Pseudoconnessioni lineari su una varietà differenziabile di classe C^∞. (*)

CLAUDIO DI COMITE (Bari) (**)

Sunto. - *È contenuto nell' Introduzione.*

Introduzione

Sia V una varietà differenziabile di classe C^∞ (1) e dimensione n e, detta $\mathfrak{F}$ l'algebra delle funzioni differenziabili su V, siano $\mathfrak{X}$ e $\mathfrak{T}_s^r$ $r=0,\ 1,\ \ldots;$ $s=0,\ 1,\ \ldots)$ rispettivamememte l'$\mathfrak{F}$-modulo dei campi vettoriali differenziabili su V e l'$\mathfrak{F}$-modulo dei campi tensoriali differenziabili su V di specie $(r,\ s)$; posto $\mathfrak{T}=\overset{\infty}{\underset{r,\,s=0}{\oplus}}\mathfrak{T}_s^r$, sia infine $\mathfrak{D}$ l'$\mathfrak{F}$-modulo delle derivazioni di $\mathfrak{T}$.

È noto che ogni connessione lineare su V é definita da un $\mathfrak{F}$-omomorfismo $\nabla: X \to \nabla_X$ di $\mathfrak{X}$ in $\mathfrak{D}$ tale che

$$(\nabla) \qquad \nabla_X f = X(f), \qquad \forall f \in \mathfrak{F} \quad \text{e} \quad \forall X \in \mathfrak{X},$$

cioè tale che l'applicazione $K:(f,\ X) \to \nabla_X f$ di $\mathfrak{F} \times \mathfrak{X}$ in $\mathfrak{F}$ sia il campo tensoriale di Kronecker di specie $(1,\ 1)$ (cfr. [1], n. 1).

In questo lavoro ci si occupa degli $\mathfrak{F}$-omomorfismi di $\mathfrak{X}$ in $\mathfrak{D}$, indipendentemente dal fatto che essi verifichino o meno l'assioma (∇). Più precisamente, detto $\mathfrak{L}$ l'$\mathfrak{F}$-modulo degli $\mathfrak{F}$-omomorfismi di $\mathfrak{X}$ in $\mathfrak{D}$, generalizzando la nozione di connessione lineare, si dice che ogni elemento $D \in \mathfrak{L}(D: X \to D_X)$ definisce su V una pseudoconnessione lineare. Allora (ved. n. 1), per ogni $D \in \mathfrak{L}$, l'applicazione $(f,\ X) \to D_X f$ di $\mathfrak{F} \times \mathfrak{X}$ in $\mathfrak{F}$ è un campo tensoriale $A \in \mathfrak{T}_1^1$ e l'applicazione $\Phi: D \to A$ di $\mathfrak{L}$ in $\mathfrak{T}_1^1$ è un $\mathfrak{F}$-omomorfismo, il cui nucleo è isomorfo a $\mathfrak{T}_2^1$; gli elementi di ker Φ definiscono delle pseudoconnessioni che diconsi banali, gli elementi di $\Phi^{-1}(K)(K$ campo tensoriale di Kronecker) definiscono le ordinarie connessioni lineari.

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività del raggruppamento n. 5 del Comitato Nazionale per le Scienze Matematiche del C.N.R.

(**) Entrata in Redazione il 6 dicembre 1968.

(1) Nel seguito si userà la locuzione « differenziabile » in luogo di « differenziabile di classe C^∞ » e, quando non vi sia possibilità di equivoco, si ometterà anche la parola « differenziabile ».

Nel n. 1 si prova che per definire una pseudoconnessione lineare su V occorre e basta assegnare un campo tensoriale $A \in \mathcal{T}_1^1$ ed un $\mathcal{F}$-omomorfismo $B : X \to B_X$ di $\mathcal{X}$ nell'$\mathcal{F}$-modulo degli R-endomorfismi di $\mathcal{X}$ (con R campo dei reali) tale che

$$B_X f Y = f B_X Y + A(f, X) Y, \qquad \forall f \in \mathcal{F} \quad \text{e} \quad \forall X, \ Y \in \mathcal{X}.$$

Nel n. 2 si prova che ogni pseudoconnessione lineare Γ su V può anche essere definita assegnando su ciascun intorno coordinato U due sistemi di funzioni (A_j^i, Γ_{ij}^k) (componenti di Γ) tali che le A_j^i siano le componenti su U di un campo tensoriale $A \in \mathcal{T}_1^1$ ed in ogni intersezione non vuota di due intorni coordinati U, U', dette $(A_{j'}^{i'}, \Gamma_{i'j'}^{k'})$ le funzioni assegnate su U' risulti

$$\Gamma_{i'j'}^{k'} = \Gamma_{ij}^k \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k} - A_i^k \frac{\partial^2 x^{k'}}{\partial x^k \partial x^j} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}},$$

ove si è indicato con $x^1, \ldots, x^n$ il sistema delle coordinate locali su U e con $x^{1'}, \ldots x^{n'}$ il sistema delle coordinate locali su U'.

Nel n. 3, assegnata una pseudoconnessione lineare su V, si danno la definizione di pseudoderivata covariante di un campo $T \in \mathcal{T}$ rispetto ad un campo vettoriale $X \in \mathcal{X}$ e la definizione di pseudodifferenziale covariante di ordine $m (m \geq 1)$ di T; si trovano per la pseudodifferenziazione covariante proprietà analoghe a quelle della differenziazione covariante rispetto ad una connessione lineare

Nel numero 4 si danno le definizioni di pseudoconnessione coniugata ad una pseudoconnessione lineare Γ su V, di pseudoconnessione simmetrica associata a Γ, di campo tensoriale di torsione di Γ, di pseudoconnessione simmetrica e si trovano proprietà analoghe a quelle relative alle connessioni lineari.

Nel numero 5, supposta V paracompatta, si dimostra che, per ogni $A \in \mathcal{T}_1^1$, esiste $D \in \mathcal{L}$ tale che

$$D_X f = A(f, X), \qquad \forall f \in \mathcal{F} \quad \text{e} \quad \forall X \in \mathcal{X},$$

si prova cioè che l'omomorfismo $\Phi : \mathcal{L} \to \mathcal{T}_1^1$ è surgettivo. Si dimostra inoltre che, se esiste una connessione lineare su V (se Φ è surgettivo), $\mathcal{L}$ è isomorfo a $\mathcal{T}_1^1 \oplus \mathcal{T}_2^1$.

Nel numero 6 si fa vedere che, assegnata una pseudoconnessione lineare Γ su V, lungo certe curve su V, si può definire un parallelismo analogo a quello relativo ad una connessione lineare; di tale parallelismo si studiano le principali proprietà. Le curve per le quali è possibile definire un parallelismo si dicono ammissibili per il parallelismo (se Γ è banale non esistono curve ammissibili).

Nel numero 7, data la definizione di rango di una pseudoconnessione lineare in un punto $p \in V$, si studiano le pseudoconnessioni lineari che hanno rango costante h in ogni punto $p \in V$ (pseudoconnessioni lineari di rango h su V). In particolare, si osserva che ogni pseudoconnessione lineare Γ di rango n su V determina su V una connessione lineare $\overline{\Gamma}$ tale che il parallelismo rispetto a $\overline{\Gamma}$ coincide col parallelismo rispetto a Γ; assegnata una pseudoconnessione lineare Γ di rango h su V, si determinano delle condizioni necessarie e sufficienti affinchè un segmento finito di curva sia ammissibile per il parallelismo; sotto ipotesi abbastanza restrittive, si ha che per ogni $p \in V$ passa una sottovarietà chiusa $\overline{V}_p$ ad $n-h$ dimensioni tale che tutti e soli i segmenti finiti di curve su V, passanti per p, ammissibili per il parallelismo, siano quelli su $\overline{V}_p$. Se $h = n-1$, $\overline{V}_p$ è una ipersuperficie e, nel n. 8, si prova che, sotto certe ipotesi, su ciascuna ipersuperficie $\overline{V}_p$ la pseudoconnessione Γ induce una connessione lineare tale che il parallelismo rispetto ad essa coincide con il parallelismo rispetto a Γ.

1. - Pseudoconnessioni lineari su V.

DEF. 1. - Sia $D : X \to D_X$ una applicazione $\mathfrak{F}$-lineare di $\mathfrak{X}$ nell'$\mathfrak{F}$-modulo delle derivazioni di $\mathfrak{T}$. Si dice allora che D definisce su V una *pseudoconnessione lineare* Γ, D e D_X si chiamano rispettivamente *pseudodifferenziazione covariante* e *pseudoderivazione covariante* rispetto ad X.

Dalla precedente definizione segue subito che:

PROP. 1. - *L'applicazione* $A : (f, X) \to D_X f$ *di* $\mathfrak{F} \times \mathfrak{X}$ *in* $\mathfrak{F}$ *è un campo tensoriale di specie* $(1, 1)$ (2). *Se* A *è il campo tensoriale di Kronecker,* Γ *è una connessione lineare.*

Indicato con $\mathfrak{L}$ l'$\mathfrak{F}$-modulo degli omomorfismi di $\mathfrak{X}$ nell'$\mathfrak{F}$-modulo delle derivazioni di $\mathfrak{T}$, dal lemma a pag. 30 di [3] segue che

PROP. 2. - *Se* $D, D' \in \mathfrak{L}$ *e, per ogni* $f \in \mathfrak{F}$ *e per ogni* $X, Y \in \mathfrak{X}$, *risulta*

$$D_X f = D'_X f, \qquad D_X Y = D'_X Y,$$

allora $D = D'$.

In modo analogo alla prop. 4, n. 3 di [1], si prova che:

PROP. 3. - *Sia* V' *una sottavarietà aperta di* V *e sia* Γ *una pseudocon-*

(2) Ogni campo tensoriale $A \in \mathfrak{T}_1^1$ si può considerare indifferentemente come $\mathfrak{F}$-endomorfismo di $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{F}$-endomorfismo di $\mathfrak{T}_1^0$, applicazione $\mathfrak{F}$-bilineare di $\mathfrak{X} \times \mathfrak{T}_1^0$ in $\mathfrak{F}$, applicazione di $\mathfrak{F} \times \mathfrak{X}$ in $\mathfrak{F}$ soddisfacente a certi assiomi (cfr. [1], n. 1).

nessione lineare su V definita da D; esiste allora un'unica pseudoconnessione lineare $\Gamma_{V'}$ su V', tale che, detta $D_{V'}$ la pseudodifferenziazione covariante rispetto a $\Gamma_{V'}$, risulti

$$(D_X K) \mid V' = (D_{V'})_{X \mid V'} K \mid V', \qquad \forall\, X \in \mathfrak{X} \quad \text{e} \quad \forall\, K \in \mathfrak{T}.$$

$\Gamma_{V'}$ dicesi la pseudoconnessione indotta da Γ su V'.

Si proverà che:

PROP. 4. - *Sia $A \in \mathfrak{T}_1^1$ e sia $B : X \to B_X$ una applicazione $\mathfrak{F}$-lineare di $\mathfrak{X}$ nell'$\mathfrak{F}$-modulo degli R-endomorfismi di $\mathfrak{X}$, tale che*

$$B_X(fY) = fB_X Y + A(f, X)Y, \qquad \forall\, f \in \mathfrak{F} \quad \text{e} \quad \forall\, X,\ Y \in \mathfrak{X}. \tag{1.1}$$

Esiste allora un'unico $D \in \mathfrak{L}$ tale che

$$D_X f = A(f, X) \quad \text{e} \quad D_X Y = B_X Y, \qquad \forall\, f \in \mathfrak{F} \quad \text{e} \quad \forall\, X,\ Y \in \mathfrak{X}. \tag{1.2}$$

Sia $C : X \to C_X$ l'applicazione $\mathfrak{F}$-lineare di $\mathfrak{X}$ nell'$\mathfrak{F}$-modulo degli R-endomorfismi di $\mathfrak{T}_1^0$ definita dalla

$$(C_X \omega)(Y) = A(\omega(Y), X) - \omega(B_X Y), \qquad \forall X,\ Y \in \mathfrak{X} \ \text{e} \ \forall \omega \in \mathfrak{T}_1^0.$$

Per ogni intorno coordinato U, si ponga $A_U = A \mid U$, si indichi con B_U l'operatore indotto da B su U (cfr. [1], n. 3) e con C_U l'operatore indotto da C su U, cioè l'operatore definito dalla

$$((C_U)_{X'} \omega')(Y') = A_U(\omega'(Y'), X') - \omega'((B_U)_{X'} Y'),$$

per ogni X', $Y' \in \mathfrak{T}(U)$ e $\omega' \in \mathfrak{T}_1^0(U)$, e sia D_U l'applicazione $\mathfrak{F}(U)$ — lineare di $\mathfrak{X}(U)$ nell'$\mathfrak{F}(U)$-modulo delle derivazioni di $\mathfrak{T}(U)$ ([3]) tale che

$$(D_U)_{X'} f' = A_U(f', X'), \qquad (D_U)_{X'} Y' = (B_U)_{X'} Y', \qquad (D_U)_{X'} \omega' = (C_U)_{X'} \omega', \tag{1.3}$$

per ogni $f' \in \mathfrak{F}(U)$, $X', Y' \in \mathfrak{T}(U)$ e $\omega' \in \mathfrak{T}_1^0(U)$.

Si indichi infine con D l'elemento di $\mathfrak{L}$ tale che, per ogni intorno coordinato U, risulti

$$(D_X K) \mid U = (D_U)_{X \mid U} K \mid U, \qquad \forall\, X \in \mathfrak{X} \quad \text{e} \quad \forall\, K \in \mathfrak{T}. \tag{1.4}$$

Dalle (1.3), (1.4) seguono le (1.2).

L'unicità dell'elemento $D \in \mathfrak{L}$ tale che sussistano le (1.2) segue dalla prop. 2.

Dalla def. 1 e dalla prop. 4 consegue che:

([3]) È ovvio il significato dei simboli $\mathfrak{F}(U)$, $\mathfrak{X}(U)$, $\mathfrak{T}_1^0(U)$, $\mathfrak{T}(U)$ (cfr. [3]).

PROP. 5. - *Per definire una pseudoconnessione lineare su V, occorre e basta assegnare un campo tensoriale A di specie* (1, 1) *ed una applicazione B $\mathcal{F}$-lineare di $\mathcal{X}$ nell'$\mathcal{F}$-modulo degli R-endomorfismi di $\mathcal{X}$, tale che sia soddisfatto l'assioma* (1.1).

Sia Γ una pseudoconnessione lineare definita da (A, B), se $A = 0$, allora l'applicazione $(X, Y) \to B_X Y$ di $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$ in $\mathcal{X}$ è un campo tensoriale di specie (1, 2) e la pseudoconnessione Γ dicesi *banale*.

Si ha che:

PROP. 6. - *L'insieme degli elementi $D \in \mathcal{L}$ che definiscono le pseudoconnessioni banali è un sottomodulo di $\mathcal{L}$ isomorfo a $\mathcal{T}^1_2$.*

Si verifica facilmente che:

PROP. 7. - *L'applicazione $\Phi : \mathcal{L} \to \mathcal{T}^1_1$ che ad ogni $D \in \mathcal{L}$ fa corrispondere il campo tensoriale $A : (f, X) \to D_X f$ (considerato come applicazione di $\mathcal{F} \times \mathcal{X}$ in $\mathcal{F}$) è un omomorfismo il cui nucleo è costituito dagli elementi che definiscono le pseudoconnessioni banali.*

Ne consegue che l'insieme degli elementi $\nabla \in \mathcal{L}$ che definiscono le connessioni lineari su V è l'immagine reciproca mediante Φ del campo tensoriale di Kronecker di specie (1, 1). Inoltre, se $\nabla \in \mathcal{L}$ definisce una connessione lineare su V, l'insieme degli elementi di $\mathcal{L}$ che definiscono le connessioni lineari è la classe di ∇ mod. ker. Φ. Si ha così una nuova formulazione di una ben nota proposizione relativa alle connessioni lineari.

2. - Componenti delle pseudoconnessioni.

Sia Γ una pseudoconnessione lineare su V definita da $D \in \mathcal{L}$, si consideri un intorno coordinato U nel quale sia definito il sistema coordinato $\varphi : q \to (x^1(q), \ldots, x^n(q)) \in R^n$ e, posto $\partial/\partial x^i = e_i$, sia

$$(D_U)_{e_i} x^j = A^j_i, \qquad (D_U)_{e_i} e_j = \Gamma^k_{ij} e_k; \tag{2.1}$$

ove si è indicato con D_U la pseudodifferenziazione rispetto alla pseudoconnessione indotta da Γ su U; allora le funzioni (A^j_i, Γ^k_{ij}) si chiamano le *componenti* di Γ rispetto alla carta (U, φ) o anche rispetto al sistema di coordinate locali $x^1, \ldots, x^n$.

Si noti (cfr. prop. 1, n. 1) che le A^j_i sono le componenti di un campo tensoriale; si proverà che:

PROP. 1. - *Sia Γ una pseudoconnessione lineare su V. Siano (A^j_i, Γ^k_{ij})* e

$(A_{i'}^{j'}, \Gamma_{i'j'}^{k'})$ *le componenti di* Γ *rispetto ai sistemi di coordinate locali* $x^1, \ldots, x^n$ e $x^{1'}, \ldots, x^{n'}$. *Allora nell'intersezione dei due intorni coordinati, supposta non vuota, si ha:*

$$\Gamma_{i'j'}^{k'} = \Gamma_{ij}^{k} \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k} - A_i^k \frac{\partial^2 x^{k'}}{\partial x^k \partial x^j} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}. \tag{2.2}$$

Viceversa si prova che:

PROP. 2. - *Per ciascun sistema di coordinate locali* $x^1, \ldots, x^n$, *siano assegnati due sistemi di funzione* A_i^j, $\Gamma_{ij}^k (i, j, k = 1, \ldots, n)$ *in modo tale che le* A_i^j *siano le componenti rispetto ad* $x^1, \ldots, x^n$ *di un campo tensoriale su* V *e le* Γ_{ij}^k *soddisfino la regola di trasformazione* (2.2). *Esiste allora un'unica pseudoconnessione lineare* Γ *su* V *le cui componenti rispetto ad* $x^1, \ldots, x^n$ *sono le funzioni* A_i^j, Γ_{ij}^k *assegnate.*

3. - Pseudoderivata e pseudodifferenziale covarianti di un campo tensoriale.

Sia Γ una pseudoconnessione lineare su V definita da $D \in \mathfrak{L}$. Per ogni $X \in \mathfrak{X}$ e per ogni $K \in \mathfrak{T}$, $D_X K$ si chiama *pseudoderivata covariante di* K *rispetto ad* X. Per ogni $K \in \mathfrak{T}_s^r$, considerato come applicazione $\mathfrak{F}$-multitineare di $\mathfrak{X} \times \ldots \times \mathfrak{X}$ (s volte) in $\mathfrak{T}_0^r$, si chiama *pseudodifferenziale covariante di* K, e si indica con DK, il campo tensoriale di specie $(r, s+1)$ (considerato come applicazione di $\mathfrak{X} \times \ldots \times \mathfrak{X}$ ($s+1$ volte) in $\mathfrak{T}_0^r$) definito, per ogni $X_1, \ldots, X_s, Y \in \mathfrak{X}$, dalla

$$(DK)(X_1, \ldots, X_s, Y) = (D_Y K)(X_1, \ldots, X_s).$$

Se $K \in \mathfrak{T}$ è somma di campi tensoriali di specie diverse, si chiama *pseudodifferenziale covariante di* K, e si indica con DK, la somma dei differenziali covarianti dei campi tensoriali delle varie specie.

In modo analogo alla prop. 2.10, pag. 124 [3] ad alla prop. 3.5, pag. 32 [3], si prova che:

PROP. 1. - *Se* K *è un campo tensoriale di specie* (r, s), *allora, per ogni* $X_1, \ldots, X_s, Y \in \mathfrak{X}$, *risulta*

$$(DK)(X_1, \ldots, X_s, Y) = D_Y(K(X_1, \ldots, X_s)) - \sum_{i=1}^{s} K(X_1, \ldots, D_Y X_i, \ldots, X_s).$$

Si chiama *pseudodifferenziale covariante secondo di* $K \in \mathfrak{T}$, e si indica con $D^2 K$, il differenziale covariante di DK. In generale il differenziale covariante m-esimo $D^m K$ è definito induttivamente dalla

$$D^m K = D(D^{m-1} K).$$

Siano $(A^i_j,\ \Gamma^k_{ij})$ le componenti di Γ rispetto ad un sistema di coordinate locali $x^1, \ldots, x^n$ e siano Y^i le componenti di un campo vettoriale Y rispetto allo stesso sistema di coordinate locali, allora le componenti $Y,^i_j$ di DY sono definite dalle

$$Y,^i_j = A^k_j \partial Y^i / \partial x^k + \Gamma^i_{jk} Y^k .$$

In generale si ha che, se K è un campo tensoriale di specie (r, s) con componenti $K^{i_1 \ldots i_r}_{j_1 \ldots j_s}$, le componenti $K^{i_1 \ldots i_r}_{j_1 \ldots j_s, k}$ di DK sono date dalle

$$(3.1)\qquad K^{i_1 \ldots i_r}_{j_1 \ldots j_s, k} = A^h_k \partial K^{i_1 \ldots i_r}_{j_1 \ldots j_s} / \partial x^h + \sum_{\alpha=1}^{r} \Gamma^{i_\alpha}_{kh} K^{i_1 \ldots h \ldots i_s}_{j_1 \ldots j_s} - \sum_{\beta=1}^{s} \Gamma^h_{kj_\beta} K^{i_1 \ldots i_r}_{j_1 \ldots h \ldots j_s} .$$

Se X è un campo vettoriale con componenti X^i, le componenti di $D_X K$ sono date dalle

$$K^{i_1 \ldots i_r}_{j_1 \ldots j_s, k} X^k .$$

4. - Pseudoconnessione coniugata e pseudoconnessione simmetrica associata ad una pseudoconnessione lineare, campo tensoriale di torsione.

Sia Γ una pseudoconnessione lineare su V definita da (A, B). Per ogni $X, Y \in \mathfrak{X}$, considerato A come endomorfismo di $\mathfrak{X}$, si ponga

$$(4.1)\qquad L(X,\ Y) = [A(X),\ Y] + [X,\ A(Y)] - A([X,\ Y]);$$

per ogni $f \in \mathcal{F}$ risulta

$$(4.2)\qquad \begin{aligned} L(fX,\ Y) &= fL(X,\ Y) - (A(Y))(f)X, \\ L(X,\ fY) &= fL(X,\ Y) + (A(X))(f)Y. \end{aligned}$$

Mediante le (4.2) si verifica subito che:

PROP. 1. - *Se $\bar{B}$ è l'operatore definito, per ogni $X, Y \in \mathfrak{X}$, dalla*

$$\bar{B}_X Y = B_Y X + L(X,\ Y),$$

la coppia $(A, \bar{B})$ definisce una pseudoconnessione lineare $\bar{\Gamma}$ che dicesi coniugata a Γ.

Si ha che:

PROP. 2. – *L'applicazione* $\mathcal{C} : \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{L}$ *che ad ogni* $D \in \mathcal{L}$ *associa l'elemento* $\overline{D}$ *che definisce la pseudoconnessione coniugata a quella definita da* D *è un automorfismo di* $\mathcal{L}$*, considerato come spazio vettoriale sul campo dei numeri reali, tale che* $\mathcal{C}^2$ *è la bigezione identica di* $\mathcal{L}$.

In altri termini, la pseudoconnessione coniugata alla coniugata di Γ coincide con Γ.

DEF. 1. Sia Γ una pseudoconnessione lineare definita da D, la pseudoconnessione Γ' definita da $D' = \frac{1}{2}(D + \mathcal{C}(D))$ dicesi *simmetrica associata a* Γ.

Risulta:

$$D'_X f = D_X f, \qquad D'_X Y = \frac{1}{2}(D_X Y + D_Y X + L(X, Y))$$

per ogni $f \in \mathcal{F}$ ed $X, Y \in \mathcal{X}$.

Dalla prop. 2. segue che:

PROP. 3. – *L'applicazione* $\mathcal{S} : \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{L}$ *che ad ogni* $D \in \mathcal{L}$ *associa* $\frac{1}{2}(D + \mathcal{C}(D))$ *è un endomorfismo di* $\mathcal{L}$*, considerato come spazio vettoriale, tale che* $\mathcal{S} \circ \mathcal{S} = \mathcal{S}$.

In altri termini, se Γ'' è la pseudoconnessione lineare simmetrica associata alla pseudoconnessione Γ', simmetrica associata alla pseudoconnessione Γ, allora Γ'' coincide con Γ'.

DEF. 2. – Una pseudoconnessione si dice *simmetrica* se coincide con la sua simmetrica associata.

Dalla prop. 3 seguono subito le seguenti due proposizioni:

PROP. 4. – *Condizione necessaria e sufficiente affinchè una pseudoconnessione lineare sia simmetrica è che essa coincida con la sua coniugata.*

PROP. 5. – *L'insieme degli elementi* $D \in \mathcal{L}$ *che definiscono le pseudoconnessioni simmetriche è un sottospazio dello spazio vettoriale* $\mathcal{L}$.

Sia Γ una pseudoconnessione lineare su V definita da D, allora $\frac{1}{2}(D - \mathcal{C}(D))$ definisce su V una pseudoconnessione banale.

DEF. 3. – Il campo tensoriale definito, per ogni $X, Y \in \mathcal{X}$, dalla

$$T(X, Y) = \frac{1}{2}(D - \mathcal{C}(D))_X Y$$

si chiama *campo tensoriale di torsione di* Γ.

Risulta

$$T(X, Y) = -T(Y, X),$$

$$D_X Y = (\mathcal{S}(D))_X Y + T(X, Y).$$

Ne consegue che:

PROP. 6. - *Detta* $\mathcal{A} : \mathcal{T}_2^1 \to \mathcal{T}_2^1$ *l'alternazione di* $\mathcal{T}_2^1$ *relativa ai due indici di covarianza, lo spazio vettoriale* $\mathcal{L}$ *è isomorfo alla somma diretta dei due spazi vettoriali* $\mathcal{S}(\mathcal{L})$ *e* $\mathcal{A}(\mathcal{T}_2^1)$.

Sia Γ una pseudoconnessione lineare su V e siano (A_j^i, Γ_{ij}^k) le componenti di Γ rispetto ad un sistema di coordinate locali $x^1 \dots, x^n$, siano inoltre $\bar{\Gamma}$, Γ' e T rispettivamente la pseudoconnessione coniugata, la pseudoconnessione simmetrica associata a Γ ed il campo tensoriale di torsione di Γ; allora, indicate con $(\bar{A}_j^i, \bar{\Gamma}_{ij}^k)$, (A'^i_j, Γ'^k_{ij}) e T_{ij}^k rispettivamente le componenti di $\bar{\Gamma}$, Γ' e T rispetto allo stesso sistema di coordinate locali, risulta

$$\bar{A}_j^i = A_j^i, \;\; \bar{\Gamma}_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k + \partial A_j^k/\partial x^i - \partial A_i^k/\partial x^j,$$

$$A'^i_j = A_j^i, \;\; \Gamma'^k_{ij} = \frac{1}{2}(\Gamma_{ij}^k + \bar{\Gamma}_{ij}^k),$$

$$T_{ij}^k = \frac{1}{2}(\Gamma_{ij}^k - \bar{\Gamma}_{ij}^k).$$

Si osservi che, com'è naturale, nel caso delle connessioni lineari, si riottengono le ben note definizioni di connessione coniugata, connessione simmetrica associata, connessione simmetrica, campo tensoriale di torsione di una connessione lineare e le proposizioni relative.

5. - Esistenza ed estensione di pseudoconnessioni lineari.

Si proverà che:

PROP. 1. - *Se la varietà* V *è paracompatta, per ogni* $A \in \mathcal{T}_1^1$ *esiste una pseudoconnessione lineare* Γ *su* V*, tale che, detta* D *la pseudodifferenziazione covariante rispetto a* Γ*, il campo tensoriale* $(f, X) \to D_X f$ *(applicazione di* $\mathcal{F} \times \mathcal{X}$ *in* $\mathcal{F}$*) coincide con* A.

Sia $(U_i, \varphi_i)_{i\in I}$ una famiglia di carte ammissibili tale che $(U_i)_{i\in I}$ sia un ricoprimento di V localmente finito e per ogni $i \in I$, la chiusura $\bar{U}_i$ di U_i sia un insieme compatto [4]; allora esiste (cfr. [3], pag. 272, theorem 1) una partizione dell'unità $(f_i)_{i\in I}$ subordinata ad $(U_i)_{i\in I}$.

Per ogni $i \in I$ si fissi ad arbitrio una pseudoconnessione lineare Γ_i su U_i, tale che, detta D_i la pseudodifferenziazione covariante rispetto a Γ_i, il campo

---

[4] L'esistenza della famiglia $(U_i, \varphi_i)_{i\in I}$ consegue dalla paracompattezza di V.

tensoriale $A_i \in \mathcal{T}_1^1(U_i)$ definito dalla

$$A_i(g', X') = D_{iX'}g', \ \forall g' \in \mathcal{F}(U_i) \text{ e } \forall X' \in \mathcal{T}(U_i),$$

coincida con la restrizione di A ad U_i (5).

Per ogni $i \in I$, sia D_i' l'elemento di $\mathcal{L}$ definito al modo seguente:

$$\forall X \in \mathcal{X}, \forall K \in \mathcal{T} \text{ e } \forall p \in V : (D'_{iX}K)_p = \begin{cases} 0 & \text{se } p \notin U_i \\ f_i(p)(D_{iX|U_i}K | U_i)_p & \text{se } p \in U_i. \end{cases}$$

Si indichi allora con D l'elemento di $\mathcal{L}$ definito dalla

$$D_X K = \sum_{i \in I} D'_{iX}K, \ \forall X \in \mathcal{X} \text{ e } \forall K \in \mathcal{T}.$$

Detto p un punto qualunque di V, sia J la parte (finita) di I tale che per ogni $i \in J$ sia $p \in U_i$ e per ogni $i \notin J$ sia $p \notin U_i$.

Per ogni $g \in \mathcal{F}$ e per ogni $X \in \mathcal{X}$ risulta

$$(D_X g)_p = \sum_{i \in J} (D'_{iX}g)_p = \sum_{i \in J} f_i(p)(D_{iX|U_i}g | U_i)_p =$$

$$= \sum_{i \in J} f_i(p)(A_i(g | U_i, X | U_i))_p = (A(g, X))_p \sum_{i \in J} f_i(p) = (A(g, X))_p.$$

Resta così provato l'asserto.

Dalla precedente proposizione si ha, in particolare, com'è ben noto, che su ogni varietà paracompatta esistono connessioni lineari.

Ricordando com'è stato definito l'omomorfismo $\Phi : \mathcal{L} \to \mathcal{T}_1^1$ (prop. 7, n. 1), la prop. 1 si può esprimere equivalentemente secondo la

PROP. 2. - *Se V è paracompatta, l'omomorfismo $\Phi : \mathcal{L} \to \mathcal{T}_1^1$ é surgettivo.*

Si proverà ora che:

PROP. 3. - *Sia Γ' una pseudoconnessione lineare sulla sottovarietà sperta V' di V, allora, per ogni $p \in V'$, esistono un intorno aperto U di p contenuto in V' ed una pseudoconnessione lineare Γ su V, tali che le pseudoconnessioni indotte su U da Γ e Γ' coincidano.*

Esistono, com'è noto, una funzione $f \in \mathcal{F}$ ed un intorno aperto U di p contenuto in V', tali che f assuma il valore 1 in ogni punto di U ed il sup-

(5) È ovvio che quali che siano le funzioni differenziabili A_k^h, Γ_{jk}^h su U_i, esiste un'unica pseudoconnessione lineare su U_i avente quelle funzioni per componenti rispetto alla carta (U_i, φ_i).

porto di f sia contenuto in V'. Detta D' la pseudodifferenziazione covariante rispetto a Γ', sia allora D l'elemento di $\mathfrak{L}$ definito al modo seguente:

$$\forall X \in \mathfrak{X},\ \forall K \in \mathfrak{T} \text{ e } \forall q \in V : (D_X K)_q = \begin{cases} 0 & \text{se } q \notin V' \\ f(q)(D'_{X\,|\,V'} K\,|\,V')_q & \text{se } q \in V'. \end{cases}$$

Si ha subito che D definisce una pseudoconnessione lineare Γ su V che soddisfa l'asserto.

Si verifica in modo ovvio che:

PROP. 4. - *Sia ∇ la differenziazione covariante rispetto ad una connessione lineare su V; per ogni $A \in \mathfrak{T}_1^1$ e per ogni $H \in \mathfrak{T}_2^1$ sia B l'operatore definito dalla*

$$B_X Y = \nabla_{A(X)} Y + H(X,\ Y),\ \forall (X,\ Y) \in \mathfrak{X} \times \mathfrak{X}.$$

Allora la coppia $(A,\ B)$ definisce una pseudoconnessione lineare Γ su V e, detta D la pseudodifferenziazione covariante rispetto a Γ, l'applicazione $(A,\ H) \to D$ è un isomorfismo dell' $\mathfrak{F}$- modulo $\mathfrak{T}_1^1 \otimes \mathfrak{T}_2^1$ su $\mathfrak{L}$.

Si noti che la prop. 1 può dedursi immediatamente dalla prop. 4 sfruttando la ben nota proposizione sull'esistenza delle connessioni lineari.

6. - Parallelismo.

Sia Γ una pseudoconnessione lineare su V definita da $D \in \mathfrak{L}$ e sia $\gamma : t \to \gamma(t)$ $(t \in I,\ I$ intervallo aperto di $R)$ una curva su V (secondo la definizione a pag. 28 di [2]).

Per ogni $t \in I$ si indichi con $\dot\gamma(t)$ il vettore tangente a γ in $\gamma(t)$. Sia $K(t)$ $(t \in I)$ un campo tensoriale differenziabile di specie $(r,\ s)$ lungo γ e si supponga che esista un campo vettoriale $X(t)$ $(t \in I)$ lungo γ tale che, per ogni $t \in I$, posto $\Phi(D) = A$, risulti

$$A_{\gamma(t)}(X(t)) = \dot\gamma(t). \tag{6.1}$$

Sia $t_0 \in I$, esistono, com'è noto (cfr. [2], pag. 29), un reale $\varepsilon > 0$, un campo vettoriale $X \in \mathfrak{X}$ ed un campo tensoriale $K \in \mathfrak{T}_s^r$, tali che $J = [t_0 - \varepsilon,\ t_0 + \varepsilon]$ sia contenuto in I e $\forall t \in J$ risulti

$$X_{\gamma(t)} = X(t),\ K_{\gamma(t)} = K(t).$$

Si verifica facilmente che $(D_X K)_{\gamma(t)}$, $(t \in J)$ dipende soltanto dai campi $X(t)$ e $K(t)$ lungo il segmento finito di curva

$$\gamma_J : t \to \gamma(t) \qquad (t \in J) \text{ (}^6\text{)}.$$

Se per ogni $t \in J$ risulta

$$(D_X K)_{\gamma(t)} = 0 \tag{6.2}$$

il campo tensoriale $K(t)$ $(t \in J)$ si dice *parallelo lungo* γ_J *rispetto ad* $X(t)$ $(t \in J)$.

Se per ogni $t_0 \in I$ si considera come precedentemente un segmento finito di curva γ_J e se $K(t)$ $(t \in J)$ è parallelo rispetto ad $X(t)$ $(t \in J)$ lungo ciascuno dei seguenti finiti γ_J, allora $K(t)$ $(t \in I)$ si dice *parallelo lungo* γ *rispetto ad* $X(t)$.

Ogni curva $\gamma : t \to \gamma(t)$ $(t \in I)$ su V tale che esista un campo vettoriale $X(t)$ $(t \in I)$ lungo γ verificante la (6.1) dicesi *ammissibile per il parallelismo*.

PROP. 1. - *Sia* $\gamma : t \to \gamma(t)$ $(t \in J = [a, b])$ *un segmento finito di curva su* V *ammissibile per il parallelismo e sia* $X(t)$ $(t \in J)$ *un campo vettoriale lungo* γ *tale che*

$$A_{\gamma(t)}(X(t)) = \dot{\gamma}(t), \qquad \forall t \in J.$$

Allora, posto $\gamma(a) = p$, $\gamma(b) = q$ *ed indicati con* T_p *e* T_q *gli spazi vettoriali tangenti a* V *rispettivamente in* p *e* q, *per ogni* $Y_p \in T_p$ *esiste un unico campo vettoriale* $Y(t)$ $(t \in J)$ *parallelo lungo* γ *rispetto ad* $X(t)$ *tale che* $Y(a) = Y_p$; *inoltre l'applicazione* $Y_p = Y(a) \to Y(b)$ *di* T_p *in* T_q *è un isomorfismo.*

La dim. è analoga a quella della prop. 5.2, pag. 30 di [2].

DEF. 1. Un campo tensoriale $K \in \mathcal{T}_s^r$ si dice *parallelo rispetto ad un campo vettoriale* $X \in \mathfrak{X}$ se e solo se $D_X K = 0$.

Si ha che:

PROP. 2. - *Siano* $X \in \mathfrak{X}$, $K \in \mathcal{T}_s^r$ *e sia* $A(X) = X'$. *Condizione necessaria e sufficiente affinchè* K *sia parallelo rispetto ad* X *è che, per ogni curva integrale* $\gamma(t)$ $(t \in I)$ *di* X', *il campo tensoriale* $K_{\gamma(t)}$ $(t \in I)$ *sia parallelo lungo* γ *rispetto a* $X_{\gamma(t)}$ (7) *e, per ogni* $p \in V$ *tale che* $X_p \neq 0$ *e* $X'_p = 0$, $(D_X K)_p$ *sia nullo.*

Ci si limiterà a provare la condizione sufficiente. Sia p un qualunque punto di V. Se $X_p \neq 0$ e $X'_p = 0$ allora per ipotesi

$$(D_X K)_p = 0; \tag{6.3}$$

(6) Se $Y \in \mathfrak{X}$ è tale che $Y_{\gamma(t)} = \dot{\gamma}(t)$ per $t \in J$, allora $(D_Y K)_{\gamma(t)}$ $(t \in J)$ dipende anche dai valori che Y assume nei punti non appartenenti alla curva, da ciò consegue la necessità di procedere nel modo suddetto.

(7) Si noti che se $\gamma(t)$ è una curva integrale di X', allora $A_{\gamma(t)}(X_{\gamma(t)}) = \dot{\gamma}(t)$.

se $X_p = X'_p = 0$, la (6.3) si verifica banalmente; infine se $X'_p \neq 0$ esiste una curva integrale $\gamma(t)$ di X', definita per $|t|$ minore di un opportuno $\varepsilon > 0$, tale che $p = \gamma(0)$, allora per ipotesi $K_{\gamma(t)}$ è parallelo lungo γ rispetto a $X_{\gamma(t)}$ e quindi si ha ancora la (6.3).

6. - Pseudoconnessioni lineari di rango h su V.

Siano $A \in \mathcal{T}_1^1$, $p \in V$ e T_p lo spazio vettoriale tangente in p a V; si chiama *rango di A in p* la dimensione dello spazio vettoriale $A_p(T_p) \subset T_p$ (A_p endomorfismo di T_p). È ovvio che A ha rango h in p se e solamente se il nucleo dell'endomorfismo A_p di T_p ha dimensione $n - h$. Si dice che A ha *rango h su V* se A ha rango h in ogni punto di V.

Da ben note proposizioni sui sistemi lineari segue subito che, affinchè A abbia rango h in p, occorre e basta che, dette A_j^i le componenti di A rispetto ad una carta ammissibile (U, φ) tale che $p \in U$, la matrice $(A_j^i(p))$ abbia rango h.

DEF. 1. - Sia Γ una pseudoconnessione lineare su V definita da D e sia $A = \Phi(D)$; Γ dicesi di *rango h in p* se A ha rango h in p, Γ si dice di *rango h su V* se A ha rango h su V.

È immediato che:

PROP. 1. - *Le pseudoconnessioni banali sono tutte e solo le pseudoconnessioni lineari di rango zero su V. Non esistono curve ammissibili per il parallelismo rispetto ad una pseudoconnessione banale.*

Si ha inoltre che:

PROP. 2. - *Sia Γ una pseudoconnessione lineare su V di rango n definita da D e sia $A = \Phi(D)$. Allora ogni curva su V è ammissibile per il parallelismo e l'operatore $\nabla = D \circ A^{-1}$ determina una connessione lineare Γ' tale che il parallelismo secondo Γ coincide con il parallelismo secondo Γ'.*

Infatti, detta $\gamma: t \to \gamma(t)$ $(t \in I)$ una qualunque curva su V, esiste un unico campo vettoriale $X(t)$ lungo γ tale che per ogni $t \in I$ risulti

$$A_{\gamma(t)}(X(t)) = \dot{\gamma}(t);$$

inoltre un campo tensoriale $K(t)$ $(t \in I)$ è parallelo lungo γ rispetto ad $X(t)$ secondo Γ se e solamente se $K(t)$ è parallelo lungo γ secondo Γ'.

Si proverà che:

PROP. 3. - *Sia Γ una pseudoconnessione lineare di rango h $(1 \leq h \leq n-1)$ su V definita da D e sia $A = \Phi(D)$; si supponga che esistano $n - h$ 1-forme su V ω_λ $(\lambda \in \Lambda = \{1, \ldots, n-h\})$ tali che $A(\omega_\lambda) = 0$ e, per ogni $p \in V$, le*

$(\omega_\lambda)_p$ *siano linearmente indipendenti. Allora condizione necessaria e sufficiente affinchè un segmento finito di curva* $\gamma : t \to \gamma(t)$ $(t \in J)$ *sia ammissibile per il parallelismo è che*

$$(7.2) \qquad (\omega_\lambda)_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t)) = 0, \ \forall t \in J \ \text{e} \ \forall \lambda \in \Lambda.$$

La condizione necessaria consegue da ben note proposizioni sulle matrici e sui sistemi lineari.

Per quanto riguarda la condizione sufficiente si supponga inizialmente che J sia aperto e che esista una carta ammissibile (U, φ) tale che $\gamma(J) \subset U$ e, dette A_j^i le componenti di A rispetto ad (U, φ), la matrice $(A_j^i(\gamma(t)))$ $(t \in J)$ abbia un minore di ordine h che non sia nullo per nessun $t \in J$; si supponga ad esempio che sia non nullo, per ogni $t \in J$, il minore formato con le prime h righe e con le prime h colonne della matrice suddetta.

Si fissino ad arbitrio $n - h$ funzioni differenziabili $X^{h+1}(t), \dots, X^n(t)$ $(t \in J)$, allora, in virtù delle ipotesi fatte, per ben note proprietà dei sistemi lineari, restano determinate univocamente altre h funzioni differenziabili $X^1(t), \dots, X^h(t)$ $(t \in J)$ tali che

$$(7.2) \qquad A_j^i(\gamma(t))X^j(t)) = \dot{\gamma}^i(t), \ \forall t \in J, \ 1 \leq i \leq n, \ 1 \leq j \leq n,$$

ove si sono indicate con $\dot{\gamma}^i(t)$ le componenti di $\dot{\gamma}(t)$ rispetto ad (U, φ).

Le (7.2) mostrano che le $X^i(t)$ $(1 \leq i \leq n)$ sono le componenti di un campo vettoriale $X(t)$ $(t \in J)$ lungo γ tale che

$$A_{\gamma(t)}(X(t)) = \dot{\gamma}(t), \qquad \forall t \in J.$$

Si supponga ora che sia $J = J_1 \cup J_2$, con $J_1 =]a, b[$, $J_2 =]a', b'[$, $a < a' < b < b'$, e che esistano due carte (U, φ), (U', φ') tali che $\gamma(J_1) \subset U$, $\gamma(J_2) \subset U'$ e, dette A_j^i, $A_{j'}^{i'}$ le componenti di A relative rispettivamente ad (U, φ), (U', φ'), ciascuna delle matrici $(A_j^i(\gamma(t)))$ $(t \in J_1)$, $(A_{j'}^{i'}(\gamma(t)))$ $(t \in J_2)$ abbia un minore di ordine h che non sia nullo per nessun t appartenente rispettivamente a J_1, J_2; si supponga ad esempio che per la seconda matrice sia non nullo, per ogni $t \in J_2$, il minore formato con le prime h righe e le prime h colonne.

Si può determinare allora, come precedentemente, un campo vettoriale $X_1(t)$ $(t \in J_1)$ lungo γ_{J_1} $(\gamma_{J_1} : t \to \gamma(t),\ t \in J_1)$ tale che

$$A_{\gamma(t)}(X_1(t)) = \dot{\gamma}(t), \qquad \forall t \in J_1.$$

Esistono, com'è noto, due reali c, c', con $a' < c < c' < b$, ed una funzione $f: J \to R$ differenziabile di classe C^∞ tali che

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{per } a < t < c \\ 0 & \text{per } c' \leq t < b'. \end{cases}$$

Si indichi con $\overline{X}(t)$ $(t \in J_2)$ il campo vettoriale lungo γ_{J_2} $(\gamma_{J_2} : t \to \gamma(t),$ $t \in J_2)$ definito, per ogni $t \in J_2$, da

$$\overline{X}(t) = \begin{cases} f(t) X_1(t) & \text{per } a' < t < b \\ 0 & \text{per } b \leq t < b' \end{cases}$$

e siano $X^{(h+1)'}(t), \dots, X^{n'}(t)$ $(t \in J_2)$ le ultime $n - h$ componenti di $\overline{X}(t)$ rispetto ad (U', φ'). Come precedentemente restano determinate altre h funzioni differenziabili $X^{1'}(t), \dots, X^{h'}(t)$ $(t \in J_2)$ tali che

$$A^{i'}_{j'}(\gamma(t)) X^{j'}(t) = \dot{\gamma}^{i'}(t), \qquad \forall t \in J_2, \tag{7.3}$$

ove si sono indicate con $\dot{\gamma}^{i'}(t)$ le componenti di $\dot{\gamma}(t)$ rispetto ad (U', φ').

Le (7.3) esprimono che le $X^{j'}$ sono le componenti di un campo vettoriale $X_2(t)$ lungo $\gamma_{J_2}(\gamma_{J_2} : t \to \gamma(t),\ t \in J_2)$ tale che

$$A_{\gamma(t)}(X_2(t)) = \dot{\gamma}(t), \qquad \forall t \in J_2.$$

Risulta inoltre

$$X_1(t) = X_2(t), \qquad \forall t \in]a', c[.$$

Allora, indicato con $X(t)$ $(t \in J)$ il campo vettoriale lungo γ definito da

$$X(t) = \begin{cases} X_1(t) & \text{per } a < t \leq a' \\ X_2(t) & \text{per } a' < t < b', \end{cases}$$

si ha che

$$A_{\gamma(t)}(X(t)) = \dot{\gamma}(t), \qquad \forall t \in J.$$

Si è così provato anche in questo caso che γ è ammissibile per il parallelismo.

Si capisce subito allora come si generalizza la dimostrazione nel caso in cui J è chiuso e limitato e quindi compatto.

Conseguentemente alla suddetta proposizione, si dimostrerà che:

PROP. 4. - *Sia Γ una pseudoconnessione lineare di rango h su V definita da D e sia $A = \Phi(D)$; si supponga che esistano $n - h$ funzioni $f_\lambda \in \mathfrak{F}$ $(\lambda \in \Lambda =$*

$=\{1, \ldots, n-h\})$ *tali che* $A(df_\lambda)=0$ *e, per ogni* $p \in V$, *le* $(df_\lambda)_p$ *siano linearmente indidendenti. Allora, per ogni* $p \in V$, *esiste una sottovarietà chiusa* $\overline{V}_p \subset V$ *di dimensione* $n-h$ *che gode della seguente proprietà: un segmento finito di curva su* V $\gamma : t \to \gamma(t)$ $(t \in J)$ *passante per* p *è ammissibile per il parallelismo se e solamente se* $\gamma(J) \subset \overline{V}_p$ (8).

Sia p un punto di V e, per ogni $\lambda \in \Lambda$, sia g_λ la funzione su V definita, per ogni $q \in V$, da

$$g_\lambda(q) = f_\lambda(q) - f_\lambda(p).$$

Si indichi con $\overline{V}_p$ l'insieme dei punti di V nei quali si annullano simultaneamente le funzioni g_λ. Allora, com'è noto (cfr. [3], pag. 9), $\overline{V}_p$ è un chiuso sul quale resta definita canonicamente una struttura di varietà differenziabile di dimensione $n-h$.

Sia i l'ingezione canonica di $\overline{V}_p$ in V e, per ogni $q \in \overline{V}_p$, siano $\overline{T}_q$, T_q rispettivamente lo spazio vettoriale tangente a $\overline{V}_p$ in q e lo spazio vettoriale tangente a V in q; indicato con $(i_*)_q : \overline{T}_q \to T_q$ il differenziale di i in q, si identificherà $\overline{T}_q$ con $(i_*)_q\,(\overline{T}_q)$ mediante l'isomorfismo $\overline{X}_q \to (i_*)_q\,(\overline{X}_q)$ di $\overline{T}_q$ su $(i_*)_q\,(\overline{T}_q)$.

Si ha allora che un vettore $X_q \in T_q$ appartiene a $\overline{T}_q$ se e solamente se

$$X_q(g_\lambda) = X_q(f_\lambda) = 0, \qquad \forall \lambda \in \Lambda.$$

Supposto $\gamma(J) \subset \overline{V}_p$, per ogni $t \in J$, risulta $\dot\gamma(t) \in \overline{T}_q$, si ha quindi

$$\dot\gamma(t)\;(f_\lambda) = (df_\lambda)_{\gamma(t)}(\dot\gamma(t)) = 0, \qquad \forall t \in J \text{ e } \forall \lambda \in \Lambda, \tag{7.4}$$

e conseguentemente, per la prop. 3, γ è ammissibile per il parallelismo.

Viceversa, se γ è ammissibile per il parallelismo, per la prop. 3 sussiste la (7.4), da cui segue

$$(d(f_\lambda \circ \gamma))_t = 0, \qquad \forall t \in J \text{ e } \forall \lambda \in \Lambda,$$

quindi $f_\lambda \circ \gamma$ è una funzione costante e, poichè γ passa per $p \in \overline{V}_p$, risulta

$$(f_\lambda \circ \gamma)(t) - f_\lambda(p) = 0, \qquad \forall t \in J \text{ e } \forall \lambda \in \Lambda,$$

cioè

$$(g_\lambda \circ \gamma)(t) = 0, \qquad \forall t \in J \text{ e } \forall \lambda \in \Lambda.$$

Resta così provato che $\gamma(J) \subset \overline{V}_p$.

(8) Si ha di più che se $\gamma(J) \subset \overline{V}_p$, γ è ammissibile per il parallelismo anche se non passa per p.

8. - Pseudoconnessioni lineari di rango $n-1$ su V.

Si premette la seguente proposizione, di ovvia dimostrazione, utile per il seguito:

PROP. 1. - *Sia $D \in \mathfrak{L}$ e sia $A = \Phi(D)$; allora, per ogni $X, Y \in \mathfrak{X}$ e per ogni $\omega \in \mathfrak{T}_1^0$, risulta*

$$\omega(D_X Y) + (D_X\omega)(Y) = \omega(Y)A(X). \tag{8.1}$$

D'ora in poi si supporrà che su V sia assegnata una pseudoconnessione lineare Γ di rango $n-1$ definita da D e si porrà, come di consueto, $A = \Phi(D)$; si supporrà inoltre che esista una funzione $f \in \mathfrak{F}$ tale che $A(df) = 0$ e, per ogni $p \in V$, $(df)_p \neq 0$.

Per ogni $p \in V$, sia g_p la funzione differenziabile su V definita da

$$g_p(q) = f(q) - f(p), \qquad \forall q \in V,$$

e sia $\bar{V}_p$ l'ipersuperficie (sottovarietà chiusa ad $n-1$ dimensioni) definita dall'equazione $g_p = 0$. Allora, per la prop. 4 del n. 7, un segmento finito di curva su V, $\gamma : t \to \gamma(t)$ $(t \in J)$, passante per p, è ammissibile per il parallelismo se e solamente se $\gamma(J) \subset \bar{V}_p$.

D'ora in avanti ci si riferirà, per semplicità, solamente all'ipersuperficie $\bar{V}$ definita dall'equazione $f = 0$, ma ciò che si dirà sarà vero per una qualunque ipersuperficie $\bar{V}_p$.

In accordo col simbolismo sin qui usato, si denoteranno con $\bar{\mathfrak{F}}$, $\bar{\mathfrak{X}}$, $\bar{\mathfrak{T}}_s^r$ rispettivamente l'algebra delle funzioni differenziabili su $\bar{V}$, l'$\bar{\mathfrak{F}}$-modulo dei campi vettoriali su $\bar{V}$ e l'$\bar{\mathfrak{F}}$-modulo dei campi tensoriali di specie (r, s) su $\bar{V}$. Si indicherà inoltre con $\bar{T}_p$, $\forall p \in \bar{V}$, lo spazio vettoriale tangente in p a $\bar{V}$ e si identificherà, come già si è fatto nel numero precedente, $\bar{T}_p$ con $(i_*)_p(\bar{T}_p)$ (9), sottospazio dello spazio vettoriale T_p tangente in p a V.

Si tralascia la dimostrazione del seguente

LEMMA 1. - *Per ogni $p \in \bar{V}$ e per ogni $\bar{X} \in \bar{\mathfrak{X}}$, esistono un intorno aperto W di p in V ed un campo vettoriale $X \in \mathfrak{X}$ tali che*

$$X|\bar{V} \cap W = \bar{X}|\bar{V} \cap W.$$

Si proverà il seguente:

LEMMA 2. - *La restrizione di A a $\bar{V}$ appartiene a $\bar{\mathfrak{T}}_1^1$.*

Infatti, per ogni $p \in \bar{V}$ e per ogni $\bar{X}_p \in \bar{T}_p$, si ha

$$(A_p(\bar{X}_p))\ (f) = (A_p((df)_p))\ (\bar{X}_p) = 0,$$

(9) i è l'ingezione canonica di $\bar{V}$ in V e $(i_*)_p$ il differenziale di i in p.

quindi $A_p(\overline{X}_p) \in \overline{T}_p$ e conseguentemente l'applicazione $\overline{A}_p : \overline{X}_p \to A_p(\overline{X}_p)$ di $\overline{T}_p$ in sè è un endomorfismo di $\overline{T}_p$, cioè un elemento dello spazio tensoriale di psecie (1.1) su $\overline{T}_p$.

Si proverà che il campo tensoriale $\overline{A} : p \to \overline{A}_p$ su $\overline{V}$ è differenziabile.

Per ogni $p \in \overline{V}$ esistono (cfr. [3], prop. 1.1, pag. 8) un sistema di coordinate locali $x^1, \dots, x^n$ in un intorno aperto U di p su V ed un sistema di coordinate locali $y^1, \dots, y^{n-1}$ nell'intorno $\overline{U} = U \cap \overline{V}$ di p su $\overline{V}$ tali che

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x^n}\right)_q \neq 0, \qquad \forall q \in U,$$

$$y^\alpha(q) = x^\alpha(q), \qquad \forall q \in \overline{U} \text{ e } 1 \leq \alpha \leq n-1.$$

Posto $\lambda_\alpha = \dfrac{\partial f}{\partial x^\alpha} \Big/ \dfrac{\partial f}{\partial x^n}$ $\quad (1 \leq \alpha \leq n-1)$, si ha

$$\left(\frac{\partial}{\partial y^\alpha}\right)_q = \left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\right)_q + \lambda_\alpha(q)\left(\frac{\partial}{\partial x^n}\right)_q, \qquad \forall q \in \overline{U} \text{ e } 1 \leq \alpha \leq n-1.$$

Indicate con $\overline{A}^\alpha_\beta$ le componenti di $\overline{A}$ su $\overline{U}$ e con A^i_j le componenti di A su U, si ottiene allora

$$\overline{A}^\alpha_\beta(q) = (A^\alpha_\beta + A^\alpha_n \lambda_\beta)(q), \qquad \forall q \in \overline{U}. \tag{8.2}$$

Segue quindi che il campo tensoriale $\overline{A}$ è differenziabile.

Si può provare inoltre che:

PROP. 2. - *Condizione necessaria e sufficiente affinchè $\overline{A}$ abbia rango $n-1$ su $\overline{V}$ e che esista una famiglia $(U_k, \varphi_k)_{k \in K}$ di carte ammissibili per V tale che*

$$V \subset \bigcup_{k \in K} U_k \tag{8.3}$$

ed inoltre, per ogni $k \in K$, dette A^i_j le componenti di A rispetto ad (U_k, φ_k), la matrice

$$\left\| \begin{matrix} A^1_1 \dots A^1_n \\ \dots\dots\dots\dots \\ A^n_1 \dots A^n_n \\ \dfrac{\partial f}{\partial x^1} \dots \dfrac{\partial f}{\partial x^n} \end{matrix} \right\|$$

abbia rango n in ogni punto $q \in U_k \cap \overline{V}$ (10).

(10) Ovviamente si è posto $x^i = pr_i \circ \varphi_k$.

Segue in particolare che:

PROP. 3. - *Condizione necessaria e sufficiente affinchè $\bar{A}$ abbia rango $n-1$ su $\bar{V}$ è che esista una famiglia $(U_k, \varphi_k)_{k\in K}$ di carte ammissibili per V tale che sia verificata la (8.3) ed inoltre, per ogni $k \in K$, la matrice delle componenti di A rispetto ad (U_k, φ_k) sia simmetrica* [11].

Si proverà che:

PROP. 4. - *Se $D(df) = 0$, la pseudoconnessione Γ induce sulla ipersuperficie $\bar{V}$ una pseudoconnessione $\bar{\Gamma}$ tale che, detta $\gamma : t \to \gamma(t)$ $(t \in I)$ una curva su $\bar{V}$, ammissibile per $\bar{\Gamma}$, un campo vettoriale $\bar{Y}(t) \in \bar{T}_{\gamma(t)}$ $(t \in I)$ lungo γ è parallelo rispetto ad un campo vettoriale $\bar{X}(t) \in \bar{T}_{\gamma(t)}$ $(t \in I)$ secondo $\bar{\Gamma}$, se e solamente se $\bar{Y}(t)$ è parallelo rispetto ad $\bar{X}(t)$ secondo Γ.*

Siano $\bar{X}$, $\bar{Y} \in \bar{\mathfrak{X}}$, per il lemma 1, per ogni $p \in \bar{V}$ esistono un intorno aperto W di p in V e due campi vettoriali X, $Y \in \mathfrak{X}$ tali che

$$X \mid W \cap \bar{V} = \bar{X} \mid W \cap \bar{V} \quad \text{e} \quad Y \mid W \cap \bar{V} = Y \mid W \cap \bar{V}.$$

Si ponga

$$(\bar{B}_{\bar{X}} \bar{Y})_p = (D_X Y)_p .$$

Essendo $D(df) = 0$, dalla (8.1) segue

$$(\bar{B}_{\bar{X}} \bar{Y})_p(f) = (D_X Y)_p(f) = Y_p(f) \; A_p(X_p) = \bar{Y}_p(f) \; A_p(X_p) = 0,$$

quindi $(\bar{B}_{\bar{X}} \bar{Y})_p \in \bar{T}_p$.

Si proverà inoltre che $(\bar{B}_{\bar{X}} \bar{Y})_p$ non dipende da X ed Y. Infatti, con le notazioni relative alla dimostrazione del lemma 2, si indichino con $\bar{X}^\alpha$, $\bar{Y}^\alpha$ $(1 \leq \alpha \leq n-1)$ rispettivamente le componenti di $\bar{X}$, $\bar{Y}$ su $\bar{U}$ e con (A^i_j, Γ^k_{ij}) le componenti di Γ su U e si ponga

$$\bar{\Gamma}^\alpha_{\beta\gamma}(q) = (\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} + \lambda_\beta \Gamma^\alpha_{n\gamma} + \lambda_\gamma \Gamma^\alpha_{\beta n} + \lambda_\beta \lambda_\gamma \Gamma^\alpha_{nn})(q) \tag{8.4}$$

per ogni $q \in \bar{U}$ ed α, β, $\gamma \in \{1, \ldots, n-1\}$; si ha allora

$$(\bar{B}_{\bar{X}} \bar{Y})_p = (\bar{A}^\beta_\gamma \bar{X}^\gamma \frac{\partial \bar{Y}^\alpha}{\partial y^\beta} + \bar{\Gamma}^\alpha_{\beta\gamma} \bar{X}^\beta \bar{Y}^\gamma)(p).$$

Ne consegue che l'applicazione $\bar{B}_{\bar{X}} \bar{Y} : p \to (\bar{B}_{\bar{X}} \bar{Y})_p$ $(p \in \bar{V})$ è un campo vettoriale differenziabile su $\bar{V}$; si verifica facilmente che l'applicazione

$$\bar{B}_{\bar{X}} : \bar{Y} \to \bar{B}_{\bar{X}} \bar{Y}$$

(11) È sufficiente che ciò avvenga per ogni $q \in \bar{V} \cap U_k$.

è un R-endomorfismo di $\bar{\mathfrak{X}}$ tale che, per ogni $\bar{g} \in \bar{\mathfrak{F}}$, risulta

$$\bar{B}_{\bar{X}} \bar{g}\, \bar{Y} = \bar{g}\, \bar{B}_{\bar{X}} \bar{Y} + \bar{A}(\bar{g},\ \bar{X})\ \bar{Y};$$

si verifica inoltre che l'applicazione

$$\bar{B} : \bar{X} \rightarrow \bar{B}_{\bar{X}}$$

di $\bar{\mathfrak{X}}$ nell'$\bar{\mathfrak{F}}$-modulo degli R-endomorfismi di $\bar{\mathfrak{X}}$ è $\bar{\mathfrak{F}}$-lineare.

Per le proposizioni 4 e 5 del n. 1, la coppia $(\bar{A},\ \bar{B})$ definisce una pseudoconnessione lineare $\bar{\Gamma}$ su $\bar{V}$.

Si ha subito che la pseudoconnessione lineare $\bar{\Gamma}$ indotta da Γ su $\bar{V}$ verifica la proprietà enunciata.

Si ha inoltre che le componenti $(\bar{A}^{\alpha}_{\beta},\ \bar{\Gamma}^{\alpha}_{\beta\gamma})$ di $\bar{\Gamma}$ su $\bar{U}$ sono date dalle (8.2), (8.4).

Dalla proposizione 4 e dalla proposizione 2 del n. 7 segue che:

PROP. 5. - *Se $D(df) = 0$ ed $\bar{A}$ ha rango $n-1$ su $\bar{V}$, allora la pseudoconnessione Γ determina su $\bar{V}$ una connessione lineare $\bar{\Gamma}$ tale che, detta $\gamma : t \rightarrow \gamma(t)$ $(t \in I)$ una qualunque curva su $\bar{V}$, un campo vettoriale $\bar{Y}(t) \in \bar{T}_{\gamma(t)}$ $(t \in I)$ lungo γ è parallelo secondo $\bar{\Gamma}$, se e solamente se $\bar{Y}(t)$ è parallelo secondo Γ rispetto al campo vettoriale $\bar{X}(t) \in \bar{T}_{\gamma(t)}$ $(t \in I)$ tale che, per ogni $t \in I$, $A_{\gamma(t)}(\bar{X}(t)) = \dot{\gamma}(t)$.*

BIBLIOGRAFIA

[1] C. DI COMITE, *Pseudoconnessioni tensoriali di specie (r, s) di ordine n*, Annali di Mat., serie IV, T. LXXIX, 1968.

[2] S. HELGASON, *Differential geometry and symmetric spaces*, Accademic Press, 1962.

[3] S. KOBAYASHI - K. NOMIZU, *Foundation of differential geometry*, Interscience Publisher, 1963.