Problemes aux limites en theorie des distributions.

PAUL KRÉE (*)

Résumé. - *Etude de la méthode des potentiels pour résoudre des problèmes aux limites relatifs à certains opérateurs différentiels. Résolution et discussion des problèmes aux limites pour un système différentiel elliptique lorsque les données sont des distributions (le problème étant elliptique à droite ou à gauche).*

Soit $\bar{\Omega}$ une variété compacte ($\mathcal{C}^\infty$ et réelle) de bord ω plongée dans une variété $\mathcal{C}^\infty$ et réelle M , $\bar{\Omega}$ et M ont la même dimension n . P désigne un opérateur différentiel elliptique d'ordre m .

$$\mathcal{C}^\infty(M, E) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(M, F)$$

où E et F sont deux fibrés vectoriels complexes de base M . B désigne un opérateur pseudo différentiel (*o.p.d.*) sur ω :

$$\mathcal{C}^\infty(\omega, E^m) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(\omega, G)$$

où G est un fibré vectoriel complexe de base ω et E^m est la somme directe de m exemplaires du fibré E . Soit v_j dans $\mathcal{C}^\infty(\omega, E)$, $j = 0, 1 \dots m-1$. Soit k le plus petit entier tel que $B(v_0, \dots, v_{m-1})$ ne dépende que de $(v_0, \dots, v_{k-1})$ seulement. V étant un champ de vecteurs défini dans M au voisinage de ω et transverse à ω , on suppose qu'une carte de M transforme localement M en $\mathbb{R}_x^n$, Ω en le demi-espace où $x_n > 0$ et V en $\frac{\partial}{\partial x_n}$. On se donne f dans $\mathcal{D}'(\Omega, F)$ et g dans $\mathcal{D}'(\omega, G)$. Le problème aux limites général relatif à ces données consisterait à:

trouver u dans $\mathcal{D}'(\Omega, F)$ tel que

$$(1) \quad \begin{aligned} Pu &= f \text{ dans } \Omega \\ B(\gamma u) &= g \text{ sur } \partial\Omega = \omega \end{aligned}$$

où γu est formé par la collection des traces transverses de u sur le bord ω (où $x_n = 0$) $u_j = \gamma_j u = \left(\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_n} \right)^j u(\cdot, 0)$ avec $j = 0, 1 \dots, m-1$. Le problème

(*) Entrata in Redazione il 6 dicembre 1968.

de Dirichlet est un problème de ce type avec $M = E_x^n$, Ω = boule unité, $P = \Delta$, $m = 2$, $k = 1$. Pour le problème de NEUMAN, on a $k = 2$ et X est le champ des vecteurs normaux...

Lorsque les traces u_j ($j = 0, \dots, k - 1$) sont « naturellement définies » (par exemple lorsque u est dans $\mathcal{C}^k(\bar{\Omega})$), l'interprétation du problème (1) ne présente aucune difficulté: on dira que le problème (1) a naturellement un sens.

Mais lorsqu'il n'en est plus ainsi (par exemple lorsque u est $\mathcal{C}^\infty$ dans Ω et à croissance lente au voisinage du bord), il est nécessaire de préciser le sens dans lequel le problème (1) doit être interprété. Il nous faut donc donner un sens au problème (1) en théorie des distributions. On peut se poser des problèmes analogues d'interprétation pour des opérateurs P non elliptiques.

Dans le cas où P est une équation, où B est un système normal d'opérateurs différentiels sur le bord qui recouvre P , et où f satisfait à certaines restrictions, LIONS et MAGENÈS ([14]) ont interprété le problème (1) à l'aide d'une formule de GREEN; ces auteurs ont aussi discuté (1) en utilisant des techniques de transposition et d'interpolation. Dans le cas où P est un o.p.d. de type 0, une interprétation et une résolution de (1) peuvent être déduites du travail [4] de L. BOUTET de MONVEL les traces étant interprétées à l'aide de noyaux de Poisson ([3]).

Dans le présent travail, on se fixe à priori deux interprétations naturelles et directes des $\gamma_j u$ ($j = 0, \dots, k - 1$):

- ou bien comme valeurs au bord (u étant semi-régulière par rapport à x_n : voir [18])
- ou bien comme traces fonctionnelles (définies par prolongement continu).

Puis l'on énonce une condition nécessaire et suffisante pour que le problème (1) ait un sens relativement à ces interprétations: voir § 4

(2) *On fait l'hypothèse essentielle que la distribution u cherchée se prolonge en une distribution définie sur M :* l'exemple (6.c) montre qu'une hypothèse de ce genre est nécessaire si l'on ne veut pas utiliser des fonctions généralisées qui ne soient pas des distributions.

On énonce (§ 3) deux résultats prouvant l'existence de valeurs au bord (voir définition au § 1) pour une solution u de l'équation homogène. Le deuxième résultat vaut même si P est non elliptique et permettrait de généraliser les classes de HARDY H^p . On indique aussi une généralisation de la formule de GREEN (dans le cas de solutions distributions) et un théorème de prolongement des solutions à travers une hypersurface régulière. On étudie au § 2 la représentation d'une solution de l'équation homogène à l'aide de potentiels. Vus ces préliminaires, on constate alors (§ 5) que la méthode de

L. HÖRMANDER ([12]) pour résoudre (resp. discuter) un problème du type (1) elliptique à droite (resp. à gauche) dans le cas où γu a directement un sens, s'étend au cas où la trace γu doit être *interprétée*. Notons que la méthode ci-dessus permet de résoudre (resp. discuter) les problèmes (1) elliptiques à droite (resp. à gauche) dans des espaces de distributions différents des espaces de Sobolev H^s . (par exemple des espaces H^s anisotropes, des espaces de BESOV $B_q^{s,p}$, et en particulier des espaces de fonctions hölderiennes). En effet, alors que la méthode de LIONS MAGENÈS nécessite entre autres des propriétés de transposition et d'interpolation (voir problème 11.3 et 11.4 de [14]), la méthode employée ici et détaillée au point (37) pour les espaces de SOBOLEV, utilise simplement des propriétés de prolongement, de trace, et de continuité de l'opérateur associé à un o.p.d.

§ 1. - Préliminaires.

Nous rappelons d'abord quelques résultats sur les *distributions prolongeables* (pour résoudre (1), on supposera toujours que u est une distribution prolongeable). Afin de définir les deux interprétations du problème (1) que nous considérerons (§ 4) nous définissons ci-après les valeurs au bord transverses et les traces fonctionnelles d'une distribution (non quelconque) sur Ω .

Distributions prolongeables.

Soit Ω un ouvert de $\mathbf{R}^n$. On peut, dans ce qui suit, remplacer $\mathbf{R}^n$ par une variété réelle dénombrable à l'infini M . Soit T dans $\mathcal{D}'(\Omega)$. (de même, on peut considérer des sections distributions de fibrés au lieu de distributions à valeurs complexes). On dit que T est prolongeable s'il existe $\tilde{T}$ dans $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$, telle que T soit la restriction de $\tilde{T}$ à $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$. L'ensemble des distributions, définies sur Ω et qui sont prolongeables, est noté $\mathcal{D}'_p(\Omega)$.

(3) *Proposition.*

a) *Pour que la distribution T définie sur Ω soit prolongeable, il faut et il suffit que la forme linéaire T sur $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ soit continue, lorsque $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ est muni de la topologie induite par $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbf{R}^n)$.*

b) *Si T est une distribution prolongeable définie sur Ω , il existe un prolongement de T porté par $\bar{\Omega}$.*

Cette proposition résulte du théorème de HAHN BANACH. Notons que la condition (3-a) peut s'écrire:

$$(4) \quad \forall K \subseteq \mathbf{R}^n, \quad \exists C \text{ et } m \text{ t.q.: } \forall \varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega), \quad \text{Supp } \varphi \subseteq K;$$

$$| \langle T, \varphi \rangle | \leq C \sup_{\substack{x \in K \\ |a| \leq m}} \left| \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^a \varphi(x) \right|$$

On a la :

(5) *Caractérisation des distributions prolongeables.*

$\mathfrak{D}(\mathbf{R}^n, \mathbb{C}\Omega)$ désigne l'ensemble des fonctions de $\mathfrak{D}(\mathbf{R}^n)$ qui s'annulent sur $\mathbb{C}\Omega$ ainsi que toutes leurs dérivées. Cet espace est muni de la topologie de $\mathfrak{D}(\mathbf{R}^n)$. Alors l'ensemble des distributions prolongeables définies sur Ω s'identifie au dual topologique de $\mathfrak{D}(\mathbf{R}^n, \mathbb{C}\Omega)$.

(6) *Exemples.*

a) Soit f mesurable: $\Omega \rightarrow \mathbf{C}$, à croissance lente au voisinage du bord de Ω :

$$\forall K \subseteq \mathbf{R}^n, \quad \exists K > 0 \quad \text{t.q.} \quad \forall x \in K \cap \Omega, \quad f(x) = \mathcal{O}(d^k(x, \mathbb{C}\Omega))$$

On suppose que Ω est un « ouvert régulier » (voir (7)).

Alors, on peut définir un prolongement de f par un procédé de partie finie en utilisant une partie finie réelle ou complexe (voir [17]).

b) Toute distribution prolongeable représentée par une fonction $\mathcal{C}^\infty$ n'est pas nécessairement à croissance lente au voisinage du bord. Si l'on considère par exemple la distribution T sur $\mathbf{R}$ représentée par la fonction

$$T(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \sin\left(\exp \frac{1}{x}\right) & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

T est portée par $\Omega = \mathbf{R}^+$. Donc, la restriction de $f = T'$ à $\mathbf{R}^+$ est prolongeable, et pourtant, f n'est pas à croissance lente au voisinage de l'origine.

c) Si f est solution dans un ouvert régulier Ω d'un opérateur différentiel elliptique P , f n'est pas forcément prolongeable en une distribution définie sur $\mathbf{R}^n$. Par exemple, prenons:

$$n = 2, \quad P = \frac{\partial}{\partial \bar{z}}, \quad \Omega = \text{le disque unité}, \quad f(z) = \exp\left(\frac{1}{1-z}\right).$$

En utilisant par exemple (5), on peut voir que f n'est pas prolongeable en une distribution.

(7) *Ouvert régulier Ω , surfaces parallèles ω_ε , dérivées transverses.*

On suppose que $\bar{\Omega}$ est une variété C^∞ à bord de la variété M , dénombrable à l'infini. ($\bar{\Omega}$ et M étant de même dimension n). On se donne un champ de vecteur V défini sur M au voisinage du bord ω de $\bar{\Omega}$, transverse à ω et

dirigé vers l'intérieur de Ω . On peut résoudre localement (et pour t petit) le système différentiel $\frac{dx}{dt} = X$, $x(0) = x_0 \in \omega$ ce qui permet localement dans ω :

— de définir les lignes de force du champ X

— de définir des coordonnées curvilignes dans M au voisinage de ω , le point $x(t)$ étant repéré par (x_0, t) .

Si ω est compact, ces coordonnées sont définies pour $|t| < \varepsilon_0$. On peut donc supposer qu'au voisinage de ω , la structure de variété de M est définie par un nombre fini de cartes ayant la propriété suivante. Pour x quelconque dans ω , il existe un voisinage de x dans $\bar{\Omega}$ transformé en un voisinage de l'origine dans le demi-plan de $\mathbf{R}_x^n$ où $x_n > 0$. Le bord ω est transformé localement en l'hyperplan où $x_n = 0$, le champ V étant appliqué sur le champ $\frac{\partial}{\partial x_n}$.

Pour simplifier, le champ V est noté $\frac{\partial}{\partial x_n}$. On appelle bord parallèle $\omega_\varepsilon (|\varepsilon| < \varepsilon_0)$ la sous-variété de M où $t = \varepsilon$. Chaque carte définie cidessus applique localement ω_ε sur l'hyperplan de $\mathbf{R}_x^n$ où $x_n = \varepsilon$.

Dans le cas où le bord ω n'est pas compact, il n'est pas certain qu'il existe un champ transverse X tel que pour ε_0 suffisamment petit, les cartes locales définies ci-dessus existent pour tout $|t| \leq \varepsilon_0$ au voisinage de tout ω . Nous limiterons au cas où un tel champ X existe.

(8) Valeurs au bord et traces.

Pour simplifier, on lit toute distribution sur M définie au voisinage de ω à l'aide des cartes définies précédemment.

(9) Définition.

Soit Ω une variété à bord et u dans $\mathcal{D}'(\Omega)$.

a) On dit que u admet des valeurs au bord transverse jusqu'à l'ordre k si

$$\left(\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_n}\right)^\mu u(x', x_n) \in \mathcal{C}^0(\mathbf{R}_{x_n}^+, \mathcal{D}'(\mathbf{R}_{x'}^{n-1})) \quad \mu = 1, \dots, k$$

c'est-à-dire si $u(x', x_n) \in \mathcal{C}^k(\mathbf{R}_{x_n}^+, \mathcal{D}'(\mathbf{R}_{x'}^{n-1}))$

On pose alors

$$\gamma^\mu u = \left(\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_n}\right)^\mu u(\cdot, 0)$$

$\gamma^\mu u$ est appelée la trace transverse d'ordre μ .

b) Soit X un sous espace vectoriel topologique de $\mathfrak{D}'(\Omega)$ où $X \cap \mathcal{C}^\infty(\bar{\Omega})$ est dense. On dit que les éléments de X admettent des traces transverses jusqu'à l'ordre k si les applications (pour $0 \leq \mu \leq k$):

$$\mathcal{C}^\infty(\bar{\Omega}) \cap X \rightarrow \mathcal{C}^\infty(\omega)$$

$$u \rightarrow \gamma_\mu u$$

se prolongent par continuité en des applications continues de X dans $\mathfrak{D}'(\omega)$. γ_μ est appelé la X -trace transverse d'ordre μ de u .

(10) *Prolongement de distributions admettant des valeurs au bord transverse, jusqu'à l'ordre k .*

En utilisant par exemple le développement de TAYLOR à l'origine de la fonction $x_n \rightarrow u(\cdot, x_n)$, on voit que toute u de $\mathcal{C}^k(\mathbf{R}_{x_n}^+, \mathfrak{D}'(\mathbf{R}_{x'}^{n-1}))$ admet un prolongement dans $\mathcal{C}^k(\mathbf{R}_{x_n}, \mathfrak{D}'(\mathbf{R}_{x'}^{n-1}))$ donc dans $\mathfrak{D}'(\mathbf{R}_{x_n}, \mathfrak{D}'(\mathbf{R}_{x'}^{n-1})) = \mathfrak{D}'(M)$.

(11) *Si une distribution admet une valeur au bord d'ordre 0, elle est prolongeable. En prolongeant la fonction $x_n \rightarrow u(\cdot, x_n)$ par 0 pour $x_n < 0$, on obtient une fonction bornée à valeurs dans $\mathfrak{D}'(\mathbf{R}_{x_n}, \mathfrak{D}'(\mathbf{R}_{x'}^{n-1}))$ c'est-à-dire une distribution sur $\mathbf{R}^n$: cette distribution est appelée le prolongement canonique de u .*

Noter qu'on peut considérer $\gamma_\mu u$ ($1 \leq \mu \leq k$) comme la valeurs au bord transverse d'ordre μ d'un prolongement de u .

De la même manière, avec les hypothèses de (9-b), s'il existe un sous-espace vectoriel topologique $\tilde{X}$ de $\mathfrak{D}'(M)$ tel que

— l'application de restriction à Ω : $\tilde{X} \text{ restr. } \rightarrow X$ soit surjective

— cette application admet un relèvement continu rel: $X \rightarrow \tilde{X}$, alors on peut considérer $\gamma_\mu u$ comme la $\tilde{X}$ -trace transverse d'ordre μ d'un relèvement $\tilde{u}$ de u .

(12) *Exemples*

a) *Espaces H^p de Stein et Weiss.*

$$\Omega = \mathbf{R}_x^{n+} = \mathbf{R}_{x_n}^+ \times \mathbf{R}_{x'}^{n-1}, \quad \text{et } P(x, D) = \Delta.$$

Soit u une fonction définie et harmonique sur Ω et telle que

$$u \in L^\infty(\mathbf{R}_{x_n}^+, L^p(\mathbf{R}_{x'}^{n-1})) \quad \text{soit} \quad \sup_{x_n > 0} \int |f(x', x_n)|^p dx' < \infty$$

u appartient à $\mathcal{D}'_p(\Omega)$. On peut montrer que u admet une valeur au bord dans L^p (voir [18] et aussi (28-a)) si $1 < p < \infty$. La classe de telles fonctions u généralise la classe H^p de HARDY des fonctions holomorphes pour $|z| \leq 1$ et telles que

$$\sup_{r < 1} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})| d\theta < \infty$$

b) *Espaces H^s de Sobolev.*

Les théorèmes usuels (voir [7] chap. 2) permettent de montrer que toute distribution u de H^s_{loc} admet des valeurs au bord transverses d'ordre k si $s > k + \frac{1}{2}$.

c) *Espaces H^s avec poids.*

On pose

$$H^s_\alpha(\mathbf{R}^n_+) = \{ u \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n_+); \quad x_n^\alpha D^\beta u \in L^2(\mathbf{R}^n_+) \text{ pour } |\beta| \leq s \}$$

De [6], il résulte que les distributions de cet espace admettent des H^s_α — traces fonctionnelles si $s > \alpha + \frac{1}{2}$ et que

— ces traces sont nulles si $\alpha + \frac{1}{2} \leq 0$

— ces traces sont dans $H^{s-\alpha-\frac{1}{2}}$

Noter que si $\alpha < 0$, les éléments de $H^s_\alpha(\mathbf{R}^n_+)$ n'ont pas de traces (pour s convenable) sur un hyperplan où x_n est une constante positive.

§ 2. — **Représentation d'une solution de l'équation homogène à l'aide de potentiels.**

Soit $\bar{\Omega}$ une variété à bord $\mathcal{C}^\infty$ de la variété $\mathcal{C}^\infty$ réelle M ($\dim \bar{\Omega} = \dim M = n$). Soit P un système différentiel d'ordre m sur M . (on étudie au voisinage du bord ω de $\bar{\Omega}$ les cartes définies au § précédent. Si A est une distribution sur M supportée par ω , elle s'écrit localement

$$(13) \quad A = \sum_{\nu=0}^M u_\nu(x') \times \left(\frac{\partial}{i\partial x_n} \right)^\nu \varepsilon_0(x_n)$$

avec u_ν dans $\mathcal{G}'(\mathbf{R}^{n-1}_x)$. On dit que u_ν est la densité de la multicouche $u_\nu \times \varepsilon^{(\nu)}$.

Soit T un paramétrise à gauche de P :

$$(14) \quad T \circ P = Id + r$$

où r est un opérateur de noyau $\mathcal{C}^\infty$. On suppose que T envoie $\mathfrak{D}'(M)$ dans $\mathfrak{D}'(M)$. $T(A)$ est appelé le potentiel de la distribution A . Si u dans $\mathfrak{D}'_p(\Omega)$ est telle que $Pu = 0$, on cherche à représenter u (dans Ω) comme un potentiel (d'une charge étalée sur ω). La proposition (15) donne des cas où une telle représentation existe à une fonction $\mathcal{C}^\infty$ près. On cherche ensuite à simplifier cette représentation. Puis l'on montre que si P est elliptique, u est à croissance lente au voisinage du bord (l'intérêt de ceci résulte de (6.b)). Si v est dans $\mathcal{C}^0(\Omega)$, v^0 désigne la distribution sur M représentée par la fonction égale à $v(x)$ pour x dans Ω et par 0 si non.

(15) *Proposition.*

a) Soit u dans $\mathcal{C}^m(\bar{\Omega})$.

(15') Alors $P(u^0) = (Pu)^0 + \tilde{P}(\gamma u)$ où $\tilde{P}(\gamma u)$ est une distribution étalée sur $\partial\Omega$ et qui dépend de u , seulement par l'intermédiaire de la donnée de Cauchy:

$$\gamma u = (\gamma_0 u, \gamma_1 u, \dots, \gamma_{m-1} u)$$

Si $Pu = 0$ dans Ω , on a

$$(16) \quad u^0 + ru^0 = T(\tilde{P}(\gamma u))$$

b) Soit u dans $\mathfrak{D}'_p(\Omega)$ telle que $Pu = 0$.

Soit $\tilde{u}$ un prolongement de u porté par $\bar{\Omega}$. Alors $P\tilde{u} = A$, A étant une distribution portée par ω et

$$(17) \quad TP\tilde{u} = \tilde{u} + r\tilde{u} = TA.$$

Les formules (16) et (17) figurent dans [10], si P est elliptique.

(18) *Remarque sur la représentation sous forme de potentiel d'une solution u de l'équation homogène $Pu = 0$.*

Pour simplifier, on suppose que T est une solution élémentaire bilatère de P . ($TP = Id$, $PT = Id$) et que u est dans $\mathcal{C}^\infty(\bar{\Omega})$. On peut se poser les;

(19) *questions*

a) Que peut-on dire de toutes les distributions A de support ω et telles que;

$$(20) \quad u = TA \quad \text{dans } \Omega.$$

b) *Comment peut-on réduire le nombre de multicouches composant A si A est telle que (20).*

Notons que les traces $\gamma_j u$ ($j = 0, \dots, m-1$) sont reliées par des o.p.d.: voir par exemple [10]. De plus, L. BOUTET de MONVEL a remarqué (voir [4]) que si le bord est non caractéristique pour P , il existe A vérifiant (20), A étant composée par des multicouches d'ordre au plus $m-1$. On peut noter encore ceci.

(21) *proposition.*

Soit A' une distribution portée par ω formée par une somme de multicouches de densité $\mathcal{C}^\infty$. Pour que A' soit telle que $TA' = 0$ dans Ω , il faut et il suffit qu'il existe v dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{G}\Omega)$ telle que $A' = \tilde{P}'(\gamma v)$ et $Pv = 0$ dans $\mathbb{G}\Omega$.

Cette proposition est vraie sous les:

(22) *Conditions*

(a) Si 0v est la distribution sur M représentée par la fonction $v(x)$ sur $\mathbb{G}\Omega$ et par 0 sur Ω , $\tilde{P}'(\gamma v)$ est défini par la formule de GREEN

$$P({}^0v) = {}^0(\tilde{P}v) + \tilde{P}'(\gamma v) = \tilde{P}'(\gamma v)$$

(b) T agit sur $\tilde{P}'(\gamma v)$

(c) T vérifie la condition de la régularité: TA' est dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{G}\Omega)$ si les densités de A' sont $\mathcal{C}^\infty$.

En effet:

La condition de (21) est suffisante car vu (22.a) et (22.b), on a

$$TP({}^0v) = {}^0v = T\tilde{P}'(\gamma v)$$

done, le potentiel de $\tilde{P}'(\gamma v)$ est nul sur Ω . Réciproquement si $TA' = 0$ dans Ω , $v = TA'$ est porté par $\mathbb{G}\Omega$ et vu (22.c), v est dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{G}\Omega)$.

On a $Pv = PTA' = A'$. Vu (22.a), on a $A' = \tilde{P}'(\gamma v)$.

(23) *Exemple.*

Soit u harmonique dans un domaine Ω de $M = E^n$, et u dans $\mathcal{C}^\infty(\bar{\Omega})$, Δ admet une solution élémentaire bilatère T . On prend pour V un champ des vecteurs normaux à la frontière ω de Ω . Vu (16), on a $u = T\tilde{P}(\gamma u)$ avec $\tilde{P}(\gamma u) = u_0 \times \delta' + u_1 \times \delta$. Si l'on sait trouver v dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{G}\Omega)$, telle que $\Delta v = 0$ dans $\mathbb{G}\bar{\Omega}$, admettant u_1 comme trace d'ordre 1, alors $u = T(\tilde{P}(\gamma u) + A')$ dans Ω avec $A' = -u_1 \times \delta + \dots$

Donc $u = TA$ dans Ω où A est une double couche étalée sur $\partial\Omega$. C'est cette représentation qui est utilisée pour résoudre le théorème de Dirichlet. On peut montrer de la même façon que toute fonction harmonique dans un ouvert régulier de $\mathbf{R}^n$ peut être représentée comme le potentiel d'une simple couche.

(24) *Relation entre la régularité des charges et celle de leurs potentiels.*

On sait (Cf [3], [11], [17]) que si T est un paramétrix d'un opérateur différentiel elliptique, T vérifie la condition de la régularité. On a encore la

(25) *proposition.*

Soit T un opérateur pseudo différentiel et: $A = u(x') \times \delta_0^{(\mu)}(x_n)$ avec u dans $\mathcal{S}'$. Alors le potentiel TA est à croissance lente au voisinage du bord.

Démonstration.

Quitte à remplacer T par $T \circ (D_n)^\mu$, on peut supposer que $\mu = 0$. Soit $p(x, x - y)$ le noyau de T . On a $v = TA$ avec

$$\begin{aligned} v(x) &= \int \int p(x, x - z) u(z') \times \delta_0(z_n) dz' dz_n \\ &= \int p(x', x_n; x' - z', x_n) u(z') dz'. \end{aligned}$$

Représentant u par une dérivée de la fonction continue f , il vient:

$$\begin{aligned} v(x) &= \int p(x', x_n; x' - z', x_n) \left(\frac{\partial}{\partial z'} \right)^{\alpha'} f(z') dz' \\ v(x) &= \int \left(\frac{\partial}{\partial x'} \right)^{\alpha'} p(x', x_n; x' - z', x_n) f(z') dz' \end{aligned}$$

Cette expression et la caractérisation ([13]) du noyau de p montrent que pour l suffisamment grand, $x_n^l v(x)$ est une fonction continue.

§ 3. - Existence de valeurs au bord transverses d'ordre quelconque pour toute solution de l'équation homogène.

Nous indiquons deux raisonnements permettant de prouver l'existence de valeurs au bord transverses d'ordre quelconque pour une solution u de l'opérateur différentiel elliptique P défini au voisinage de la variété à bord Ω (le bord ω est supposé très régulier). Le premier raisonnement (proposition (26)) est une variante d'un raisonnement de HÖRMANDER ([10]).

Le deuxième raisonnement suppose que l'opérateur P ne comporte pas de terme rectangle, mais il ne suppose pas que P est un opérateur elliptique. On indique ensuite des corollaires de l'existence de ces valeurs au bord: d'abord une extension de la formule de GREEN (proposition (29)) puis des conditions suffisantes pour qu'une solution de l'équation homogène en dehors d'une variété régulière soit en fait une solution C^∞ définie dans tout l'espace.

(26) *Proposition.*

Soit P un opérateur différentiel elliptique défini sur M au voisinage de la variété à bord Ω (Ω et M de même dimension n , le bord ω est supposé très régulier, mais Ω n'est pas forcément compact). Soit u dans $\mathcal{D}'_P(\Omega)$ tel que $Pu = 0$ dans Ω . Alors u appartient à $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}_n^+, \mathcal{D}'(\mathbf{R}_n^{n-1}))$, ce qui signifie que pour que pour tout μ , u admet une valeur au bord transverse d'ordre μ (définition (9)).

Preuve.

On utilise les notations de §§ 1 et 2. Soit T un paramétrix compact (compactly supported dans la terminologie de [9]). Il suffit donc de montrer vu (9), que pour tout ν ,

$$(D_n^\mu T(u \otimes \delta^{(\nu)}))(x, x_n) \quad \text{avec} \quad u \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}_n^{n-1})$$

tend vers une limite dans $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^{n-1})$ lorsque x_n tend vers 0 ($x_n > 0$).

On utilise les résultats de [10]. Si

$$t(x, \zeta) \sim \sum t_j(x, \zeta)$$

On pose

$$R_J(x, \zeta) = \begin{cases} t(x, \zeta) & \text{si } |\zeta| \leq 1 \\ t(x, \zeta) - \sum_{j < J} t_j(x, \zeta) & \text{si } |\zeta| > 1 \end{cases}$$

Γ_ζ , désigne une courbe simple du demi-plan où $\text{Im } \zeta_n \geq 0$, Γ_ζ , enlace les poles de $t_j(x, \zeta', \zeta_n)$; et si $|\zeta'| < 1$, Γ_ζ , contient le segment d'extrémités $\pm(1 - |\zeta|^2)^{1/2}$. Lorsque u est dans $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbf{R}_n^{n-1})$, Hörmander montre que si $x_n > 0$:

$$\begin{aligned} D_n^\mu T(u \otimes \delta^{(\nu)}) &= (2\pi)^{-n} \sum_{j < J} \int e^{i\langle x', \zeta' \rangle} \hat{u}(\zeta') d\zeta' \int_{\Gamma_{\zeta'}} ((D_n + \zeta_n)^\mu t_j(x, \zeta) \zeta_n^\mu x e^{i x_n \zeta_n} d\zeta_n \\ &+ (2\pi)^{-n} \int ((D_n + \zeta_n)^\mu R_J(x, \zeta) \zeta_n^\mu \hat{u}(\zeta') e^{i\langle x', \zeta' \rangle} d\zeta' = \sum_{j < J} I_j + \Pi \end{aligned}$$

$D_n^\mu T(u \otimes \delta^{(\nu)})$ apparait donc comme la somme de deux termes que l'on note $\sum_{j < J} I_j$ et Π . Lorsque u est une distribution à support compact, $\hat{u}(\zeta')$ est une

fonction à croissance lente. Donc pour u dans $\mathcal{G}'$, Π est une fonction continue de (x', x_n) si J est suffisamment grand; ce qui prouve que la partie de $D_n^\mu(T(u \otimes \delta^r))(\cdot, x_n)$ qui correspond à Π tend vers une limite dans $\mathcal{D}'(\mathbf{R}_x^{n-1})$ lorsque x_n tend vers 0. Il nous suffit de considérer la partie qui correspond à $\sum_{j'} I_j$. Soit φ dans $\mathcal{C}_0(\mathbf{R}_x^{n-1})$. Il nous suffit de montrer que

$$(I_j, \varphi) = (2\pi)^{-n} \int \int \varphi(x') e^{i\langle x', \zeta' \rangle} \hat{u}(\zeta') dx' d\zeta' \int_{\Gamma_{\zeta'}} ((D_n + \zeta_n)^\mu t_j(x, \zeta) \zeta_n^\mu e^{ix_n \zeta_n} d\zeta_n$$

est défini pour u dans $\mathcal{G}'$ et tend vers une limite lorsque x_n tend vers 0.

Or $(I_j, \varphi) = \int \hat{u}(\zeta') A_j d\zeta'$ avec

$$A_j = \int \varphi(x') e^{i\langle x', \zeta' \rangle} \left[\int_{\Gamma_{\zeta'}} ((D_n + \zeta_n)^\mu t_j(x, \zeta) \zeta_n^\mu e^{ix_n \zeta_n} d\zeta_n \right] dx'$$

et une intégration par parties donne

$$\zeta'^\alpha A_j = \int e^{i\langle x', \zeta' \rangle} \left(\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x'} \right)^\alpha \left[\varphi(x') \int ((D_n + \zeta_n)^\mu t_j(x, \zeta) \zeta_n^\mu e^{ix_n \zeta_n} d\zeta_n \right] dx'.$$

Comme le crochet est uniformément borné lorsque x_n tend vers 0 par $O(|\zeta'|^{v+\mu+s_j+1})$, il en résulte que $\langle I_j, \varphi \rangle$ est défini pour u dans $\mathcal{G}'$ et tend vers une limite lorsque x_n tend vers 0.

(27) *proposition.*

Soit P un opérateur différentiel hypoelliptique sur $\mathbf{R}_x^n$, à coefficients $\mathcal{C}^\infty$ et s'écrivant

$$P(x, D) = P_0(x, D) + a(x) D_n^m$$

avec $m > 0$ et $a(x) \neq 0$. P_0 ne fait intervenir que D' (les dérivations tangentielles) Soit u définie pour $x_n > 0$ telle que la fonction u_0 égale à u pour $x_n > 0$ et à 0 pour $x_n < 0$ soit localement intégrable dans $\mathbf{R}_n$. On suppose que $Pu = 0$ (pour $x_n > 0$). Alors pour $\mu (0 \leq \mu \leq m-1)$.

$$\left(\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_n} \right)^\mu u(\cdot, \varepsilon) = \gamma_\mu^\varepsilon u$$

tend vers une limite dans $\mathcal{D}'(\mathbf{R}_x^{n-1})$ lorsque $\varepsilon \downarrow 0$.

Preuve.

Soit φ dans $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbf{R}_x^{n-1})$ nulle pour $|x'| \geq A$ et ψ dans $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbf{R}_{x_n})$ valant 1 au voisinage de l'origine. On applique la formule de GREEN (15)' à P , au cylindre

C où $\varepsilon_1 < x_n < \varepsilon_2$ et $|x'| \leq 2A$. En égalant les actions des 2 distributions figurant dans les 2 membres de (15)' sur la fonction test $\varphi\psi$, on obtient:

$$\int_C \int_C u' P(\varphi\psi) - 0 = \int_C (Q\gamma u) \varphi\psi.$$

Au premier membre, tout terme correspondant à un opérateur de dérivation normal dans $'P$ est nul. Le premier membre se réduit donc à:

$$\int_C \int_C u' P_0 \varphi.$$

De même, au deuxième membre, toute multicouche (d'ordre ≥ 1) de $Q(\gamma u)$ donne une contribution nulle. Vue la formule (2.2.1) de [9], le 2^e membre se réduit à:

$$i^{-1} \sum_{l=0}^{m-1} \int_C (P_{l+1}(x, D') u_l \delta) \varphi\psi = i^{-1} \int_C a(x) u_{m-1}(x) \varphi(x') dx'.$$

D'où

$$\int_{x_n=\varepsilon_2} a(x) u_{m-1}(x) \varphi(x') dx' - \int_{x_n=\varepsilon_2} a(x) u_{m-1}(x) \varphi(x') dx' = i \int_C \int_C u(x) ('P_0 \varphi)(x') dx.$$

Si u est localement intégrable, le 2^e membre tend vers 0 lorsque ε_1 et ε_2 tendent vers 0. La dernière relation montre alors que $(au_{m-1})(\cdot, x_n)$, donc $u_{m-1}(\cdot, x_n)$ tendent vers des limites dans $\mathfrak{D}'(\mathbf{R}_{x'}^{n-1})$ lorsque x_n tend vers 0.

Donc u_{m-1} appartient à $\mathcal{C}^0(\mathbf{R}_{x_n}^+, \mathfrak{D}')$. Il en résulte que les primitives (par rapport à x_n) de la fonction vectorielle u_{m-1} appartiennent aussi à $\mathcal{C}^0(\mathbf{R}_{x_n}^+, \mathfrak{D}')$, donc que u_{m-1} est $(m-1)$ fois dérivable à valeurs dans $\mathfrak{D}'$.

(28) *Corollaires.*

a) *Généralisation des classes H^p de Hardy.*

u^0 est localement sommable en particulier si

$$u \in L^\infty(\mathbf{R}_{x_n}^+, L^p(\mathbf{R}_{x'}^{n-1})) \quad \text{avec} \quad 1 < p < \infty.$$

Nous dirons que les solutions u de $Pu=0$ vérifiant cette condition appartiennent à la classe H^p relative à P . Vue (27), pour $0 \leq \mu \leq m-1$, $\gamma_\mu^\varepsilon u$ tend vers une limite dans $\mathfrak{D}'$. En particulier, les $\gamma_0^\varepsilon u$ décrivent un borné de L^p et convergent dans $\mathfrak{D}'$. Comme la boucle unité de L^p est faiblement fermée dans $\mathfrak{D}'$, on voit que u admet une valeur au bord dans L^p .

b) *Valeurs au bord d'une fonction $f(z)$ holomorphe pour $y = \text{Im } z > 0$ et à croissance lente au voisinage de l'axe réel $x'Ox$. Il est bien connu qu'une telle valeur au bord existe dans $\mathfrak{D}'$. On peut retrouver ce résultat en appliquant (27) à l'opérateur $P = \frac{\partial}{\partial z}$ et à une primitive complexe de f d'ordre convenable (exercice).*

(29) *Proposition (formule de Green)*

Soit u dans $\mathfrak{D}'_P(\Omega)$ avec $Pu = 0$ dans Ω . $\gamma u = (\gamma^0 u, \dots, \gamma_{m-1} u)$ désigne l'ensemble des valeurs au bord transverses $\gamma_j u$ avec $0 \leq j \leq m-1$. Soit u^0 le prolongement canonique de u .

Alors

$$(30) \quad P(u^0) = \tilde{P}(\gamma u).$$

En effet.

Soit Ω_ε la variété à bord limitée par ω_ε . u^ε désigne la distribution sur M représentée par la fonction égale à u sur Ω_ε et par 0 dans le complémentaire de Ω_ε . Lorsque ε tend vers 0, u^ε tend vers une distribution u^0 sur M , appelée le prolongement canonique de u . La formule de GREEN appliquée à Ω_ε donne

$$P(u^\varepsilon) = \tilde{P}(\gamma^\varepsilon u)$$

avec $\gamma^\varepsilon u = (\gamma_0^\varepsilon u, \dots, \gamma_{m-1}^\varepsilon u)$.

Lorsque ε tend vers 0, vu (26), $\gamma^\varepsilon u$ tend vers une limite notée γu . On a donc prouvé (30).

(31) *Corollaire (principe du prolongement hypoelliptique).*

On suppose P hypoelliptique. On pose $\Omega^0 = \Omega$ et $\Omega^1 = M \setminus \Omega$. On se donne u^j dans $\mathfrak{D}'_P(\Omega^j)$ avec $Pu^j = 0$ sur Ω^j , $j = 0$ ou 1 . On suppose que u^0 et u^1 admettent les mêmes valeurs au bord jusqu'à l'ordre $m-1$. Alors le couple (u^0, u^1) définit une fonction $\mathcal{C}^\infty$ sur M .

En effet, notons $\tilde{u}^0$ et $\tilde{u}^1$ les prolongements canoniques de u^0 et u^1 . Les formules de GREEN relatives à Ω^0 et Ω^1 s'écrivent $P(\tilde{u}^0) = \tilde{P}(\gamma u)$ et $P(\tilde{u}^1) = \tilde{P}^1(u)$. Comme les second membres représentent des distributions de signes contraires, on a

$$P(\tilde{u}^0 + \tilde{u}^1) = 0.$$

La conclusion en résulte puisque P est hypoelliptique.

§ 4. - Deux Interprétations du problème (1)

Considérons le problème abstrait (1). Nous allons considérer deux variantes de ce problème.

Interprétation 1.

u est dans $\mathcal{C}^k(\mathbf{R}_{x_n}, \mathfrak{D}'(\mathbf{R}_x))$.

Pour tout μ tel que $0 \leq \mu \leq k$, $\left(\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_n}\right)^\mu u$ définit une fonction continue de la variable x_n , à valeurs dans $\mathfrak{D}'(\mathbf{R}_x^{n-1})$ et par conséquent $\gamma_\mu u$ peut être interprété dans (1) comme une valeur au bord.

Interprétation 2.

u est dans un sous espace topologique X de $\mathfrak{D}'_P(\Omega)$:

X étant tel que $\mathcal{C}^\infty(\bar{\Omega})$ est dense dans X et pour tout μ ($0 \leq \mu \leq k$), l'application

$$\mathcal{C}^\infty(\bar{\Omega}) \longrightarrow \mathcal{C}^\infty(\omega)$$

$$\varphi \longrightarrow \left(\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_n}\right)^\mu \varphi$$

se prolonge en une application continue de X dans $\mathfrak{D}'(\omega)$. Dans ces conditions $\gamma_\mu u$ doit être interprété dans (1) comme une trace.

Espace $\tilde{X}$.

(32) Etant donné un tel espace X , on appelle ci-après $\tilde{X}$ tout sous espace vectoriel topologique de $\mathcal{G}(M)$ tel que l'application naturelle de restriction

$$\text{rest}: \tilde{X} \longrightarrow X$$

admette un relèvement continu.

$$\text{rel}: \tilde{X} \longleftarrow X \quad \text{avec } \text{restr} \circ \text{rel} = \text{Id}.$$

Notons que les interprétations 1 et 2 du problème (1) ne sont pas toujours équivalentes. L'interprétation 2 est plus courante que l'interprétation 1; et il existe des cas où l'interprétation 1 est strictement plus forte que l'interprétation 2: c'est par exemple le cas des espaces H^s avec poids.

(33) *Proposition*

On considère le problème (1), avec f dans $\mathfrak{D}'(\Omega, F)$ et g dans $\mathfrak{D}'(\omega, G)$. On cherche u dans $\mathfrak{D}'_P(\Omega, E)$

a) Pour que ce problème ait un sens, $\gamma_\mu u$ ($1 \leq \mu \leq k$) étant la valeur au bord de $\left(\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_n}\right)^\mu u$, il faut et il suffit que f admette un prolongement $\tilde{f}$ tel que

$$T\tilde{f} \in \mathcal{C}^k(\mathbf{R}_{x_n}^+, \mathcal{D}'(\mathbf{R}_{x'}^{n-1}))$$

b) Pour que ce problème ait un sens, $\gamma_\mu u$ ($1 \leq \mu \leq k$) étant la X — trace d'ordre μ de la distribution u de X (X étant un sous espace vectoriel topologique quelconque de $\mathcal{D}'_P(\bar{\Omega})$, $\mathcal{C}^\infty(\bar{\Omega})$ étant dense dans X) il faut et il suffit que f admette un prolongement $\tilde{f}$, $T\tilde{f}$ admettant des $\tilde{X}$ — traces fonctionnelles jusqu'à l'ordre k .

Démonstration.

Comme P envoie $\mathcal{D}'_P(\Omega)$ dans $\mathcal{D}'_P(\Omega)$ il faut supposer que f est dans $\mathcal{D}'_P(\Omega)$ mais ceci ne suffit pas, pour assurer l'existence de traces ou de valeur au bord pour u et $D_n^\mu u$.

a) Soit $\tilde{u}$ une distribution sur M prolongeant u . Alors $\tilde{f} = Pu$ est un prolongement de f . Il existe un opérateur régularisant r tel que

$$(34) \quad TP\tilde{u} = u + r\tilde{u} = T\tilde{f}$$

Or:

(35) $\tilde{u}$ admet des valeurs au bord transverses jusqu'à l'ordre k si et seulement si, il en est ainsi de u

(36) $r\tilde{u}$ admet des valeurs au bord transverses d'ordre quelconque.

De (34), (35) et (36), il résulte que u admet des valeurs au bord transverses jusqu'à l'ordre k , si et seulement si, il en est ainsi de $T\tilde{f}$.

b) On se demande quand il existe un sous espace X de $\mathcal{D}'_P(\Omega)$ tel que u ait des X — traces normales jusqu'à l'ordre k . Soit $\tilde{X}$ défini par (32). Or

(35)' $\tilde{u}$ admet des $\tilde{X}$ — traces transverses jusqu'à l'ordre k si et seulement si u admet des X — traces transverses jusqu'à l'ordre k .

En effet si $\tilde{u}$ admet des $\tilde{X}$ — traces jusqu'à l'ordre k , alors u admet des X — traces car l'application γ_μ o rel:

$$X \xrightarrow{\text{rel}} \tilde{X} \xrightarrow{\gamma_\mu} \mathcal{D}'(\omega)$$

est continue pour $1 \leq \mu \leq k$. La réciproque se montre de même car γ_μ o restr est continue

(36)' $r\tilde{u}$ admet toujours des $\tilde{X}$ — traces normales jusqu'à l'ordre k . En effet, l'application $\gamma_\mu r$ est continue

$$\tilde{X} \xrightarrow{r} \mathcal{C}^\infty(M) \xrightarrow{\gamma_\mu} \mathcal{C}^\infty(\omega) \subseteq \mathfrak{D}'(\omega).$$

De (34), (35)' et (36)' il résulte que u admet des X — traces normales jusqu'à l'ordre k si et seulement si $T\tilde{f}$ admet des $\tilde{X}$ — traces normales jusqu'à l'ordre k .

(37) *Exemple d'application de la proposition (33).*

Supposons que f soit dans $H^s(\Omega)$ et cherchons pour quelles valeurs de s (réelles par exemple) le problème (1) a un sens. On sait qu'il existe $\tilde{f}$ dans $H^s(M)$ qui prolonge f . Pour que u admette des valeurs au bord normales (resp des H^s — traces normales) jusqu'à l'ordre k , il faut et il suffit qu'il en soit de même de $T\tilde{f}$. Or T étant un o.p.d. d'ordre $-m$, $T\tilde{f}$ appartient à $H^{s+m}(M)$.

Donc $T\tilde{f}$ admet des valeurs au bord normales (resp des H^s — traces normales) jusqu'à l'ordre k si et seulement si $m+s-k > \frac{1}{2}$; soit $s > k-m+\frac{1}{2}$. Donc lorsque f décrit $H^s(\Omega)$, le problème (1) a un sens pour l'interprétation 1 (resp 2) si et seulement si $s > k-m+\frac{1}{2}$ (Lions et MAGENÈS ont prouvé dans le cas où P est une équation et où B est un système normal qui recouvre P , que la condition $s > -\frac{1}{2}$ est suffisante; voir [14], page 204).

§ 5. — Résolution et discussion du problème (1).

Nous supposons à présent que f appartient au sous-espace H de $\mathfrak{D}'(\Omega, F)$ des distributions f qui vérifient les conditions de (33). Pour résoudre et discuter le problème (1), il nous suffit de vérifier que les raisonnements de L. HÖRMANDER ([10]) se transposent à notre cas, ce que nous faisons brièvement ci-après. On suppose que $PT = Id$, $TP = Id$ pour simplifier l'exposé (voir rédaction détaillée dans [13]). $\tilde{f}$ étant un certain prolongement de f , en remplaçant u par $u - T\tilde{f}$, on se ramène au cas où $f=0$.

(38) *Proposition.*

a) Si le problème (1) est elliptique à droite, alors il existe des solutions de (1) sauf si f, g appartient à un sous espace de ω dimension finie de $H \times \mathfrak{D}'(\omega)$.

b) Si le problème (1) est elliptique à gauche, alors le système homogène associé à (1) admet au plus un nombre fini de solutions u linéairement indé-

pendantes et la régularité des solutions est liée à la régularité des données par les relations (34), (39) et (40)

Preuve.

On appelle Q le « projecteur sur les bonnes données de CAUCHY » ([4], [5], [10] et [14])

$$Q(u) = \gamma T \tilde{P} \gamma_u$$

BQ est un o.p.d: $\mathcal{C}^\infty(\omega, E^m) \longrightarrow \mathcal{C}^\infty(\omega, G)$

a) Pour prouver l'existence d'une solution de (1), on suppose que le problème est elliptique à droite, c'est-à-dire que BQ a un symbole principal surjectif. Alors, vu [2], BQ a un quasi-inverse à droite:

$$R: \mathcal{C}^\infty(\omega, G) \longrightarrow \mathcal{C}^\infty(\omega, E^m)$$

$$BQR = I + r.$$

Cherchant une solution γu sous la forme $\gamma u = Rv$

$$(39) \quad d'où \quad v + rv = g$$

v est la solution d'une équation de Fredholm.

b) Pour étudier la dimension du noyau et la régularité de la solution en fonction de la régularité des données, on remarque que

$$(Q - id)\gamma u = 0$$

$$B\gamma u = g.$$

(On suppose que le problème est elliptique à gauche, c'est-à-dire que l'o.p.d: $(id - Q) \oplus B$ a un symbole injectif. Alors, vu [2], cet o.p.d. admet un quasi-inverse à gauche L :

$$L[(id - Q) \oplus B] = id + r'$$

$$(40) \quad D'où \quad L(0, g) = \gamma u + r'\gamma u, \text{ ce qui prouve que } \gamma u \text{ est régulier si } g \text{ l'est.}$$

BIBLIOGRAPHIE

- [1] AGMON DOUGLIS et L. NIRENBERG, *Comm. Pure Appl. Math.* 12, (1959) pp. 623-727.
- [2] ATIYAH et R. BOTT, *Lefschetz fixed point theorem*, *Annals of Mathematics*, Princeton (1967).
- [3] L. BOUTET de MONVEL, *Comportement d'un o.p.d. sur une variété à bord II*, *Journ. d'Anal. Math. Jerusalem XVII* (1966) pp. 255-304.
- [4] — —, Thèse-à paraître.
- [5] A. P. CALDERON, *Communication au Symposium de Novosibirsk*, (1963).
- [6] P. GRISVARD, *Espaces intermédiaires entre espaces de Sobolev avec poids*, *Annali della scuola Norm. Sup. di Pisa. série III XVII fasc. 3* (1963) pp. 255-296.
- [7] L. HÖRMANDER, *Linear differential operators*, Springer, Berlin, 1963.
- [8] — —, *Pseudo differential operators*, *Comm. Pure Appl. Math.* 18 (1965) pp. 501-517.
- [9] — —, *Pseudo differential operators and hypoelliptic equations*, *Proceeding of symposia in Pure Mathematics* (AMS, n° 10, 1967). pp. 138-183.
- [10] — —, *Pseudo differential operators and no elliptic boundary, problems*, *Ann. of Math.* 83 (1966), pp. 129-209.
- [11] — —, *Séminaire à Princeton* (1966).
- [12] — —, *Cours à Stanford University* (Juillet 1967).
- [13] P. KRÉE, *Cours à Bari* (mai 1968), *Pubblicazione di l' Instituto di Analisa Mathematica* (à paraître).
- [14] J. L. LIONS et E. MAGENÈS. *Problèmes aux limites non homogènes et applications*, vol. 1, Dunod, Paris, 1968.
- [15] J. PEETRE, *Another approach to the theory of elliptic boundary value problems*, *Comm. Pure Appl. Math.* 14 (1961) pp. 711-731.
- [16] R. T. SEELEY, *Singular integrals and boundary problems*, *Amer. Journal of Math* (1966).
- [17] L. SCHWARTZ, *Théorie des distributions*, tome 1, Hermann. Paris 1951.
- [18] — —, *Distributions semi-régulières et changements de coordonnées*, *J. Math. pures et applications*. 9^e série, t. 36 (1957), pp. 109-127.
- [19] M. VISIK et ESKIN, *Equations intégrales singulières sur une variété à bord*, *Uspehi mat. Nauk*, XV. 3, 123, (1965) pp. 89-152.
- [20] E. M. STEIN et G. WEISS, *Act. Math.* 103, (1960) pp. 25-62.