Ueber Abelsche Funktionen von zwei Komplexen Variablen.

Memoria di RUD. FUETER (a Zürich).

FRANCESCO SEVERI gewidmet.

Zusammenfassung. - *Alle Abelschen Funktionen von zwei komplexen Variablen sind unter den rechts analytischen Funktionen einer Quaternionenvariablen zu finden, wobei letztere nur vierfachperiodisch und meromorph sein müssen. Da man diese mit Hilfe von Stieltjes'schen Integralen darstellen kann, sinp auch die Abelschen Funktionen in dieser Form enthalten, müssen aber noch besondern Bedingungen genügen.*

In das Gebiet der Abelschen Functionen, zu dem unser hochverehrter Jubilar, der grosse italienische Mathematiker FRANCESCO SEVERI so hervorragende Beiträge geliefert hat, kann man auch von seiten der hyperkomplexen Funktionentheorie eindringen. In der Tat können die *Abelschen Funktionen* von *zwei komplexen Variablen* in folgenden Weise als Spezialfall der rechtsanalytischen, vierfachperiodischen Quaternionenfunktionen aufgefasst werden: Wir bezeichnen die imaginäre Einheit mit i_1 und die beiden komplexen Variablen mit

$$z_1 = x_0 + i_1 x_1, \qquad z_2 = x_2 + i_1 x_3.$$

Sind dann:

$$w_1 = f_1(z_1, z_2), \qquad w_2 = f_2(z_1, z_2)$$

zwei Abelsche Funktionen mit dem Periodensystem ω_k', ω_k'', $k = 1, 2, 3, 4$, So kann man dieselben offenbar folgendermassen zusammenfassen: Man fasst i_1 als eine Quaternioneneinheit auf, wobei die übrigen mit $i_0 = 1$, i_2, i_3, bezeichnet werden. Jetzt setzt man

$$z = z_1 + z_2 i_2, \quad w = w_1 + i_2 w_2, \quad \omega_k = \omega_k' + \omega_k'' i_2, \quad k = 1, 2, 3, 4;$$

dann ist $w = f(z)$ eine rechtsanalytische Funktion mit den vier Perioden ω_k. Denn die Riemann-Cauchy'schen Differenzialgleichungen für w_1 und w_2 ergeben sofort die Bedingung der rechtsanalytischen Funktionen [1]:

$$\sum_{(k)} \frac{\partial w}{\partial x_k} i_k = 0,$$

[1] Im Gegensatz zu meinen frühern Arbeiten nenne ich die Funktionen nicht mehr rechts- und linksregulär, sondern *rechts und linksanalytisch*, was den Tatsachen wohl besser entspricht. Die analytischen Funktionen von 2 komplexen Variablen nenne ich dagegen jetzt *komplexanalytisch*. Ein vollständiges Verzeichnis aller in Betracht kommenden Abhandlungen findet sich in « Comm. Math. Helv. », Vol. 20, p. 419-20. Im folgenden werde ich die Litteratur nach den dort angegebenen Nummern zitieren.

Wenn es daher gelingt, alle vierfachperiodischen, rechtsanalytischen Funktionen wirklich aufzustellen, so finden sich unter denselben auch die obigen Paare von Abelschen Funktionen. Erstere müssen noch der weiteren Bedingung genügen, *meromorph* zu sein. Diese Aufstellung ist von mir durchgeführt worden (²). Allein es hat sich gezeigt, dass dieselbe einfach und systematischer erhalten wird, wenn sie aus einer einzigen, der Weierstras' schen ζ-Funktion in der Theorie der Elliptischen Funktionen, entsprechenden Funktion hergeleitet wird, wie ich im folgenden zeigen möchte.

Dabei ist zu beachten, dass die berühmte Riemann' sche Bedingung über die Perioden bei den zu betrachtenden Funkionen vollständig wegfällt: Das einzige, was über die Perioden vorausgesetzt werden muss, ist das folgende: Sind o_{hk}, $h=0, 1, 2, 3$, die Komponenten von ω_k, so muss die Determinante $|o_{hk}|$ ungleich null sein. Man darf voraussetzen, dass:

$$|o_{hk}|>0,$$

was aussagt, dass die vier Vektoren ω_k im Euklidischen R^4 dasselbe System bilden wie die Koordinaten-Achsen.

Durchlaufen die n_k alle ganzen, rationalen Zahlen, so bilden $\Omega=\sum\limits_{(k)} n_k\omega_k$ die Gitterpunkte, die den Raum in kongruente Parallelepipedons zerlegen. Jetzt nehmen wir die analytische Funktion:

$$q_{000}(z)=-4n(z)^{-1}z^{-1}$$

und bilden mit ihr die Funktion:

$$\zeta(z,\ \omega_1,\ \omega_2,\ \omega_3,\ \omega_4)=q_{000}(z)+$$
$$+\sum_{(\Omega)}'\{q_{000}(z+\Omega)-q_{000}(\Omega)+q_{100}(\Omega)p_{100}(z)+q_{010}(\Omega)p_{010}(z)+q_{001}(\Omega)p_{001}(z)\}$$

wobei die Summation über alle Gitterpunkte $\neq O$ zu erstrecken ist.

Nach einem bekannten EISENSTEIN'schen Satze konvergiert die Reihe absolut und gleichmässig in jedem endlichen Raumteil, der keinen Gitterpunkt enthält. Die p und q-Funktion haben folgende Bedeutung:

$$p_{100}(z)=x_1-i_1x_0,\qquad p_{010}(z)=x_2-i_2x_0,\qquad p_{001}(z)=x_3-i_3x_0,$$
$$q_{100}(z)=-\frac{\partial q_{000}(z)}{\partial x_1},\qquad q_{010}(z)=-\frac{\partial q_{010}(z)}{\partial x_2},\qquad q_{001}(z)=-\frac{\partial q_{000}(z)}{\partial x_3}.$$

Die ζ-Funktion hat folgende Eigenschaften:

1) Sie ist *rechtsanalytisch.*

2) Sie ist *meromorph,* da sie nur in den Gitterpunkten Pole 3. Ordnung besitzt.

3) Sie ist eine ungerade Funktion von z:

$$\zeta(-z)=-\zeta(z),$$

da $q_{000}(z)$ ungerade ist und ebenso die p-Funktionen.

(²) FUETER: [13].

4) Es gelten die Formeln:

$$\zeta(z + \omega_k) = \zeta(z) + \eta_k .$$

Wobei die η_k von z unabhängige Konstanten sind. Zum Beweise differenzieren wir die ζ-Funktion nach x_k, $k = 1, 2, 3$. Und bedenken, dass folgende Differenzialformeln gelten ([3]):

$$\frac{\partial q_{n_1 n_2 n_3}(z)}{\partial x_1} = - q_{n_1+1 n_2 n_3}(z), \qquad \frac{\partial q_{n_1 n_2 n_3}(z)}{\partial x_2} = - q_{n_1 n_2+1 n_3}(z), \qquad \frac{\partial q_{n_1 n_2 n_3}(z)}{\partial x_3} = - q_{n_1 n_2 n_3+}(z).$$

Aus ihnen folgt, in Verbindung mit der Bedingungsgleichung für analytische Funktionen, dass die Funktionen $\zeta^{(hk)}(z)$, k, $h = 0, 1, 2, 3$, vierfach periodisch sind. Dabei wollen wir stets unter der Bezeichnung $f^{(k)}(z)$ die partielle Differenziation nach x_k verstehen. Ietzt folgt zunächst, dass die Funktionen $\zeta^{(k)}(z)$ sich bei Vermehrung von z um eine Periode nur um eine additive Konstante verändern, wobei die letztere aber null sein muss, da die Funktionen gerade sind. Aus dieser Tatsache ergibt sich unsere Behauptung ohne weiteres.

Die Konstanten η_k erfüllen eine verallgemeinerte *Legendre'sche Relation.* Man erhält dieselbe leicht, wie im Falle der elliptischen Funktionen, aus den Integralsätzen der analytischen Funktionen ([4]). Ist nämlich P ein Perioden-Parallelopipedon, auf dessen Hyperflächen keine und in dessen Innern nur ein Gitterpunkt liege, wobei gegenüberliegende Hyperflächen sich nur um eine Grundperiode unterscheiden, so gilt die Formel:

$$\frac{1}{8\pi^2} \int\limits_{(P)} \zeta(z) dZ = 1.$$

Das Integral links kann aber direkt berechnet werden, indem man die Summe der beiden Integrale über gegenüberliegende Seiten P_h und $P_h + \omega_h$ zusammenfasst. Wegen der obigen Formeln, und weil die Normalen der beiden Seiten entgegengesetzte Richtung haben, bleibt in der Summe nur das Integral übrig:

$$\int\limits_{(P_h)} dZ_h ,$$

dessen Berechnung nach bekannten Methoden den Wert ergibt:

$$\eta_h O_{hk} i_k ,$$

wobei O_{hk} die zu o_{hk} gehörige dreigliedrige Unterdeterminante von $| o_{hk} | = O$ bedeutet. Daraus ergibt sich die wichtige verallgemeinerte LEGENDRE' sche Relation:

$$\sum_{(h,k)} \eta_h O_{hk} i_k = 8\pi .$$

([3]) FUETER: [10], p. 314.

([4]) FUETER: [3], p. 312 und p. 318.

5) Auch die *Liouville'schen Sätze* der eliptischen Funktionen können auf unsern Fall übertragen werden. Insbesondere gilt der Satz: *Eine vierfachperiodische Funktion, die in* P *überall regulär und rechtsanalytisch ist, ist eine Konstante* ([5]).

Der Residuen-Satz lässt sich folgendermassen übertragen: Ist $u = f(z)$ eine vierfachperiodische Funktion und ist die Punktmenge $\mathfrak{M}$ die (zweidimensionale) Menge ihrer singulären Punkte in P, so lässt sie sich nach einem Beweise von W. NEF ([6]) durch Stieltjes'sche integrale in folgender Weise darstellen:

$$f(z) = f_1(z) + \sum_{n=0}^{\nu-1} \sum_{(n)} \int_{(\mathfrak{M})} d(a_{n_1n_2n_3}(\gamma)) q_{n_1n_2n_3}(z-\gamma), \qquad f_1(z) \text{ regular in } P.$$

Denn $f(z)$ ist nach Annahme meromorph. Benutzt man die vierfache Periodizität, so folgt wiederum aus den Integral-Sätzen die Residuum-Formel:

$$\int_{(\mathfrak{M})} d(a_{000}(\gamma)) = 0.$$

Diese Sätze genügen, um alle vierfachperiodischen Funktionen mit den Perioden ω_k zu konstruieren. Ist nämlich wie eben $u = f(z)$ eine solche Funktion mit der singulären Punktmenge $\mathfrak{M}$ in P, so bilde man die Funktion

$$\varphi(z) = \sum_{n=0}^{\nu-1} \sum_{(n)} \int_{(\mathfrak{M})} d(a_{n_1n_2n_3}(\gamma)) \frac{\partial^n \zeta(z-\gamma)}{\partial x_1^{n_1} \partial x_2^{n_2} \partial x_3^{n_3}}.$$

Diese ist sicherlich meromorph und Vierfachperiodisch. Dies erkennt man in folgender Weise: Nach den früheren Ueberlegungen sind es nämlich alle Funktionen:

$$\frac{\partial^n \zeta(z-\gamma)}{\partial x_1^{n_1} \partial x_2^{n_2} \partial x_3^{n_3}}, \qquad n = n_1 + n_2 + n_3 > 0.$$

Einzig der Fall $n = 0$ könnte Anlass geben, dass letzteres nicht eintritt. Wird jedoch in dem betreffenden Integral z um die Periode ω_k vermehrt, so verändert sich das Integral nur um die additive Konstante:

$$\int_{(\mathfrak{M})} da_{000}(\gamma)\eta_k, \qquad k = 1, 2, 3, 4.$$

Wegen des Residuen-Satzes muss aber diese Konstante 0 sein, womit die Behauptung bewiesen ist. Bilden wir jetzt die Differenz der beiden Funktionen $f(z)$ und $\varphi(z)$, so ist dieselbe eine vierfachperiodische Funktion, die offenbar in P keine singulären Punkte besitzt. Man ersieht dies ohne Mühe

---

([5]) FUETER: [13], p. 166.

([6]) W. NEF: [18].

aus der Definitton der ζ-Funktion. Nach dem obigen Resultat ist die Differenz somit eine Konstante, und wir haben die Darstellung:

$$f(z) = C + \sum_{n=0}^{\nu-1} \sum_{(n)} \int_{(\mathfrak{M})} da_{n_1 n_2 n_3}(\gamma) \frac{\partial^n \zeta(z-\gamma)}{\partial x_1^{n_1} \partial x_2^{n_2} \partial x_3^{n_3}}.$$

Ungekehrt ist bei beliebig vorgegebenem $\mathfrak{M}$ und beliebig angenommenen Stieltjes'schen Integralen die rechte Seite eine vierfachperiodische Funktion.

In diese Darstellungsart müssen daher auch die Abelschen Funktionen von zwei komplexen Variablen eingeschlossen sein, Die Bedingungsgleichungen für solche komplex-analytische Funktionen sind die RIEMANN-CAUCHY'schen Differenzialgleichungen:

$$f^{(0)}(z) + f^{(1)}(z) i_1 = 0, \qquad f^{(2)}(z) + f^{(3)}(z) i_1 = 0.$$

Setzt man in diesen für $f(z)$ die obige Darstellungsformel ein, so lauten die beiden Bedingungsgleichungen der komplex-analytischen Abelschen Funktionen:

$$\sum_{n=0}^{\nu-1} \sum_{(n)} \int_{(\mathfrak{M})} da_{n_1 n_2 n_3}(\gamma) \frac{\partial^n}{\partial x_1^{n_1} \partial x_2^{n_2} \partial x_3^{n_3}} \{ \zeta^{(0)}(z-\gamma) + \zeta^{(1)}(z-\gamma) i_1 \} = 0$$

$$\sum_{n=1}^{\nu-1} \sum_{(n)} \int_{(\mathfrak{M})} da_{n_1 n_2 n_3}(\gamma) \frac{\partial^n}{\partial x_{1 n_1} \partial x_{2 n_2} \partial x_{3 n_3}} \{ \zeta^{(2)}(z-\gamma) + \zeta^{(3)}(z-\gamma) i_1 \} = 0.$$

Von diesen beiden Gleichungen folgt die eine aus der andern, wie man sofort aus der Bedingungsgleichung für rechtsanalytische Funktionen erkennt. Kann man daher $\mathfrak{M}$ und die Funktionen $a_{n_1 n_2 n_3}(\gamma)$ für ein gegebenes ν so bestimmen, dass eine der beiden Gleichungen erfüllt ist, so ist damit ein Paar Abelscher Funktionen gegeben. Offenbar ist dies nicht für alle Perioden möglich; doch ist es mir bisher nicht gelungen, aus ihr die bekannte Relation zwischen den letztern herzuleiten.