Interpretazione proiettiva degli spazî a connessione affine.

Memoria di Enrico Bompiani (a Roma).

Sunto. - *Si mostra che una* V_n *a connessione affine può sempre pensarsi come appartenente ad uno spazio proiettivo di dimensione* $\geq n(n+3)/2$, *ai cui punti (ed entro i cui spazi* 2 *- osculatori) sia associata una ben determinata varietà algebrica. Le geodetiche della connessione, l'arco affine di una geodetica in una determinata connessione e il trasporto di una direzione si costruiscono con operazioni di carattere proiettivo in rapporto a tale varietà algebrica.*

1. Introduzione.

In un lavoro pubblicato di recente in questi Annali [1] ho assoggettato a critica approfondita la nozione di *spazio a connessione affine* e ho dato un'interpretazione geometrica di operazioni analitiche sui tensori, quali le « estensioni », le cui proprietà d'invarianza non prima giustificate (se non formalmente) erano rimaste alquanto misteriose [2]. Ho raggiunto lo scopo costruendo in modo geometrico ben definito una connessione affine integrabile completamente individuata dalla connessione data e da un punto della varietà numerica X_n cui quella si riferisce.

Qui mi ripropongo lo stesso problema della caratterizzazione degli spazî a connessione e lo risolvo per tutt'altra via (sicchè questo lavoro può leggersi indipendentemente da quello). Mentre in quel lavoro sceglievo a modello della X_n uno *spazio affine* costruito a partire dalla connessione e da un punto di X_n, qui raggiungo lo scopo pensando la X_n come una varietà V_n di uno *spazio proiettivo* S_N di dimensione N abbastanza grande (e che viene precisata). Si tratta di vedere quali enti geometrici per questa V_n vengono definiti dalla data connessione.

A questo scopo ero venuto già preparando gli elementi da lunga mano.

In una Nota Lincea [3], traendo lo spunto da idee già introdotte in miei lavori precedenti (in quella citati), ho definito i *sistemi pluri-assiali* di curve sopra una varietà di uno spazio proiettivo (se si associa ad ogni punto della varietà un S_p passante per esso si chiedono le curve tali che in ogni punto lo spazio osculatore di un certo ordine abbia particolari condizioni d'inci-

(1) E. Bompiani, *Geometria degli spazî a connessione affine*, « Annali di Matem. », s. IV^a, t. XXIV, 1945, p. 257-282. Mi riferisco a questo lavoro, oltre che per l'esame critico da cui nasce l'esigenza di una costruzione geometrica delle connessioni, per la bibliografia che non sto qui a ripetere.

(2) Ad un altro tipo di « estensioni », da Lui dette « anolonome » era arrivato E.A Bortolotti: *Coordinate normali ed « estensioni » nella geometria degli spazî a connessione lineare*, « Rend. Acc. d'Italia », s. VII^a, vol. II (1941), p. 106-116.

(3) E. Bompiani, *Alcune idee generali per lo studio differenziale delle varietà*. « Rend. Acc Lincei », s. VI^a, vol. V (1927), p 383-389.

denza con lo S_p), e ne ho mostrato l'interesse sia in relazione alle geodetiche di una connessione affine o proiettiva sia in relazione a problemi di carattere metrico (deformazioni di specie superiore).

Nello stesso ordine di idee si muove una Nota di Enea Bortolotti [4] specificamente dedicata ad illustrare i rapporti fra sistemi assiali e connessioni. In essa però non viene approfondito il problema di porre in luce l'arbitrarietà esistente nel determinare una connessione con assegnate geodetiche, e il significato dell'arco affine di una geodetica in rapporto ad una determinata connessione. Il Bortolotti ha poi dato notevolissimi contributi alla teoria [5] in lavori in cui queste questioni vengono pure trattate: ma ha abbandonato il punto di vista proiettivo che si ricollegava alla mia Nota citata.

Ciò del resto era pienamente giustificato perchè mancava allora una teoria degli invarianti proiettivi differenziali degli elementi curvilinei. Oggi è possibile riprendere quel programma: spero in quanto segue di aver chiaramente indicato quali sono gli enti collegati, in questa interpretazione proiettiva, alle geodetiche di una connessione, all'arco affine di una geodetica in rapporto ad una connessione, al trasporto affine di direzioni (nel caso di connessioni simmetriche).

Io spero che questo modo di interpretare le connessioni affini, riportandole nell'ambito di un'intuizione familiare qual'è quella del gruppo proiettivo, riesca ad avvicinare ad esse coloro che non partecipano allo scetticismo sul significato di « geometria »; e in ogni modo a mostrare sopra un ulteriore esempio i legami esistenti fra geometria differenziale e geometria algebrica.

2. Il trasporto di vettori e di direzioni negli spazî di Riemann.

Allo scopo di chiarire bene la natura del problema che ci si propone partiamo dal caso Riemanniano in cui ha avuto origine, con una Memoria di. T. LEVI-CIVITA [6] del 1917, la teoria dei trasporti di vettori e di direzioni.

In una varietà numerica X_n (in cui le coordinate di un punto si indicano con x^i, $i = 1, \ldots, n$) è *data* una forma quadratica differenziale invariante *(metrica)*

$$ds^2 = g_{ik} dx^i dx^k, \qquad i, k = 1, \ldots, n \tag{2.1}$$

che fa di X_n una varietà riemanniana R_n.

(4) E. A BORTOLOTTI, *Sistemi assiali e connessioni nelle V_n*, « Rend. Acc. Lincei », s. VI^a, vol. V (1927), p. 390-395.

(5) Si ricordino in particolare i Suoi lavori: *Sulla geometria delle varietà a connessione affine. Teoria invariantiva delle trasformazioni che conservano il parallelismo*, « Ann. di Matem. », s. III^a, t. VIII (1930), p. 53-101;

Sulle connessioni proiettive, « Rend. Circ. Matem. Palermo », t. 56 (1932), p. 1-57;

Spazî proiettivamente piani, « Ann. di Matem. », s IV^a, t. XI (1932), p. 114-134.

Spazî a connessione proiettiva, Ed. Cremonese (1941).

(6) T. LEVI-CIVITA, *Nozione di parallelismo in una varietà qualunque e conseguente specificazione geometrica della curvatura Riemanniana*, « Rend. Circ. Matem. di Palermo », vol. 42 (1917), p. 173-205.

In questa il *trasporto di vettori* (controvarianti ξ^i) e di *direzioni* (o versori, di modulo 1) si fa con la legge di Levi-Civita.

2.2 $$d\xi^i = -\Gamma^i_{rs}(x)\xi^r dx^s$$

ove le $\Gamma^i_{rs}(x) = \Gamma^i_{sr}(x)$ sono i simboli di Christoffel di 2ª specie relativi alla metrica di R_n.

Si ricordi che nell'impostazione originale del Levi-Civita si giunge alla legge di trasporto 2.2 assumendo un « modello » di R_n in una V_n di uno spazio euclideo convenientemente ampio che determina o induce su V_n la metrica 2.1.

Ma, come ha mostrato F. SEVERI [7], si può dare della legge di trasporto 2.2 una costruzione *intrinseca*. cioè relativa alla R_n pensata in astratto, e non ricorrendo ad un suo modello euclideo, giovandosi delle nozioni di angolo e di distanza (e di quelle conseguenti di geodetiche e di ipersuperficie geodetica) definite dalla metrica 2.1.

In altri termini, il teorema di Severi è possibile perchè in R_n esiste già una *geometria* individuata dalla 2.1; il trasporto di vettori o di direzioni è una conseguenza di essa (che detto teorema precisa).

Ancora due osservazioni: 1°) È lo stesso in R_n parlare di trasporto di *vettori* (p. es. dx^i) o di *direzioni*: ciò perchè esiste un *parametro privilegiato* ds relativo ad ogni direzione dx^i, quello appunto definito dalla 2.1.

2°) La geometria di R_n è l'insieme delle proprietà invarianti rispetto alle trasformazioni puntuali (o di variabili) che lasciano invariata la forma 2.1, cioè per le quali il parametro privilegiato conserva il suo valore (o si muta al più per una costante additiva).

3. Legge di trasporto affine.

È ben noto come si passa dal caso riemanniano al caso degli spazî a connessione affine. La legge di trasporto 2.2 suggerisce spontaneamente di considerare più in generale una legge di *trasporto di vettori controvarianti*

3.1 $$d\xi^i = -L^i_{rs}(x)\xi^r dx^s \qquad i, r, s = 1, \dots, n$$

ove le $L^i_{rs}(x)$ non sono affatto legate ad una forma differenziale quadratica (nè occorre siano simmetriche rispetto agli indici r, s che vi hanno funzioni differenti).

Soltanto per l'esigenza che non si alteri il carattere controvariante delle $d\xi^i$ per una qualsiasi trasformazione di coordinate, le $L^i_{rs}(x)$ devono soddisfare ad un sistema di equazioni a derivate parziali detto fondamentale.

Una varietà numerica X_n cui si associ il sistema 3.1 (o il sistema di funzioni L^i_{rs}) è una varietà (o spazio) a connessione affine e s'indica con A_n.

[7] F SEVERI, *Sulla curvatura delle superficie e varietà*, « Rend. Circ. di Palermo », vol. 42, (1917), p. 227-259.

A differenza del caso degli spazî R_n, la *geometria* di uno spazio A_n *s'inizia* con la legge di trasporto 3.1 (e non con una forma quadratica); sicchè non può esistere un teorema analogo a quello di Severi (che connette la nozione di trasporto ad altre precedenti: nel caso attuale queste semplicemente non esistono).

Ciò pone in luce la maggiore astrattezza e difficoltà della teoria generale delle connessioni affini rispetto al caso riemanniano.

Altri aspetti di questa maggiore difficoltà sono:

1°) il fatto che la nozione di direzione, come totalità dei vettori controvarianti aventi componenti proporzionali a quelle di un vettore assegnato ($\eta^i = \rho\xi^i$ con ρ arbitrario), non è così semplice come nel caso riemanniano (in cui si possono introdurre i *parametri* di direzione, per cui $g_{ik}\xi^i\xi^k = 1$)

2°) la mancanza di un *parametro privilegiato* per ogni direzione.

Per approfondire il problema, cioè per porre in chiaro di quali elementi si potrà chiedere (e in che senso) una *geometrizzazione* occorrono alcuni richiami di cose note.

4. Richiami relativi alle connessioni (8).

Introdotta la nozione di *direzione* come totalità dei vettori spiccati da un punto x (di coordinate x^i) di componenti $\rho(x)\xi^i(x)$ con $\rho(x) \neq 0$ arbitrario si constata anzitutto che essa ha significato rispetto alle connessioni affini: cioè vettori spiccati da x aventi la stessa direzione si trasportano, per effetto delle 3.1, in vettori spiccati da $x + dx$ aventi pure la stessa direzione.

La nozione di direzione è quindi *pertinente* agli spazi a connessione affine. Due direzioni così ottenute, per le 3.1, in x e in $x + dx$ si dicono *parallele.*

La seconda nozione pertinente a detti spazî è quella di curve *autoparallele* o *geodetiche.* Riferiti i punti di una linea ad un parametro *arbitrario* t ha senso, per quanto precede, parlare di *direzione* della linea $x^i(t)$ in un punto, essendo questa definita da $\dfrac{dx^i}{dt}$ o (il che è lo stesso data l'arbitrarietà del parametro) da $\rho(x)\dfrac{dx^i}{dt}$, con $\rho(x) \neq 0$ arbitrario. E perciò ha anche senso chiedersi se esistano linee autoparallele tali che in due punti x e $x + dx$ di una di esse le loro direzioni siano parallele. Ciò conduce a scrivere le equazioni (che discendono immediatamente dalla definizione)

$$4.1 \qquad \frac{d^2x^i}{dt^2} + L^i_{rs}(x)\frac{dx^r}{dt}\frac{dx^s}{dt} = \varphi(x)\frac{dx^i}{dt}$$

nelle quali tanto il parametro t (che può sostituirsi con una sua funzione arbitraria, salvo limitazioni qualitative d'invertibilità) quanto la funzione $\varphi(x)$

(8) Si veda p. es. L. P. EISENHART: *Non-Riemannian Geometry*, Amer. Math. Soc. Colloquium publications, vol. VIII (1927).

sono perfettamente arbitrari. Queste sono accidentalità analitiche: ciò che è inerente al concetto di geodetica è indipendente da essa ed è rappresentato dalle equazioni, in cui quelle accidentalità sono eliminate,

$$dx^j d^2x^i - dx^i d^2x^j + (L^i_{hk}dx^j - L^j_{hk}dx^i)dx^h dx^k = 0.$$

Queste con l'introduzione delle componenti della *connessione simmetrica associata* Γ^i_{hk} e del *tensore di torsione* $S_{hk}^{\cdot\cdot i}$ per cui

4.2 $$L^i_{hk} = \Gamma^i_{hk} + S_{hk}^{\cdot\cdot i}, \quad \Gamma^i_{hk} = \frac{1}{2}(L^i_{hk} + L^i_{kh}), \quad S_{hk}^{\cdot\cdot i} = \frac{1}{2}(L^i_{hk} - L^i_{kh})$$

si scrivono meglio

4.3 $$dx^j d^2x^i - dx^i d^2x^j + A^{ij}_{hkp} dx^h dx^k dx^p = 0$$

ove

4.4 $$A^{ij}_{hkp} = \Gamma^{[i}_{(hk}\delta^{j]}_{p)} = \frac{1}{3}(\Gamma^i_{hk}\delta^j_p - \Gamma^j_{hk}\delta^i_p + \Gamma^i_{pk}\delta^j_h - \Gamma^j_{pk}\delta^i_h + \Gamma^i_{hp}\delta^j_k - \Gamma^j_{hp}\delta^i_k)$$

e $\delta^j_p = 0$ per $j \neq p$, $= 1$ per $j = p$.

Le A^{ij}_{hkp} sono, come devono essere, simmetriche rispetto agli indici in basso e alternanti rispetto a quelli in alto.

Alle stesse equazioni precedenti si arriva per le *geodetiche di una connessione proiettiva.*

È da ricordare pure che le equazioni 4.3 delle geodetiche, dipendenti dalla sola connessione simmetrica associata a quella data Γ^i_{hk}, non determinano affatto questa: non solo si può scegliere ad arbitrio il tensore di torsione $S_{hk}^{\cdot\cdot i}$ (che non figura nelle 4.4) ma si possono mutare le Γ^i_{hk} della connessione data nelle

4.5 $$\bar{\Gamma}^i_{hk} = \Gamma^i_{hk} + \delta^i_h\psi_k + \delta^i_k\psi_h$$

ove le ψ_h sono componenti di un vettore covariante arbitrario *senza alterare affatto le geodetiche.*

Ancora: se ci si limita alle componenti simmetriche di una connessione (come basta per le geodetiche) e si riscrivono le equazioni delle geodetiche

4.6 $$\frac{d^2x^i}{dt^2} + \Gamma^i_{hk}\frac{dx^h}{dt}\frac{dx^k}{dt} = \varphi(x)\frac{dx^i}{dt}$$

si può introdurre un *parametro affine* s per le geodetiche con la posizione

4.7 $$\frac{ds}{dt} = ce^{\int\varphi dt};$$

questo parametro affine dipende però sia dalla geodetica sia dalla particolare connessione che si considera (cioè *non* resta inalterato per un cambiamento 4.5). Per esso le equazioni delle geodetiche divengono

4.8 $$\frac{d^2x}{ds^2} + \Gamma^i_{hk}\frac{dx^h}{ds}\frac{dx^k}{ds} = 0.$$

Se si passa da una connessione Γ^i_{hk} alla connessione $\bar{\Gamma}^i_{hk}$ data dalle 4.5, i parametri affini s ed $\bar{s}$ relativi alle due connessioni (e alla stessa geodetica) sono legati dalla relazione

$$\frac{d\bar{s}}{ds} = e^{2\int \psi_r dx^r}.$$

5. Richiami di geometria proiettivo-differenziale [9].

Si consideri uno spazio proiettivo S_N in cui le coordinate proiettive omogenee siano indicate con y^α, $\alpha = 0, 1, \ldots, N$.

Si consideri poi in S_N una varietà V rappresentata da

5.1 $$y^\alpha = y^\alpha(x^i) \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Ho chiamato *spazio 2-osculatore* $S(2)$ osculatore nel punto x lo spazio dei punti di coordinate

5.2 $$y^\alpha; \qquad y^\alpha_i = \partial_i y^\alpha = \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^i}; \qquad y^\alpha_{ik} = \partial_{ik} y^\alpha = \frac{\partial^2 y^\alpha}{\partial x^i \partial x^k}$$

cioè (omettendo l'indice α delle coordinate) dei punti

5.3 $$y, \quad y_i; \quad y_{ik}.$$

Supponiamo questi punti linearmente indipendenti, cioè supponiamo che *non* esistano equazioni del tipo

5.4 $$c(x)y + c^i(x)y_i + c^{ik}(x)y_{ik} = 0$$

(con le c, c^i, c^{ik} non tutte nulle) soddisfatte da tutte le coordinate y^α. Ciò vuol dire che la dimensione dello spazio $S(2)$ è la più alta possibile e cioè $\frac{n(n+3)}{2}$; in questa ipotesi diremo la V_n proiettivamente *regolare* o *normale* fino all'intorno del 2^o ordine. E questo è il caso di una V_n *generica* di S_N appena $N \geq \frac{n(n+3)}{2}$ (p. es. per le superficie di S_5).

Un punto dello $S(2)$ osculatore è del tipo

5.5 $$\nu^0 y + \nu^i y + \nu^{ik} y_{ik}$$

($\nu^{ik} = \nu^{ki}$) cioè le sue coordinate nell'ambiente S_N sono

5.6 $$\nu^0 y^\alpha + \nu^i y^\alpha_i + \nu^{ik} y^\alpha_{ik};$$

le ν^0, ν^i, ν^{ik} sono *coordinate omogenee locali* di un punto entro lo $S(2)$.

---

[9] Le prime nozioni date appresso si trovano in P. DEL PEZZO: *Sugli spazî tangenti ad una superficie o ad una varietà,* « Rend. Acc. Scienze di Napoli », 1886. Delle numerose ricerche posteriori manca ancora un'esposizione trattatistica. Se ne può vedere un riassunto (fino al 1927) nell'articolo di A. TERRACINI: *Esposizione di alcuni risultati di geometria proiettiva differenziale negli iperspazi,* Appendice III al vol. II (p. 729-769) di G. FUBINI e E. ČECH: *Geometria proiettiva differenziale,* (Ed. Zanichelli).

Il piano osculatore in un punto y di V_n ad una sua curva è determinato dai punti y, dy, d^2y cioè dai punti

5,7 $$y\,; \qquad y_i dx^i\,; \qquad y_{hk}dx^h dx^k + y_i d^2x^i,$$

cioè in coordinate locali

5.8 $$(\nu^0 \neq 0,\ \nu^i = \nu^{ik} = 0),\ (\nu^0 = \nu^{ik} = 0,\ \nu^i = dx^i),\ (\nu^0 = 0,\ \nu^i = d^2x^i,\ \nu^{hk} = dx^h dx^k).$$

Se si tiene fisso il punto y e la tangente in esso, i piani osculatori alle curve per il punto e per quella tangente appartengono allo spazio S_{n+1}, che ho chiamato $S(2,\,1)$-osculatore a V_n secondo quella tangente, individuato dai punti

5 9 $$y\,; \qquad y_i \quad (i = 1, \ldots, n)\,; \qquad y_{hk}dx^h dx^k.$$

Questo $S(2,\,1)$-osculatore al variare della tangente descrive un cono, avente per vertice lo spazio S_n tangente in y a V_n e che può dirsi *cono di Del Pezzo* (perchè da questi considerato per $n = 2$ in S_5).

Esiste una proiettività fra le tangenti in y *a* V_n *e gli* $S(2,\,1)$ *generatori del cono di Del Pezzo:* elementi corrispondenti sono quelli definiti dagli stessi valori dei rapporti delle dx^i.

6. S_{n+1} determinati da una coppia di tangenti.

Un'altra nozione di cui avremo bisogno in seguito è la seguente. Si consideri un punto y di V_n, una sua direzione tangente ivi definita dalle δx^i e un'altra direzione tangente definita dalle dx. Consideriamo la retta congiungente y e δy (cioè la prima tangente data) come generatrice di una rigata passante pure per il punto $y + dy$. La generatrice per questo punto potrà inoltre individuarsi col punto

6.1 $$\delta y + d\delta y$$

e naturalmente risulta definita se e solo se si precisa il simbolo $d\delta y$.

Il piano tangente in un punto $\lambda y + \delta y$ a una tale rigata è quello dei punti

6.2 $$y\,; \qquad \delta y\,; \qquad \lambda dy + d\delta y$$

e perciò lo S_3 tangente alla rigata lungo la generatrice (contenente i piani tangenti al variare di λ, o anche come talvolta si dice lo S_3 della *direzione rigata* $\mathfrak{G}_1$ costituita da due generatrici infinitamente vicine) è quello dei punti

6.3 $$y;\quad \delta y = y_i \delta x^i\,; \quad dy = y_i dx^i\,; \quad d\delta y = y_i d\delta x^i + y_{hk}dx^h \delta x^k.$$

Se si varia la generatrice relativa al punto $y + dy$, cioè si lascia variare $d\delta x^i$ questo S_3 varia nello S_{n+1} dei punti

6 4 $$y\,; \qquad y_i \quad (i = 1, \ldots, n)\,; \qquad y_{hk}dx^h \delta x^k.$$

Questo S_{n+1} è individuato dal punto y e dalle due direzioni d, δ per esso; e queste vi hanno ufficio *involutorio*.

Inversamente ogni S_3 di S_{n+1} passante per il piano determinato da y e dalle due direzioni d, δ può considerarsi come S_3 tangente lungo tutta la retta $(y, \delta y)$ ad una rigata (cioè contenente l'$\mathcal{E}_1$ di questa): ciò equivale infatti a definire le $d\delta x^i$. In conclusione:

Per ogni coppia di tangenti a V_n *uscenti da un suo punto è definito un* S_{n+1}, *che dipende in modo involutorio dalle due tangenti: esso è il luogo degli* S_3 *tangenti alle rigate che hanno una delle tangenti per generatrice (nei cui punti lo* S_3 *è tangente) e che toccano l'altra tangente.*

7. Alcune varietà algebriche legate all'intorno del 2° ordine di un punto di V_n.

Vogliamo ora farci un'idea chiara del luogo degli $S_{n+1} \equiv S(2, 1)$-osculatori (che abbiamo chiamato cono di Del Pezzo) al variare della tangente e del luogo degli S_{n+1} determinati da una coppia di tangenti a V_n (n. 6).

Poichè gli uni e gli altri contengono lo S_n tangente nel punto considerato di V_n, basterà tener conto della variabilità del punto (cfr. le 5.9)

7.1 $$y_{hk}dx^h dx^k, \quad o \qquad \nu^{hk} = dx^h dx^k \qquad (\nu^0 = \nu^i = 0)$$

per lo $S(2, 1)$ e del punto (cfr. le 6.4)

7.2 $$y_{hk}dx^h \delta x^k, \quad o \qquad \nu^{hk} = dx^h \delta x^k \qquad (\nu^0 = \nu^i = 0)$$

per lo S_{n+1} definito dalle tangenti d, δ.

Ciò equivale a tagliare i coni descritti da quegli S_{n+1} entro lo $S_{\frac{n(n+3)}{2}} \equiv S(2)$ con lo spazio $\nu^0 = \nu^i = 0$, che è poi un qualsiasi $S_{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}$ non incidente lo S_n tangente nel punto.

In questo spazio $S_{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}$ il punto 7,1 descrive la varietà che rappresenta al modo di Veronese le quadriche Q^2_{n-2} di uno spazio proiettivo Σ_{n-1}, cioè una $V^{2^{n-1}}_{n-1}$.

La proiettività fra la stella di tangenti in un punto di V_n e i relativi spazî $S(2, 1)$ si ha facendo corrispondere al punto di coordinate omogenee

7.3 $$\nu^0 = 0, \qquad \nu^i = dx^i, \qquad \nu^{hk} = 0$$

che descrive un S_{n-1}, il punto

7.4 $$\nu^0 = 0, \qquad \nu^i = 0, \qquad \nu^{hk} = dx^h dx^k$$

che descrive la $V^{2^{n-1}}_{n-1}$.

Lo S_{n-1} e la $V^{2^{n-1}}_{n-1}$ appartengono allo spazio $\nu^0 = 0$, che è un qualsiasi iperpiano non passante per il punto di V_n che potrà dirsi « iperpiano improprio » $S_{\frac{n(n+3)}{2}-1}$ dello $S(2)$ osculatore.

In esso lo spazio S_{n-1} e lo spazio di $V^{2^{n-1}}_{n-1}$ sono sghembi.

La varietà delle rette congiungenti punti corrispondenti nella proiettività fra S_{n-1} e $V_{n-1}^{2^{n-1}}$ è già stata da me studiata in altro lavoro ([10]): *essa è una* W_n *razionale d'ordine* $2^n - 1$ *che contiene* $\infty^n V_{n-1}^{2^{n-1}}$ *di Veronese.*

Queste $V_{n-1}^{2^{n-1}}$ *sono riferite proiettivamente fra loro e alla stella di tangenti e una qualsiasi di esse può esser sostituita alla* $V_{n-1}^{2^{n-1}}$ *prima considerata nella costruzione di* W_n.

Di questa W_n dovremo servirci fra poco.

Ora vogliamo renderci conto della costruzione del punto 7.2 in relazione alla varietà di Veronese descritta dal punto 7.1. Su questa le direzioni tangenti a V_n d e δ si rappresentano in due punti, diciamoli D e Δ: *gli spazî tangenti alla* $V_{n-1}^{2^{n-1}}$ *nei punti* D *e* Δ *s'incontrano nel punto* 7.2. La dimostrazione è immediata.

Lo S_{n+1} *individuato da un punto di* V_n *e da due rette in esso tangenti (luogo degli* S_3 *tangenti lungo una delle due rette alle rigate che l'hanno per generatrice e toccano l'altra) si ottiene congiungendo lo* S_n *tangente nel punto a* V_n *con i punti d'intersezione degli spazî tangenti ad una qualunque delle* $V_{n-1}^{2^{n-1}}$ *di Veronese di* W_n *nei punti che nella proiettività detta sopra corrispondono alle due tangenti.*

Ogni S_3 *per quelle due tangenti e contenuto nello* S_{n+1} *da esse individuato può pensarsi come* S_3 *tangente lungo una di quelle rette a qualche rigata tangente all'altra.*

8. Geodetiche di una connessione.

Vogliamo ora costruire sopra una V_n di S_N $\left(N \geq \frac{n(n+3)}{2}\right)$ con $S(2)$ regolare $\left(\text{di dimensione } \frac{n(n+3)}{2}\right)$ le curve integrali di un sistema di equazioni

8.1 $$d^2x^i + \Gamma^i_{hk} dx^h dx^k = \varphi(x) dx^i.$$

Una varietà X_n su cui sia individuato questo sistema di curve, *geodetiche,* si dirà una G_n.

I piani osculatori alle curve del sistema in un punto, come risulta dall'eliminare i differenziali secondi fra le 8.1 e le 5.7, sono individuati dai punti

8.2 $$y\,; \qquad y_i dx^i\,; \qquad y_{hk} dx^h dx^k + y_i(\varphi dx^i - \Gamma^i_{hk} dx^h dx^k)$$

cioè anche dai punti

8.3 $$y\,; \qquad y_i dx^i\,; \qquad y_{hk} dx^h dx^k - y_i \Gamma^i_{hk} dx^h dx^k.$$

Tralasciando di considerare il punto dato, interessano i due punti di coordinate locali ($v^0 = 0$) e

7.4 $$v^i = dx^i,\ v^{ik} = 0\,; \qquad v^i = -\Gamma^i_{hk} dx^h dx^k,\ v^{hk} = dx^h dx^k.$$

([10]) E. BOMPIANI, *Geometria proiettiva di elementi differenziali,* « Annali di Matematica » s. IV^a, t. XXII (1943), pp. 1-32. Si veda in particolare il Cap. I°.

Possiamo dire che la retta che li congiunge è la *traccia* sull'iperpiano $\nu^0 = 0$ dello $S(2)$-osculatore (che è poi un iperpiano qualsiasi non passante per il punto y) del piano osculatore alla curva 8.1 uscente da y in direzione d.

Il primo punto, al variare di dx^i, descrive lo S_{n-1} $\nu^0 = 0$ dello S_n tangente (che potremmo dire S_{n-1} improprio); il secondo punto descrive la proiezione da questo S_{n-1} della varietà di Veronese

8.5 $$\nu^i = 0, \qquad \nu^{hk} = dx^h dx^k,$$

sullo spazio $S_{\frac{n(n+1)}{2}-1}$ di equazioni

8.6 $$\nu^0 = 0, \qquad \nu^i = -\Gamma^i_{hk}\nu^{hk}.$$

Questa proiezione è dunque anch'essa una varietà di Veronese $V^{2^{n-1}}_{n-1}$ e risulta riferita proiettivamente allo S_{n-1} (improprio dello S_u tangente).

Si applicano dunque integralmente le considerazioni sulla W_n luogo delle congiungenti coppie di punti corrispondenti in un'omografia fra un S_{n-1} e una $V^{2^{n-1}}_{n-1}$ di Veronese.

Prima di enunciare il risultato ricordiamo ancora la definizione di sistema p-assiale di curve sopra una V_n. Dato per ogni punto di V_n un S_p diciamo sistema p-assiale di curve definito dal sistema degli S_p *d'appoggio* la totalità delle curve i cui piani osculatori in ogni punto segano in rette lo S_p per esso.

Poniamo $p = \dfrac{n(n+1)}{2}$. Il piano osculatore ad una curva 8.1 sega in una retta lo S_p di equazioni (le 8.6 tolta $\nu^0 = 0$)

8.7 $$\nu^i = -\Gamma^i_{hk}\nu^{hk}.$$

Inoltre si nota che per individuare il piano dei tre punti 8.3 o 8.4 si possono sostituire ad essi loro combinazioni lineari, sicchè in particolare si possono prendere i punti

8.8 $$y; \qquad y_i dx^i; \qquad y_{hk}dx^h dx^k - y_i\Gamma^i_{hk}dx^h dx^k - 2y_i dx^i \psi_h dx^h$$

ove $\psi_h dx^h$ è una *forma arbitraria*, cioè le ψ_h sono componenti di un *vettore covariante arbitrario*. L'ultimo punto può anche scriversi

8.9 $$y_{hk}dx^h dx^k - y_i(\Gamma^i_{hk} + \delta^i_h\psi_k + \delta^i_k\psi_h)dx^h dx^k$$

e quindi i piani osculatori alle curve 8.1 in y segano in una retta anche lo S_p di equazioni

8.20 $$\nu^i = -(\Gamma^i_{hk} + \delta^i_h\psi_k + \delta^i_k\psi_h)\nu^{hk} = -\Gamma^i_h\psi_k\nu^{hk} - 2_h\nu^{ih}.$$

Siamo ora in grado di enunciare il teorema:

Data in uno spazio proiettivo S_N *una* V_n *non soddisfacente ad equazioni a derivate parziali del 2° ordine lineari omogenee, cioè tale che il suo* $S(2)$ *osculatore generico abbia dimensione* $n(n+3)/2$, *si costruisca il cono di Del Pezzo degli* $S(2, 1)$ *osculatori in un punto di* V_n *secondo le varie tangenti a* V_n *e in corrispondenza proiettiva con esse.*

Per semplicità di discorso si seghi tutta la configurazione con uno $S_{\frac{n(n+3)}{2}-1}$ *arbitrario dello* $S(2)$, *purchè non passante per il punto. La stella di tangenti dà luogo ad un* S_{n-1} *riferito proiettivamente agli* S_n *sezioni degli* S_{n+1} *generatori del cono di Del Pezzo (formanti a loro volta un cono che ha per vertice lo* S_{n-1}*).*

Preso in $S_{\frac{n(n+3)}{2}-1}$ *un generico* S_{p-1} *con* $p=\frac{n(n+1)}{2}$ *questo taglia il cono ora detto in una varietà di Veronese* $\mathring{V}^{2^{n-1}}_{n-1}$ *che risulta riferita proiettivamente a* S_{n-1}. *Il luogo delle congiungenti coppie di punti corrispondenti di* $\mathring{V}_{n-1}$ *e di* S_{n-1} *è una varietà* $W^{2^n-1}_n$ *razionale che possiede* $\infty^n V^{2^{n-1}}_{n-1}$.

Le curve della varietà data V_n *definite dalla condizione che i piani osculatori ad esse in un punto incidano in rette lo* S_p *congiungente il punto allo* S_{p-1}, *cioè le curve del sistema* p*-assiale definito dall'assegnare lo* S_p *in ogni punto di* V_n *soddisfano ad equazioni del tipo* 8.1 *(in cui le* Γ^i_{hk} *sono quelle che figurano nelle equazioni* 8.7 *dello* S_p*) e le loro tracce sullo spazio* $S_{\frac{n(n+3)}{2}-1}$ *sono le generatrici di* W_n.

Viceversa: dato il sistema 8.1 *rimane definita la* W_n *ma non un* S_{p-1}. *Gli* $\infty^n S_{p-1}$ *che segano* W_n *nelle* ∞^n *varietà di Veronese* $V^{2^{n-1}}_{n-1}$ *ch'essa contiene contiene congiunti con il punto di* V_n *danno luogo ad* $\infty^n S_p$ *ciascuno dei quali è segato in rette dai piani osculatori alle curve integrali di* 8.1. *Sicchè le geodetiche* 8.1 *non individuano le* Γ^i_{hk} *(cioè uno spazio* S_p*) ma la* W_n. *Ad un sistema di* Γ^i_{hk} *si può sostituire il sistema* $\Gamma^i_{hk}+\delta^i_h\psi_k+\delta^i_k\psi_h$ *con le* ψ_h *componenti di un vettore covariante arbitrario: ciò equivale a sostituire allo* S_p 8.7 *uno qualsiasi degli* S_p *rappresentati dalle* 8.10 *i cui* S_{p-1} *(loro tracce su* $S_{\frac{n(n+3)}{2}-1}$*) pure segano* W_n *in varietà di Veronese.*

In altri termini: *sul modello proiettivo scelto di* V_n *in* S_N *tutti i sistemi di curve definiti da equazioni del tipo* 8.1 *sono sistemi* p*-assiali* $\left(p=\frac{n(n+1)}{2}\right)$ *e anzi in ciascun punto lo* S_p *che definisce il sistema può scegliersi in* ∞^n *modi: di qui l'intervento del vettore arbitrario* ψ_h [11].

---

[11] Si noti che anche dal punto di vista numerativo la costruzione geometrica dà l'esatto numero dei parametri (coefficienti) che devono figurare nelle equazioni delle geodetiche.

I coefficienti essenziali sono in numero uguale a quello delle Γ^i_{kh} diminuito di n per l'intervento del vettore arbitrario ϕ_h, cioè $n\cdot\frac{n(n+1)}{2}-n$.

Gli $S_{p-1}\equiv S_{\frac{n(n+1)}{2}}$ di $S_{\frac{n(n+1)}{2}}$ dipendono da un numero di parametri uguale a

$$\left[\frac{n(n+3)}{2}-1-\frac{n(n+1)}{2}+1\right]\frac{n(n+1)}{2}=n\cdot\frac{n(n+1)}{2};$$

ma poichè ad un S_{p-1} se ne possono sostituire ∞^n che pure segano W_n in una varietà di Veronese si ha lo stesso numero di prima.

Mi pare così chiarita in ogni dettaglio la costruzione di una G_n e la differenza che esiste fra l'assegnare una G_n e l'assegnare una connessione simmetrica affine A_n che determini G_n. Di più a costruzioni di carattere infinitesimale si sono sostituite costruzioni (di piani osculatori) in termini finiti (condizioni d'incidenza) e si è tolta di mezzo ogni indeterminazione insita in quel linguaggio e si è riportato tutto nell' ambito della geometria proiettiva.

Con gli stessi criterî vogliamo ora chiarire il significato dell'arco affine di una geodetica rispetto ad una connessione e del trasporto di direzioni.

9. Arco affine delle geodetiche rispetto ad una assegnata connessione.

Come si è già ricordato al n. 4, data G_n, cioè un sistema di geodetiche in X_n, si può fissare su ciascuna di esse un *arco affine* soltanto se si assegna *una* delle connessioni simmetriche Γ^i_{hk} che abbia quel sistema di geodetiche.

D'accordo con quanto s'è visto nel n. precedente, ciò equivale a fissare in un punto di V_n uno degli S_p la cui traccia su $v^0 = 0$ è un S_{p-1} che sega in varietà di Veronese la W_n relativa a G_n. E poichè le geodetiche costituiscono un sistema p-assiale con uno di quegli S_p come spazio d'appoggio, il piano osculatore nel punto alla geodetica sega questo S_p in una retta che si dirà *normale affine* alla geodetica secondo la connessione Γ^i_{hk} assegnata.

Rilevato ciò, proponiamoci di caratterizzare il parametro affine.

Fissiamo perciò in S_N un iperpiano che possiamo sempre scegliere come $y^0 = 0$ (facendo con ciò dello S_N proiettivo uno spazio affine). Per i punti non appartenenti ad esso può farsi senz'altro $y^0 = 1$, e quindi $\dfrac{dy^0}{dx^r} = 0$ (e così per le derivate successive). Ciò equivale a dire che tutt'i punti derivati di un punto qualsiasi di V_n appartengono all'iperpiano $y^0 = 0$.

Consideriamo ora una curva di V_n, $x^i = x^i(t)$, cioè nell'ambiente $y^\alpha = y^\alpha(x(t))$.

Com'è noto ([12]) se si passa da questa rappresentazione parametrica ad un'altra con un parametro differente, sia p. es. s, si può scegliere questo in modo che il punto $\dfrac{d^2y(x)}{ds^2}$ venga a trovarsi sopra una retta prefissata passante per il punto x e giacente nel piano osculatore.

Determiniamo appunto s in modo che il punto $\dfrac{d^2y}{ds^2}$ si trovi sulla normale affine relativa alla connessione Γ^i_{kk}.

Per le geodetiche di questa riferite ad un parametro t qualsiasi si ha

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} + \Gamma^i_{hk}\frac{dx^h}{dt}\frac{dx^k}{dt} = \varphi(x)\frac{dx^i}{dt}$$

([12]) E. BOMPIANI, *Sulla normalizzazione delle equazioni differenziali*, « Rend. Acc. Lincei », s. VI^a, vol. XXIII (1936), p. 807-812;

Sur la normalisation des équations différentielles lineaires, « Bulletin da la Section Scientifique de l'Académie Roumaine », t. XXVIII (1936); e più recentemente nella Memoria: *Forme normali delle equazioni differenziali lineari e loro significato geometrico*, « Ann. Scient. de l'Université de Jassy », t. XXIII (1937), p. 75-105.

e se si cambia t in nuovo parametro s il punto $\dfrac{d^2y}{ds^2}$ è

$$y_i \left\{ \left[-\Gamma^i_{hk} \frac{dx^h}{dt} \frac{dx^k}{dt} + \varphi \frac{dx^i}{dt} \right] \left(\frac{dt}{ds}\right)^2 + \frac{dx^i}{dt} \frac{d^2t}{ds^2} \right\} + y_{hk} \frac{dx^h}{dt} \frac{dx^k}{dt} \left(\frac{dt}{ds}\right)^2$$

cioè ha coordinate locali

$$\nu^0 = 0, \quad \nu^i = \left[-\Gamma^i_{hk} \frac{dx^h}{dt} \frac{dx^k}{dt} + \varphi \frac{dx^i}{dt} \right] \left(\frac{dt}{ds}\right)^2 + \frac{dx^i}{dt} \frac{d^2t}{ds^2}, \quad \nu^{hk} = \frac{dx^h}{dt} \frac{dx^k}{dt} \left(\frac{dt}{ds}\right)^2.$$

Condizione necessaria e sufficiente affinchè la retta $\left(y, \dfrac{d^2y}{ds^2}\right)$ coincida con la normale affine relativa alla connessione Γ^i_{hk} è che essa appartenga allo S_p di equazione 8.7 cioè che

$$\varphi\left(\frac{dt}{ds}\right)^2 + \frac{d^2t}{ds^2} = 0$$

e questa equivale esattamente alla 4.7 che definisce il parametro affine s. Du que;

L'arco affine s *di una geodetica di* $\mathrm{V_n}$ *uscente da un suo punto* y *relativamente ad una data connessione è tale che per esso, e soltanto per esso, la retta* $\left(\mathrm{y}, \dfrac{\mathrm{d^2y}}{\mathrm{ds^2}}\right)$ *del piano osculatore alla geodetica coincide con la normale affine rispetto alla connessione data, cioè con l'intersezione di detto piano osculatore con lo* $\mathrm{S_p}$ *d'appoggio determinato dalla connessione.*

Qui si vede bene dove entra nella costruzione dell'arco affine la particolare connessione Γ^i_{hk}, cioè lo S_p da essa definito in ogni punto di X_n: il piano osculatore alla geodetica in esame taglia in rette *tutti* gli S_p per il punto costruiti a partire dalla W_n (che caratterizza la G_n, ma non la connessione): ma soltanto se se ne fissa *uno* si ha modo di distinguere nel piano osculatore *una* retta (normale affine); e solo in relazione a questa è possibile definire l'arco affine.

L'esistenza dell'arco affine appena si sia fissata una normale affine in ciascun punto della curva in esame (in seguito alla scelta di *una* connessione Γ^i_{hk}) può porsi in evidenza in varî altri modi.

Ricordo che data in uno spazio proiettivo S_N una qualsiasi curva C e sulla sviluppabile circoscritta a C una curva C_1 e poi sulla sviluppabile circoscritta a C_1 una curva C_2 viene determinato in modo intrinseco (cioè del tutto indipendente sia dal riferimento, sia dal fattore di proporzionalità delle coordinate, sia dal parametro assunti nella rappresentazione analitica della curva) un fattore di proporzionalità in ogni punto di C e un *arco proiettivo* s tale che i punti $\dfrac{dy}{ds}$ e $\dfrac{d^2y}{ds^2}$ descrivono le curve C_1 e C_2.

Nella Memoria citata in [12] è esplicitamente indicato il caso in cui C_1 sia una sezione iperpiana della sviluppabile circoscritta a C: si ha allora la « geometria affine » di C. Ora questo è proprio il caso che interessa qui: un iperpiano qualunque di S_N può esser preso come iperpiano improprio e C_1 in esso. Di più si può assumere come C_2 la sezione della rigata delle normali affini con quell'iperpiano poichè essa appartiene evidentemente alla sviluppabile circoscritta a C_1.

Ma l'esistenza dell'arco affine risulta anche da considerazioni più elementari, di cui mi sono servito recentemente per altro scopo [13].

Sia dato un elemento E_2 di curva e una retta per il suo centro e nel suo piano. Comunque si scelga sulla retta un centro di proiezione resta individuata fino all'intorno del 2° ordine (e non avrebbe senso chiedere di più) una corrispondenza fra i punti dell'E_2 e i punti della tangente ad esso. Un parametro affine distribuito sulla tangente si riporta così sull'E_2; se ora si passa all'E_2 successivo (nel cui piano sia pure data una retta per il centro dell'E_2) si può ripetere l'operazione e assumere *gli stessi valori* del primo e del secondo parametro nei due punti dell'E_1 comune ai due E_2: così continuando si definisce un parametro affine sulla curva contenente gli E_2.

Nel caso attuale la curva è una geodetica e la retta che occorre considerare in ogni suo punto è la normale affine fissata dalla connessione.

10. **Invariante di due connessioni simmetriche con le stesse geodetiche.**

Si considerino due connessioni Γ^i_{hk} e $\bar{\Gamma}^i_{hk} = \Gamma^i_{hk} + \delta_h \psi_k + \delta^i_k \psi_h$ che danno luogo alla stessa G_n; e sia E_2 l'elemento di geodetica in direzione dx^i. Nel piano di E_2 in relazione alle due connessioni si hanno due normali affini.

Una tale configurazione (E_2 e due rette per il suo centro) ha, come è noto [14], un invariante proiettivo infinitesimo che ora vogliamo calcolare.

Se l'elemento E_2 è rappresentato (in coordinate proiettive e con riferimento ad un parametro qualsiasi) da $y + \frac{dy}{dt} dt + \frac{1}{2} \frac{d^2 y}{dt^2} dt^2$ e le rette spiccate dal suo centro y sono inoltre individuate dai punti $z, \bar{z}$ quell'invariante (che a meno di un fattore numerico è l'infinitesimo principale di un birapporto) è espresso da

$$\frac{|y \quad dy \quad d^2y|}{|y \quad dy \quad z|} \cdot \frac{|y \quad z \quad z|}{|y \quad dy \quad \bar{z}|} = \frac{|y \quad y \quad y''|}{|y \quad y' \quad z|} \cdot \frac{|y \quad z \quad \bar{z}|}{|y \quad y' \quad \bar{z}|} \, dt$$

ove i determinanti del 3° ordine indicati si possono costruire con tre qualsiasi delle coordinate proiettive omogenee dei punti che vi figurano (ciò

---

(13) E. BOMPIANI, *Sulle corrispondenze puntuali fra spazî proiettivi*, « Rend. Acc. Lincei », s. VIII^a, vol. VI, p. 145-161.

(14) E. BOMPIANI, *Alcuni invarianti proiettivi di elementi curvilinei*, « Rend. Acc. Lincei », s. VI^a, vol. XXII (1935), p. 483-491; n. I, 1.

equivale a proiettare su uno qualsiasi dei piani di riferimento); e non c'è quindi bisogno di specificare quali.

Per fare i calcoli nel modo più rapido riferiamo la geodetica in esame al suo arco affine s relativo alla connessione Γ^i_{hk} con ciò $dt = ds$ e il punto $y'' = \frac{d^2y}{ds^2}$ coincide col punto z (sulla normale affine relativa a quella connessione). Il primo rapporto di determinanti a secondo membro è $= 1$. Quanto al secondo rapporto, riferendosi alle coordinate locali, i determinanti del 3° ordine si riducono a determinanti del 2° ordine, e indicando con i l'indice relativo ad una riga si ha per l'invariante l'espressione

$$\frac{\begin{vmatrix} -\Gamma^i_{hk}dx^h dx^k & -\Gamma^i_{hk}dx^h dx^k - 2\psi_h dx^h dx^i \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} dx^i & -\Gamma^i_{hk}dx^h dx^k - 2\psi_h dx^h dx^i \end{vmatrix}} = 2\psi_h dx^h.$$

Dunque.

L'invariante $\psi_h dx^h$ è l'invariante proiettivo relativo all'elemento di 2° ordine E_2 di geodetica uscente dal punto in direzione dx^i e alle due normali affini definite nel suo piano osculatore da Γ^i_{hk} e da $\Gamma^i_{hk} + \delta^i_h\psi_k + \delta^i_k\psi_h$.

1 . **Trasporti affini simmetrici di direzioni.**

Vogliamo ora assegnare sulla V_n in S_N proiettivo una costruzione geometrica relativa alla legge di trasporto

11.1 $$d\delta x^i = -\Gamma^i_{hk}\delta x^h dx^k, \qquad \Gamma^i_{hk} = \Gamma^i_{kh}.$$

Ciò vuol dire: fissato un punto x su V_n e due tangenti d, δ in esso a V_n (definite da dx^i e δx^i) assegnare una costruzione geometrica di una tangente a V_n nel punto $x + dx$ definita inoltre da $\delta x + d\delta x$ (oppure scambiando d e δ).

Nell'ambiente S_N si devono considerare i punti

11.2 $$y\,; \qquad y_i\delta x^i\,; \qquad y_i dx^i\,; \qquad -y_i\Gamma^i_{hk}\delta x^h dx^k + y_{hk}\delta x^h dx^k$$

cioè di coordinate locali, entro lo $S(2)$ osculatore,

$$(\nu^0 \neq 0,\ \nu^i = \nu^{hk} = 0): \qquad (0,\ \nu^i = \delta x^i,\ \nu^{hk} = 0)\,; \qquad (0,\ \nu^i = dx^i\ \ \nu^{hk} = 0)$$
$$(0,\ \nu^i = -\Gamma^i_{hk}\delta x^h dx^k,\ \nu^{hk} = \frac{1}{2}(\delta x^h dx^k + \delta x^k dx^h)).$$

Poichè le coordinate dell'ultimo punto possono anche scriversi

11.3 $$0,\ \nu^i = -\frac{1}{2}\Gamma^i_{kh}(\delta x^h dx^k + \delta x^k dx^h),\ \nu^{hk} = \frac{1}{2}(\delta x^h dx^k + \delta x^k dx^h)$$

esso appartiene allo S_{p-1}

11 4 $$\nu^i = -\Gamma^i_{hk}\nu^{hk}$$

dello $S_{\frac{n(n+3)}{2}-1}$ rappresentato da $\nu^0 = 0$; questo S_{p-1} è quello rappresentato dalle 8.6 sul quale sta la $V_{n-1}^{2^{n-1}}$ di Veronese ottenuta segando con esso il cono di Del Pezzo. Si ricordi che i punti di questa $V_{n-1}^{2^{n-1}}$ sono riferiti proiettivamente alle rette tangenti a V_n nel punto in esame ($\nu^0 = 1$, $\nu^i = \nu^{hk} = 0$).

Riferendoci a quanto s'è detto al n. 7. il punto 11.3 può costruirsi così: si considerino i punti D e Δ di $V_{n-1}^{2^{n-1}}$ corrispondenti alle tangenti d, δ; gli S_{n-1} tangenti in essi a $V_{n-1}^{2^{n-1}}$ s'incontrano nel punto 11.3.

Lo S_3 contenente i punti 11.2 si sa quindi costruire: esso è quello che contiene la *direzione rigata* $\mathcal{E}_1$ delle due generatrici infinitamente vicine definite dalle coppie di punti $(x, \delta x)$, $(x + dx, \delta x + d\delta x)$.

Si può anche osservare che per la costruzione di questo S_3 è indifferente partire dalla $V_{n-1}^{2^{n-1}}$ determinata dallo S_{p-1} 11.4 o da una qualsiasi delle altre ∞^n $V_{n-1}^{2^{n-1}}$ contenute in W_n, pur di prendere su ciascuna di queste i punti corrispondenti nella proiettività a d e δ (e poi procedere come sopra).

Lo stesso fatto risulta anche dall'osservazione seguente Per individuare lo S_3 si può sostituire all'ultimo dei punti 11.2 una qualsiasi combinazione lineare di esso e dei precedenti; cioè tenuto conto degli ordini di infinitesimi

$$-y_i\Gamma_{hk}^i\delta x^h dx^k - y_i\delta x^i\varphi_k dx^k - y_i dx^i\psi_h\delta x^h - y_{hk}\delta x^h dx^k$$

ove gli pfaffiani $\varphi_h dx^h$, $\psi_h dx^h$ sono del tutto arbitrarî.

Lo stesso punto s'indica meglio con

$$-y_i(\Gamma_{hk}^i + \delta_h^i\varphi_k + \delta_k^i\psi_h)\delta x^h dx^k + y_{hk}\delta x^h dx^k$$

cioè, confrontando con le 11.2, lo S_3 rimane inalterato se alla connessione Γ_{hk}^i si sostituisce l'altra

$$L_{hk}^i = \Gamma_{hk}^i + \delta_h^i\varphi_k + \delta_k^i\psi_h\,.$$

Però se si vuole che questa nuova connessione sia pure simmetrica. e porremo allora $L_{hk}^i = \bar\Gamma_{hk}^i$, dev'essere

$$\delta_h^i\varphi_k + \delta_k^i\psi_h = \delta_k^i\psi_h + \delta_k^i\psi_h \quad \text{ossia} \quad \delta_h^i(\varphi_k - \psi_k) = \delta_k^i(\varphi_h - \psi_h).$$

Si fissi p. es. $i = h \neq k$; risulta $\varphi_k = \psi_k$ cioè

$$\bar\Gamma_{hk}^i = \Gamma_{hk}^i + \delta_h^i\psi_k + \delta_k^i\psi_h\,.$$

Risulta da ciò che lo S_3 *che una connessione simmetrica associa ad una coppia di tangenti in un punto a* V_n *non varia se si sostituisce a detta connessione una qualsiasi delle altre connessioni simmetriche che hanno le stesse geodetiche.*

In altri termini questi S_3 dipendono da G_n e non dalle particolari connessioni che le determinano.

Le considerazioni precedenti determinano per ogni coppia di tangenti d, δ in un punto y di V_n uno S_3 che taglia in una retta ciascuno degli S_p

d'appoggio (che servono a costruire G_n). Ciascuno di questi S_3 è pensato come congiungente due generatrici infinitamente vicine $(y, \delta y)$ e $(y + dy, \delta y + d\delta y)$ di una rigata, cioè contenente un $\mathcal{E}_1$ di rigata o direzione rigata. Ogni determinazione del simbolo $d\delta y$ corrisponde ad una determinazione della generatrice infinitamente vicina a $y, \delta y)$, In termini finiti, ciò vuol dire che ogni determinazione di $d\delta y$ deve dar luogo ad una « proiettività di Chasles » lungo la retta $(y, \delta y)$, cioè ad una proiettività fra i suoi punti e i piani per essa entro lo spazio S_3 sopra determinato relativo a d e a δ.

Un punto della retta $(y, \delta y)$ s'indicherà con

11.6 $$\lambda y + \delta y$$

s'intende che λ dev'essere un infinitesimo dello stesso ordine di δy ed è relativo al punto y e alla direzione δ; per ricordare il fatto che λ è infinitesimo si potrà indicare con $\lambda = \delta\theta$: se poi converrà esplicitare la sua dipendenza dalla sua direzione δ si scriverà $\lambda = \theta_h \delta x^h$ essendo θ_h le componenti di un arbitrario vettore covariante (non necessariamente le derivate di una funzione θ rispetto alle x^h).

Il piano tangente in quel punto ad una rigata ottenuta spostando (nel modo da definire) quella retta in direzione d è individuato dai punti

11.7 $$y\,; \qquad \delta y\,; \qquad y dy + d\delta\lambda.$$

Valutiamo $d\delta y = d(y_i \delta x^i) = y_{hk}\delta x^h dx^k + y_i d\delta x^i$ con la connessione Γ^i_{hk} cioè ponendo

11.8 $$d\delta x^i = -\Gamma^i_{hk}\delta x^h dx^k.$$

Un punto generico del piano tangente in 11.6 ha le coordinate locali (ν^0 arbitraria e)

11.9 $$\begin{aligned} \nu^i &= \delta\theta dx^i + d\rho\delta x^i - \Gamma^i_{hk}\delta x^h dx^k \\ \nu^{hk} &= \frac{1}{2}(\delta x^h dx^k + \delta x^k dx^h) \end{aligned}$$

ove $d\rho$ è un arbitrario infinitesimo (la cui dipendenza dalla direzione d si può porre in evidenza scrivendo per esso $\rho_h dx^h$, ρ_h arbitrarie).

Consideriamo ora lo $\bar{S}_p$ d'appoggio definito dalle $\bar{\Gamma}^i_{hk} = \Gamma^i_{hk} + \delta^i_h\psi_k + \delta^i_k\psi_h$, di equazioni (analoghe alle 11.4)

$$\nu^i = -\Gamma^i_{hk}\nu^{hk} - 2\psi_h\nu^{ih}.$$

Il punto 11.9 appartiene ad $\bar{S}_p$, cioè il piano tangente nel punto 11.7 sega in una retta lo $\bar{S}_p$ se e solo se

$$\delta\theta = -\psi_h\delta x^h \qquad\qquad (\text{e } \delta\rho = -\psi_h\delta x^h).$$

Dunque: *il piano corrispondente nella proiettività di Chasles determinata dalla connessione* Γ^i_{hk} *al punto* $\delta\theta x + \delta y$ *è quello (dello* S_3 *sopra costruito) che incide in rette gli* S_p *d'appoggio per i quali risulta* $\psi_h\delta x^h = -\delta\theta$.

In relazione al punto assegnato y e alla direzione assegnata δ vi sono ∞^{n-1} $\bar{S}_p$ d'appoggio che soddisfano a questa condizione per un dato valore di $\delta\theta$, cioè per un punto $\delta\theta y + \delta y$, quindi fissata Γ^i_{hk} gli ∞^h $\bar{S}_p$ d'appoggio si distribuiscono in ∞^1 insiemi ∞^{n-1} di $\bar{S}_p$ e vi è una corrispondenza biunivoca (proiettiva) fra i punti della retta $(y, \delta y)$ e gli insiemi ∞^{n-1} di $\bar{S}_p$.

Se ora consideriamo due connessioni differenti Γ^i_{hk} e $\bar{\Gamma}^i_{hk}$ e facciamo corrispondere due punti $\delta\theta y + \delta y$ e $\delta\bar{\theta} y + \delta y$ che nelle proiettività di Chasles determinate dalle due connessioni abbiano lo stesso piano corrispondente otteniamo sulla retta $(y, \delta y)$ la proiettività rappresentata da

$$\delta\bar{\theta} - \delta\theta = \psi_h \delta x^h.$$

Questa proiettività determinata da due connessioni Γ^i_{hk} *e* $\bar{\Gamma}^i_{hk}$ *sulla retta* $(y, \delta y)$ *dà il significato di* $\psi_h \delta x^h$.

Ancora: fissiamo lo S_p d'appoggio definito da Γ^i_{hk} e cerchiamo quali sono i punti $\delta\bar{\theta} y + \delta y$ che *al variare della direzione* δ *e per una connessione* $\bar{\Gamma}^i_{hk}$ *hanno piani tangenti incidenti lo* S_p.

Si deve avere $\delta\theta = \psi_h \delta x^h$; e perciò il luogo di quei punti è lo S_{n-1} di equazione

$$\nu^0 = \psi_h \nu^h$$

entro lo S_n tangente a V_n in y.

Ne segue che fissato uno S_p d'appoggio (relativo a Γ^i_{hk}) si ha una proiettività fra gli S_{n-1} dello S_n tangente in y a V_n e gli ∞^n $\bar{S}_p$ d'appoggio (gli uni e gli altri individuati dalle ψ_h).

12. Conclusioni.

Riassumendo tutto quanto precede e senza entrare nei dettagli, si vede che la teoria di uno spazio a connessione affine può farsi rientrare nella geometria proiettiva differenziale di una varietà V_n immersa in un S_N proiettivo che sia proiettivamente regolare fino all'intorno del 2° ordine di un suo punto generico, cioè

$$S(2) \equiv S_{\frac{n(n+3)}{2}}, \qquad N \geq \frac{n(n+3)}{2}.$$

L'assegnazione delle *geodetiche* della connessione su V_n equivale all'assegnazione, in un $S_{\frac{n(n+3)}{2}-1}$ di $S(2)$ di una $W_n^{2^{n-1}}$ che si costruisce ponendo una proiettività fra i punti di uno S_{n-1} e i punti di una varietà di Veronese $V_{n-1}^{2^{n-1}}$. Questa W_n è tagliata da ∞^n S_{p-1} del suo ambiente pure in varietà di Veronese; gli S_p che proiettano dal punto di V_n questi S_{p-1} (relativi alla W_n appartenente allo $S(2)$ osculatore nel punto) sono gli S_p d'appoggio dei piani osculatori alle geodetiche (cioè questi piani segano quegli S_p in rette).

Fissare *una* connessione simmetrica con quelle geodetiche equivale a fissare, per ogni punto di V_n, uno di quegli S_p: si ha con ciò, in ogni piano osculatore ad una geodetica, *una* retta, normale affine all'elemento di geodetica, che permette la definizione di un *arco affine* di geodetica relativo ad *una* connessione.

Sempre per le connessioni simmetriche, il *trasporto* di una direzione δ in direzione d (da y a $y + dy$) definisce: 1°) un S_3 determinato da δ e d contenente l'$\mathfrak{S}$, o direzione rigata da costruire; questo *non* dipende dalla particolare connessione adoperata, cioè da un S_p d'appoggio, ma dalla $W_n^{2^n-1}$ che determina le geodetiche; 2°) la direzione rigata, o in termini finiti, la proiettività di Chasles intorno alla retta $(y, \delta y)$; e si ha modo di vedere come essa varia con la connessione.

Con ciò mi paiono completamente chiarite le circostanze relative ad una connessione simmetrica: per ragioni di spazio devo rimandare ad altro lavoro l'analogo chiarimento per il trasporto di direzioni relative ad una connessione asimmetrica.