\beta \leq \alpha$, cioè una funzione del tipo:

$$w = \sum_{|\tau|=0}^{\beta} y^\tau \varphi_\tau(t), \tag{7.3}$$

dove, per semplicità di scrittura, si è posto:

$$y = x' = (x_1, \dots, x_s), \qquad t = x'' = (x_{s+1}, \dots, x_n).$$

Il teorema sarà dimostrato, per induzione, se faremo vedere che $\varphi_\tau = 0$ per $|\tau| = \beta$. Ora, sostituendo la (7.3) nella (7.1) resa omogenea, si trova agevolmente che per ogni τ tale che $|\tau| = \beta$ deve risultare:

$$\mathcal{M}''(\varphi_\tau) = \sum_{|\sigma|=2m}'' n_\sigma D^\sigma \varphi_\tau = 0,$$

dove il simbolo Σ'' sta a indicare una sommatoria estesa a tutti i σ del tipo:

$$\sigma = 0, \dots, 0 i_{s+1}, \dots, i_n .$$

Poichè l'operatore $\mathcal{M}''$ è ellittico si ha, in forza di un teorema di A. DOUGLIS e L. NIRENBERG [2], che per $|\sigma| \leq 2m$ riesce:

$$|D^\sigma \varphi_\tau(t)| = O(|t|^{-|\sigma|} \sup_{|z| \leq 2|t|} |\varphi_\tau(z)|).$$

D'altra parte, poichè w verifica le (7.2), la $\varphi_\tau(t)$ deve avere uno zero di ordine $l + 1$ per $|t| = 0$, da cui per $t \to 0$:

$$\sup_{|z| \leq 2|t|} |\varphi_\tau(z)| = o(|z|^l).$$

Si ha perciò, in conclusione, che per $|\sigma| = 2m - 1$ e $t \to 0$ riesce:

$$|D^\sigma \varphi_\tau(t)| = o(|t|^{-(2m-l-2)-1})$$

e questa limitazione assicura, per un teorema di F. JOHN [7], che:

$$\varphi_\tau(t) = \psi_\tau(t) + \sum_{|\sigma|=0}^{h} c_\sigma [D_z^\sigma K(z, t)]_{z=0}, \tag{7.4}$$

dove $\psi_\tau(t)$ è una funzione analitica anche per $|t| = 0$, la $K(z, t)$ è la soluzione fondamentale dell'operatore $\mathfrak{M}''$, le c_σ sono delle costanti e infine:

$$h = 2m - l - 2 - (n - s) + 1 = m + \left[\frac{n-s}{2}\right] - (n - s).$$

Ora è stato dimostrato da F. JOHN [8] che, posto $z - t = \zeta$, si ha:

$$K(z, t) = |\zeta|^{2m-(n-s)} \psi\left(\frac{\zeta}{|\zeta|}\right) + q(\zeta) \log |\zeta|, \tag{7.5}$$

dove $\psi(\xi)$ è una funzione analitica regolare per $|\xi| = 1$ e $q(\zeta)$, per essere nel nostro caso $2m > n - s$, è un polinomio di grado $2m - (n - s)$ se $n - s$ è pari, è nulla se $n - s$ è dispari. Ne segue che per $|t| \geq 1$ la sommatoria a secondo membro della (7.4) è $O(|t|^{2m-(n-s)+\varepsilon})$ e di qui, tenendo conto della (5.3) e del fatto che $2m - (n - s) \geq 2l + 1$ si trae:

$$\lim_{R\to\infty}'' R^{-(2m-(n-s)+\varepsilon)} \sup_{|t|\leq R} |\psi_\tau(t)| < +\infty.$$

Dal teorema precedente segue, dopo ciò, che $\psi_\tau(t)$ è un polinomio di grado non superiore a $2m - (n - s)$ e poichè $\varphi_\tau(t)$ ha nell'origine uno zero di ordine $l + 1$ si avrà:

$$\varphi_\tau(t) = \sum_{k=l+1}^{2m-(n-s)} |t|^k \left[\chi_k\left(\frac{t}{|t|}\right) + a_k \log |t|\right],$$

essendo le $\chi_k(\xi)$ funzioni analitiche regolari per $|\xi| = 1$ e e a_k delle costanti. Ma tale funzione non può manifestamente verificare la (5.3) senza essere identicamente nulla e di qui il teorema.

BIBLIOGRAFIA

[1] S. AGMON, A. DOUGLIS, L. NIRENBERG, ***Estimates near the boundary for solutions of elliptic differential equations satisfaying general boundary conditions***, «Comm. Pure Applied Math.» 12 (1959), 623-727.

[2] A. DOUGLIS, L. NIRENBRRG, ***Interior estimates for elliptic systems of partial differential equations***. «Comm. Pure Applied Math. 8 (1955), 503-538.

[3] E. GAGLIARDO, ***Proprietà di alcune classi di funzioni di più variabili***, «Ricerche di Mat.», Napoli 7 (1958), 102 137.

[4] E. GAGLIARDO, ***Ulteriori proprietà di alcune classi di funzioni di più variabili***, «Ricerche di Mat.», Napoli 8 (1959), 24-51.

[5] L. GÅRDING, ***Dirichlet's problem for linear elliptic partial differential equations***, «Math. Scandinavica», I (1953), 55-72.

[6] D. GILBARG. J. SERRIN, ***On isolated singularities of solutions of second order elliptic differential equations***, «J. d'Analyse Math.», 4 (1954 - 56) 309-340.

[7] F. JOHN, ***General properties of solutions of linear elliptic partial differential equations***, «Proc. Symposium Spectral Theory Diff. Equations», Oklahoma College (1955), 113-178.

[8] F. JOHN, ***Plane waves and spherical means applied to partial differential equations***, Interscience Publishers New York (1955).

[9] C. MIRANDA, ***Equazioni alle derivate parziali di tipo ellittico***, Springer Verlag, «Ergeb. der Math.», N. F. H. 2 (1955).

[10] L. NIRENBERG, ***Remarks on strongly elliptic partial differential equations***, «Comm. Pure Applied Math.», 8 (1955), 649-676.

[11] S. L. SOBOLEV, ***Alcune applicazioni dell'analisi funzionale alla fisica matematica***, Leningrad (1950), (in russo).

[12] G. STAMPACCHIA, ***Régularisation des solutions de problèmes aux limites elliptiques à données discontinues***, «Proc. International Symposium on Linear Spaces», Jerusalem (1961) 399-408.

[13] M. I. VISIK, ***Sui sistemi fortemente ellittici di equazioni differenziali***, «Mat. Sbornik» 29 (1951), 615-676, (in russo).