Nombre d'éléments indépendants et nombre d'éléments générateurs dans les algèbres abstraites finies.

par Edward Marczewski (Wroclaw, Pologne)

Résumé. - *Dans un espace vectoriel, le nombre maximal ι d'éléments indépendants et le nombre minimal γ d'éléments générateurs coïncident et leur valeur commune, c'est-à-dire la dimension, est essentielle dans la description de l'espace considéré.*

*Le but de ce travail est d'*établir les relations entre ι, γ et certains nombres apparentés pour les algèbres abstraites finies, *le mot* algèbre *étant entendu au sens bien connu de* G. Birkhoff *et la notion d'*indépendance *au sens de* [1] (1) *(voir n° 1).*

Nous obtenons les relations entre les nombres en question (n° 2) en exprimant à leur aide certains résultats antérieurs, en particulier ceux de S. Świerczkowski [5] *et* [6]. *Ces nombres, calculés pour des algèbres appropriées (n° 3), montrent que les relations dont il s'agit ne peuvent pas être renforcées (n° 4).*

1. **Algèbres abstraites: définitions et exemples.** Une fonction $f\colon A^n \to A$ (où $n = 1, 2, \ldots$) s'appelle une *opération* dans A. Les opérations de la forme $e_k^{(n)}(x_1, \ldots, x_n) = x_k$ (où $1 \leq k \leq n$) sont dites *triviales.* Un ensemble $A = \{a, b, \ldots\}$ muni d'une classe $\boldsymbol{F} = \{f, g, \ldots\}$ d'opérations dans A, où, plus précisément, le couple $(A; \boldsymbol{F})$ (qui peut être aussi désigné par $(A; f, g, \ldots)$ ou bien par $(a, b, \ldots; f, g, \ldots)$), s'appelle une *algèbre.* Les opérations appartenant à $\boldsymbol{F}$ s'appellent *fondamentales.* La plus petite classe $\boldsymbol{A}^{(n)}$ d'opérations dans A telle que 1° $e_k^{(n)} \in \boldsymbol{A}^{(n)}$ pour $k = 1, 2, \ldots, n$, 2° si $f \in \boldsymbol{F}$ et $f_1, f_2, \ldots \in \boldsymbol{A}^{(n)}$, on a $f(f_1, \ldots, f_m) \in A^{(n)}$ s'appelle la classe des opérations *algébriques* de n variables. L'algèbre est dite *triviale* lorsque chaque opération algébrique est triviale. Les valeurs de toutes les opérations algébriques constantes s'appellent *constantes algébriques.* Deux algèbres $(A; \boldsymbol{F})$ et $(A; \boldsymbol{G})$ ayant les classes des opérations algébriques identiques, sont considérées comme identiques.

Un ensemble $B \subset A$, clos par rapport aux opérations algébriques, s'appelle une *sous-algèbre* de A.

Un ensemble $E \subset A$ s'appelle un ensemble de *générateurs* de A lorsque la plus petite sous-algèbre contenant E coïncide à A. Dans le cas où chaque élément de A est une constante algébrique, l'ensemble vide est par définition un ensemble de générateurs de A.

Un ensemble $I = \{a_1, \ldots, a_n\} \subset A$ est un ensemble d'éléments *indépen-*

(1) Voir aussi tous les autres travaux cités ici. D'autres travaux sur la même notion d'indépendance sont cités dans [3].

dants lorsque les relations

$$f(a_1, \ldots, a_n) = g(a_1, \ldots, a_n) \qquad f, g \in \boldsymbol{A}^{(n)}$$

entraînent: $f = g$.

Passons aux exemples. Posons $X_n = \{0, 1, \ldots, n-1\}$ et considérons les algèbres suivantes:

$\mathfrak{T}_n$ - l'algèbre triviale à n éléments: (X_n).

$\mathfrak{U}_n$ - l'algèbre universelle à n éléments: $(X_n;\ \boldsymbol{U}_n)$, où $\boldsymbol{U}_n$ désigne la classe de toutes les opérations dans X_n.

$\mathfrak{C}^n = (X_n,\ \boldsymbol{C}_n)$, où $\boldsymbol{C}_n$ désigne la classe de toutes les opérations constantes dans X_n.

$\mathfrak{Z}_n$ - l'algèbre des nombres entiers modulo n avec l'addition modulo n, c'est-à-dire $(X_n;\ + \text{ mod. } n)$.

$\mathfrak{B}_n$ - l'algèbre de BOOLE de tous les sous-ensembles d'un ensemble à n éléments: $(2^{X_n};\ \cup,\ ')$.

$\mathfrak{P}$, $\mathfrak{P}_*$, $\mathfrak{P}^*$ - trois algèbres de POST [2] à deux éléments quelconques: $(a, b;\ p_*, p^*)$, $(a, b; p_*)$ et $(a, b;\ p^*)$ où p_* et p^* sont des opérations ternaires définies par les conditions

$$p_*(x, y, y) = p_*(y, x, y) = p_*(y, y, x) = x$$

$$p^*(x, y, y) = p^*(y, x, y) = p^*(y, y, x) = y.$$

$\mathfrak{S}$ - l'algèbre de ŚWIERCZKOWSKI ( ) à quatre éléments quelconques: $(A;\ s)$, où $s(x, y, z)$ désigne l'élément de A, différent de x, y et z s'ils sont différents deux à deux et $s(x, y, z) = p_*(x, y, z)$ dans le cas contraire.

$\mathfrak{L}_n = (X_n;\ l_n)$, où $l_n(x_1, \ldots, x_n) = x_1$ si $x_1, \ldots, x_n$ sont différents deux à deux et $l_1(x_1, \ldots, x_n) = x_n$ dans le cas contraire.

$\mathfrak{M}_n = (X_n,\ m)$, où $m(x, y) = \min(x, y)$.

$\mathfrak{Q}_n = (X_n;\ q_1, \ldots, q_{n-1})$ pour $n > 1$, où $q_j(0) = j$ et $q_j(x) = x$ pour $x \neq 0$, $j = 1, 2, \ldots, n-1$.

$\mathfrak{R}_n = (X_n;\ r_n)$ pour $n > 1$, où $r_n(x_1, \ldots, x_{n-1})$ désigne l'élément différent

---

[2] Voir [4]. SWIERCZKOWSKI désigne $\mathfrak{P}^*$ par $\mathfrak{M}$; voir [6], p. 94 et 96.

[3] Voir [5], p. 94, où cette algèbre est désignée par A_0.

de $x_1, \ldots, x_{n-1}$ si $x_1, \ldots, x_{n-1}$ sont différents deux à deux et $r_n(x_1, \ldots, x_{n-1}) = x_1$ dans le cas contraire (évidemment, $r_2(0) = 1$ et $r_2(1) = 0$).

$\mathfrak{C}_n^0 = (X_n; c_0)$, où c_0 est une opération constante: $c_0(x) = 0$ pour tout $x \in X_n$.

2. **Propriétés numériques d'algèbres finies.** Considérons une algèbre $\mathfrak{A} = (A; \boldsymbol{F})$ non-vide et finie (c'est-à-dire telle que l'ensemble A est non-vide et fini) et désignons par

α – le nombre des éléments de A;

γ^* – le plus petit nombre tel que chaque ensemble composé de γ^* éléments de A forme un ensemble de générateurs de A;

γ – le plus petit nombre de générateurs de A;

ι – le plus grand nombre d'éléments indépendants dans A;

ι_* – le plus grand nombre tel que chaque ensemble composé de ι_* éléments de A forme un ensemble d'éléments indépendants dans A;

τ – le plus grand nombre tel que toute opération algébrique dans A de τ variables soit triviale.

Ces définitions exigent quelques commentaires et quelques suppléments concernant des cas dégénérés.

Dans le cas où chaque élément de A est une constante algébrique, on a $\gamma^* = \gamma = 0$. Ainsi, les valeurs admissibles de γ, γ^*, ι et ι_* sont $0, 1, 2, \ldots, \alpha$. Si $\gamma^* > 1$, le nombre $\gamma^* - 1$ est le nombre maximal des non-générateurs, c'est-à-dire la puissance de la plus nombreuse sous-algébre aliquote. Si $\iota_* < \alpha$, le nombre $\iota_* + 1$ est égal à la puissance d'un ensemble le moins nombreux d'éléments dépendants.

Le nombre τ n'est défini que pour les algèbres non-triviales. S'il existe dans A des constantes algébriques, on pose par définition $\tau = -1$. S'il n'y a pas de constantes algébriques et il existe une opération algébrique non triviale d'une variable, on a $\tau = 0$. Les valeurs admissibles pour τ sont donc $-1, 0, 1, 2, \ldots$.

Nous allons établir certaines relations entre les six nombres définis ci-dessus.

(i) $\alpha \geq \gamma^* \geq \gamma \geq \iota \geq \iota_*$

L'inégalité $\gamma \geq \iota$ (pour les algèbres finies!) résulte directement de la proposition suivante, démontrée par SWIERCZKOWSKI: s'il existe dans une algèbre A un ensemble de n générateurs et un ensemble de $n+1$ éléments indépendants, A est infinie ([5], p. 746, Corollary 1). D'autre inégalités contenues dans (i) sont évidentes.

On voit aisément que dans toute algèbre triviale, tous les nombres dans la suite (i) sont égaux. Le problème s'impose: lesquels des nombres dans cette suite peuvent être égaux pour les algèbres non-triviales?

Remarquons d'abord que l'égalité $\alpha = \iota_*$, ainsi que l'égalité $\alpha = \iota$, équivaut à la condition suivante: tous les éléments de A sont indépendants (plus précisément: A est un ensemble d'éléments indépendants dans A). Par conséquent, certains résultats de ŚWIERCZKOWSKI ([6] p. 94, Théorème 1), MARCZEWSKI et URBANIK [4] peuvent être exprimés comme suit:

(ii) *Si* $2 \neq \alpha = \iota$, *l'algèbre est triviale.*

(iii) *Si* $2 = \alpha = \iota$, *l'algèbre est ou bien triviale, ou bien une algèbre de* POST, *c'est-à-dire* $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{P}_*$, ou $\mathfrak{P}^*$ (voir n° 1).

L'égalité $\gamma^* = \iota_* = k$, où k désigne un nombre entier positif quelconque, équivaut à la condition suivante: tout sous-ensemble de A, composé de k éléments, forme une base de A (c'est-à-dire un ensemble de générateurs indépendants). Par conséquent, certains résultats de ŚWIERCZKOWSKI ([6], p. 94, Théorème 2 et Théorème 4) peuvent être exprimés comme suit:

(iv) *Si* $\gamma^* = \iota_* \geq 4$, *l'algèbre est triviale* (*et, par conséquent,* $\alpha = \iota_*$).

(v) *Si* $\gamma^* = \iota_* = 3$, *l'algèbre est ou bien une algèbre triviale à trois éléments, ou bien l'algèbre* $\mathfrak{S}$ *de Świerczkowski à quatre éléments,* (voir n° 1).

Nous allons démontrer encore que (dans les algèbres finies!) la condition $\gamma^* = \iota_*$ équivaut à $\gamma^* = \iota$ ainsi qu'à $\gamma = \iota_*$. En d'autres termes:

(vi) *S'il y a dans la suite* $\gamma^* \geq \gamma \geq \iota \geq \iota_*$ *trois termes égaux, tous les nombres de cette suite sont égaux:* $\gamma^* = \iota_*$.

Supposons en effet que k est la valeur commune des trois termes de la suite en question. Par conséquent $\gamma = \iota = k$. Il existe donc dans l'algèbre A considérée un ensemble de k générateurs et un ensemble de k éléments indépendants. Par conséquent (voir [5], p. 749, Théorèm 1), pour que k éléments de A forment un ensemble de générateurs, il faut et il suffit qu'ils forment un ensemble d'ensemble d'éléments indépendants. Ainsi, si $\gamma^* = k$, on a $\iota_* = k$ et inversement. c. q. f. d.

La proposition (vi) peut être formulée encore de façon suivante:

(vi') *S'il y a dans la suite* $\gamma^* \geq \gamma \geq \iota \geq \iota_*$ *précisément deux valeurs différentes, on a* $\gamma > \iota$.

Nous allons compléter les relations entre les nombres considérés par des propositions concernant le nombre τ:

(vii) *Pour toute algèbre non-triviale, on a* $\tau = \iota_* $ *ou bien* $\tau = \iota_* - 1$.

Il est donc à démontrer

$$(^*) \qquad \iota_* \geq \tau \qquad \text{et} \qquad (^*_*) \qquad \tau \geq \iota_* - 1$$

Dans le cas $\tau \leq 0$, l'inégalité (*) est évidente. Si $\tau \geq 1$, toute opération algébrique dans A est triviale, d'où il résulte directement que chaque ensemble contenant τ èléments est un ensemble d'éléments indépendants, ce qui donne (*).

Dans le cas $\iota_* = 0$, l'inégalité $(^*_*)$ est évidente. Si $\iota_* = 1$, il n'y a pas dans A de constantes algébriques, d'où $\tau \geq 0 = \iota_* - 1$. Enfin, si $\iota_* > 1$, on démontre aisément (voir [6], p. 95, proposition (α)) que chaque opération algébrique de $\iota_* - 1$ variables et triviale, d'où $(^*_*)$.

(viii) *Pour toute algèbre non-triviale, si* $\alpha > \tau$, *on a* $\alpha > \iota$ *et* $\gamma > \tau$.

L'inégalité $\alpha > \iota$ résulte de (ii), (iii) et de ceci que $\tau = 2$ dans les algèbres de POST (voir [4], p. 292).

L'inégalité $\gamma > \tau$ est évidente dans le cas $\tau = -1$. Si $\tau = 0$ il n'y a pas de constantes algébriques, d'où $\gamma > 0 = \tau$. Si $\tau \geq 1$, toute opération algébrique de $s \leq \tau$ variables est triviale et, par conséquent, chaque sous-ensemble S de A, composé de s éléments est une sous-algèbre de A. Comme $s \leq \tau < \alpha$ par hypothèse, l'ensemble S n'est pas un ensemble de générateurs de A, d'où $\gamma > \tau$, c. q. f. d.

Ajoutons que les propositions (vii) et (viii) entraînent certaine symétrie dans la suite

$$(^o) \qquad \alpha \geq \gamma^* \geq \gamma \geq \iota \geq \iota_* \geq \tau,$$

à savoir, si $\gamma = \iota$, on a $\gamma^* > \gamma = \iota > \iota_*$ ou bien $\gamma^* = \gamma = \iota = \iota_*$. Dans le second cas, l'algèbre est triviale, ou bien $\gamma^* = \gamma = \iota = \iota_* \leq 3$ (ce qui resulte de (iv) et (v)) et $\alpha > \gamma^* = \iota_* > \tau$.

Les propositions (i) et (vii) entraînent $\alpha \geq \tau$, il résulte donc de (iii) que l'égalité $\alpha = \tau$ ne subsiste que pour les algèbres de POST. Par conséquent, la proposition (viii) entraîne

(ix) *Si, pour une algèbre non-triviale* $\gamma = \tau$, *cette algèbre est une algèbre de Post.*

3. **Table numérique.** Voici la table des nombres en question pour les algèbres définies dans le n° 1. Nous désignons par $d(n)$ le plus grand parmi les diviseurs du nombre n moindres que n.

Algèbre		α	γ^*	γ	ι	ι_*	τ
$\mathfrak{T}_n$		n	n	n	n	n	
$\mathfrak{A}_n$		n	0	0	0	0	-1
$\mathfrak{C}_n$		n	0	0	0	0	-1
$\mathfrak{B}_n$	$2^k < n < 2^{k+1}$	2^n	$2^{n-1}+1$	$k+1$	k	0	-1
$\mathfrak{B}_n$	$n = 2^k,\ k = 0, 1, 2, \ldots$	2^n	$2^{n-1}+1$	k	k	0	-1
$\mathfrak{J}_n$	$n > 1$	n	$d(n)+1$	1	1	0	-1
$\mathfrak{P}, \mathfrak{P}_*, \mathfrak{P}^*$		2	2	2	2	2	2
$\mathfrak{R}_2$		2	1	1	1	1	0
$\mathfrak{R}_3$		3	2	2	2	2	1
$\mathfrak{S}$		4	3	3	3	3	2
$\mathfrak{L}_n$	$n > 2$	n	n	n	$n-1$	$n-1$	$n-1$
$\mathfrak{M}_n$	$n > 1$	n	n	n	1	1	1
$\mathfrak{C}_n^0$	$n > 1$	n	n	$n-1$	$n-1$	0	-1
$\mathfrak{Q}_n$	$n > 1$	n	n	1	1	0	0
$\mathfrak{R}_n$	$n > 3$	n	$n-1$	$n-1$	$n-2$	$n-2$	$n-2$

Les démonstrations des positions respectives de cette table ne presentent pas en général de difficultés. Nous nous bornons de donner ici les démonstrations pour les algèbres de Boole $\mathfrak{B}_n$ et - à titre d'exemple - pour l'algèbre $\mathfrak{L}_n$.

L'algèbre de Boole $\mathfrak{B}_n$ possède 2^n éléments, et pour chaque sous-algèbre de $\mathfrak{B}_n$ (où $n = 1, 2, \ldots$), qui est évidemment elle-même une algèbre de Boole, le nombre de ses éléments est de la forme 2^j aussi. Il existe une sous-algèbre de $\mathfrak{B}_n$ qui possède précisément 2^{n-1} éléments; c'est, par exemple, l'algèbre de tous les ensembles contenus dans X_n qui contiennent les deux éléments 0 et 1, ou bien ne contiennent aucun d'entre eux. Par conséquent, le nombre des éléments d'une sous-algèbre la plus nombreuse de $\mathfrak{B}_n$ est 2^{n-1}, où $\gamma^* = 2^{n-1} + 1$ pour $\mathfrak{B}_n$.

Comme on sait, pour qu'il existe dans $\mathfrak{B}_n$ une famille de k éléments indépendants (c'est-à-dire sous-ensembles indépendants de X_n) $E_1, \ldots, E_k$, il faut et il suffit que $n \geq 2^k$ ([2], p. 141, proposition (iv) ([4])). Par conséquent, si $2^k \leq n < 2^{k+1}$, on a $\iota = k$ pour l'algèbre $\mathfrak{B}_n$.

Passons au nombre γ. Il est facile à démontrer que l'algèbre de BOOLE engendrée par une famille composée de l ensembles est composée elle-même de 2^{2^l} ensembles au plus. Par conséquent, si $n = 2^k$, on a $\gamma \geq k$ pour l'algèbre $\mathfrak{B}_n$, et si $n > 2^k$, on a $\gamma \geq k+1$. Nous allons démontrer les deux inégalités inverses.

Si $n = 2^k$, la famille $E_1, \ldots E_k$ d'ensembles indépendants constitue une famille de générateurs de $\mathfrak{B}_n$. En effet: les $2^k = n$ atomes de cette famille sont disjoints et non vides, et par conséquent ce sont les ensembles: $\{0\}$, $\{1\}$, $\{2\}, \ldots$, $\{n-1\}$; il en résulte que les réunions de ces ensembles forment la classe de tous les sous-ensembles de X_n. On a donc $\gamma \leq k$.

Supposons maintenant $2^k < n < 2^{k+1}$ et désignons par $F_1, \ldots, F_k, F_{k+1}$ une famille d'éléments indépendants dans $\mathfrak{B}_{2^{k+1}}$, c'est-à-dire de sous-ensembles indépendants de $X_{2^{k+1}}$. Il n'est pas difficile à démontrer que les ensembles

$$F_1 \cap X_n,\ F_2 \cap X_n, \ldots, F_{k+1} \cap X_n$$

forment une famille de générateurs de $\mathfrak{B}_n$. On a donc $\gamma \leq k+1$.

Il existe dans l'algèbre $\mathfrak{B}_n$ des constantes algébriques (l'ensemble vide et X_n), d'où $\iota_* = 0$ et $\tau = -1$.

Passons maintenant à l'*algèbre* $\mathfrak{L}_n$. On a évidemment $l_n(x_1, \ldots, x_n) \in \{x_1, \ldots, x_n\}$; il en résulte que chaque sous-ensemble de X_n est une sous-algèbre de $\mathfrak{L}_n$. Par conséquent $\gamma^* = \gamma = n$.

Nous allons démontrer que toute opération algébrique de $n-1$ variables dans $\mathfrak{L}_n$ est triviale. Cela résulte directement de la définition des opérations algébriques et de l'implication suivante: Si $f_1, \ldots, f_n$ sont des opérations triviales de $n-1$ variables, l'opération $l_n(f_1, \ldots, f_n)$ est triviale. En effet: parmi les opérations $f_1, \ldots, f_n$ il y en a deux identiques, d'où, par la définition de l_n, on a $l_n(f_1, \ldots, f_n) = f_n$.

Les éléments $0, 1, 2, \ldots, n-1$ sont dépendants car

$$l_n(0, 1, 2, \ldots, n-1) = e_1^{(n)}(0, 1, 2, \ldots, n-1)$$

tandis que $l_n \neq e_1^{(n)}$. Par conséquent $\iota \leq n-1$.

([4]) Remarquons que le symbole $\mathfrak{B}_n$ possède dans le travail cité [2] un autre sens qu'ici.

Il en résulte, d'après (i) et (vii) que

$$n-1 \geq \iota \geq \iota_* \geq \tau = n - \mathfrak{r}.$$

4. Discussion des résultats. Notre table numérique permet de formuler quelques remarques sur les propositions du n° 2. Nous voyons par exemple que dans la suite (i):

$$\alpha \geq \gamma^* \geq \gamma \geq \iota \geq \iota_*$$

le plus grand saut peut se trouver entre α et γ^* (l'algèbre $\mathfrak{A}_n$), entre γ^* et γ (l'algèbre $\mathfrak{Q}_n$), entre γ et ι (l'algèbre $\mathfrak{M}_n$) ou bien entre ι et ι_* (l'algèbre $\mathfrak{C}_n^0$).

Le but principal ce cette section est de montrer à l'aide de la table du n° 3 que les propositions du n° 2 ne pourraient pas être renforcées.

Dans la proposition (i), aucune parmi les inégalités $\geq$ ne peut être remplacée ni par $>$ ni par $=$. De plus, il existe des algèbres pour lesquelles les cinq nombres considérés sont différents deux à deux (l'algèbre de Boole $\mathfrak{B}_n$, où $2^k < n < 2^{k+1}$, $k = 1, 2, \ldots$) et il y a d'autres pour lesquelles ces nombres sont égaux (les algébres triviales et les algèbres de Post).

Dans les propositions (ii) et (iii) l'égalité $\alpha = \iota$ ne peut être remplacée ni par $\alpha = \gamma$ (exemples: les algèbres $\mathfrak{L}_n$ et $\mathfrak{M}_2$), ni par $\gamma^* = \iota$ (les algèbres $\mathfrak{R}_3$ et $\mathfrak{R}_2$), ni par $\alpha - \iota \leq 1$ (les algèbres $\mathfrak{L}_n$ et $\mathfrak{R}_3$).

Dans les propositions (iv) et (v), on ne peut pas remplacer l'égalité $\gamma^* = \iota_*$ par $\gamma^* - \iota_* \leq 1$ (exemple: $\mathfrak{R}_n$ pour $n > 3$). Il existe une infinité d'algèbres non triviales pour lesquelles $\gamma^* = \iota_* < 3$ (par exemple: l'algèbre $\mathfrak{R}_2$ et les algèbres mentionnées dans [6], p. 94-95).

Également, la proposition (vi) ne peut être renforcée. Plus précisément: toutes les combinaisons d'égalités et d'inégalités, sauf celles qui sont exclues par la proposition (vi), peuvent avoir lieu dans la suite $\gamma^* \geq \gamma \geq \iota \geq \iota_*$, à savoir:

$=, =, =$	(les algèbres $\mathfrak{R}_2$, $\mathfrak{P}$ et d'autres)
$=, >, =$	(les algébres $\mathfrak{L}_n$, $\mathfrak{M}_n$ et $\mathfrak{R}_n$ pour $n > 3$):
$>, =, >$	(les algèbres $\mathfrak{B}_{2^k}$ pour $k = 1, 2, \ldots$, $\mathfrak{Q}_n$, $\mathfrak{C}_n^0$)
$>, >, >$	(l'algèbre $\mathfrak{B}_n$ pour $2^k < n < 2^{k+1}$).

La thèse de (vi') tombe en défaut lorsqu'il y a trois valeurs différentes dans toute la suite (⁰). (Exemple: l'algèbre $\mathfrak{Q}_n$).

Quant à la proposition (vii), il y a dans la table du n^0 3 maints exemples pour les deux possibilités prévues par la thèse.

L'algébre $\mathfrak{L}_n$ montre que le nombre γ dans la proposition (viii) ne peut être remplacé par ι.

Les algèbres $\mathfrak{R}_2$, $\mathfrak{R}_3$ et $\mathfrak{S}$ montrent que l'égalité $\gamma = \tau$ dans la proposition (ix) ne peut être remplacée par $\gamma = \iota_*$ et les algèbres $\mathfrak{L}_n$ et $\mathfrak{M}_n$ que l'égalité en question ne peut être remplacée par $\iota = \tau$.

TRAVAUX CITÉS

[1] E. MARCZEWSKI, *A general scheme of the notions of independence in mathematics*, «Bull. Acad. Pol. Sc., Série math. astr. phys.», 6, 1958, 731-736.

[2] — —, *Independence in algebras of sets and Boolean algebras*, «Fund. Math.», 48, 1960, 135-145.

[3] — —, *Independence and homomorphisms in abstract algebras*, «Fund. Math. 50, 1961, 45-61.

[4] E. MARCZEWSKI and K. URBANIK, *Abstract algebras in which all elements are independent*, «Bull. Acad. Pol. Sc., Série math. astr. phys.», 8, 1960, 291-293.

[5] S. ŚWIERCZKOWSKI, *On independent elements in finitely generated algebras*, «Bull. Acad. Pol. Sc., Série math. astr. phys.», 6, 1958, 749-752.

[6] — —, *Algebras which are independently generated by every n elements*, «Fund. Math.», 1960, 93-104.