Deux théorèmes de géométrie anallagmatique réelle à n dimensions.

Mémoire par ELIE CARTAN (à Paris).

Je me propose dans cette courte conférence (*) d'attirer votre attention sur deux théorèmes de géométrie analytique anallagmatique réelle à $n \geq 2$ dimensions. Le premier se rapporte à la représentation d'une transformation anallagmatique réelle par une substitution linéaire déterminée portant sur les coordonnées anallagmatiques, le second se rapporte à la recherche d'hypersphères réelles orientées connaissant les invariants anallagmatiques rationnels de ces hypersphères considérées deux à deux [1].

I. - Généralités sur l'espace anallagmatique.

1. Définition de l'espace anallagmatique.

L'espace anallagmatique réel à n dimensions peut se déduire d'un espace euclidien réel à n dimensions E par l'addition aux points réels de cet espace, rapporté par exemple à un système de coordonnées rectangulaires $X_1, X_2, \dots, X_n$, *un* point impropre qu'on peut appeler *le point à l'infini.* Pour cela on introduit un système de $n+2$ coordonnées homogènes $x_0, x_1, \dots, x_n, x_{n+1}$ liées aux coordonnées rectangulaires par les relations

$$\frac{x_0}{1} = \frac{x_1}{X_1} = \frac{x_2}{X_2} = \dots = \frac{x_n}{X_n} = \frac{x_{n+1}}{X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_n^2},$$

d'où l'on déduit

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 - x_0 x_{n+1} \equiv F(x_0, x_1, \dots x_{n+1}) = 0. \tag{1}$$

Les points à distance finie de l'espace euclidien sont ceux pour lequels la coordonnée x_0 est différente de zéro. Le point impropre (point à l'infini) est celui pour lequel la coordonnée x_0 est nulle. Il est unique car l'égalité $x_0 = 0$ entraîne, dans le domaine réel,

$$x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0,$$

d'où la nullité de toutes les coordonnées x_i sauf x_{n+1}.

(*) Conférence lue au troisième Congrès de l'*Unione Matematica Italiana* à Pise le 23 septembre 1948.

[1] Cfr. « Ann. Soc. Pol. Math. », (1947), p. 266-278.

L'espace euclidien complété par le point à l'infini est l'espace anallagmatique que nous appellerons A ; les coordonnées $x_0, x_1, \dots x_n, x_{n+1}$ sont les *coordonneés anallagmatiques* de cet espace ; la forme quadratique $F(x_0, x_1, \dots, x_n, x_{n+1})$ sera dite la *forme fondamentale* de cet espace.

2. **Représentation projective de l'espace anallagmatique.** — Les coordonnées anallagmatiques homogènes $x_0, x_1, x_2, \dots x_n, x_{n+1}$ peuvent être regardées comme les coordonnées homogènes d'un espace projectif à $n+1$ dimensions P dans lequel est plongé l'espace anallagmatique A ; cet espace A n'est autre que la quadrique Q d'équation $F(x_0, x_1, \dots x_n, x_{n+1}) = 0$. Les transformations anallagmatiques de l'espace A seront par définition les transformations projectives de l'espace P qui laissent invariante la quadrique Q: elles se traduisent par les substitutions linéaires à coefficients réels qui laissent invariante l'équation $F(x_0, x_1, \dots x_n, x_{n+1}) = 0$, c'est à dire qui reproduisent la forme F à un facteur constant près λ différent de zéro.

LEMME 1. – *On peut représenter de deux manières différentes toute transformation anallagmatique réelle* T *par une substitution linéaire réelle* Θ *laissant invariante la forme quadratique* $\mathrm{F}(x_0, x_1, \dots x_n, x_{n+1})$.

En effet la forme fondamentale réelle F se décompose en la somme des carrés de $n+2$ formes linéaires indépendantes dont $n+1$ sont précédés du signe $+$ et le dernier du signe $-$. Il en sera de même de la forme $F(x'_0, x'_1, \dots x'_n, x'_{n+1})$. Il en résulte, d'après la loi classique d'inertie, que l'égalité

$$F(x'_0, x'_1, x'_2 \dots x'_n, x'_{n+1}) = \lambda F(x_0, x_1, \dots x_n, x_{n+1})$$

exige que λ soit positif; en divisant par $\pm\sqrt{\lambda}$ les coefficients des formes linéaires $x'_0, x'_1, \dots, x'_n, x'_{n+1}$, on justifiera l'énoncé du Lemme 1.

II. - Les hypersphères à équation réelle et leurs coordonnées.

3. **Equation générale des hypersphères de l'espace** A.

Cette équation est, en coordonnées rectangulaires

$$a_0(X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_n^2) - 2a_1X_1 - 2a_2X_2 - \dots - 2a_nX_n + a_{n+1} = 0,$$

ou, en utilisant les coordonnées anallagmatiques :

$$(2) \qquad a_0x_{n+1} - 2a_1x_1 - 2a_2x_2 - \dots - 2a_nx_n + a_{n+1}x_0 = 0.$$

Remarquons qu'une hypersphère proprement dite correspond à un coefficient a_0 différent de zéro. Si a_0 est nul l'équation (2) représente un hyperplan. En géométrie anallagmatique l'hyperplan doit être regardé comme une hypersphère particulière, *caractérisée par la propriété de contenir le point à l'infini.*

Les coefficients $a_0, a_1, \dots a_{n+1}$ seront appellés les coordonnées de l'hypersphère; elles sont définies à un facteur arbitraire près différent de zéro.

LEMME 2. – *Si l'on applique aux coordonnées* $a_0, a_1, \dots a_n, a_{n+1}$ *d'une hypersphère* Σ *une des substitutions linéaires* Θ *qui traduisent ne transformation anallagmatique réelle* T. *l'hypersphère dont les coordonnées* a'_i *sont les transformées par* Θ *des coordonnées* a_i *sont les coordonnées de l'hpersphère* Σ' *transformée de* Σ *par* T.

En effet soient $x_0, x_1, x_2, \dots x_{n+1}$ les coordonnées d'un point de Σ et $x'_0, x'_1, \dots x'_{n+1}$ celles du point transformé par Θ. On aura en désignant par ρ un paramètre arbitraire, et d'après le Lemme 1,

$$F(x'_i + \rho a'_i) = F(x_i + \rho a_i),$$

d'où

$$F(x'_i) + \rho \Sigma a'_i \frac{\partial F}{\partial x'_i} + \rho^2 F(a'_i) = F(x_i) + \rho \Sigma a_i \frac{\partial F}{\partial x_i} + \rho^2 F(a_i),$$

d'où

$$\Sigma a'_i \frac{\partial F}{\partial x'_i} = \Sigma a_i \frac{\partial F}{\partial x_i}.$$

Or la relation (2), qui peut s'écrire

$$a_0 \frac{\partial F}{\partial x_0} + a_1 \frac{\partial F}{\partial x_1} + \dots + a_{n+1} \frac{\partial F}{\partial x_{n+1}} = 0,$$

exprime que le point x_i est situé sur l'hypersphère de coordonnées a_i; la relation

$$a'_0 \frac{\partial F}{\partial x'_0} + a'_1 \frac{\partial F}{\partial x'_1} + \dots + a'_{n+1} \frac{\partial F}{\partial x'_{n+1}} = 0$$

exprimera donc que le point (x'_i) est situé sur l'hyperspère de coordonnées a'_i *ce qui démontre le Lemme 2.*

En définitive *les substitutions linéaires* Θ *qui traduisent analytiquement toute transformation anallagmatique* T *appliquée aux points de l'espace anallagmatique réel* A *traduisent également la même transformation* T *appliquée aux coordonnées des hypersphères de* A.

III. – **Les hyperphères proprement réelles, les hyperphères improprement réelles et leurs coordonnées semi-normales.**

4. — L'équation d'une hypersphère proprement dite peut s'écrire

$$\left(X_1 - \frac{a_1}{a_0}\right)^2 + \left(X_2 - \frac{a_2}{a_0}\right)^2 + \dots + \left(X_n - \frac{a_n}{a_0}\right)^2 = \frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 - a_0 a_{n+1}}{a_0^2};$$

on en déduit immédiatement

$$F(a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n+1}) = a_0^2 R^2, \tag{3}$$

R désignant le rayon de l'hypersphère.

Trois cas sont à distinguer :

1er CAS $F(a_i) < 0$. On a affaire à une hypersphère à centre réel et rayon purement imaginaire ; nous dirons que l'hypersphère est *improprement réelle.*

2ème CAS $F(a_i) > 0$. On a affaire à une hypersphère de centre réel et de rayon réel ; nous dirons que l'hypersphère est *proprement réelle.*

3ème CAS $F(a_i) = 0$. On a affaire à une hypersphère de rayon nul, c'est à dire à un point.

Remarquons que tout hyperplan réel rentre dans la classe des hypersphères proprement réelles, puisque

$$F(a_i) = a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 > 0.$$

5. — Dans l'espace projectif P les hypersphères improprement réelles sont représentées par les points *intérieurs* à la quadrique Q, les hypersphères proprement réelles par les points extérieurs à la quadrique Q et les hypersphères de rayon nul par les points de la quadrique Q.

6. **Hypersphère purement réelle orientée.** — Toute hypersphère purement réelle est susceptible d'une *orientation.* Orienter cette hypersphère c'est choisir une des deux régions dans les quelles elle sépare l'espace anallagmatique ; la région choisie sera appellée le *domaine* de l'hypersphère orientée. Dans l'espace projectif P le point représentatif de l'hypersphère, quelle que soit son orientation, est un point M intérieur à la quadrique Q, et le *domaine* de l'hypersphère orientée est l'une des deux régions de la quadrique Q séparées par l'hypercone de sommet M tangent à Q, ou encore par l'hyperplan polaire de M par rapport à Q.

7. **Coordonnées semi-normales d'une hypersphère improprement réelle** — L'inégalité

$$F(a_i) < 0$$

ou

$$a_0 a_{n+1} > a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2$$

qui caractérise ces hypersphères montre que leurs cordonnées a_0 et a_{n+1} sont de même signe et ne peuvent jamais s'annuler. Comme les points qui les représentent dans l'espace projectif P sont intérieurs à la quadrique Q, ils forment un ensemble connexe et si l'on choisit pour l'un d'eux la coordonnée a_0 positive, le passage d'une manière continue de ce point à un autre point quelconque de l'ensemble conduira pour tous ces points à des coordonnées a_0 et a_{n+1} positives. Nous appellons *coordonnées semi-normales* d'un quelconque de ces points celles pour lesquelles on a

$$a_0 > 0, \qquad a_{n+1} > 0,$$

ou encore $a_0 + a_{n+1} > 0$. Avec cette supposition nous voyons que *les coordonnées semi-normales de tout point intérieur à* Q *ou de toute hypersphère improprement réelle sont définies à un facteur positif arbitraire près.*

8. **Coordonnées semi-normales d'un point de l'espace anallagmatique.** — Comme les coordonnées d'un point satisfont à l'équation

$$x_0 x_{n+1} = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2,$$

il en résulte que x_0 et x_{n+1} sont du même signe et que l'une de ces coordonnées ne peut s'annuler que si le point est l'origine des coordonnées ou le point à l'infini. On pourra toujours s'arranger pour que la somme $x_0 + x_{n+1}$ soit positive et on peut passer par continuité d'un point quelconque de Q à un autre point quelconque de manière à avoir constamment $x_0 + x_{n+1} > 0$. Les coordonnées semi-normales d'un point seront définies ainsi par la condition $x_0 + x_{n+1} > 0$. *Elles sont définies à un facteur positif arbitraire près.*

9. **Coordonnées semi-normales d'une hypersphère purement réelle orientée.** — Nous les choisirons par convention de manière que les coordonées a_0, $a_1, \dots a_n$, a_{n+1} satisfassent à la condition

$$(4) \qquad - a_0 x_{n+1} + 2a_1 x_1 + \dots + 2a_n x_n - a_{n+1} x_0 > 0,$$

les x_i désignant les coordonnées *semi-normales* d'un point quelconque du domaine de l'hypersphère.

On voit immédiatement que si le point à l'infini fait partie du domaine de l'hypersphère orientée donnée, la coordonnée semi-normale a_0 de cette hypersphère est négative et, s'il en fait partie, elle est positive (hypersphère orientée extérieurement ou intérieurement).

10. — THÉORÈME I. - *Toute transformation anallagmatique réelle* T *peut être représentée analytiquement par une substitution linéaire réelle bien déterminée* Θ *laissant invariante la forme fondamentale* F *et faisant passer d'un système de coordonnées semi-normales d'une hypersphère improprement réelle, ou de rayon nul, ou proprement réelle orientée, aux coordonnées semi-normales de cette hypersphère transformée par* T

DÉMONSTRATION. - D'après le Lemme 1, il existe deux substitutions linéaires représentant analytiquement la transformation T et laissant invariante la forme fondamentale F.

Partons alors d'une hypersphère improprement réelle *particulière*, par exemple l'hypersphère Σ_0 de coordonnées $a_0 = a_{n+1} = 1$, $a_1 = a_2 = ... = a_n = 0$, et soient

$$a'_i = \overset{0}{\alpha_i} a_0 + \overset{1}{\alpha_i} a_1 + ... + \overset{n}{\alpha_i} a_n + \overset{n+1}{\alpha_i} a_{n+1} \qquad (i = 0, 1, 2, ..., n+1)$$

les équations de l'une des substitutions linéaires représentant la transformation anallagmatique T. L'hypersphère Σ_0 sera transformée en l'hypersphère Σ'_0 de coordonnées

$$a'_0 = \overset{0}{\alpha_0} + \overset{n+1}{\alpha_0}, \qquad a'_i = \overset{0}{\alpha_i} + \overset{n+1}{\alpha_i}, \qquad a'_{n+1} = \overset{0}{\alpha}_{n+1} + \overset{n+1}{\alpha}_{n+1}.$$

Ces coordonnées sont *semi-normales* pour Σ'_0 si l'on a

$$\overset{0}{\alpha_0} + \overset{n+1}{\alpha_0} > 0, \qquad \overset{0}{\alpha}_{n+1} + \overset{n+1}{\alpha}_{n+1} > 0,$$

ces deux inégalités se déduisant automatiquement l'une de l'autre. L'une quelconque d'entre elles suffit pour que le théorème I soit vérifié pour l'hypersphère improprement réelle Σ_0.

Cela posé le théorème sera vérifié automatiquement pour toute hypersphère improprement réelle Σ. On peut en effet passer par continuité de Σ_0 à Σ. La somme $a'_0 + a'_{n+1}$ relative à la transformée Σ' de Σ ne peut jamais s'annuler; elle restera donc toujours positive; *le théorème* I *est donc vérifié pour toute hypersphère improprement réelle.*

Il en est de même pour une hypersphère de rayon nul M à laquelle on peut passer par continuité en partant de Σ_0 pour aller au centre de Σ_0 et de là au point M en suivant une ligne droite, car à chaque instant du passage la somme $a'_0 + a'_{n+1}$, qui ne peut jamais s'annuler, restera positive.

Partons enfin d'une hypersphère proprement réelle orientée de coordonnées semi-normales $a_0, a_1, ..., a_n, a_{n+1}$ et soient x_i les coordonnées semi-normales d'un point quelconque M de son domaine. L'inegalité (4) du n. 9 peut s'écrire

$$a_0 \frac{\partial F}{\partial x_0} + a_1 \frac{\partial F}{\partial x_1} + ... + a_{n+1} \frac{\partial F}{\partial x_{n+1}} > 0. \tag{4}$$

La substitution linéaire Θ transformant les coordonnées semi-normales de l'hypersphère orientée en $a'_0, a'_1, ... a'_{n+1}$ et les coordonnées semi-normales du point M' en $x'_0, x'_1, ... x'_{n+1}$, on aura

$$a'_0 \frac{\partial F}{\partial x'_0} + a'_1 \frac{\partial F}{\partial x'_1} + ... + a'_{n+1} \frac{\partial F}{\partial x'_{n+1}} > 0.$$

Le théorème I se trouvera donc vérifié pour les hypersphères purement réelles orientées puisque le domaine d'une quelconque de ces hypersphères est transformé dans le domaine de cette hypersphère transformée par T.

11. — Revenons à l'espace projectif P. Les points de cet espace qui sont intérieurs à la quadrique Q ont leurs coordonnées semi-normales définies à un facteur positif près, tandis qu'il n'en est pas de même pour les points extérieurs à Q. On peut dire que ces points sont ***géométriquement orientables.*** On peut du reste montrer facilement qu'on peut passer par continuité d'une hypersphère orientée à la même hypersphère orientée d'une autre manière. Par exemple considérons la famille d'hypersphères orientées de coordonnées semi-normales

$$a_0 = -\sin t, \qquad a_1 = -\cos t, \qquad a_2 = \ldots = a_n = 0, \qquad a_{n+1} = \sin t,$$

et faisons varier t de t_0 à $t_0 + \pi$; on passera de l'hypersphère (t_0) à l'hpersphère $(t_0 + \pi)$, qui est la même que l'hypersphère (t_0), mais orientée d'une autre manière.

On remarquera que le passage d'une hyperspère à l'autre se fait nécessairement en passant par un hyperplan (pour $\sin t = 0$).

IV. - Hypersphères unitaires. Invariants anallagmatiques.

12. — Une hypersphère purement rélle orientée de coordonnés a_i est dite *unitaire* si l'on a

$$F(a_i) = 1,$$

ou, d'après l'équation (3) du n. 4,

$$a_0 = \frac{1}{R} \quad \text{ou} \quad -\frac{1}{R},$$

suivant que l'hypersphère est orientée intérieurement ou extérieurement.

Une hypersphère improprement réelle est dite ***unitaire*** si l'on a

$$F(a_i) = -1$$

avec $a_0 > 0$, c'est à dire

$$a_0 = \frac{1}{|R|}.$$

13. — La figure formée de deux hypersphères unitaires orientées de coordonnés a, b_i admet un invariant anallagmatique, à savoir l'expression

$$\frac{1}{2}\left(a_0 \frac{\partial F}{\partial b_0} + a_1 \frac{\partial F}{\partial b_1} + \ldots + a_{n+1} \frac{\partial F}{\partial b_{n+1}}\right) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots a_n b_n - \frac{1}{2}(a_0 b_{n+1} + b_0 a_{n+1})\ (^2).$$

---

(2) On lui donne encore le nom de *produit scalaire* des deux hypersphères unitaires.

S'il s'agit de deux hypersphères proprement dites de centres $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n$ et $\beta_1, \beta_2 \dots \beta_n$ et de rayons R et R', cet invariant est égal à

$$a_0 b_0 \left[\alpha_1\beta_1 + \dots + \alpha_n\beta_n - \frac{1}{2}(\alpha_1^2 + \dots \alpha_n^2 - R^2) - \frac{1}{2}(\beta_1^2 + \dots + \beta_n^2 - R'^2)\right] = \frac{R^2 + R'^2 - d^2}{2RR'},$$

formule où les facteurs R, R' du dénominateur représentent les rayons des hypersphères précédés du signe + ou du signe — suivant que les hypersphères sont purement réelles orientées intérieurement ou extérieurement ; si l'une des hypersphères, la première par exemple est improprement réelle le facteur R du dénominateur est égal au module du rayon. Enfin d est la distance des centres des deux hypersphères.

L'expression $\dfrac{R^2 + R'^2 - d^2}{2RR'}$, interprétée com e il vient d'être dit, est l'invariant anallagmatique rationnel unique de la figure considérée.

Remarquons que cet invariant ne chan e pas, si les deux hypersphères étant purement réelles orientées, on change simultanément l'orientation de chacune d'elles.

On montre facilement que *l'invariant anallagmatique, si les deux hpersphères sont purement réelles sécantes, est le cosinus de l'angle fait en un point* M *commun aux deux hypersphères par les normales en* M *à ces deux hypersphères menées vers l'intérieur du domaine de chacune* [3]. *Si les deux hypersphères sont improprement réelles, leur invariant anallagmatique est toujours négatif.*

V. - Résolution d'un problème général.

14. — Problème. - *Déterminer* $p \leq n+1$ *hypersphères* $S_1, S_2, \dots S_p$ *unitaires, proprement réelles, orientées, indépendantes, connaissant les invariants anallagmatiques* a_{ij} *des couples* S_iS_j *d'hpersphères inconnues.*

Nous attribuerons aux hypersphères S_i leurs coordonnées semi-normales. Ces p hypersphères déterminent un système linéaire d'hypersphères rentrant toutes dans l'expression $u_1S_1 + u_2S_2 + \dots + u_pS_p$. Nous appellerons *forme fondamentale* de ce système linéaire la forme quadratique $\Phi(u_1, u_2, \dots u_p)$ qui représente le carré scalaire de l'hypersphère générale du système.

On a

$$\Phi(u_1, u_2, \dots u_p) = u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_p^2 + 2\Sigma a_{ij}u_iu_j.$$

[3] Si les deux hypersphères sont des hyperplans, ce produit scalaire est le cosinus de l'angle des deux hyperplans.

15. — LEMME 3. - *La décomposition de la forme quadratique* $\Phi(u_1 u_2 \dots u_p)$ *en une somme de carrés de formes linéaires indépendantes donne naissance, pour que le problème soit possible,*

soit à p *carrés positifs,*

soit à $p-1$ *carrés positifs et un carré négatif,*

soit à $p-1$ *carrés positifs.*

DÉMONSTRATION. - Montrons d'abord que la condition est nécessaire: il suffit pour cela de montrer que le nombre des carrés positifs est au moins égal à $p-1$. Dans le cas contraire en effet on pourrait extraire du système linéaire considéré au moins deux hypersphères distinctes *orthogonales entre elles,* dont chacune serait ou improprement réelle ou de rayon nul. Or il est impossible que l'invariant anallagmatique de deux hypersphères improprement réelles soit nul, puisqu'il est essentiellement négatif; si l'une des hypersphères était improprement réelle et l'autre à rayon nul, cela signifierait qu'une hypersphère improprement réelle contient un point réel, ce qui est absurde; enfin l'invariant anallagmatique de la figure formée de deux points réels distincts est toujours négatif car, avec un choix convenable des coordonnées semi-normales des deux points, cet invariant est égal à $-\frac{1}{2}x_0 x'_0 d^2$ où d désigne la distance de ces points, dans le cas ou ils sont tous deux à distance finie, et à $-\frac{1}{2}x_0 x'_{n+1}$ si le second point est le point à l'infini.

16. — Pour montrer que le problème est possible dans les conditions énoncées par le Lemme 3, passons en revue les trois cas possibles.

1er CAS. *La forme fondamentale* $\Phi(u_1 u_2, \dots u_p)$ *se décompose en* p *carrés positifs.* Supposons

$$\Phi(u_1, u_2, \dots u_p) = u_1^2 + \dots + u_p^2 + 2\Sigma a_{ij} u_i u_j = v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_p^2. \tag{5}$$

et soit

$$v_i = \alpha_i^1 u_1 + \alpha_i^2 u_2 + \dots + \alpha_i^p u_p \qquad (i = 1, 2, \dots p),$$

le déterminant des α_i^j étant différent de zéro.

Choisissons dans l'espace anallagmatique, ce qui est toujours possible, p hypersphères unitaires indépendantes orientées, orthogonales entre elles, ce qui revient à prendre, dans l'espace projectif P, p points extérieurs à la quadrique Q et conjugués entre eux deux à deux, On aura, en désignant par $A_1, A_2, \dots A_p$ les p hypersphères unitaires choisies,

$$u_1 S_1 + u_2 S_2 + \dots + u_p S_p = v_1 A_1 + v_2 A_2 + \dots v_p A_p$$

et on constate immédiatement d'après la relation (5) que les produits scalaires des hypersphères $S_i S_j$ sont égaux aux invariants donnés a_{ij} et en outre que les hypersphères S_i sont purement réelles unitaires.

Il y a une infinité de choix pour les hypersphères A_1, $A_2, \ldots, A_p$ et on démontre qu'on peut passer de l'une à l'autre par une transformation anallagmatique. *Dans ce premier cas le problème proposé admet donc une infinité de solutions toutes anallagmatiquement égales entre elles.*

2ème CAS. *La forme fondamentale* $\Phi(\mathrm{u}_1, \mathrm{u}_2, \ldots \mathrm{u}_p)$ *se décompose en* $\mathrm{p}-1$ *carrés positifs et un carré négatif.* Nous aurons ici

$$\Phi(u_1, u_2, \ldots u_p) = v_1^2 + v_2^2 + \ldots + v_{p-1}^2 - v_p^2 = u_1^2 + \ldots + u_p^2 + \Sigma a_{ij} u_i u_j. \tag{6}$$

Choisissons $p-1$ hypersphères unitaires indépendantes orientées, orthogonales entre elles et une hypersphère improprement réelle unitaire orthogonale aux précédentes que nous désignerons respectivement par A_1, $A_2, \ldots A_{p-1}$, A_p. On pourra prendre pour S_1, $S_2, \ldots S_p$ les hypersphères satisfaisant à la relation

$$u_1 S_1 + u_2 S_2 + \ldots u_p S_p = v_1 A_1 + \ldots + v_{p-1} A_{p-1} + v_p A_p ;$$

d'après la relation (6) les hypersphères S_1, $S_2, \ldots S_p$ satisfont aux conditions du problème.

Il y a une infinité de choix pour les hypersphères A_1, $A_2, \ldots A_{p-1}$, A_p dont les $p-1$ premières sont purement réelles orientées unitaires et la dernière est improprement réelle unitaire, ces p hypersphères étant orthogonales entre elles deux à deux. On peut toujours passer dans l'espace projectif de la figure formée par les points représentatifs des hypersphères A_1, $A_2, \ldots A_p$ du premier choix aux points représentatifs des hypersphères du second choix, mais *sous la condition que la somme* $\mathrm{a}_0 + \mathrm{a}_{n+1}$ *de* A_p *soit positive dans les deux choix.* Il en résulte que si l'on change les orientations de toutes les hypersphères S_i, on aura deux solutions du problème qui ne pourront pas se déduire l'une de l'autre par une transformation anallagmatique.

Dans le 2ème cas envisagé il existe donc deux familles de solutions, les solutions de chaque famille étant anallagmatiquement égales entre elles. Les solutions de l'autre famille se déduisent de celles de la première famille en changeant les orientations des hypersphères cherchées, ce qui fournit des solutions non anallagmatiquement égales aux premières.

3ème CAS. *La forme fondamentale* $\Phi(\mathrm{u}_1, \mathrm{u}_2, \ldots \mathrm{u}_p)$ *se décompose en* $\mathrm{p}-1$ *carrés positifs.*

Nous aurons ici

$$\Phi(u_1, u_2, \ldots u_p) = v_1^2 + \ldots + v_{p-1}^2 = u_1^2 + \ldots + u_p^2 + \Sigma a_{ij} u_i u_j. \tag{7}$$

Choisissons $p-1$ hypersphères unitaires orientées orthogonales entre elles, que nous désignerons par A_1, $A_2, \ldots A_{p-1}$. Les $p-1$ équations linéaires

$$v_1 = v_2 = \ldots = v_{p-1} = 0$$

donnent pour u_1, $u_2, \ldots u_p$ des valeurs bien déterminées à un facteur constant près, soit ξ_1, $\xi_2, \ldots \xi_p$, de sorte que le système linéaire $u_1 S_1 + \ldots u_p S_p$ contient le point

$$\xi_1 A_1 + \xi_2 A_2 + \dots + \xi_p A_p.$$

Si l'on change l'orientation de toutes les sphères $S_1, S_2, \dots S_p$, on aura une solution du problème qui ne peut être anallagmatiquement égale à la première car il n'existe aucune transformation anallagmatique qui change le signe des coordonnées semi-normales d'un point.

17. — Résumons les résultats obtenus dans l'énoncé du théorème suivant.

THÉORÈME II. – *Pour qu'il existe des solutions du Problème énoncé au n. 14 il est nécessaire que la forme fondamentale du système linéaire constitué par les* $\mathrm{p} \leq \mathrm{n} + 1$ *hypersphères unitaires orientées* $\mathrm{S}_1, \mathrm{S}_2, \dots \mathrm{S}_\mathrm{p}$ *soit décomposable soit*

1° en p *carrés positifs,*

2° en p — 1 *carrés positifs et un négatif,*

3° en p — 1 *carrés positifs.*

Dans le premier cas le problème comporte une infinité de solutions toutes anallagmatiquement égales entre elles.

Dans le second et le troisième cas le problème comporte deux familles de solutions, les solutions de chaque famille étant anallagmatiquement égales entre elles, mais non anallagmatiquement égales à celles de l'autre famille. On passe des solutions de la première famille à celles de la seconde en changeant l'orientation de toutes les hypersphères qui satisfont au problème donné.

18. **Cas particulier.** — Prenons le cas $p = 2$. Il s'agit de trouver deux hypersphères unitaires orientées S_1 et S_2 de telle façon que la forme quadratique $\Phi(u_1, u_2)$ qui représente le carré scalaire de $u_1 S_1 + u_2 S_2$ soit

$$\Phi(u_1, u_2) = u_1^2 + u_2^2 + 2a u_1 u_2.$$

La décomposition en carrés de cette forme donne

$$\Phi(u_1, u_2) = u_1^2 + 2a u_1 u_2 + u_2^2 = (u_1 + a u_2)^2 + (1 - a^2) u_2^2.$$

Passons en revue les trois cas $a^2 < 1$, $a^2 > 1$, $a^2 = 1$.

Dans le premier cas où le produit scalaire des deux hypersphères est inférieur à 1 en valeur absolue, les hypersphères sont sécantes ; soit $a = \cos\alpha$. Par une transformation anallagmatique convenable, les deux hypersphères sont transformées en deux hyperplans se coupant sous l'angle α ; nous pouvons supposer que ces hyperplans ont pour équations respectives :

$$x_1 = 0, \qquad x_1 \cos\alpha + x_2 \sin\alpha = 0.$$

Le changement simultané de leurs orientations se traduit par les équations

$$x'_1 = -x_1, \quad x'_2 = -x_2, \quad x'_0 = x_0, \quad x'_3 = x_3, \dots, x'_n = x_n, \quad x'_{n+1} = x_{n+1}$$

qui représentent une transformation anallagmatique

Dans le second cas les deux hypersphères ne sont ni tangentes ni sécantes : supposons-les intérieures l'une à l'autre, ce qu'on peut toujour réaliser par une transformation anallagmatique. Si elles sont orientées intérieurement toute les deux, leurs domaines n'ont aucun point commun tandis que si on change simultanément leurs orientations, leurs domaines ont une infinité de points communs, la nouvelle figure ne peut donc être anallagmatiquement égale à la première. Un raisonnement analogue conduit à la même conclusion si l'une des hypersphères est orientée intérieurement, l'autre étant orientée extérieurement.

Dans le troisieme cas $a^2 = 1$, par exemple $a = 1$, on a affaire à deux hypersphères orientées tangentes qu'on peut par une transformation anallagmatique ramener à deux hyperplans orientés parallèles et de même orientation. Le domaine de l'un des deux hyperplans, par exemple le premier, contiendra l'autre hyperplan. Si l'on change simultanément les deux orientations, ce sera le domaine du second hyperplan qui contiendra le premier. Le changement simultané des orientations de S_1 et de S_2 ne peut donc être réalisable par une transformation anallagmatique.

Les résultats précédents sont d'accord avec l'énoncé du théorème II.

19. — M. BLASCHKE, dans le volume de son Traité de Géométrie différentielle consacré à la Géométrie anallagmatique réelle à trois dimensions, fait rentrer dans le groupe de cette Géométrie l'opération qui consiste à changer l'orientation de toutes les sphères à centre réel et rayon réel. Si l'on admet ce point da vue, le problème du n. 14 que nous venons de traiter ne comporterait que des solutions toutes anallagmatiquement égales entre elles. Mais on peut considérer que ce point de vue n'est pas conforme à la nature des choses ; c'est pour cela que nous ne l'avons pas adopté.

Nous pouvons remarquer que le cas que nous avons traité tire son intérêt du fait que *l'équation de la quadrique* Q *a son premier membre décomposable en une somme de* $n + 1$ *carrés positifs et un seul carré négatif*