Espaces de fonctions et distributions du type de Gevrey et problèmes aux limites paraboliques.

par J. L. LIONS (à Paris) et E MAGENES (à Pavie)

Résumé. - *Le travail est résumé dans l'Introduction.*

Introduction.

1. - Soit Q un cylindre infini: $Q = \Omega \times R_t$, Ω ouvert borné de R^n, suffisamment régulier et soit $A\left(x,\ t,\ \frac{\partial}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial t} = P$ un opérateur parabolique dans Q; A est supposé elliptique d'ordre $2m$ à coefficients suffisamment réguliers en x (par ex. indéfiniment différentiables ou analytiques) et de *classes convenables* en t (du type «GEVREY»).

On se propose d'étudier le *problème mixte non homogène dans* Q

$$(*) \qquad Pu = f,$$

f «distribution» (1) dans Q, à support en t limité à gauche, la «distribution» (1) u étant à support en t limité à gauche et vérifiant (2)

$$(**) \qquad \frac{\partial^j u}{\partial \nu^j} = g_j \text{ sur } \Sigma \text{ (frontière de } Q), \qquad 0 \leq j \leq m-1 \quad (^3)$$

où g_j est une «distribution» sur Σ.

2. - La méthode d'attaque de ce problème est, comme dans [21], *d'expliciter* (autant que possible) deux espaces fonctionnels E_- et F_- sur Q de fonctions à support limité à droite, et ces espaces étant «aussi petits que possible», tels que P^* soit *un isomorphisme* de E_- sur F_- (E_- «contient»

---

(1) On prendra ici - voir plus bas - des distributions généralisées, du type «*fonctionnelles de Gevrey*» et «*fonctionnelles analytiques*».

(2) Dans un sens qui sera précisé.

(3) $\frac{\partial j}{\partial \nu^j} u =$ dérivée normale d'ordre j sur Σ.

les conditions aux limites $\frac{\partial^j v}{\partial \nu^j} = 0,\ 0 \leq j \leq m-1$: P^* est l'adjoint (formel) de P). Alors, par *transposition, P est un isomorphisme de* $(F_-)' = F'_+$ sur $(E_-)' = E'_+$.

On obtient alors des résultats relatifs à (*) (**) par explicitation de cet isomorphisme.

3. - Evidemment, il y a une très grande latitude dans le choix de E_- et F_- (4). Dans [21] nous avons pris (essentiellement) pour F_- l'espace $\mathfrak{D}_-(\mathfrak{D}(\Omega))$ des fonctions indéfiniment différentiables en t à support limité à droite à valeurs dans $\mathfrak{D}(\Omega)$.

Nous allons prendre essentiellement ici pour F_- des «*classes de Gevrey*» *à valeurs dans* $\mathfrak{D}(\Omega)$.

4. - Pour mener à bien ce programme, il faut d'abord étudier ces «classes de Gevrey» à valeurs dans des espaces vectoriels topologiques. En fait, nous considérons des suites $\{M_k\}$ *non quasi analytiques* (les classes de Gevrey correspondant au cas où $M_k = (k\alpha)!,\ \alpha > 1$) et les espaces de fonctions de «classe M_k» à valeurs dans un espace vectoriel topologique X.

C'est l'objet du Chapitre 1, où nous étudions aussi *le dual* de ces espaces. Ce chap. étend au cas vectoriel les résultats de Roumieu [25] relatifs au cas scalaire.

5. - Il faut aussi avoir, comme on a déjà dit, des théorèmes de régularité pour l'opérateur P^* (ou P). Nous en obtiendrons plusieurs dans les chap. 2 et 4. On commence avec un résultat «abstrait» assez général. Sous des hypothèses raisonnables sur la suite M_k (hypothèses déjà rencontrées pour des raisons techniques voisines, par A. Friedman [9]) on montre que si les coefficients et le second membre de «l'équation opérationnelle» (comme dans [18])

$$A(t)u + \frac{du}{dt} = f \qquad (***)$$

sont de classe $\{M_k\}$, *alors u est de classe* $\{M_k\}$ (chap. 2, n. 1 — 2).

Dans le cas des opérateurs paraboliques «concrets» $A\left(t, x, \frac{\partial}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial t}$ on peut préciser encore les résultats de «régularité» dans les classes $\{M_k\}$.

---

(4) Et nous ne prétendons nullement donner dans le travail [21] et ici «tous» les choix intéressants. Voir d'ailleurs d'autres cas dans [20] et [3].

(chap. 2 n. 3 et chap. 4 n. 5). En particulier (théor. 5.2, chap. 4) on démontre un théorème de régularité dans la classe des fonctions analytiques en x dans $\overline{\Omega}$ et de GEVREY en t, avec $M_k = (2km)!$ ($2m$ ordre de A) que l'on peut considérer comme *l'extension à la frontière* des résultats classiques sur la régularisation à l'intérieur des solutions des équations paraboliques (GEVREY [10], FRIEDMAN [9], ...). La principale difficulté technique rencontrée pour obtenir ce dernier résultat est l'extension d'un théorème de KOTAKE-NARASIMHAN [13] «à la frontière»: si une fonction $v(x)$ définie dans un ouvert Ω de R^n, de frontière analytique réelle, vérifie des conditions «convenables» pour le normes $\| \mathcal{A}^k v \|_{L^2(\Omega)}$, $\mathcal{A}$ étant elliptique à coefficients analytiques dans $\overline{\Omega}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, et vérifie des conditions aux limites «convenables», alors $v(x)$ est analytique dans $\overline{\Omega}$ (ce résultat, qui fait l'objet, avec quelques variantes, du chap. 4, contient à la fois un théorème de MORREY-NIREMBERG [24] et le résultat de KOTAKE-NARASIMHAN, loc. cit.).

6. - Enfin le chapitre 3 étudie le problème initial et contient les principaux résultats sur les problèmes aux limites non homogènes dans des espaces de M_k — distributions vectorielles. On a encore utilisé de façon essentielle l'extension du théorème de KOTAKE-NARASIMHAN dont on a déjà parlé et en outre un théorème de «relèvement» (théorème 3.1 du chap. 3) qui se ramène à un problème de CAUCHY dans des classes de GEVREY en t et analytiques en x, qui a été résolu récemment par G. TALENTI [30], [31] (cf. aussi LERAY-OHYA [17]).

Comme on verra, on est conduit à faire des hypothèses de plus en plus fortes sur les coefficients de $A\left(x, t, \frac{\partial}{\partial x}\right)$; pour le résultat final, on suppose que les coefficients de A sont *indépendants de t* — hypothèse qui est très probablement trop restrictive.

7. - Nous étudierons ultérieurement les problèmes analogues pour des opérateurs d'évolution de *types différents* (SCHROEDINGER, bien posés au sens de PETROWSKY, hyperboliques).

8. - Certains de résultats de ce travail ont été donnés dans:

1) J. L. LIONS, Cours d'été sur les distributions, Lisbonne, septembre 1964 (un résumé du cours devant paraître aux Port. Math.).

2) J.L. LIONS-E. MAGENES: Colloque sur les équations aux dérivées partielles, Nervi (Genova), février 1965.

3) E. MAGENES - Séminaire Leray - Collège de France - mars 1965.

9. - Le plan du travail est le suivant:

Chapitre 1. - *Espaces de M_k-distributions vectorielles.*

CHAPITRE I

Espaces de M_k-distributions vectorielles.

1. - Espace $\mathfrak{D}_{M_k}(X)$, X étant un espace de Banach.

1.1. - On commence par le cas où X est un espace de BANACH (sa norme étant notée $\|\ \|_X$).

On désigne par $\mathfrak{D}(X)$ (resp. $\mathcal{E}(X)$, resp. $\mathfrak{D}_+(X)$) l'espace des fonctions indéfiniment différentiables sur R à valeurs dans X, à support compact (resp. à support quelconque, resp. à support limité à gauche (5)), ces espaces étant munis des topologies de L. SCHWARTZ [28].

Notre objet est ici de définir et étudier brièvement (6) des *sous espaces* de $\mathfrak{D}(X)$, $\mathcal{E}(X)$, $\mathfrak{D}_+(X)$, sous espaces définis par des *inégalités différentielles.*

La donnée fondamentale est celle d'une suite $\{M_k\}$, $k=0, 1, \ldots$ de nombres réels positifs.

Voici tout de suite la définition «*algébrique*» de $\mathfrak{D}_{M_k}(X)$: $\mathfrak{D}_{M_k}(X) =$ espace des $\varphi \in \mathfrak{D}(X)$ tels qu'il existe des constantes c et L (*dépendant de* φ) telles que

$$\|\varphi^{(k)}(t)\|_X \leq cL^k M_k \quad \forall k \text{ et } \forall t \in R. \tag{1.1}$$

Naturellement il convient que cet espace ne soit pas réduit à $\{0\}$ d'où l'hypothèse suivante (qui sera *toujours* faite dans la suite):

(1.2) la suite M_k est *non quasi-analytique.*

De façon analogue à [25], p. 48 on démontre que $\mathfrak{D}_{M_k}(X)$ est *dense* dans $\mathfrak{D}(X)$.

Rappelons ceci (cf. [21], n. 6, 7, 11): on peut toujours remplacer la la suite M_k par une suite «équivalente» (i.e. donnant *le même* espace) et qui soit logarithmiquement convexe; on pourra donc supposer sans diminuer la généralité que

$$(M_k)^2 \leq M_{k-1}\, M_{k+1};$$

---

(5) i.e. $\varphi \in \mathfrak{D}_+(X)$ si $\varphi \in \mathcal{E}(X)$ et si $\varphi(t)=0\ \forall t \leq t_0$ (dépendant de φ); $\mathfrak{D}_-(X)$ désigne l'espace des $\varphi \in \mathcal{E}(X)$ à support limité à *droite.*

(6) Nous ne voulons pas entreprendre ici une étude systématique des espaces introduits dans ce Chapitre!

alors l'hypothèse (1.2) revient à la condition

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{M_{k-1}}{M_k} < \infty, \tag{1.3}$$

1.2. - *Invariance par dérivation*; *définition « algébrique » équivalente.*

Nous ferons l'*hypothèse suivante*:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{il existe une constante } H \text{ telle que} \\ \qquad\qquad M_{k+1} \leq H^k M_k \qquad\qquad \forall k. \end{array} \right. \tag{1.4}$$

Il est alors immédiat, d'après (1.1) que si $\varphi \in \mathfrak{D}_{M_k}(X)$, alors $\dfrac{d\varphi}{dt} \in \mathfrak{D}_{M_k}(X)$.

On peut aussi remplacer les inégalités *ponctuelles* (1.1) par des inégalités *intégrales:*

PROPOSITION 1.1. - *Soit p fixé, $1 \leq p < \infty$. On suppose que* (1.4) *a lieu. Alors la condition nécessaire et suffisante pour que φ, élément de $\mathfrak{D}(X)$, soit dans $\mathfrak{D}_{M_k}(X)$ est qu'il existe des constantes c_p, L_p (dépendant de φ) telles que*

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \| \varphi^{(k)}(t) \|_X^p \, dt\right)^{1/p} \leq c_p L_p^k M_k \qquad\qquad \forall k. \tag{1.5}$$

DÉMONSTRATION. - 1) Soit $\varphi \in \mathfrak{D}_{M_k}(X)$, donc vérifiant (1.1); alors, si $[\alpha, \beta]$ est un borné contenant le support de φ, on a

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \| \varphi^{(k)}(t) \|_X^p \, dt\right)^{1/p} \leq c L^k M_k (\beta - \alpha)^{1/p}$$

d'où (1.5).

2) Réciproquement, soit $\varphi \in \mathfrak{D}(X)$, vérifiant (1.5) et soit encore α, β un borné contenant le support de φ; alors

$$\varphi^{(k)}(t) = \int_{\alpha}^{t} \varphi^{(k+1)}(s) \, ds,$$

donc

$$\| \varphi^{(k)}(t) \|_X \leq \left(\int_{\alpha}^{\beta} \| \varphi^{(k+1)}(s) \|_X^p \, ds\right)^{1/p} (\beta - \alpha)^{1/p'}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1,$$

d'où

$$\| \varphi^{(k)}(t) \|_X \leq c_p L_p^{k+1} M_{k+1} (\beta - \alpha)^{1/p'}$$

et le résultat suit en utilisant (1.4).

1.3. - Topologie sur $\mathfrak{D}_{M_k}(X)$.

On va introduire la topologie «naturelle» sur $\mathfrak{D}_{M_k}(X)$ sous une forme particulièrement commode pour la détermination de l'*espace dual* de $\mathfrak{D}_{M_k}(X)$.

Vérifions tout d'abord la

PROPOSITION 1.2. - *Soit* $\varphi \in \mathfrak{D}(X)$. *Les deux conditions suivantes sont équivalentes:*

(i) $\varphi \in \mathfrak{D}_{M_k}(X)$, φ *est nulle hors de* $(-n, +n)$;

(ii) *il existe* c *et* L *telles que*

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \| \, |t|^q \varphi^{(k)}(t) \|_X^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \leq c L^k n^q M_k, \qquad \forall k \text{ et } \forall q \, (0, 1 \ldots)$$

N. B. - On se borne dans (ii) à la norme L_2 en t; on pourrait aussi bien utiliser une norme L_p, $p \neq 2$, comme à la Proposition 2.1.

DÉMONSTRATION. - 1) Soit φ vérifiant (i); alors, sur le support de φ (ou $\varphi^{(k)}$), $|t| \leq n$ et (ii) résulte des inégalités (1.5).

2) Soit φ vérifiant (ii); alors

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{|t|}{n} \right)^{2q} \| \varphi^{(k)}(t) \|_X^2 \, dt \right)^{\frac{1}{2}} \leq c L^k M_k;$$

utilisant cela avec $k = 0$, et q quelconque, on en déduit que nécessairement $\varphi = 0$ hors de $(-n, n)$; et par ailleurs les inégalités (ii) pour $q = 0$ donnent (1.5) (avec $p = 2$), et donc φ est dans $\mathfrak{D}_{M_k}(X)$ d'après la proposition 1.1.

Grâce à la Proposition 1.2 on va pouvoir, en utilisant l'application

$$\varphi \longrightarrow |t|^q \varphi^{(k)}, \qquad k = 0, 1, \ldots, \quad q = 0, 1, \ldots, \tag{1.6}$$

considérer $\mathfrak{D}_{M_k}(X)$ comme un sous espace d'un espace de suites doubles.

Introduisons donc l'espace de suites doubles suivant:

(1.7) $$E = \{ e = \{ g_{k,\,q} \} \}, \qquad k = 0,\ 1,\ \ldots,\ q = 0,\ 1,\ \ldots$$

$$g_{k,q} \in L_2(X), \quad \forall k, \ \forall q;$$

il existe c, L, n telles que

$$\| g_{k,\,q} \|_{L_2(X)} \leq c L^k n^q M_k, \quad \forall k, \ \forall q \quad (^7)$$

Il est alors clair — on a fait ce qu'il fallait pour ça! — que (1.6) applique $\mathfrak{D}_{M_k}(X)$ dans E. l'application étant biunivoque. On va alors munir E de sa topologie « naturelle » et munir $\mathfrak{D}_{M_k}(X)$ de la topologie « image réciproque ».

Choisissons pour cela une suite $L_n \to +\infty$ et définissons $E^{(n)}$ comme le sous espace de E des $e = \{ g_{k,\,q} \}$ telles qu'il existe c avec

$$\| g_{k,\,q} \|_{L_2(X)} \leq c\, L_n^k n^q M_k \qquad \forall k \ \text{ et } \ \forall q.$$

Pour $e \in E^{(n)}$, posons

(1.8) $$\| e \|_{E^{(n)}} = \sup_{k,\,q} \frac{1}{L_n^k n^q M_k} \| g_{k,q} \|_{L_2(X)};$$

c'est une norme sur $E^{(n)}$ et $E^{(n)}$ est un espace de BANACH pour cette norme.

Alors

(1.9) $$E = \bigcup_n E^{(n)}$$

et on munit E de la *topologie de limite inductive* correspondante.

On vérifie sans peine que la topologie de E ne dépend pas du choix de la suite $L_n \to \infty$.

On munit maintenant $\mathfrak{D}_{M_k}(X)$ de *la topologie image réciproque de celle de E dans l'application* (1.6).

REMARQUE 1.1. - La topologie sur $\mathfrak{D}_{M_k}(X)$ peut donc aussi être définie comme suit: désignant par $\mathfrak{D}_{M_k}(-n,\, n;\ L_n;\ X)$ l'espace des $\varphi \in \mathfrak{D}(X)$,

(7) $L_p(X) =$ espace des (classes de) fonctions L_p sur R, à valeurs dans X, avec la norme (si $p < \infty$) $\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \| f(t) \|_X^p \, dt \right)^{1/p}$.

à support dans $(-n, n)$ et telles que

$$\sup_k \frac{\| \varphi^{(k)}(t) \|_{L_2(X)}}{M_k L_n^k} < \infty$$

(et cette quantité définissant une *norme* sur cet espace), on prend $\mathfrak{D}_{M_k}(X) = \cup\, \mathfrak{D}_{M_k}(-n, n;\, L_n,\, X)$, topologie de limite inductive.

2. - M_k-distributions à valeurs dans X, X Banach réflexif.

2.1. Définition. - *On appelle espace des M_k-distributions à valeurs dans X, et l'on note $\mathfrak{D}'_{M_k}(X)$, l'espace dual de $\mathfrak{D}_{M_k}(X')$, X' étant le dual (fort) de X; donc:*

$$\mathfrak{D}'_{M_k}(X) = (\mathfrak{D}_{M_k}(X'))'. \tag{2.1}$$

On munit $\mathfrak{D}'_{M_k}(X)$ de la topologie forte de dual.

La dérivation et la multiplication par des fonctions scalaires de $\mathcal{E}_{M_k}$ [8] se définissent comme dans les distributions de Schwartz [26], [28].

2.2. - Puisque $\mathfrak{D}_{M_k}(X') \subset \mathfrak{D}(X')$ [9] et $\mathfrak{D}_{M_k}(X')$ est dense dans $\mathfrak{D}(X')$, on peut identifier $(\mathfrak{D}(X'))'$ à un *sous espace* de $\mathfrak{D}'_{M_k}(X)$. Or (cf. [28]):

$(\mathfrak{D}(X'))' = \mathfrak{D}'(X)$, espace des distributions à valeurs dans X et donc

$$\mathfrak{D}'(X) \subset \mathfrak{D}'_{M_k}(X).$$

On va maintenant donner le *théorème de structure* des éléments de $\mathfrak{D}'_{M_k}(X)$:

Théorème 2.1. - *Toute $f \in \mathfrak{D}'_{M_k}(X)$ peut se représenter, de façon non unique, sous la forme*

$$f = \sum_{k=0}^{\infty} D^k f_k, \qquad D = d/dt, \tag{2.2}$$

---

[8] $\mathcal{E}_{M_k} = \mathcal{E}_{M_k}(\mathbb{C})$ dans les notations du n. 3. 3 suivant; $\mathcal{E}_{M_k} = \mathcal{E}(\{M_k\})$ dans les notations de [25], p. 58.

[9] $E \subset F$ signifie dans ce travail inclusion algébrique avec injection continue.

où

(2.3) $\qquad f_k$ *est localement de carré sommable à valeurs dans* X,

$$(2.4)\qquad \left\{ \begin{array}{l} \forall L \text{ et } \forall n, \text{ on a:} \\ \displaystyle\sum_{k \geq 0} M_k L^k \left(\int_{-n}^{n} \| f_k(t) \|_X^2 \, dt \right)^{\frac{1}{2}} < \infty, \end{array} \right.$$

et où (2.2) *signifie que*

$$(2.5)\qquad < f, \varphi > = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \int_{-\infty}^{+\infty} < f_k(t), \varphi^{(k)}(t) > dt, \qquad \forall \varphi \in \mathfrak{D}_{M_k}(X')$$

(le crochet sous les intégrales désignant la dualité entre X et X' et $< f, \varphi >$ désignant la dualité entre $\mathfrak{D}_{M_k}(X')$ et $\mathfrak{D}'_{M_k}(X)$).

Réciproquement, toute f *de la forme* (2.2)-(2.5), *avec* (2.3) (2.4), *représente un élément de* $\mathfrak{D}'_{M_k}(X)$.

Démonstration. - Soit d'abord $\varphi \longrightarrow < f, \varphi >$ une forme linéaire continue sur $\mathfrak{D}_{M_k}(X')$; soit π l'application (1.6) et E_0 l'image de $\mathfrak{D}_{M_k}(X')$ dans E par π (E est défini comme au N° 1, en y remplaçant X par X'). Alors $e_0 \longrightarrow < f, \pi^{-1} e_0 >$ est continue sur E_0, et d'après le théorème de Hahn-Banach, se prolonge en une forme linéaire continue sur E; donc il existe $e' \in E'$ tel que

$$(2.6)\qquad < e', e_0 > = < f, \pi^{-1} e_0 > \qquad \forall e_0 \in E_0$$

(dans (2.6) le premier crochet désigne la dualité entre E' et E, le deuxième entre $\mathfrak{D}'_{M_k}(X)$ et $\mathfrak{D}_{M_k}(X')$).

Donc

$$< e', \pi \varphi > = < f, \varphi > \qquad \forall \varphi \in \mathfrak{D}_{M_k}(X').$$

Mais la structure de E' est connue [25]: tout $e' \in E'$ peut se représenter, de façon non unique, par une suite double

$$(2.7)\qquad \begin{array}{c} e' = \{ g_{k,q} \}, \\ g_{k,q} \in (L_2(X'))' = L_2(X) \end{array}$$

(puisque X est réflexif) telle que

$$(2.8)\qquad \sum_{k,q} L^k n^q M_k \| g_{k,q} \|_{L_2(X)} < \infty \qquad \forall L \text{ et } \forall n;$$

alors

$$(2.9) \qquad < e', \pi\varphi > = \sum_{k,\,q} \int_{-\infty}^{+\infty} < g_{k,q}(t), \ | t |^q \varphi^{(k)}(t) > dt, \qquad \forall \varphi \in \mathfrak{D}_{M_k}(X').$$

Posons

$$(2.10) \qquad f_k = (-1)^k \sum_{q \geq 0} | t |^q g_{k,q} .$$

Vérifions que la série converge dans $L_2(-n, n; X)$, n fini quelconque; en fait

$$\| f_k \|_{L_2(-n,n;X)} \leq \sum_{q \geq 0} \| \, | t |^q g_{k,q} \|_{L_2(-n,n;X)} \leq$$

$$\leq \sum_{q \geq 0} n^q \| g_{k,q} \|_{L_2(X)},$$

d'où le résultat grâce à (2.8), et en outre

$$\sum_{k \geq 0} M_k L^k \| f_k \|_{L_2(-n,n;X)} \leq \sum_{k,\,q} L^k n^q M_k \| g_{kq} \|_{L_2(X)}$$

d'où (2.4) grâce à (2.8).

On peut alors écrire (2.9) sous la forme

$$< e', \ \pi\varphi > = \sum \int_{-\infty}^{+\infty} < f_k(t), \ \varphi^{(k)}(t) > dt$$

d'où (2.2), (2.3), (2.4).

La réciproque est immédiate.

Remarque 2.1. - Pour le résultat de structure de $\mathfrak{D}'_{M_k}(X)$ cf. aussi le N° 4.

3. - Espace $\mathfrak{D}_{+,M_k}(X)$, X étant un espace de Banach.

3.1. *Espace* $\mathfrak{D}^a_{+,M_k}(X)$.

On définit d'abord $\mathfrak{D}^a_{+,M_k}(X)$ comme l'espace des fonctions φ avec les propriétés:

$$(3.1) \qquad \varphi \in \mathcal{E}(X),$$

$$(3.2) \qquad \varphi \equiv 0 \ \text{ pour } \ t < a,$$

(3.3) $\left\{\begin{array}{l} \forall b < \infty, (> a), \text{ il existe des constantes } c \text{ et } L \text{ (dépendant de } \varphi \text{ et de } b) \text{ telles que} \\ \left(\displaystyle\int_a^b \| \varphi^{(k)}(t) \|_X^2 \, dt\right)^{\frac{1}{2}} \leq c L^k M_k \quad \forall k \end{array}\right.$

On définit ensuite:

$$\mathfrak{D}_{+, M_k}(X) = \bigcup_{\alpha_n} \mathfrak{D}_{+; M_k}^{a_n}(X), \tag{3.4}$$

a_n étant une suite (quelconque) $\to -\infty$.

Une fois définie une topologie sur $\mathfrak{D}_{+, M_k}^{a}(X)$, on munira $\mathfrak{D}_{+, M_k}(X)$ de la topologie de limite inductive correspondante à (3.4).

3.2. *Topologie sur* $\mathfrak{D}_{+, M_k}^{a}(X)$.

Soient d'abord b et L *fixés* ($L \geq 1$, $b > a$); on désigne par $\mathfrak{D}_{+, M_k}^{a; b, L}(X)$ l'espace des φ satisfaisant à (3.1) (3.2) et (3.3) avec b et L fixés; on munit cet espace de la famille de semi-normes suivante:

1) les semi-normes définissant la topologie de $\mathcal{E}(X)$;

2) la semi-norme

$$\sup_k \frac{1}{L^k M_k} \left(\int_a^b \| \varphi^{(k)}(t) \|_X^2 \, dt\right)^{\frac{1}{2}}.$$

On définit ensuite

(3.5) $\left\{\begin{array}{l} \mathfrak{D}_{+, M_k}^{a; b}(X) = \bigcup_{L_n} \mathfrak{D}_{+, M_k}^{a; b, L_n}(X), \\ L_n \text{ suite (quelconque)} \to +\infty; \text{ topologie de limite inductive;} \end{array}\right.$

(3.6) $\left\{\begin{array}{l} \mathfrak{D}_{+, M_k}^{a}(X) = \bigcap_{b_n} \mathfrak{D}_{+, M_k}^{a; b_n}(X) \\ b_n \text{ suite (quelconque) tendant vers } +\infty; \text{ topologie de limite projective (cf. par. ex. [15], [29]).} \end{array}\right.$

Noter que dans (3.6) l'identité *algébrique* est immédiate; et (3.6) *définit* la topologie de $\mathfrak{D}_{+, M_k}^{a}(X)$.

REMARQUE 3.1. - Naturellement, (1.4) ayant lieu, on peut (cf. Proposition 1.1) remplacer dans (3.3) les inégalités dans L_2 par des inégalités L_p, $p \neq 2$).

REMARQUE 3.2. - On définit de même $\mathfrak{D}_{-, M_k}(X)$ (support limité à droite).

REMARQUE 3.3. - $\mathfrak{D}_{M_k}(X) \subset \mathfrak{D}_{+, M_k}(X)$ et est *dense*.

3.3 *Espace* $\mathcal{E}_{M_k}(X)$.

On définit:

$$\mathcal{E}_{M_k}^{a, b, L}(X) = \left\{ \varphi \mid \varphi \in \mathcal{E}(X),\ \sup_k \frac{1}{L^k M_k} \left(\int_a^b \| \varphi^{(k)}(t) \|_X^2 \, dt \right)^{\frac{1}{2}} < \infty \right\}, \tag{3.7}$$

avec la topologie définie par les semi-normes de $\mathcal{E}(X)$ et la semi-norme

$$\sup_k \frac{1}{L^k M_k} \left(\int_a^b \| \varphi^{(k)}(t) \| \, dt \|_X^2 \, dt \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Ensuite

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{E}_{M_k}^{a, b}(X) = \bigcup_{L_n} \mathcal{E}_{M_k}^{a, b, L_n}(X), \\ L_n \to +\infty; \text{ topologie de limite inductive;} \end{array} \right. \tag{3.8}$$

puis

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{E}_{M_k}(X) = \bigcap_{a_n, b_n} \mathcal{E}_{M_k}^{a_n, b_n}(X), \\ a_n \to -\infty,\ b_n \to +\infty; \text{ topologie de limite projective.} \end{array} \right. \tag{3.9}$$

Alors, *algébriquement*

$$\mathfrak{D}_{+, M_k}(X) = \mathcal{E}_{M_k}(X) \cap \mathfrak{D}_{+}(X). \tag{3.10}$$

Mais il faut prendre garde que la topologie «naturelle» — définie en 3.1, 3.2 — sur $\mathfrak{D}_{+, M_k}(X)$ est *strictement plus fine* que la topologie intersection de $\mathcal{E}_{M_k}(X)$ et de $\mathfrak{D}_{+}(X)$. Cf. N° 4 ci après.

4. - Espace des M_k-distributions à valeurs dans X et à support limité à gauche.

4.1. - Comme au N° 2, on suppose que X est un espace de BANACH réflexif.

On définit:

$$\mathfrak{D}'_{+, M_k}(X) = (\mathfrak{D}_{-, M_k}(X'))', \tag{4.1}$$

avec la topologie forte de dual de $\mathfrak{D}_{-, M_k}(X')$.

On a le résultat de structure suivant:

THÉORÈME 4.1. - *L'espace $\mathfrak{D}'_{+, M_k}(X)$ coincide avec le sous espace de $\mathfrak{D}'_{M_k}(X)$ des distributions à support limité à gauche.*

DÉMONSTRATION. - 1) L'espace $\mathfrak{D}_{M_k}(X')$ est dense dans $\mathfrak{D}_{-, M_k}(X')$ et par conséquent on peut identifier $\mathfrak{D}'_{+, M_k}(X)$ à un sous espace de $\mathfrak{D}'_{M_k}(X)$.

2) Si $\varphi \in \mathfrak{D}_{M_k}(X')$, le support de φ s'éloignant indéfiniment vers la gauche, alors $\varphi \rightarrow 0$ dans $\mathfrak{D}_{-, M_k}(X)$ et par conséquent $< f, \varphi > \rightarrow 0$, (pour f donnée dans $\mathfrak{D}'_{+, M_k}(X)$). Alors f est nécessairement à support limité à gauche.

3) Soit enfin $f \in \mathfrak{D}'_{M_k}(X)$ et à support limité à gauche. Soit $\theta \in \mathcal{E}_{M_k} (= \mathcal{E}_{M_k}(\mathbb{C}))$, $\theta(t) = 1$ dans un voisinage du support de f et $\theta(t) = 0$ pout $t < t_0$ convenable (une telle fonction existe). Alors

$$\theta f = f$$

et si $\varphi \in \mathfrak{D}_{M_k}(X')$, on a donc:

$$< f, \varphi > = < f, \theta \varphi >. \tag{4.2}$$

Si $\varphi \rightarrow 0$ (dans $\mathfrak{D}_{M_k}(X')$) *pour la topologie de* $\mathfrak{D}_{-, M_k}(X')$, alors $\theta \varphi \rightarrow 0$ dans $\mathfrak{D}_{M_k}(X')$ et donc $< f, \theta \varphi > \rightarrow 0$, donc d'après (4.2), f définit une forme linéaire continue sur $\mathfrak{D}_{M_k}(X')$ *muni de la topologie induite par* $\mathfrak{D}_{-, M_k}(X')$, de sorte que $f \in \mathfrak{D}'_{+, M_k}(X)$, ce qui achève la démonstration du théorème. [On a implicitement utilisé le fait que $\theta\varphi \in \mathcal{E}_{M_k}(X')$ si $\theta \in \mathcal{E}_{M_k}$, $\varphi \in \mathcal{E}_{M_k}(X')$; en effet

$$(\theta\varphi)^{(k)} = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \theta^{(k-j)} \varphi^{(j)}$$

entraine

$$\| (\theta\varphi)^{(k)}(t) \|_{X'} \leq \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} c_1 L_1^{k-j} M_{k-j} c_2 L_2^j M_j ,$$

c_i, L_i constantes convenables, $|t| \leq T$.

Comme $M_k^2 \leq M_{k-1} M_{k+1}$, on a: $M_{k-j} M_j \leq M_0 M_k$ et donc

$$\| (\theta\varphi)^{(k)}(t) \|_{X'} \leq c_1 c_2 M_0 M_k (L_1 + L_2)^k,$$

d'où le résultat].

Du résultat précédent et du Théorème 2.1 on va déduire le

THÉORÈME 4.2. - *Soit f donnée dans $\mathfrak{D}'_{+, M_k}(X)$. Soit $t_1 =$ limite à gauche du support de f. Pour tout $t_0 < t_1$, il existe une décomposition de f de la forme*

$$f = \sum_{k=0}^{\infty} D^k f_k , \tag{4.3}$$

(*en un sens analogue à* (2.5)), *où*

(4.4) *f_k est localement de carré sommable à valeurs dans X,*

(4.5) *f_k est nulle pour $t < t_0$*

(4.6) *$\forall L$ et $\forall n$, on a:*

$$\sum_{k \geq 0} M_k L^k \left(\int_{t_0}^{n} \| f_k(t) \|_X^2 \, dt \right)^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

Réciproquement, si f est donnée dans $\mathfrak{D}'_{M_k}(X)$ et si, pour tout $t_0 < t_1$ (donné) il existe une décomposition de f de la forme (4.3) *avec* (4.4), (4.5), (4.6) *alors f est dans $\mathfrak{D}'_{+, M_k}(X)$ et est nulle pour $t < t_1$.*

DÉMONSTRATION. - Soit $\theta \in \mathcal{E}_{M_k}$ comme en 3), démonstration du Théorème 4.1.

Comme $f \in \mathfrak{D}'_{M_k}(X)$, on peut la représenter (d'après le Théorème 2.1) sous la forme

$$f = \sum_{k=0}^{\infty} D^k g_k$$

g_k localement L_2 à valeurs dans X,

$$\sum_{k=0} M_k L^k \left(\int_{-n}^{n} \| g_k(t) \|_X^2 \, dt \right)^{\frac{1}{2}} < \infty \qquad \forall L.$$

Comme $f = \theta f$, on peut alors écrire (4.3) (utilisant

$$< f, \varphi > = < f, \theta\varphi > = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} < g_k(t), (-1)^k D^k (\theta \varphi) > dt)$$

avec

$$f_k = (-1)^k \sum_{j \geq k} (-1)^j \binom{j}{k} \theta^{(j-k)} g_j .$$

Soit n fixé; $| \theta^{(j-k)}(t) | \leq c_1 L_1^{j-k} M_{j-k}$ pour $t \in [t_0; n]$ et donc

$$\left(\int_{t_0}^{n} \| f_k \|_X^2 \, dt \right)^{\frac{1}{2}} \leq c_1 \sum_{j \geq k} L_1^{j-k} M_{j-k} \binom{j}{k} \left(\int_{t_0}^{n} \| g_j \|_X^2 \, dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

et donc

$$\sum_{k \geq 0} L^k M_k \left(\int_{t_0}^{n} \| f_k(t) \|_X^2 \, dt \right)^{\frac{1}{2}} \leq (\text{si } L_2 = \max (L, L_1))$$

$$\leq c_1 \sum_{j \geq 0} \left(\sum_{k=0}^{j} \binom{j}{k} L_1^{j-k} L^k M_k M_{j-k} \right) \left(\int_{t_0}^{n} \| g_j \|_X^2 \, dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

(et comme $M_k M_{j-k} \leq M_0 M_j$)

$$\leq c_1 M_0 \sum_{j \geq 0} (L + L_1)^j M_j \left(\int_{t_0}^{n} \| g_j \|_X^2 \, dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

d'où (4.6) suit. La réciproque est immédiate grâce aux théorèmes 4.1 et 2.1.

4.2. - *Remarque sur la topologie de* $\mathfrak{D}_{-, M_k}(X')$. - (Ceci n'est pas indispensable pour la suite).

Comme on a vu en 3.3, il pourrait paraitre raisonnable de munir

$$\mathfrak{D}_{-, M_k}(X') = \mathcal{E}_{M_k}(X') \cap \mathfrak{D}_{-}(X')$$

de la topologie «borne supérieure».

Appelons $\mathfrak{D}^F(X')$ l'espace $\mathfrak{D}_{-,M_k}(X')$ muni de cette topologie; elle est *strictement* moins fine que la topologie «naturelle», en effet

$$(\mathfrak{D}^F_{-,M_k}(X))' = \mathcal{E}'_{M_k}(X) + \mathfrak{D}'_+(X), \tag{4.7}$$

autrement dit tout élément f de $(\mathfrak{D}^F_{-,M_k}(X'))'$ est somme d'une M_k-distribution à *support compact* à valeurs dans X et d'une distribution *ordinaire* à valeurs dans X à support limité à gauche. Donc f *sera d'ordre fini sur tout compact assez éloigné vers la droite,* ce qui n'est pas le cas de *tout* élément f de $\mathfrak{D}'_{+,M_k}(X)$; donc $(\mathfrak{D}^F_{-,M_k}(X'))' \subset \mathfrak{D}'_{+,M_k}(X)$ *strictement,* d'où notre assertion.

5. - Un espace de suites vectorielles.

5.1. - On veut maintenant étendre certains des résultats précédents au cas où X n'*est plus* un espace de BANACH.

On aura besoin pour cela d'un espace de suites (comme en 1.3 mais dans un cadre plus général).

Soit donc G un espace vectoriel topologique localement convexe séparé donné que l'on suppose *tonnelé* (cf. [6]). On désigne par E l'espace des suites

$$e = \{g_k\}, \quad g_k \in G, \qquad k = 0,\ 1,\ 2,\ \dots \tag{5.1}$$

telles qu'il existe L (dépendant de e) avec

$$\frac{g_k}{L^k M_k} \in \text{borné de } G \text{ lorsque } k \text{ varie.} \tag{5.2}$$

On désigne par E^L le sous espace de E formé des suites telles que (5.2) ait lieu pour le même L.

Alors

$$E = \bigcup_{L_n} E^{L_n}, \qquad L_n \to +\infty, \tag{5.3}$$

et lorsqu'on aura choisi une topologie sur E^L on prendra sur E la topologie de limite inductive correspondante à (5.3).

Topologie sur E^L. - Soit $\mathcal{V}_G =$ voisinage de 0 dans G. On définit alors

$$\mathcal{V} = \left\{ e = \{g_k\} \,\middle|\, \frac{g_k}{L^k M_k} \in \mathcal{V}_G \quad \forall k \right\}. \tag{5.4}$$

On prend pour système fondamental de voisinages de 0 dans E l'ensemble des $\mathcal{V}$ lorsqe $\mathcal{V}_G$ parcourt un système fondamental de voisinages de 0 dans G.

5.2. - *Espace dual E' de E.* - On va démontrer la

Proposition 5.1. - *On suppose que G est tonnelé. Tout élément e' de E' peut se réprésenter (de façon non unique) sous la forme*

$$e' = \sum_{k=0}^{\infty} g'_k, \quad g'_k \in G', \tag{5.5}$$

où

$$M_k L^k g'_k \longrightarrow 0 \quad \text{dans } G' \text{ fort lorsque } k \longrightarrow \infty, \ \forall L, \tag{5.6}$$

la dualité entre E' et E étant donnée par:

$$< e', e > = \sum_{k=0}^{\infty} < g'_k, g_k >, \qquad e = \{g_k\} \in E \tag{5.7}$$

(les crochets dans la somme désignant la dualité entre G' et G); *et réciproquement.*

Démonstration. - 1) Vérifions d'abord que la série dans (5.7) converge si (5.6) a lieu.

Pour $e = \{g_k\}$ donné dans E, il existe L et $B =$ borné de G tels que

$$\frac{g_k}{L^k M_k} \in B \quad \forall k.$$

Par ailleurs $M_k (LL_1)^k g'_k \longrightarrow 0$ dans G' fort, avec L_1 quelconque, donc avec L_1 fixé > 1. Donc

$$< M_k (LL_1)^k g'_k, \frac{g_k}{L^k M_k} > \longrightarrow 0$$

donc

$$\left| < M_k (LL_1)^k g'_k, \frac{g_k}{L^k M_k} > \right| \leq c,$$

c constante, donc

$$| < g'_k, g_k > | \leq c L_1^{-k}$$

D'où le résultat.

2) Montrons alors que (toujours (5.6) ayant lieu) la forme

$$e = \{g_k\} \longrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} < g'_k\,,\, g_k > = < e',\, e >$$

est continue sur E. Il suffit de montrer que sa restriction à E^L est continue. Il faut donc montrer que, pour $\varepsilon > 0$ donné, il existe $\mathfrak{V}$ (cf. (5.4)) tel que $| < e',\, e > | \leq \varepsilon \quad \forall e \in \mathfrak{V}$. Choisissons $L_1 (> 1)$ tel que $M_k (L L_1)^k g'_k \longrightarrow 0$ dans G' fort; donc

$$M_k (L L_1)^k g'_k \in B' = \text{borné de } G' \text{ fort.}$$

Choisissons ε' par $\dfrac{\varepsilon' L_1}{L_1 - 1} = \varepsilon$; et prenons $\mathfrak{V}$ (cf. (5.4)) correspondant à $\mathfrak{V}_G = \varepsilon' (B')^0$ (c'est un voisinage de 0 dans G car G est tonnelé). Alors

$$\left| < M_k (L L_1)^k g'_k\,,\, \frac{g_k}{L^k M_k} > \right| \leq \varepsilon' \text{ si } e = \{g_k\} \in \mathfrak{V}$$

et donc

$$| < e',\, e > | \leq \varepsilon' \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{L_1} \right)^k = \varepsilon \quad \text{si} \quad e \in \mathfrak{V},$$

d'où le résultat.

3) Reste maintenant à montrer que tout $e' \in E'$ peut se mettre sous la forme (5.5) avec (5.6).

Pour $g \in G$ posons:

$$s_k(g) = \{0,\, 0,\, \ldots,\, 0,\, g,\, 0,\, \ldots\},$$

g étant à la $k^{\text{ème}}$ place;

évidemment $s_k(g) \in E$ et la forme

$$g \longrightarrow < e',\, s_k(g) >$$

est linéaire continue sur G; donc

$$(5.8) \qquad < e',\, s_k(g) > = < g'_k\,,\, g >, \qquad g'_k \in G'.$$

On a donc une application

$$e' \longrightarrow \{g'_k\}$$

de

$$E' \longrightarrow \prod_{k=0}^{\infty} G',$$

et

$$(5.9) \qquad < e', \{g_1, g_2, \ldots, g_n, 0, \ldots,\} > = \sum_{k=0}^{n} < g'_k, g_k >, \qquad g_k \in G.$$

Montrons que (5.6) est vérifié par les g'_k; s'il n'en était pas ainsi, il existerait L et $B =$ borné de G tel que

$$(5.10) \qquad < M_k L^k g'_k, b >$$

ne tend pas vers 0 uniformément pour $b \in B$.

Posons

$$(5.11) \qquad \pi b = \{M_k L^k b\}$$

$$\pi^\alpha b = \{M_0 b, LM_1 b, \ldots, L^\alpha M_\alpha b, 0, \ldots\}$$

On a: $\pi b \in E$. Admettons un instant

(5.12) $\pi^\alpha b \longrightarrow \pi b$ dans E lorsque $\alpha \longrightarrow \infty$, uniformément pour $b \in B$.

Alors

$$\begin{cases} S_\alpha = < e', \pi^\alpha b > = \sum_{k=1}^{\alpha} < M_k L^k g'_k, b > \longrightarrow < e', \pi b > \\ \text{uniformément pour } b \in B, \end{cases}$$

donc

$$S_k - S_{k-1} = < M_k L^k g'_k, b > \longrightarrow 0$$

uniformément pour $b \in B$, ce qui contredit (5.10), d'où le résultat, sous réserve de vérifier (5.12).

Or soit L_1 fixé $> L$. Alors $\pi b \in E^{L_1}$ et il suffit de montrer que $\pi^\alpha b \to \pi b$ dans E^{L_1} uniformement pour $b \in B$. Or

$$\pi b - b^\alpha b = \{0, \ldots, 0, L^{\alpha+1} M_{\alpha+1} b, L^{\alpha+2} M_{\alpha+2} b, \ldots\}.$$

Soit $\mathfrak{V}_G$ un voisinage de 0 dans G et $\mathfrak{V}$ le voisinage (5.4) correspondant. On peut alors trouver n tel que

$$\left(\frac{L}{L_1}\right)^p b \in \mathfrak{V}_G, \ \forall b \in B, \text{ dès que } p \geq n.$$

Mais alors, pour $\alpha \geq n$, $\pi b - \pi^\alpha b \in \mathfrak{Y}$ car cela revient à vérifier que $\left(\frac{L}{L_1}\right)^p b \in \mathfrak{Y}_G$, $\forall b \in B$, dès que $p \geq \alpha$, ce qui est vrai.

On a donc démontré (5.6).

Grâce au point 1), on peut passer à la limite en n dans (5.9) et on obtient (5.5) (5.7).

Ceci achève la démonstration du théorème.

6. - Espace $\mathfrak{D}_{M_k}(X)$, X non Banach.

6.1. - *Définition de* $\mathfrak{D}_{M_k}(X)$.

Soit X un espace vectoriel topologique localement convexe séparé quelconque (pour l'instant). On désigne par $\mathfrak{D}(X)$ l'espace des fonctions indéfiniment différentiables sur R à valeurs dans X, muni de la topologie de L. SCHWARTZ [27] [28]. On definit alors $\mathfrak{D}_{M_k}(X)$ comme l'espace des φ tels que:

(6.1) $$\varphi \in \mathfrak{D}(X)$$

(6.2) il existe L (dépendant de φ) tel que

$$\frac{\varphi^{(k)}(t)}{L^k M_k} \in \text{ borné de } X, \text{ lorsque } t \in R \text{ et } k = 0, 1, \ldots$$

(le borné dépend ici aussi de φ!).

(Les hypothèses sur M_k sont toujours les mêmes, cf. 1.1).

Si l'on suppose que (1.4) a lieu, alors, comme on le vérifie sans peine, $\mathfrak{D}_{M_k}(X)$ est invariant par dérivation.

6.2. - *Topologie sur* $\mathfrak{D}_{M_k}(X)$.

On va opérer de façon analogue au N° 1, 1.3.

On considère l'espace $\mathfrak{D}^0(X)$ des fonctions *continues* sur R à valeurs dans X et à support compact, muni de la topologie de L. SCHWARTZ [27].

Notons la

PROPOSITION 6.1. - *Soit* $\varphi \in \mathfrak{D}(X)$. *Les deux conditions suivantes sont équivalentes:*

(i) $\varphi \in \mathfrak{D}_{M_k}(X)$, $\quad \varphi(t) = 0$ si $\quad |t| \geq n$;

(ii) $\begin{cases} \textit{il existe } L \textit{ tel que, lorsque } k \textit{ et } q \textit{ varient,} \\ \dfrac{|t|^q}{n^q} \dfrac{\varphi^{(k)}}{L^k M_k} \textit{ demeure dans un borné de } \mathfrak{D}^0(X). \end{cases}$

DÉMONSTRATION. - 1) Soit φ vérifiant (i). La fonction $t \longrightarrow \dfrac{|t|^q}{n^q}$ est bornée si $|t| \leq n$; d'où (ii), les fonctions $t \longrightarrow \dfrac{|t|^q}{n^q} \dfrac{\varphi^{(k)}(t)}{L^k M_k}$ ayant leur support dans le compact fixe $[-n, n]$.

2) Soit φ vérifiant (ii). S'il existe t_0 et k tels que $\varphi^{(k)}(t_0) \neq 0$ et $|t_0| > n$, alors la suite $\left|\dfrac{t_0}{n}\right|^q \dfrac{\varphi^{(k)}(t_0)}{L^k M_k}$ n'est pas bornée dans X lorsque $q \longrightarrow \infty$ (k fixé). Donc φ est à support dans $[-n, n]$. Ecrivant (ii) pour $q = 0$, on en déduit (6.2).

Espace E. - On considère l'espace E, analogue à celui du N° 5, mais avec des suites doubles au lieu de suites simples (ce qui évidemment ne change rien d'essentiel!), et avec

$$G = \mathfrak{D}^0(X). \tag{6.3}$$

Alors

$$\left\{ \begin{aligned} & E = \{ e = \{ g_{kq} \} \mid g_{kq} \in G, \text{ et il existe } L \textit{ et } n \text{ tels que} \\ & \frac{g_{kq}}{L^k n^q M_k} \in \text{ borné de } G \text{ lorsque } k \text{ et } q \text{ varient} \}. \end{aligned} \right. \tag{6.4}$$

On designe par E^{L_n} l'espace correspondant à n fixe et $L = L_n$, topologie comme en 5.1, et $E = \bigcup_n E^{L_n}$, $L_n \longrightarrow +\infty$, topologie de limite inductive.

L'application

$$\varphi \longrightarrow |t|^q \varphi^{(k)} \tag{6.5}$$

applique $\mathfrak{D}_{M_k}(X)$ dans E; soit E_0 l'image de $\mathfrak{D}_{M_k}(X)$ dans cette application; *on munit $\mathfrak{D}_{M_k}(X)$ de la topologie image réciproque de celle de E dans l'application* (6.5).

Cela revient donc à munir $\mathfrak{D}_{M_k}(X)$ de la topologie de limite inductive des $\mathfrak{D}_{M_k}(-n, n; L_n; X)$, définis comme suit

$$\mathfrak{D}_{M_k}(-n, n; L_n; X) = \{ \varphi \mid \varphi \in \mathfrak{D}(X), \text{ à support dans } [-n, n],$$

$$\frac{\varphi^{(k)}(t)}{L_n^k M_k} \in \text{ borné de } X, \quad \forall k \text{ et } \forall t \in [-n, n] \}$$

un système fondamental de voisinages de 0 étant donné par

$$\mathcal{V} = \left\{ \varphi \,\middle|\, \frac{\varphi^{(k)}(t)}{L_n^k M_k} \in \mathcal{V}_X, \quad \forall k \quad \text{et} \quad \forall t \in [-n, n] \right\}$$

$\mathcal{V}_X$ parcourant un système fondamental de voisinages de 0 dans X.

7. - M_k distributions à valeurs dans X, X non Banach.

7.1. *Hypothèses.* - On suppose que X est un espace vectoriel séparé localement convexe réflexif.

7.2. - *Définition.* - On pose

$$\mathcal{D}'_{M_k}(X) = (\mathcal{D}_{M_k}(X'))' \tag{7.1}$$

avec la topologie forte de dual, X' étant le dual (fort) de X. L'espace $\mathcal{D}'_{M_k}(X)$ est — par définition — l'espace des M_k-distributions à valeurs dans X.

REMARQUE 7.1. - A vrai dire, la définition (7.1) n'est pas la plus générale possible; par analogie avec [28], on pourrait appeler espace des M_k-distributions à valeurs dans X l'espace $\mathcal{L}(\mathcal{D}_{M_k}; X)$ des applications linéaires continues de $\mathcal{D}_{M_k}$ dans X; mais dans les applications que nous avons en vue, c'est la définition (7.1) qui est commode.

Nous n'étudions pas ici le problème de trouver des critères sur X permettant d'affirmer que $\mathcal{D}'_{M_k}(X) = \mathcal{L}(\mathcal{D}_{M_k}; X)$; mais dans tous les cas

$$\mathcal{D}'_{M_k}(X) \subset \mathcal{L}(\mathcal{D}_{M_k}; X).$$

La dérivation et la multiplication, par des fonctions scalaires de $\mathcal{E}_{M_k}$, se définissent dans $\mathcal{D}'_{M_k}(X)$ comme dans les classes de SCHWARTZ [26], [28].

7.3. *Structure de* $\mathcal{D}'_{M_k}(X)$. - On pose

$$\mathcal{D}'^0(X) = (\mathcal{D}^0(X'))', \tag{7.2}$$

et on suppose que $\mathcal{D}^0(X')$ *est tonnelé.*

Alors

THÉORÈME 7.1. - *Toute* $f \in \mathcal{D}'_{M_k}(X)$ *peut se représenter, de façon non unique, sous la forme*

$$f = \sum_{k=0}^{\infty} D^k \mu_k, \tag{7.3}$$

où

(7.4) $$\mu_k \in \mathfrak{D}'^0(X),$$

(7.5) $$\left\{ \begin{array}{l} \textit{quelle que soit la fonction } \theta \in \mathfrak{D}^0 (= \mathfrak{D}^0(\mathcal{C})) \text{ (i.e. continue scalaire} \\ \text{à support compact) } \textit{et quel que soit } L > 0, \textit{ la série } \sum_{k=0}^{\infty} L^k M_k \theta \mu_k \\ \textit{converge dans } \mathfrak{D}'^0(X), \end{array} \right.$$

et où (7.3) *signifie que*

(7.6) $$< f, \varphi > = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k < \mu_k, \varphi^{(k)} >, \qquad \forall \varphi \in \mathfrak{D}_{M_k}(X')$$

(les crochets dans la somme désignant la dualité entre $\mathfrak{D}'^0(X)$ et $\mathfrak{D}^0(X')$ et $< f, \varphi >$ celle entre $\mathfrak{D}'_{M_k}(X)$ et $\mathfrak{D}_{M_k}(X')$).

Réciproquement, toute f de la forme (7.3), (7.6) *avec* (7.4), (7.5) *définit un élément de* $\mathfrak{D}'_{M_k}(X)$.

Démonstration. - Soit $\varphi \to < f, \varphi >$ une forme linéaire continue sur $\mathfrak{D}_{M_k}(X)$; soit π l'application (6.5) où l'on remplace X par X'; alors (comme dans la démonstration du Théorème 2.1) on voit qu'il existe $e' \in E'$ tel que

(7.7) $$< f, \varphi > = < e', \pi\varphi > \qquad \forall \varphi \in \mathfrak{D}_{M_k}(X')$$

Mais d'après la proposition 5.1, on peut écrire

(7.8) $$e' = \sum_{k, q} g'_{k,q},$$

$$g'_{kq} \in G' (= \mathfrak{D}'^0(X))$$

(7.9) $$M_k L^k n^q g'_{kq} \to 0 \text{ dans } G' \text{ fort lorsque } (k, q) \to \infty, \ \forall L \text{ et } \forall n.$$

(Le résultat est bien valable puisque nous supposons que $\mathfrak{D}^0(X') = G$ est tonnelé).

Alors

$$< e', \pi\varphi > = \sum_{k, q} < g'_{kq}, | t |^q \varphi^{(k)} >$$

(chaque crochet dans la somme désignant la dualité entre G' et G).

Il en résulte la formule (7.3) avec

(7.10) $$\mu_k = (-1)^k \sum_{q=0}^{\infty} | t |^q g'_{kq},$$

sous réserve de vérifier la convergence de la série (7.10) dans $\mathfrak{D}'^0(X)$ et de vérifier (7.5).

Convergence de (7.10)

On rappelle que $G = \mathfrak{D}^0(X')$. Soit $\mathcal{V}_{G'}$ un voisinage de 0, convexe, équilibré, absorbant dans G'; il faut montrer que, (pour k fixé),

$$\Delta = \sum_{q_0}^{q_0+\sigma} |t|^q g'_{kq} \in \mathcal{V}_{G'}$$

pour q_0 assez grand et σ quelconque.

Mais $\mathcal{V}_{G'} = B^0$, $B =$ borné équilibré de $\mathfrak{D}^0(X')$; donc les éléments de B sont à support dans un compact fixé $[-n, n]$, $-n$ convenable — et si $b \in B$ alors $\left|\frac{t}{n}\right|^q b \in B$, $\forall q$. Il résulte de (7.9) que $(n+1)^q g'_{kq} \to 0$ dans G' fort, donc $(n+1)^q g'_{kq} \in \mathcal{V}_{G'}$ pour $q \geq q_1$, et pour $q \geq q_1$:

$$|<|t|^q g'_{kq}, b>| = \left|\frac{n}{n+1}\right|^q |<(n+1)^q g'_{kq}, \left|\frac{t}{n}\right|^q b>| \leq \left(\frac{n}{n+1}\right)^q, \; b \in B,$$

et donc

$$|<\Delta, b>| \leq \sum_{q \geq q_0} \left(\frac{n}{n+1}\right)^q \qquad (q_0 \geq q_1);$$

choissant q_0 tel que $\sum_{q \geq q_0} \left(\frac{n}{n+1}\right)^q < 1$, on en déduit le résultat.

Vérification de (7.5).

Soit θ fixé; on peut supposer que $|\theta(t)| \leq 1$ et est à support dans $[-n, n]$. Soit L fixé. On veut montrer (7.5), donc que, $\mathcal{V}_{G'}$ étant un voisinage de 0 dans G', convexe, équilibré, absorbant, la somme

$$S = \sum_{k=k_0}^{k_0+\sigma} L^k M_k \theta \, \mu_k \in \mathcal{V}_{G'} \tag{7.11}$$

pour k_0 assez grand et σ quelconque.

Choisissons $L_1 > L$; d'après (7.9)

$$M_k L_1^k (n+1)^q g'_{kq}$$

demeure dans un borné de G', donc

$$M_k L_1^k (n+1)^q g'_{kq} \in \lambda_0 \mathcal{V}_{G'} \qquad \forall k, \; \forall q. \tag{7.12}$$

On peut écrire

$$S = \sum_{k=k_0}^{k_0+\sigma} \sum_{q=0}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{|t|}{n+1}\right)^q \left(\frac{L}{L_1}\right)^k M_k L_1^k (n+1)^q g'_{kq} \theta(t).$$

Mais

$$\left(\frac{|t|}{n+1}\right)^q |\theta(t)| \leq \left(\frac{n}{n+1}\right)^q$$

et donc

$$S \in \left[\sum_{q \geq 0} \left(\frac{n}{n+1}\right)^q\right] \left(\sum_{k_0}^{k_0+\sigma} \left(\frac{L}{L_1}\right)^k\right) \lambda_0 \mathcal{V}_{G'} \subset \mathcal{V}_{G'}$$

si

$$(n+1)\lambda_0 \sum_{k=k_0}^{k_0+\sigma} \left(\frac{L}{L_1}\right)^k \leq 1;$$

choisissant k_0 pour que cette condition ait lieu, on en déduit (7.11).

La réciproque n'offre pas de difficulté; la démonstration du théorème est achevée.

REMARQUE 7.1. - Si X est un espace de BANACH, l'espace $\mathfrak{D}^0(X')$ est *tonnelé*, puisque limite inductive d'espaces de FRÉCHET (et même de BANACH).

Si donc X est un BANACH réflexif, le théorème 7.1 est valable et donne alors une variante du Théorème 2.1. Dans le cas général, nous exprimons f comme somme (infinie) de dérivées de $\mu_k \in \mathfrak{D}'^0(X)$ (donc les μ_k sont des *mesures à valeurs dans* X) et non de f_k comme dans le Théorème 2.1, à cause de la difficulté de travailler avec $L_2(X)$ lorsque X n'est pas métrisable.

8. - Espaces $D_{+, M_k}(X)$ et $\mathcal{E}_{M_k}(X)$, X non Banach.

On suit ici une démarche tout à fait parallèle à celle du N° 3.

8.1. - *Espace* $\mathfrak{D}^a_{+, M_k}(X)$.

L'espace $\mathfrak{D}^a_{+, M_k}(X)$ est l'espace des fonctions φ avec les propriétés

(8.1) $$\varphi \in \mathcal{E}(X),$$

(8.2) $$\varphi = 0, \text{ pour } t < a,$$

(8.3) $\forall b (> a)$ fini, il existe $L \geq 1$ telle que

$$\frac{\varphi^{(k)}(t)}{L^k M_k} \text{ demeure dans un borné de } X, \text{ pour } t \leq b \text{ et } \forall k.$$

On désigne par $\mathfrak{D}^{a;b,L}_{+,M_k}(X)$ l'espace des φ satisfaisant à (8.1) (8.2) (8.3) avec b et $L \geq 1$ fixés; si $\mathcal{V}_X$ (resp. $\mathcal{V}_{\mathcal{E}(X)}$) = voisinage de 0 dans X (resp. $\mathcal{E}(X)$) on définit:

$$\mathcal{V} = \left\{ \varphi \mid \varphi \in \mathcal{V}_{\mathcal{E}(X)},\ \frac{\varphi^{(k)}(t)}{L^k M_k} \in \mathcal{V}_X, \qquad t \in [a, b],\ \ \forall k \right\} \tag{8.4}$$

et on définit un système fondamental de voisinages de 0 dans $\mathfrak{D}^{a;b,L}_{+,M_k}(X)$ en faisant parcourir à $\mathcal{V}_{\mathcal{E}(X)}$ et $\mathcal{V}_X$ des systèmes fondamentaux.

On prend ensuite $L_n,\ b_n \to +\infty$ et .

$$\mathfrak{D}^{a}_{+,M_k}(X) = \bigcap_{b_n} \left(\bigcup_{L_n} \mathfrak{D}^{a;b_n,L_n}_{+,M_k}(X) \right) \tag{8.5}$$

(avec les topologies de limite inductive et projective pour $\cup$ et $\cap$).

8.2. - *Espace* $\mathfrak{D}_{+,M_k}(X)$.

Si a_n est une suite $\to -\infty$, on définit

$$\mathfrak{D}_{+,M_k}(X) = \bigcup_{a_n} \mathfrak{D}^{a_n}_{+,M_k}(X), \tag{8.6}$$

muni de la topologie de limite inductive correspondante.

Définitions analogues pour $\mathfrak{D}_{-,M_k}(X)$.

8.3. - *Espace* $\mathcal{E}_{M_k}(X)$.

On définit

$$\mathcal{E}^{a;b,L}_{M_k}(X) = \left\{ \varphi \mid \varphi \in \mathcal{E}(X),\ \frac{\varphi^{(k)}(t)}{L^k M_k} \in \text{borné de } X, \right.$$
$$\left. \forall k \ \text{ et } \ \forall t \in [a, b] \right\}$$

et on le munit de la topologie définie par le système fondamental de voisinages de 0 suivant:

$$\mathcal{V} = \left\{ \varphi \mid \varphi \in \mathcal{V}_{\mathcal{E}(X)},\ \frac{\varphi^{(k)}(t)}{L^k M_k} \in \mathcal{V}_X,\ \forall k \ \text{ et } \ \forall t \in [a, b] \right\}$$

où $\mathcal{V}_{\mathcal{E}(X)}$ (resp. $\mathcal{V}_X$) parcourt un système fondamental de voisinages de 0 dans $\mathcal{E}(X)$ (resp. X).

Ensuite on pose

$$\mathcal{E}_{M_k}^{a,\,b}(X) = \bigcup_{L_n} \mathcal{E}_{M_k}^{a,\,b,\,L_n}(X), \quad L_n \longrightarrow +\infty, \quad \text{topologie de limite inductive,}$$

et

$$\mathcal{E}_{M_k}(X) = \bigcap_{a_n,\,b_n} \mathcal{E}_{M_k}^{a_n,\,b_n}(X),$$

$$a_n \longrightarrow -\infty,\ b_n \longrightarrow +\infty, \quad \text{topologie de limite projective.}$$

3. - **Espace $\mathfrak{D}'_{+,\,M_k}(X)$, X non Banach.**

On fait les mêmes hypothèses qu'en 7.1 et 7.3. On pose:

(9.1) $$\mathfrak{D}'_{+,\,M_k}(X) = (\mathfrak{D}_{-,\,M_k}(X'))'.$$

On a le

Théorème 9.1. - *L'espace $\mathfrak{D}'_{+,\,M_k}(X)$ coincide avec le sous espace de $\mathfrak{D}'_{M_k}(X)$ des distributions à support limité à gauche.*

Démonstration. - Analogue à la démonstration du Théorème 4.1, sous réserve de vérifier que, θ étant donnée comme dans la démonstration du Théorème 4.1, l'application $\varphi \longrightarrow \theta\varphi$ est linéaire continue de

$$\mathfrak{D}_{-,\,M_k}(X') \longrightarrow \mathfrak{D}_{M_k}(X').$$

Il suffit de vérifier que sa restriction à $\mathfrak{D}^{a}_{-,\,M_k}(X')$ est continue. Si t_0 est la limite à gauche du support de θ, la fonction $\theta\varphi$ est nulle hors de $[t_0,\, a]$.

Il suffit de montrer que $\varphi \longrightarrow \theta\varphi$ est continue de

$$\mathfrak{D}^{t_0,\,a,\,L}_{-,\,M_k}(X') = \Phi \longrightarrow \mathfrak{D}_{M_k}(X').$$

[Rappelons que $\Phi =$ ensemble des $\varphi \in \mathcal{E}(X')$, nulles pour $t > a$, telles que

$$\frac{\varphi^{(k)}(t)}{L^k M_k} \in \text{ borné de } X' \text{ pour } t \in [t_0,\, a], \qquad k = 0,\, 1,\, \dots].$$

Il existe des constantes c_1, L_1 telles que

$$|\, \theta^{(k)}(t) \,| \leq c_1 L_1^k M_k\,,\ \forall k, \qquad t \in [t_0,\, a].$$

On va alors montrer que $\varphi \longrightarrow \theta\varphi$ est continue de $\Phi \longrightarrow \mathfrak{D}_{M_k}^{L_2}([t_0, a]; X') = \Psi$, où

1) $L_2 = L + L_1$;

2) de façon générale, $\mathfrak{D}_{M_k}^{L}([t_0, a]; X') =$ espace des $\psi \in \mathfrak{D}(X')$, nulles hors de $[t_0\ a]$, telles que $\dfrac{\psi^{(k)}(t)}{L^k M_k} \in$ borné de X', $\forall k$, $t \in [t_0, a]$.

Soit donc $\mathfrak{V}$ un voisinage de 0 donné dans Ψ; donc

$$= \{\psi \mid \psi \in \Psi,\ \frac{\psi^{(k)}(t)}{L_2^k M_k} \in \mathfrak{V}_{X'},\ \mathfrak{V}_{X'} = \text{voisinage de } 0 \text{ dans } X'\}.$$

Nous devons trouver $\mathcal{W}$, voisinage de 0 dans Φ, tel que

$$\psi = \theta\varphi \in \mathfrak{V} \quad \forall \varphi \in \mathcal{W}. \tag{9.2}$$

Définissons $\mathcal{W}$ par

$$\mathcal{W} = \{\varphi \mid \varphi \in \Phi,\ \frac{\varphi^{(k)}(t)}{L^k M_k} \in \frac{1}{c_1 M_0}\mathfrak{V}_{X'},\ \mathfrak{V}_{X'} = \text{même voisinage de } 0 \text{ que celui apparaissant dans } \mathfrak{V}\}.$$

Montrons qu'alors (9.3) a lieu. On a:

$$\frac{\varphi^{(k)}(t)}{L_2^k M_k} = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \frac{\theta^{(k-j)}(t)}{L_2^k M_k} L^j M_j \left(\frac{\varphi^{(j)}(t)}{L^j M_j}\right)$$

et

$$\left| \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \frac{\theta^{(k-j)}(t)}{L_2^k M_k} L^j M_j \right| \leq c_1 \frac{1}{L_2^k M_k} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} L_1{}^{k-j} L^j M_{k-j} M_j = \rho$$

Mais $M_{k-j} M_j \leq M_0 M_k$, donc $\rho \leq c_1 M_0 \dfrac{1}{L_2^k}(L_1 + L)^k = c_1 M_0$ d'où le résultat suit.

Du Théorème précédent et du Théorème 7.1 on va déduire le

THÉORÈME 9.2. - *Soit f donné dans $\mathfrak{D}'_{+, M_k}(X)$; soit $t_1 =$ limite à gauche du support de f. Pour tout $t_0 < t_1$, il existe une décomposition de f de la forme*

$$f = \sum_{k=0}^{\infty} D^k \mu_k, \quad \text{(en un sens analogue à (7.6))} \tag{9.3}$$

où

(9.4) $$\mu_k \in \mathfrak{D}'^0(X),$$

(9.5) $$\mu_k = 0 \quad \textit{pour} \quad t < t_0$$

(9.6) $$\left\{ \begin{array}{l} \textit{quelle que soit la fonction } \chi \in \mathfrak{D}^0 \textit{ et quel que soit } L, \textit{ la série} \\ \sum\limits_{k=0}^{\infty} L^k M_k \chi \mu_k \quad \textit{converge dans} \quad \mathfrak{D}'^0(X). \end{array} \right.$$

Réciproquement, si f est donnée dans $\mathfrak{D}'_{M_k}(X)$ et si, pour tout $t_0 < t_1$ donné il existe une décomposition de f de la forme (9.3) *avec* (9.4), (9.5) *et* (9.6), *alors f est dans $\mathfrak{D}'_{+, M_k}(X)$ et est nulle pour $t < t_1$.*

DÉMONSTRATION. - Soit $\theta \in \mathcal{E}_{M_k}$, $\theta = 0$ si $t < t_0$, $\theta = 1$ dans un voisinage du support de f. Alors $f = \theta f$.

D'après le Théorème 7.1, on peut écrire f sous la forme

$$f = \sum_{k=0}^{\infty} D^k \nu_k ,$$

$$\nu_k \in \mathfrak{D}'^0(X),$$

quelle que soit $\chi \in \mathfrak{D}^0$, et quel que soit L, la série

$$\sum_{k=0}^{\infty} L^k M_k \chi \nu_k \quad \text{converge dans } \mathfrak{D}'^0(X).$$

Alors (comme à la démonstration du Théorème 4.2), on a la représentation (9.3) avec

$$\mu_k = (-1)^k \sum_{j \geq k} (-1)^j \binom{j}{k} \theta^{(j-k)} \nu_j .$$

On a évidemment (9.4) (9.5) et il reste donc à vérifier (9.6).

Or

$$\sum_{k \geq 0} L^k M_k \chi \mu_k = \sum_{j \geq 0} \chi \nu_j \sum_{k=0}^{j} (-1)^{j+k} \binom{j}{k} \theta^{(j-k)} L^k M_k =$$

$$= \sum_{j \geq 0} \chi \nu_j (L + L_1)^j M_j \rho_j ,$$

où

$$\rho_j = \frac{1}{(L + L_1)^j} \, M_j^{-1} \sum_{k=0}^{j} (-1)^{j+k} \binom{j}{k} \theta^{(j-k)} L^k M_k ;$$

on a pris L_1 tel que

$$|\theta^{(k)}(t)| \leq c_1 L_1^k M_k \quad \text{sur le support de } \chi,\ \forall k.$$

Le résultat suit alors du fait que

$$|\rho_j(t)| \leq c_1 \frac{M_j^{-1}}{(L+L_1)^j} \sum_{k=0}^{j} \binom{j}{k} L_1{}^{j-k} L^k M_{j-k} M_k \leq c_1 M_0,$$

La réciproque est immédiate.

CHAPITRE II.

Théorèmes de M_k - régularité pour les équations différentielles de type parabolique.

1. - Equations opérationnelles d'évolution. - Théorème de M_k-régularité.

1.1. - *Rappels* (cf. [18]).

Soient V et H deux espace de HILBERT, avec $V \subset H$, $V \to H$ continue, V dense dans H; pour $u, v \in V$ (resp. $f, g \in H$) on désignera par $((u, v))$, $\|u\|$ (resp. (f, g), $|f|$) le produit scalaire et la norme dans V (resp. H).

On identifie H à son anti-dual et on désigne par V' l'antidual de V; comme V est dense dans H

$$V \subset H \subset V';$$

si $v' \in V'$, $v \in V$, (v', v) désigne la valeur de v' au point v; si $v' \in H$, (v', v) coincide avec le produit scalaire dans H; enfin $\|v'\|$ désigne la norme duale de celle de V.

On se donne, pour tout $t \in R$, une forme sesquilinéaire continue sur V :

$$u, v \to a(t;\, u, v);$$

on supposera que $t \to a(t;\, u, v)$ est indéfiniment différentiable sur R (pour tout $u, v \in V$) et que

$$(1.1)\qquad \begin{cases} \textit{pour tout } T < \infty, \textit{ il existe } \lambda_T \textit{ et } \alpha_T > 0 \textit{ tels que} \\ Re\ a(t;\, v, v) + \lambda_T |v|^2 \geq \alpha_T \|v\|^2, \textit{ pour tout } v \in V \textit{ et } t \leq T. \end{cases}$$

La forme $t \longrightarrow a(t;\ u,\ v)$ étant semi-linéaire continue sur V peut s'écrire

$$a(t;\ u,\ v) = (A(t)u,\ v), \qquad A(t)u \in V' \tag{1.2}$$

ce qui définit $A(t) \in \mathfrak{L}(V;\ V')$.

Sous l'hypothèse (1.1) on sait [18] que

$$A(t) + \frac{d}{dt} \textit{ est un isomorphisme de } \mathfrak{D}_+(\mathrm{V}) \textit{ sur } \mathfrak{D}_+(\mathrm{V}'). \tag{1.3}$$

Moyennant des hypothèses supplémentaires de régularité sur $A(t)$ et sur le deuxième membre, on va maintenant établir un résultat de régularité supplémentaire pour la solution.

1.2. - *Théorème de M_k - régularité.*

On se donne une suite M_k (comme au Chapitre 1, N. 1) donc *non quasi-analytique* et *logarithmiquement convexe* et vérifiant

$$\textit{il existe une constante } H \textit{ telle que } M_{k+1} \leq H^k M_k, \quad \forall k. \tag{1.4}$$

On supposera en outre:

$$\left\{\begin{array}{l} \textit{il existe une constante } c_1 \textit{ telle que} \\ \qquad \binom{k}{j} M_{k-j} M_j \leq c_1 M_k, \quad \forall k, \ \textit{et} \ \ \forall j \ \textit{avec} \ 0 \leq j \leq k. \end{array}\right. \tag{1.5}$$

Ceci posé

Théorème 1.1. - *On suppose que* (1.4) (1.5) *ont lieu et que* $A(t)$ *satisfait à* (1.1) *et à*

$$A\,(=\text{"}\,t \longrightarrow A(t)\text{"}) \in \mathcal{E}_{M_k}(\mathfrak{L}(\mathrm{V};\ \mathrm{V}')). \tag{1.6}$$

Alors $A(t) + \dfrac{d}{dt}$ *est un isomorphisme de* $\mathfrak{D}_{+,M_k}(\mathrm{V})$ *sur* $\mathfrak{D}_{+,M_k}(\mathrm{V}')$.

La démonstration de ce Théorème occupe les numeros ci après.

1.3. - *Réduction du problème. Lemme.*

On montrera d'abord (au point 1.4) que si $f \in \mathfrak{D}^a_{+,M_k}(\mathrm{V}')$, la solution u dans $\mathfrak{D}_+(\mathrm{V})$ de

$$A(t)u + u' = f \qquad \left(u' = \frac{du}{dt}\right) \tag{1.7}$$

est dans $\mathfrak{D}^{a}_{+,\,M_k}(V)$ (noter que (cf. [18]) on sait qu'il y a *même limite* à gauche pour le support de u et de f).

Pour ce résultat, il suffit de raisonner sur l'intervalle $[a, b]$, b fini quelconque.

Mais alors, b étant *fixé*, on peut, par le changement de u en $\exp(kt)u$ [10], $k \geq \lambda_b$, supposer (cf. (1.1)) que

$$a(t;\, v,\, v) \geq \alpha_b \| v \|^2, \qquad \forall v \in V, \qquad t \leq b$$

On peut ensuite *renormaliser* V (en une norme équivalente, encore notée $\| v \|$) de façon que

$$\text{(1.8)} \qquad Re\ a(t;\, v,\, v) \geq \| v \|^2 \qquad \forall v \in V, \quad t \leq b.$$

Ceci n'a évidemment rien d'essentiel mais simplifie un peu les calculs ci dessous.

Nous poserons:

$$\text{(1.9)} \qquad \nu(u^{(k)}) = \left(\int_a^b \| u^{(k)}(t) \|^2\, dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\text{(1.10)} \qquad \nu_*(f^{(k)}) = \left(\int_a^b \| f^{(k)}(t) \|_*^2\, dt \right)^{\frac{1}{2}}.$$

D'après la définition même (cf. chap. 1, n. 3.1), pour montrer que $u \in \mathfrak{D}^{a,\,b}_{+,\,M_k}(V)$, il suffira de montrer qu'il *existe des constantes* δ *et* B *telles que*

$$\text{(1.11)} \qquad \nu(u^{(k)}) \leq \delta B^k M_k \qquad \forall k.$$

LEMME 1.1. - *La solution de* (1.7) *vérifie*

$$\text{(1.12)} \qquad \nu(u) \leq \nu_*(f).$$

DÉMONSTRATION. - Prenons le produit scalaire (dans (V′, V)) de (1.7) avec $u(t)$ et prenons la partie réelle, en intégrant de a à b:

$$\int_a^b Re\ a(t;\, u(t),\, u(t))\, dt + \frac{1}{2}\ | u(b) |^2 - \frac{1}{2}\ | u(a) |^2 = Re \int_a^b (f(t),\, u(t))\, dt;$$

---

[10] Qui ne change pas l'appartenance aux espaces $\mathfrak{D}_{+,\,M_k}$.

Mais $u(a)=0$; utilisant (1.8) on en déduit

$$\int_a^b \| u(t) \|^2 dt \leq \int_a^b \| f(t) \|_* \| u(t) \| dt$$

d'où (1.12).

Notons par ailleurs ceci (qui est immédiat, puisque l'on *sait* que toutes les fonctions considérées dans (1.7) sont indéfiniment différentiables):

$$A(t)\, u^{(k)} + (u^{(k)})' = f^{(k)} - \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k}{j} A^{(k-j)}(t)\, u^{(j)} \tag{1.13}$$

$$\left(u^{(k)} = \frac{d^k u(t)}{dt^k}, \quad A^{(k)}(t) = \frac{d^k A(t)}{dt^k} \right).$$

1.4. - *Démonstration du Théorème* 1.1; *partie algébrique* (I).

Montrons d'abord (ce qui est l'essentiel!) que si $f \in \mathfrak{D}^a_{+, M_k}(V')$ alors $u \in \mathfrak{D}^a_{+, M_k}(V)$.

Nous savons, par hypothèse, qu'il existe des constantes c, d, L, $\mathfrak{L}$ telles que

$$\nu_*(f^{(k)}) \leq d \mathfrak{L}^k M_k \qquad \forall k, \tag{1.14}$$

$$\| A^{(k)}(t) \|_{\mathfrak{L}(V;\, V')} \leq c L^k M_k \quad \forall k, \quad a \leq t \leq b. \tag{1.15}$$

On va montrer (1.11) avec

$$\begin{aligned} \delta &= 2d, \\ B &= \sup.\ ((2\, cc_1 + 1)L,\ \mathfrak{L}). \end{aligned} \tag{1.16}$$

On raisonne par récurrence sur k; si $k=0$, d'après le Lemme 1.1,

$$\nu(u) \leq \nu_*(f) \leq d M_0$$

d'où (1.11) dans ce cas puisque $\delta = 2d$.

Admettons alors (1.11) pour $1, \ldots, k-1$ et vérifions le pour k. Si g_k désigne le deuxième membre de (1.13), une nouvelle application du Lemme 1.1 (à l'équation (1.13)) donne:

$$\nu(u^{(k)}) \leq \nu_*(g_k) \tag{1.17}$$

Mais

$$\nu_*(g_k) \leq \nu_*(f^{(k)}) + \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k}{j} \nu_*(A^{(k-j)} u^{(j)})$$

et avec le choix de δ et B, on a déjà (avec (1.14))

$$\nu_*(f^{(k)}) \leq \frac{\delta}{2} B^k M_k .$$

Il reste donc, d'après (1.17), à montrer que

$$\sum_{j=0}^{k-1} \binom{k}{j} \nu_*(A^{(k-j)} u^{(j)}) \leq \frac{\delta}{2} B^k M_k . \tag{1.18}$$

Mais

$$\nu_*(A^{(k-j)} u^{(j)}) \leq \sup_{t \leq [a,\, b]} \| A^{(k-j)}(t) \|_{\mathfrak{L}(V;\, V')} \nu(u^{(j)})$$

et utilisant (1.15) et l'hypothèse de récurrence, le I^er^ membre de (1.18) est majoré par

$$\xi_k = \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k}{j} c L^{k-j} M_{k-j} \delta B^j M_j .$$

Utilisant maintenant (1.5), on a:

$$\xi_k \leq c c_1 \delta M_k \sum_{j=0}^{k-1} L^{k-j} B^j \leq c c_1 \delta M_k B^k \frac{1}{\dfrac{B}{L} - 1} \leq \frac{\delta}{2} M_k B^k$$

car $2 c c_1 \leq \dfrac{B}{L} - 1$ grâce à (1.16) — Ceci montre (1.18) et montre donc que $u \in \mathfrak{D}_{+,\, M_k}^{a,\, b}(\mathrm{V})$.

REMARQUE 1.1. - On peut *préciser* le résultat obtenu de la façon suivante: si

$$f \in \mathfrak{D}_{+,\, M_k}^{a;\, b,\, \mathfrak{L}}(V') \quad \text{(notation du N° 3, Chap. 1), alors}$$

$$u \in \mathfrak{D}_{+,\, M_k}^{a;\, b,\, B(\mathfrak{L})}(\mathrm{V}), \ B(\mathfrak{L}) = \sup. ((2 c c_1 + 1) L,\ \mathfrak{L})$$

et comme il s'agit là d'*espaces de Fréchet*, l'application $f \longrightarrow u$ est continue, grâce au théorème du graphe fermé; donc:

(1.19) $$f \longrightarrow u \quad \textit{est continue de} \quad \mathfrak{D}_{+, M_k}^{a;\, b, \Omega}(V') \quad \textit{dans} \quad \mathfrak{D}_{+, M_k}^{a;\, b, B(\Omega)}(V).$$

1.5. - *Partie algébrique* (II).

Vérifions maintenant que

(1.20) $$u \longrightarrow A(t)u + \frac{du}{dt}$$

applique $\mathfrak{D}_{+, M_k}(V)$ dans $\mathfrak{D}_{+, M_k}(V')$.

On sait déjà (cf. Chap. I) que, grâce à (1.4), $\dfrac{d}{dt}$ applique $\mathfrak{D}_{+, M_k}(V)$ dans lui même. Reste donc à vérifier que $A(t)$ applique $\mathfrak{D}_{+, M_k}(V)$ dans $\mathfrak{D}_{+, M_k}(V')$. Vérifions un peu plus:

(1.21) $$u \longrightarrow A(t)u \quad \textit{applique} \quad \mathfrak{D}_{+, M_k}^{a;\, b, B}(V) \quad \textit{dans} \quad \mathfrak{D}_{+, M_k}^{a;\, b, B+L}(V').$$

En effet

$$(Au)^{(k)} = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} A^{(k-j)} u^{(j)},$$

d'où

$$\nu_*((Au)^{(k)}) \leq \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} cL^{k-j} M_{k-j} \delta B^j M_j$$

(nous *supposons* cette fois que $\nu(u^{(j)}) \leq \delta B^j M_j, \ \forall j$). Donc

$$\nu_*((Au)^{(k)}) \leq c\, c_1\, \delta M_k \sum_{j=0}^{k} L^{k-j} B^j$$

$$\leq c\, c_1\, \delta (L+B)^k M_k$$

d'où (1.21) suit.

Naturellement, on peut ici encore appliquer le théorème du graphe fermé; donc dans (1.21) l'application est *continue*.

1.6. - *Partie topologique.*

De (1.19) et de la continuité de (1.21) va résulter que

(1.22) $$\left\{ \begin{array}{l} u \longrightarrow A(t)u + u' = f \ \textit{ est un isomorphisme } \text{(topologique)} \\ \qquad\qquad \textit{de} \ \ \mathfrak{D}_{+, M_k}^{a;\, b}(V) \ \ \textit{sur} \ \ \mathfrak{D}_{+, M_k}^{a;\, b}(V'). \end{array} \right.$$

En effet nous savons déjà que c'est un isomorphisme algébrique. Par ailleurs quel que soit L_n, $u \longrightarrow A(t)u + u' = f$ est continue de

$$\mathfrak{D}_{+, M_k}^{a;\, b, L_n}(V) \text{ dans un espace } \mathfrak{D}_{+, M_k}^{a;\, b, \tilde{L}_n},\ \tilde{L}_n \text{ convenable,}$$

donc de $\mathfrak{D}_{+, M_k}^{a;\, b, L_n}(V)$ dans $\mathfrak{D}_{+, M_k}^{a;\, b}(V')$ et par conséquent de $\mathfrak{D}_{+, M_k}^{a;\, b}(V)$, limite inductive des $\mathfrak{D}_{+, M_k}^{a;\, b, L_n}(V)$, $L_n \longrightarrow +\infty$, dans $\mathfrak{D}_{+, M_k}^{a,\, b}(V')$. Le même raisonnement (utilisant (1.19) pour l'application *inverse* $f \longrightarrow u$, montre (1.22).

Mais alors $u \longrightarrow A(t)u + u'$ est *continue* de $\bigcap\limits_{b_n \longrightarrow \infty} \mathfrak{D}_{+; M}^{a,\, b_n}(V)$ dans $\bigcap\limits_{b_n \longrightarrow \infty} \mathfrak{D}_{+; M_k}^{a,\, b_n}(V')$, et la même remarque vaut pour l'application inverse $f \longrightarrow u$.

Donc:

$$(1.23) \qquad \left\{ \begin{array}{l} u \longrightarrow A(t)u + u' \text{ est un isomorphisme topologique de} \\ \qquad\qquad \mathfrak{D}_{+, M_k}^{a,}(V) \text{ sur } \mathfrak{D}_{+, M_k}^{a}(V'). \end{array} \right.$$

Le théorème 1.1 en résulte aussitôt.

2. - Une variante du Théorème 1.1 dans d'autres espaces.

2.1. *Autres espaces fonctionnels.*

Soit X un espace BANACH et $\mathfrak{D}_{+, M_k}^{a;\, b, L}(X)$ (resp. $\mathcal{E}_{M_k}^{a, b, L}(X)$) définis comme au Chapitre 1, 3.2 et 3.3 avec $L > 0$. On pose alors

$$(2.1) \qquad {}^{\cap}\mathfrak{D}_{+, M_k}^{a}(X) = \bigcap_{b_n \longrightarrow \infty} \ \bigcap_{L_n \longrightarrow 0} \mathfrak{D}_{+; M_k}^{a;\, b_n, L_n}(X)$$

(resp.

$$(2.2) \qquad {}^{\cap}\mathcal{E}_{M_k}(X) = \bigcap_{a_n \longrightarrow -\infty,\, b_n \longrightarrow +\infty} \ \bigcap_{L_n \longrightarrow 0} \mathcal{E}_{M_k}^{a_n, b_n, L_n}(X))$$

chacun de ces espaces étant muni de sa topologie naturelle d'*espace de Fréchet*. On fera l'*hypothèse*

$$(2.3) \qquad {}^{\cap}\mathfrak{D}_{+, M_k}^{a}(X) \ \textit{n'est pas vide.}$$

Ceci revient à donner de nouvelles conditions sur la suite $\{M_k\}$. Nous n'étudierons pas ici cette question en général, en renvoyant au travail de BEURLING [4], où on étudie un problème de même type, mais avec une autre définition de classe de type M_k. En tout cas l'hypothèse (2.3) est vérifiée pour les suites de GEVREY: $M_k = (k!)^d$, $d > 1$.

On pose ensuite

$$\cap\mathfrak{D}_{+,\,M_k}(X) = \bigcup_{a_n \to -\infty} \cap\mathfrak{D}^{a_n}_{+,\,M_k}(X), \tag{2.4}$$

muni de sa topologie de limite inductive.

Naturellement

$$\cap\mathfrak{D}_{+,\,M_k}(X) \subset \mathfrak{D}_{+,\,M_k}(X). \tag{2.5}$$

On définit de même $\cap\mathfrak{D}_{-,\,M_k}(X)$ et

$$\cap\mathfrak{D}_{-,\,M_k}(X) \subset \mathfrak{D}_{-,\,M_k}(X).$$

On pose, *par définition*:

$$\cup\mathfrak{D}'_{+,\,M_k}(X') = (\cap\mathfrak{D}_{-,\,M_k}(X))'; \tag{2.6}$$

$\cup\mathfrak{D}'_{+,\,M_k}(X')$ est l'espace des *super-M_k-distributions à valeurs dans* X', (et à support limité à gauche).

2.2. - *Théorème de super-M_k-régularité.*

On se place dans les conditions du N. 1.1; on se donne *deux* suites M_k et M_k^* telles que

$$M_k \text{ et } M_k^* \text{ satisfont à l'analogue de (1.4);} \tag{2.7}$$

$$\left\{\begin{aligned} &\binom{k}{j} M^*_{k-j} M_j \leq \varepsilon_k M_k\,, \ \forall k, \qquad 0 \leq j \leq k-1. \\ &\varepsilon_k \to 0 \quad \text{si} \quad k \to \infty. \end{aligned}\right. \tag{2.8}$$

Par ex. on peut prendre $M_k = (k!)^d$ et $M_k^* = (k!)^{d^*}$, $1 < d < d^*$.

Théorème 2.1 - *On suppose que* (2.7) (2.8) *ont lieu et que*

$$A \in \cap\mathcal{E}_{M^*_k}(\mathfrak{L}(V;\ V')). \tag{2.9}$$

Alors $A(t) + \dfrac{d}{dt}$ *est un isomorphisme de* $\cap\mathfrak{D}_{+,\,M_k}(V)$ *sur* $\cap\mathfrak{D}_{+,\,M_k}(V')$.

2.3. - *Démonstration du Théorème* 2.1.

1) *Réduction du problème.*

On va démontrer (ce qui entraine le Théorème) que

$$A(t)+\frac{d}{dt} \textit{ est un isomorphisme de } \cap\mathfrak{D}^{\alpha}_{+,M_k}(V) \textit{ sur } \cap\mathfrak{D}^{\alpha}_{+,M_k}(V'), \tag{2.10}$$

On voit, comme au n. 1.3, qu'il suffit de raisonner sur un intervalle (a, b), et que, sur cet intervalle, (1.8) a lieu.

2) Soit donc $f\in \cap\mathfrak{D}^{a;\,b}_{+,M_k}(V') = \bigcap\limits_{L_n} \mathfrak{D}^{a;\,b,\,L_n}_{+,\,M_k}(V')$ et soit u la solution dans $\mathfrak{D}^{\alpha}_{+}(V)$ de

$$A(t)u+u'=f. \tag{2.11}$$

On va montrer que $u\in \cap\mathfrak{D}^{a;\,b}_{+,M_k}(V)$; soit donc B fixé *quelconque*; on va montrer *qu'il existe* δ tel que (notations de (1.3))

$$\nu(u^{(k)})\leq \delta B^k M_k, \qquad \forall k. \tag{2.12}$$

On sait (par hypothèse) qu'il existe c et d tels que

$$\nu_*(f^{(k)})\leq dB^k M_k, \quad \forall k. \tag{2.13}$$

$$\| A^{(k)}(t)\|_{\mathfrak{L}(V;\,V')}\leq cL^k M_k^* \quad \forall k, \quad t\in[a,\,b],\ L=B/2. \tag{2.14}$$

La constante c étant ainsi fixée par (2.14), choisissons k_0 tel que

$$\binom{k}{j} M^*_{k-j}\, M_j \leq \frac{1}{2c}\, M_k \quad \text{pour} \quad k\geq k_0, \quad 0\leq j\leq k-1 \tag{2.15}$$

(ce qui est loisible d'après (2.8)).

Nous allons alors montrer (2.12) avec

$$\delta=\max\left[\max_{0\leq j\leq k_0}\frac{\nu(u^{(j)})}{L^j M_j},\ 2d\right] \qquad (L=B/2). \tag{2.16}$$

Evidemment (2.12) est satisfait pour $j\leq k_0$. Admettons le jusqu'à $k-1\,(>k_0)$ et vérifions le pour k.

Comme en 1.4, on obtient;

$$\nu(u^{(k)}) \leq \nu(f^{(k)}) + \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k}{j} \sup_{t \in [a,\, b]} \| A^{(k-j)}(t) \|_{\mathcal{L}(V;\, V)} \nu(u^{(j)}); \tag{2.17}$$

par (2.13) et (2.14), $\nu_*(f^{(k)}) \leq \frac{\delta}{2} B^k M_k \quad \forall k$ et le deuxième terme dans le membre droit de (2.17) est majoré par

$$\sum_{j=0}^{k-1} \binom{k}{j} c\, L^{k-j} M_{k-j}\, \delta B^j M_j \leq c\delta\, \frac{1}{2c}\, M_k \sum_{j=0}^{k-1} L^{k-j} B^j =$$

$$= \frac{\delta}{2} M_k \frac{B^k - L^k}{B/L - 1} = \frac{\delta}{2} M_k (B^k - L^k) \quad (\text{car } \; L = B/2) \leq \frac{\delta}{2} B^k M_k$$

d'où (2.12) suit.

3) L'application $f \longrightarrow u$ envoie donc $\cap \mathfrak{D}^{a}_{+,\, M_k}(V')$ dans $\cap \mathfrak{D}^{a}_{+,\, M_k}(V)$ et elle est *continue* d'après le théorème du graphe fermé.

Un raisonnement direct montre que $u \longrightarrow f = Au + u'$ est linéaire de $\cap \mathfrak{D}^{a}_{+,\, M_k}(V)$ dans $\cap \mathfrak{D}^{a}_{+,\, M_k}(V')$ et continue d'après le théorème du graphe fermé, d'où (2.10), ce qui achève le démonstration du théorème.

3. Les cas des opérateurs différentiels.

3.1. - *Notations.*

Nous allons maintenant prendre pour $A(t)$ un opérateur différentiel dans un ouvert Ω de R^n borné, dont la frontière Γ est supposée variété de dimension $n-1$ indéfiniment différentiable, Ω étant d'un seul coté de Γ, donc

$$A(t):\; u \longrightarrow A(t)u = A\left(x,\; t,\; \frac{\partial}{\partial x}\right) u = \sum_{|p|,\, |q| \leq m} (-1)^{|p|} D_x^p (a_{pq}(x,\, t) D_x^q u) \tag{3.1}$$

et nous ferons sur les coefficients a_{pq} des hypothèses de *régularité* différentes, precisées au fur et à mesure.

Il s'agira en tout cas d'hypothèses de régularité suffisantes pour que l'on puisse, quand on en aura besoin, considérer l'opérateur *adjoint formel* de A

$$A^*\left(x,\; t,\; \frac{\partial}{\partial x}\right) = \sum_{|p|,\, |q| \leq m} (-1)^{|p|} D_x^p (\bar{a}_{qp}(x,\; t) D_x^q) \tag{3.2}$$

et la formule de GREEN suivante (cf. [1]), dans le cylindre $Q = \Omega \times R$, de frontière $\Sigma \times R$ et pour u et v régulières dans $\bar{Q}$ et à support compact:

$$(3.3)\qquad \int_Q (Au + u')\bar{v}\,dxdt - \int_Q u(\overline{A^* v} - \bar{v}')\,dxdt = \sum_{j=0}^{m-1} \int_\Sigma S_j u \overline{\gamma_j v}\,d\sigma - \sum_{j=0}^{m-1} \int_\Sigma \gamma_j u \overline{T_j v}\,d\sigma.$$

avec $d\sigma =$ élément d'aire de Σ,

$\gamma_j u = \dfrac{\partial^j u}{\partial \nu^j} =$ dérivée normale à Γ d'ordre j,

S_j, $T_j =$ opérateurs différentiels linéaires d'ordre $2m - j - 1$, déterminés par A.

On fera encore l'*hypothèse d'ellipticité*:

$$(3.4)\qquad \begin{cases} Re \displaystyle\sum_{|p|,\,|q|=m} (-1)^{|p|} a_{pq}(x,\, t)\, \xi^{p+q} \geq \beta \mid \xi \mid^{2m}, \quad \forall \xi \in R^n, \quad x \in \bar{\Omega}. \\ t \in [t_0,\, t_1],\ \beta > 0 \ \text{(dépendant de } t_0 \text{ et } t_1). \end{cases}$$

Enfin $\{M_k\}$ sera une suite de nombres réels positifs avec les propriétés des n. précédents, c'est à dire

$$(3.5)\qquad \begin{cases} \{M_k\} \text{ est } \textit{logarithmique convexe} \text{ et } \textit{non quasi-analytique}; \\ M_{k+1} \leq H^k M_k, \quad \forall k \ (H \text{ constante } > 0); \\ \dbinom{k}{j} M_{k-j} M_j \leq c_1 M_k, \quad \forall k, \ 0 \leq j \leq k, \ (c_1 \text{ constante } > 0). \end{cases}$$

On se bornera à étudier le problème avec *conditions aux limites sur* Σ *de Dirichlet* (11).

3.2. - *Un résultat de M_k régularité en t et de régularité en x.*

Nous allons d'abord démontrer le

THÉORÈME 3.1. - *Soit s fixé entier $\geq -m$ quelconque* (12); *supposons*

(11) Pour ne pas rajouter des difficultés technique ; mais cela n'a rien d'essentiel.
(12) On suppose s entier pour simplifier.

que (3.4) *et* (3.5) *ont lieu et que*

(3.6) $$a_{pq}(x,\ t) \in \mathcal{E}_{M_k}(\mathfrak{D}^{m+s}(\bar{\Omega})) \quad (^{13})$$

Alors $A\left(x,\ t,\ \dfrac{\partial}{\partial x}\right) + \dfrac{\partial}{\partial t}$ *est un isomorphisme de*

$$\mathfrak{D}_{+,\ M_k}(H^{s+2m}(\Omega) \cap H_0^m(\Omega)) \quad sur \quad \mathfrak{D}_{+,\ M_k}(H^s(\Omega))$$

Commençons par le

LEMME 3.1. - *Soit* g *donné dans* $\mathfrak{D}_{+, M_k}(H^s(\Omega))$ *et* $w \in \mathfrak{D}_{+,\ M_k}(H_0^m(\Omega))$ *vérifiant*

(3.7) $$A(t)\, w(t) = g(t).$$

Alors

$$w \in \mathfrak{D}_{+,\ M_k}(H^{s+2m}(\Omega)).$$

DÉMONSTRATION. - Soit $a \leq$ limites à gauche des supports de g et w; soit b fixé, $b > a$.

Alors, à cause de (3.6), il existe c et L (*dépendant de* s) tels que

(3.8) $$\| A^{(k)}(t) \|_{\mathfrak{L}(H^{s+2m}(\Omega);\ H^s(\Omega))} \leq c\, L^k M_k \quad \forall k \quad \text{et} \quad t \in [a,\ b].$$

Par ailleurs, si de façon générale φ (resp. ψ) est continue de $[a,\ b]$ dans $H_0^m(\Omega)$ (resp. $H^s(\Omega)$) et si

$$A(t)\, \varphi(t) = \psi(t), \qquad t \in [a,\ b]$$

alors, d'après les résultats bien connus de régularité des problèmes aux limites elliptiques, $\varphi(t) \in H^{s+2m}(\Omega)$ et il existe une constante c_2 *dépendant*

---

(13) $\mathfrak{D}^k(\bar{\Omega}) = C^k(\bar{\Omega})$ (k entier ≥ 0): espace de BANACH des fonctions k-fois continuement différentiables dans $\bar{\Omega}$; $\mathfrak{D}(\bar{\Omega}) = C^\infty(\bar{\Omega})$: espace des fonctions indéfiniment différentiables dans $\bar{\Omega}$, muni de sa topologie naturelle d'espace de FRECHET; $H^k(\Omega)$ (k entier ≥ 0): espace de HILBERT des (classes des) fonctions de carré sommable dans Ω avec les dérivées jusqu'à l'ordre k; $H_0^k(\Omega)$: adhérence de $\mathfrak{D}(\Omega)$ (espace des fonctions indéfiniment différentiables et à support compact dans Ω) dans $H^k(\Omega)$; $H^{-k}(\Omega)$: dual (fort) de $H_0^k(\Omega)$.

de s telle que

$$\| \varphi(t) \|_{s+2m} \leq c_2 \sup_{t \in [a, b]} \| \psi \|_s , \qquad t \in [a, b] \tag{3.9}$$

(où $\| f \|_r =$ norme de f dans $H^r(\Omega)$).

Par hypothèse, il existe d et $\mathfrak{L}$ telles que

$$\sup_{t \in [a, b]} \| g^{(k)}(t) \|_s \leq d \mathfrak{L}^k M_k \quad \forall k \tag{3.10}$$

Introduisons:

$$\begin{cases} \delta = 2 d c_2 \\ B = \max\,(\mathfrak{L},\ (1 + 2\, c c_1 c_2) L) \end{cases} \tag{3.11}$$

(c_1 étant la constante intervenant dans (3.5)).

On va montrer, par récurrence sur k, que

$$\sup_{t \in [a, b]} \| w^{(k)}(t) \|_{s+2m} \leq \delta B^k M_k \quad \forall k . \tag{3.12}$$

Pour $k = 0$, on applique (3.9) (avec $\psi = g$). Admettons le résultat jusqu'à $k - 1$. On déduit de (3.7) par dérivation (loisible!) en t:

$$A(t)\, w^{(k)}(t) = g^{(k)}(t) - \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k}{j} A^{(k-j)}(t)\, w^{(j)}(t)$$

d'où, appliquant (3.9):

$$\sup_{t \in [a, b]} \| w^{(k)}(t) \|_{s+2m} \leq c_2 \sup_{t \in [a, b]} \| g^{(k)}(t) \|_s +$$

$$+ c_2 \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k}{j} \sup_{t \in [a, b]} \| A^{(k-j)}(t) \|_{\mathfrak{L}(H^{s+2m}(\Omega);\, H^s(\Omega))} \sup_{t \in [a, b]} \| w^{(j)}(t) \|_{2m+s}$$

$$\leq c_2 d \mathfrak{L}^k M_k + c_2 \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k}{j} c L^{k-j} M_{h-j}\, \delta\, B^j M_j$$

$$\leq \frac{1}{2}\, \delta \mathfrak{L}^k M_k + c c_1 c_2 \delta M_k \sum_{j=0}^{k-1} L^{k-j} B^j$$

et

$$c c_1 c_2 \sum_{j=0}^{k-1} L^{k-j} B^j \leq c c_1 c_2 \frac{B^k}{\dfrac{B}{L} - 1} < \frac{1}{2}\, B^k$$

d'où (3.12).

Remarque 3.1. - Comme c_2, c et L dépendent de s, on voit que (en général) B *dépendra de* s.

Démonstration du Théorème 3.1.

1) Soit $f \in \mathfrak{D}_{+, M_k}(H^s(\Omega))$; à cause de (3.4), (3.5) et (3.6), on peut appliquer le théorème 1.1 de ce chapitre avec $V = H_0^m(\Omega)$, $V' = H^{-m}(\Omega)$, $H = L^2(\Omega)$; soit donc u la solution (dans $\mathfrak{D}_{+, M_k}(H_0^m(\Omega))$ de

$$A(t)u + \frac{du}{dt} = f. \tag{3.13}$$

Alors

$$A(t)u = f - \frac{du}{dt} \in \mathfrak{D}_{+, M_k}(H^{\min(s, m)}(\Omega))$$

donc, d'après le Lemme 3.1:

$$u \in \mathfrak{D}_{+, M_k}(H^{\min(s+2m, 3m)}(\Omega)).$$

Alors $f - \dfrac{du}{dt} \in \mathfrak{D}_{+, M_k}(H^{\min(3m, s)}(\Omega))$ et le Lemme 3.1 donne

$$u \in \mathfrak{D}_{+, M_k}(H^{\min(s+2m, 5m)}(\Omega))$$

et ainsi de suite; donc $u \in \mathfrak{D}_{+, M_k}(H^{s+2m}(\Omega))$.

2) L'application $u \to f = A(t) + \dfrac{du}{dt}$ est linéaire de

$$\mathfrak{D}^{a;\, b,\, L}_{+,\, M_k}(H^{s+2m}(\Omega)) \to \mathfrak{D}^{a;\, b,\, L_1}_{+,\, M_k}(H^s(\Omega)),$$

L_1, convenable (dépendant de L et s), et elle est continue d'après le théorème du graphe fermé. Donc elle est continue de

$$\mathfrak{D}^{a;\, b,\, L}_{+,\, M_k}(H^{s+2m}(\Omega)) \to \mathfrak{D}^{a;\, b}_{+,\, M_k}(H^s(\Omega)) \text{ donc de } \mathfrak{D}^{a;\, b}_{+,\, M_k}(H^{s+2m}(\Omega))$$

(limite inductive de $\mathfrak{D}^{a;\, b,\, L_n}_{+,\, M_k}(H^{s+2m}(\Omega))$, $L_n \to +\infty) \to \mathfrak{D}^{a;\, b}_{+,\, M_k}(H^s(\Omega))$.

D'où l'on déduit que $u \to f$ est continue de

$$\mathfrak{D}_{+, M_k}(H^{s+2m}(\Omega)) \to \mathfrak{D}_{+, M_k}(H^s(\Omega)).$$

D'après 1), c'est un isomorphisme algébrique de

$$\mathfrak{D}_{+, M_k}(H^{s+2m}(\Omega)) \cap H_0^m(\Omega)) \quad \text{sur} \quad \mathfrak{D}_{+, M_k}(H^s(\Omega))$$

et par conséquent le même raisonnement que précédemment, appliqué à l'opération inverse $f \longrightarrow u$, montre qu'elle est linéaire continue de

$$\mathfrak{D}_{+, M_k}(H^s(\Omega)) \longrightarrow \mathfrak{D}_{+, M_k}(H^{s+2m}(\Omega) \cap H_0^m(\Omega)),$$

d'où le théorème.

3.3. - Supposons maintenant que l'on ait

$$a_{pq} \in \mathcal{E}_{M_k}(\mathfrak{D}^r(\bar{\Omega})) \qquad \forall r \tag{3.14}$$

Alors le Théorème 3.1 est valable quel que soit s. On a donc en *particulier*:

THÉORÈME 3.2. - *Sous les hypothèses* (3.4), (2.5), et (3.14), $A(t) + \dfrac{d}{dt}$ *est un isomorphisme de*

$$\bigcap_s \mathfrak{D}_{+, M_k}(H^{s+2m}(\Omega) \cap H_0^m(\Omega)) \quad \textit{sur} \quad \bigcap_s \mathfrak{D}_{+, M_k}(H^s(\Omega)),$$

chaque espace produit étant muni de ta topologie de limite projective.

Notons que l'hypothèse (3.14) signifie: pour tout compact $[a, b]$ et pour tout r il existe c_r et L_r (*dépendant de* r) tels que

$$\frac{\| a_{pq}^{(k)}(x, t) \|_{\cap \mathfrak{D}^r(\bar{\Omega})}}{L_r^k M_k} \leq c_r, \quad \forall k, \qquad t \in [a, b].$$

Si on suppose que

$$a_{pq} \in \mathcal{E}_{M_k}(\mathfrak{D}(\bar{\Omega})) \tag{3.15}$$

alors il existe L *indépendant* de r tel que

$$\frac{\| a_{pq}^{(k)}(x, t) \|_{\mathfrak{D}^r(\bar{\Omega})}}{L^k M_k} \leq c_r, \quad \forall k, \qquad t \in [a, b]$$

Dans ce cas, on peut dans (3.8) choisir L *indépendante de* s — *mais* c *et* c_2 *dépendront de* s *en général* et alors, dans (3.12), B dépendra de s. Dans ces conditions on ne peut pas, en général, prendre dans l'énoncé du Théorème 3.2 l'intersection en s «sous le signe $\mathfrak{D}_{+, M_k}$»; plus précisément, nous ignorons si, sous les hypothèses (3.4), (3.5) et (3.15), $A(t) + \frac{d}{dt}$ est un isomorphisme de

$$\mathfrak{D}_{+, M_k}(\bigcap_s H^{s+2m}(\Omega) \cap H_0^m(\Omega)) = \{u \mid u \in \mathfrak{D}_{+, M_k}(\mathfrak{D}(\bar{\Omega})),$$

$$\gamma u = 0\} \text{ [14] sur } \mathfrak{D}_{+, M_k}(\bigcap_s H^s(\Omega)) = \mathfrak{D}_{+, M_k}(\mathfrak{D}(\bar{\Omega})).$$

3.4. - Nous aurons besoin dans la suite d'un nouveau théorème d'isomorphisme, pour l'opérateur $A + \frac{\partial}{\partial t}$.

Supposons que (3.4) (3.5) et (3.15) ont lieu; et définissons l'espace

$$X_+ = \{u \mid u \in \mathfrak{D}_+(\mathfrak{D}(\bar{\Omega})),\ \gamma u = 0,\ Au + u' \in \mathfrak{D}_{+, M_k}(\mathfrak{D}(\Omega))\}, \tag{3.16}$$

$\mathfrak{D}(\Omega)$ étant l'espace des fonctions indéfiniment différentiables et à support compact dans Ω muni de la topologie de SCHWARTZ [26].

En utilisant le fait que $\mathfrak{D}_{+, M_k}(\mathfrak{D}(\bar{\Omega})) \subset \mathfrak{D}_+(\mathfrak{D}(\bar{\Omega}))$ et que si $f \in \mathfrak{D}_+(\mathfrak{D}(\bar{\Omega}))$ il existe u unique dans $\mathfrak{D}_+(\mathfrak{D}(\bar{\Omega}))$ telle que $\gamma u = 0$ et $Au + u' = f$ (cf. [18] théorème 8.1 p. 121), alors *on peut munir X_+ de la topologie image réciproque de celle de $\mathfrak{D}_{+, M_k}(\mathfrak{D}(\Omega))$* (cf. chap. 1 pour cette topologie), et alors:

$$A + \frac{\partial}{\partial t} \textit{ est un isomorphisme de } X_+ \textit{ sur } \mathfrak{D}_{+, M_k}(\mathfrak{D}(\Omega)). \tag{3.17}$$

Si la réponse à la question posée à la fin de 3.3 est positive alors on en déduit que $X_+ \subset \mathfrak{D}_{+, M_k}(\mathfrak{D}(\bar{\Omega}))$ et la topologie sur X_+ peut être definie aussi comme la topologie localement convexe le moins fine rendant continues les applications

$$u \to u \quad \text{et} \quad u \to Au + u' \quad \text{de } X_+ \text{ dans } \mathfrak{D}_{+, M_k}(\mathfrak{D}(\bar{\Omega})) \text{ et } \mathfrak{D}_{+, M_k}(\mathfrak{D}(\Omega))$$

respectivement.

REMARQUE 3.2. - Nous obtiendrons de nouveaux résultats de régularité (dans l'espace $\mathfrak{D}_{+, M_k}(\mathcal{H}(\bar{\Omega}))$) au chap. IV.

---

[14] $\gamma u = \{\gamma_0 u, \dots, \gamma_{m-1} u\}$.

CHAPITRE 3.

Problèmes non homogènes pour opérateurs différentiels paraboliques.

1. - Utilisation de la transposition dans le cas abstrait.

1.1. - Nous avons donc obtenu dans le chap. 2 des résultats d'isomorphisme dans des espaces de M_k-fonctions à valeurs vectorielles soit pour des opérateurs «abstraits» (n. 1 et 2) soit pour des opérateurs différentiels paraboliques «concrets» (n. 3).

Par transposition on peut maintenant obtenir des résultats dans des espaces de M_k-*distributions*. Appliquons cette idée d'abord dans le cas «abstrait»; on va donc reprendre les notations et les hypothèses du n. 1, chap. 2.

On désigne par $A^*(t)$ l'adjoint de $A(t)$ défini par

$$a^*(t,\ u,\ v) = (A^*(t)u,\ v)$$

avec

$$a^*(t,\ u,\ v) = \overline{a(t,\ v,\ u)}.$$

Alors dans les mêmes hypothèses (1.1), (1.-) et (1.5) du n. 1 chap. 2, on obtient, en échangeant, $A(t)$ et $A^*(t)$ dans le Théorème 1.1 du chap. 2 que:

$$A^*(t) - \frac{d}{dt} \text{ est un isomorphisme de } \mathfrak{D}_{-,M_k}(V) \text{ sur } \mathfrak{D}_{-,M_k}(V'). \tag{1.1}$$

Par transposition, on déduit évidemment de (1.1) que l'adjoint de $A^*(t) - \dfrac{d}{dt}$ est un isomorphisme de $(\mathfrak{D}_{-,M_k}(V')'$ sur $(\mathfrak{D}_{-,M_k}(V))'$; or l'adjoint de $A^*(t) - \dfrac{d}{dt}$ est $A(t) + \dfrac{d}{dt}$; et d'après la définition (4.1), chap. 1, de $\mathfrak{D}'_{+,M_k}(X)$, on a finalement le

THÉORÈME 1.1. - *L'operateur* $A(t) + \dfrac{d}{dt}$ *est un isomorphisme de*

$$\mathfrak{D}'_{+,M_k}(V) \text{ sur } \mathfrak{D}'_{+,M_k}(V').$$

REMARQUE 1.1. - Naturellement, on peut préciser le sens du théorème 1.1 en utilisant le *théorème de structure* 4.2, chap. 1.

REMARQUE 1.2. - Comme on a dejà dit dans l'Introduction, les théorèmes 1.1 du chap. 2 et 1.1 du chap. 3 s'étendent, au moins partiellement, à *d'autres types d'équations opérationnelles:*

$$A(t) \pm i \frac{d}{dt}, \; A(t) + \frac{d^2}{dt^2}, \; A(t) = A^*(t).$$

Il parait également très probable que des résultats *du type* précédent sont encore valables (sous des hypothèses convenables) dans les cas suivants:

(i) cas où $V = V(t)$ dépend de t (de façon à être dans une classe $\{M_k\}$ en t);

(ii) cas où l'on se place dans des *espaces de Banach* (cf. par ex. les travaux de KATO-TANABE [12]).

1.2. - On pourait aussi « transposer » en partant du théorème 2.1 du chap. 2: *sous les hypothèses de ce théorème on aurait alors que* $A + \frac{d}{dt}$ *est un isomorphisme de* ${}^{\mathsf{U}}\mathfrak{D}'_{+, M_k}(V)$ *sur* ${}^{\mathsf{U}}\mathfrak{D}'_{+, M_k}(V')$.

Et il faudrait alors étudier la *structure* des espaces ${}^{\mathsf{U}}\mathfrak{D}'_{+, M_k}(V)$ et ${}^{\mathsf{U}}\mathfrak{D}'_{+, M_k}(V')$. Mais nous ne développerons pas ce point, ni les conséquences «pratiques» que l'on pourrait tirer de ce genre de résultats dans le cas de opérateurs paraboliques « concrets ».

2. - Propriété de traces de l'espace X_-.

2.1. - Mais on peut obtenir des résultats bien plus intéréssants en utilisant la « transposition » et en développant la théorie comme on a déjà dit dans l'introduction, dans le cas des opérateurs paraboliques « concrets ».

On pourrait ici développer la théorie dans plusieurs espaces de M_k-distributions; par ex. on pourrait, en partant du théorème 3.1, chap. 2, étudier la situation dans les espaces de type $\mathfrak{D}'_{+, M_k}(H^r(\Omega))$ avec r négatif.

Mais nous croyons plus intéressant de nous placer dans des espaces, encore plus généraux, de M_k-distributions à valeurs dans $\mathfrak{D}'(\Omega)$($\mathfrak{D}'(\Omega)$ = espace des distributions sur Ω, cf. [26]).

Le point de départ sera alors le théorème 3.4 du chap. 2 ou, plus précisément, le théorème qu'on obtient en échangeant $A + \frac{\partial}{\partial t}$ avec l'opérateur $A^* - \frac{\partial}{\partial t}$ et sous des *hypothèses convenables sur* Ω *et la suite* $\{M_k\}$, *qui sont tout à fait naturelles dans le cas d'opérateurs paraboliques concrets.*

On supposera donc dorénavant que

(2.1) *Ω est un ouvert borné de R^n de frontière Γ variété analytique réelle de dimension $n-1$, Ω étant d'un seul coté de Γ;*

(2.2) *l'opérateur A donné par* (3.1) *chap.* 2 *est indépendant de t et à coefficients $a_{pq}(x, t) = a_{pq}(x)$ analytiques dans $\bar{\Omega}$;*

(2.3) (*hypothèse d'ellipticité*, cf. (3.4) *chap.* 2)): *il existe $\beta > 0$ tel que*

$$Re \sum_{|p|=|q|=m} (-1)^{|p|} a_{pq}(x) \xi^{p+q} \geq \beta \mid \xi \mid^{2m} \qquad \forall \xi \in R^n, \ x \in \bar{\Omega}.$$

(2.4) $$M_k = (2km)!$$

Alors M_k satisfait aux propriétés (3.5), chap. 2.

On introduit l'espace X_-, correspondant à l'espace X_+ du n. 3 chap. 2.

$$X_- = \{ v \mid v \in \mathfrak{D}_-(\mathfrak{D}(\bar{\Omega}),\ \gamma v = 0,\ A^* v - v' \in \mathfrak{D}_{-, M_k}(\mathfrak{D}(\Omega)) \}$$

muni de la topologie image réciproque par $A^* - \dfrac{\partial}{\partial t}$ de celle de $\mathfrak{D}_{-, M_k}(\mathfrak{D}(\Omega))$; A^* étant l'adjoint formel de A (cf (3.2) chap. (2)). Alors comme en (3.17) chap. 2 on a:

$$A^* - \frac{\partial}{\partial t} \quad \textit{est un isomorphisme de } X_- \textit{ sur } \mathfrak{D}_{-, M_k}(\mathfrak{D}(\Omega))$$

2.2. - Nous utiliserons dans la suite les espaces $\mathcal{H}(\Gamma)$, $\mathcal{H}(\bar{\Omega})$, $\mathcal{H}(\bar{\mathcal{O}})$ ($\mathcal{O}$ voisinage convenable de Γ dans $\bar{\Omega}$): il s'agit des espaces des fonctions analytiques respectivement sur Γ, $\bar{\Omega}$ et $\bar{\mathcal{O}}$; ils sont des limites inductives non strictes d'espaces de BANACH, de type (M); les duals sont des espaces de FRECHET; $\mathcal{H}(\Gamma)$, $\mathcal{H}(\bar{\Omega})$, $\mathcal{H}(\bar{\mathcal{O}})$ et les duals sont tous des espaces nucléaires (cf. [11], [16], [19], [23], [29]); on notera les duals par $\mathcal{H}'(\Gamma)$, $\mathcal{H}'(\bar{\Omega})$, $\mathcal{H}'(\bar{\mathcal{O}})$.

Pour $v \in X_-$ on va poser

$$\mathcal{T} v = \{ T_0 v, \ \ldots, \ T_{m-1} v \}$$

alors il est évident que $\mathcal{T} v \in \mathfrak{D}_-(\mathfrak{D}(\Gamma)^m)$; mais il y a beaucoup plus.

THÉORÈME 2.1. - *On suppose que* (2.1), (2.2), (2.3), (2.4) *ont lieu; alors l'application $v \longrightarrow \mathcal{T} v$ est linéaire de X_- dans $\mathfrak{D}_{-, M_k}(\mathcal{H}(\Gamma)^m)$.*

REMARQUE 2.1. - *On verra au numéro suivant que cette application est en fait surjective.*

Remarque 2.2. – Il revient au même de prendre $M_k = k^{2km}$. L'espace $\mathfrak{D}_{\pm, M_k}(X)$ est alors l'*espace des fonctions de Gevrey d'ordre* $2m$ *à valeurs dans* X (et à support limité à gauche ou à droite).

Démonstration. – Soit v dans X; posons

$$A^* v - v' = \varphi. \tag{2.5}$$

La fonction φ est dans $\mathfrak{D}^{a}_{-, M_k}(\mathfrak{D}\ \Omega))$ pour un a convenable Donc en particulier $\varphi \in \mathfrak{D}^{a}_{-, M_k}(L^2(\Omega))$ et d'après le Chap. 2, Th. 3.1, on a:

$$v \in \mathfrak{D}^{a}_{-, M_k}(H^m_0(\Omega)). \tag{2.6}$$

Soit b un nombre $< a$ fixé quelconque, il existe un voisinage $\mathcal{O}$ de Γ, $\mathcal{O} \subset \bar{\Omega}$, tel que $\varphi \equiv 0$ dans $\mathcal{O} \times [b, a]$; donc

$$A^* v = v' \text{ dans } \mathcal{O} \times [b, a] \tag{2.7}$$

et par conséquent par application successive de l'opérateur A^* et de la dérivation en t

$$A^{*k} v = v^{(k)}.$$

D'après (2.6), v est en particulier dans $\mathfrak{D}^{a}_{-, M_k}(L^2(\Omega))$ et donc, il existe des constantes c et L telles que

$$\| A^{*k} v(t) \|_{L^2(\mathcal{O})} \leq c L^k (2km)!, \quad \forall k, \quad t \in [b, a] \tag{2.8}$$

et

$$\gamma A^{*k} v(t) = 0 \quad \forall k \tag{2.9}$$

(on rappelle que $\gamma w = \{\gamma_0 w, \ldots, \gamma_{m-1} w\}$).

Mais on montrera au Chapitre IV le résultat (cf. théor. 1.2) qui suit:

(2.10)
si $v \in \mathfrak{D}(\bar{\mathcal{O}})$ et s'il existe L et c tels que

$$\| A^{*k} v \|_{L^2(\mathcal{O})} \leq c L^k (2km)! \text{ et } \gamma_j A^{*k} v = 0 \qquad \forall k,\ j = 0, 1, \ldots, m-1,$$

alors v est analytique (de variables réelles) dans la fermeture $\bar{\mathcal{O}}_1$ d'un voisinage *fixe* $\mathcal{O}_1$ de Γ ($\mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}$; $\mathcal{O}_1$ dépendant de L) et demeure dans un ensemble borné (dépendant de c) de l'espace $\mathcal{H}(\bar{\mathcal{O}}_1)$ de fonctions analytiques sur $\bar{\mathcal{O}}_1$.

De ce résultat, provisoirement admis, et de (2.8), (2.9) il résulte:

$$\text{(2.11)} \qquad \begin{cases} \text{il existe } \mathcal{O}_1 \text{ voisinage de } \Gamma,\ \mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O} \subset \Omega, \text{ tel que } v(t) \in \mathcal{H}(\bar{\mathcal{O}}_1) \text{ et} \\ \text{demeure dans un borné de } \mathcal{H}(\bar{\mathcal{O}}_1) \text{ pour } t \in [b,\ a]. \end{cases}$$

Par ailleurs, dans $\mathcal{O} \times [b,\ a]$, donc dans $\mathcal{O}_1 \times [b,\ a]$, on a:

$$v' = A^* v, \quad \text{donc} \quad D_t^k v = A^{*k} v$$

et donc

$$\text{(2.12)} \qquad D_x^p D_t^k v(x,\ t) = D_x^p A^{*k} v(x,\ t), \quad x \in \mathcal{O}_1, \qquad t \in [b,\ a].$$

Ceci, joint à (2.11), montre qu'il existe des constantes c_1 et L_1 telles que

$$\text{(2.13)} \qquad |\, D_x^p D_t^k v(x,\ t)\, | \leq c_1 L^{|p|+k} (|p| + 2km)!, \qquad \forall p,\ k,\ x \in \bar{\mathcal{O}}_1,\ \ t \in [b,\ a].$$

Mais

$$(\,|\, p\, |\, + 2km)! \leq 2^{|p|+2km} |p|!\ (2km)!,$$

donc

$$|\, D_x^p D_t^k v(x,\ t)\, | \leq c_1 (2L_1)^{|p|} (2^{2m} L_1)^k \,|\, p\, |\,! (2km)!$$

Mais comme les coefficients de $\mathcal{T} v$ sont dans $\mathcal{H}(\Gamma)$ et indépendants de t et comme b a été fixé quelconque, alors on a

$$\text{(2.14)} \qquad \mathcal{T} v \in \mathfrak{D}_{-,M_k}(\mathcal{H}(\Gamma)^m).$$

3. - Relèvement de $\mathcal{T}$.

3.1. - On a le

THÉORÈME 3.1. - *Pour tout g de $\mathfrak{D}_{-,M_k}(\mathcal{H}(\Gamma)^m)$, il existe une fonction v de X_- telle que*

$$\text{(3.1)} \qquad \mathcal{T} v = g.$$

DÉMONSTRATION. - Soit $g \in \mathfrak{D}_{-,M_k}(\mathcal{H}(\Gamma)^m)$; alors il existe a tel que g soit dans $\mathfrak{D}^a_{-,M_k}(\mathcal{H}(\Gamma)^m)$: on rappelle que (cf. par ex. [19]) $\mathcal{H}(\Gamma) =$ limite inductive des $\mathcal{H}_{s_n}(\Gamma)$, $s_n \to +\infty$; donc, si nous choisissons une suite b_n décroissante et $\to -\infty$, il existe s_n et $L_n (\geq 1)$ tels que

$$\frac{g^{(k)}(t)}{L_n^k M_k} \in \mathcal{H}_{s_n}(\Gamma)^m, \quad \forall k, \quad \forall t \in [b_n,\ a],\ (M_k = (2km)!)$$

On peut supposer les suites L_n et s_n croissantes. Alors d'après [30], [31] (cf. aussi [17]) on peut construire v_n, dans un voisinage $\mathcal{O}_n (\subset \Omega)$ de Γ, telle que

$$A^* v_n - v'_n = 0 \quad \text{dans} \quad \mathcal{O}_n \times [b_n, a],$$

$$\gamma v_n = 0 \qquad \text{sur} \quad \Gamma \times [b_n, a],$$

$$\mathcal{C} v_n = g \qquad \text{sur} \quad \Gamma \times [b_n, a],$$

et pour laquelle il existe L'_n avec

$$\frac{v_n^{(k)}(t)}{(L'_n)^k M_k} \in \text{ borné de } \mathcal{H}(\bar{\mathcal{O}}_n), \quad \forall k, \quad \forall t \in [b_n, a].$$

Les voisinages $\mathcal{O}_n$ peuvent être choisis décroissants et d'après l'unicité du problème de CAUCHY. $v_{n+1}(x, t)$ coincide avec $v_n(x, t)$ sur $\bar{\mathcal{O}}_{n+1} \times [b_n, a]$.

On va maintenant construire une fonction v de X_- qui, pour chaque n. coincide avec les v_n dans un voisinage convenable de $\Gamma \times [b_n, a]$ (alors v donne le résultat).

Pour cela, on construit une fonction $\alpha(x, t)$, ayant les propriétés suivantes:

$$\alpha \in \mathfrak{D}^{a'}_{-, M_k}(\mathfrak{D}(\bar{\Omega})), \quad a' \text{ fixé}, \quad a' > a;$$

$$\alpha(x, t) = 1 \quad \text{dans un voisinage convenable de}$$

$$\Gamma \times [b_{n-1}, b_n], \quad \forall n,$$

$$\alpha(x, t) \quad \text{à support dans} \quad \bar{\mathcal{O}}_n \times [b_{n-1}, b_n].$$

(Une telle construction est possible par «cartes locales», ramenant Ω à un demi espace et en utilisant une fonction scalaire de classe M_k en t, positive et suffisamment décroissante lorsque $t \to -\infty$).

Alors on définit v pour $t \in [b_{n-1}, b_n]$ par

$$v(x, t) = \begin{cases} \alpha(x, t) v_n(x, t) & \text{dans} \quad \bar{\mathcal{O}}_n \times [b_{n-1}, b_n], \\ 0 & \text{dans} \quad (\Omega - \bar{\mathcal{O}}_n) \times [b_{n-1}, b_n]. \end{cases}$$

3.2. - Il résulte des théorèmes 2.1 et 3.1 que l'application $v \longrightarrow \mathcal{C}v$ *est linéaire et surjective de* $X_- \longrightarrow \mathfrak{D}_{-, M_k}(\mathcal{H}(\Gamma)^m)$. Soit $N_{\mathcal{C}}$ le *noyau* de cette application [15], soit $\mathcal{C}^\cdot$ l'application quotient: $X^\cdot_- = X_- / N_{\mathcal{C}} \longrightarrow \mathfrak{D}_{-, M_k}(\mathcal{H}(\Gamma)^m)$: c'est un *isomorphisme algébrique*. On munit $X^\cdot_-$ de la topologie quotient et on munit maintenant $\mathfrak{D}_{-, M_k}(\mathcal{H}(\Gamma)^m)$ de la topologie transportée par $\mathcal{C}^\cdot$. Pour éviter toute ambiguité avec le chap. 1, on notera $\# \mathfrak{D}_{-, M_k}(\mathcal{H}(\Gamma)^m)$ l'espace $\mathfrak{D}_{-, M_k}(\mathcal{H}(\Gamma)^m)$ *muni de cette topologie.* Il nous semble probable que les espaces $\mathfrak{D}_{-, M_k}(\mathcal{H}(\Gamma)^m)$ et $\# \mathfrak{D}_{-, M_k}(\mathcal{H}(\Gamma)^m)$, dont on sait qu'ils coincident *algébriquement*, coincident *topologiquement* mais ce point n'est pas démontré!

En tout cas on peut maintenant dire que

(3.2) $\quad$ $v^\cdot \longrightarrow \mathcal{C}^\cdot v^\cdot$ *est un isomorphisme algébrique et topologique de* $X^\cdot_-$ *sur* $\# \mathfrak{D}_{-, M_k}(\mathcal{H}(\Gamma)^m)$.

4. - Espace Y_+. Théorème de trace.

4.1. - *Espace* $\Xi(\Omega)$.

Soit $\Xi(\Omega)$ un espace vectoriel topologique localement convexe séparé *réflexif*, de fonctions définies sur Ω, contenu dans $L_2(\Omega)$, tel que

$$(4.1) \quad \begin{cases} 1) & X_- \subset \mathfrak{D}_{-, M_k}(\Xi(\Omega)). \\ 2) & \mathfrak{D}_{-, M_k}(\mathfrak{D}(\Omega)) \text{ soit dense dans } \mathfrak{D}_{-, M_k}(\Xi(\Omega)). \end{cases}$$

Il existe de tels espaces. - Par ex., d'après le Théor. 3.1, chap. 2, avec $s = m$, on peut prendre $\Xi(\Omega) = H_0^m(\Omega)$.

On peut aussi prendre, pour s fixé $> m$,

$$\Xi(\Omega) = \Xi^s(\Omega) = \{ u \mid \in H_0^m(\Omega), \;\; \rho^{|\alpha|} D^\alpha u \in L^2(\Omega), \;\; m < |\alpha| \leq s \}$$

où ρ est une fonction continue dans Ω, telle que $\rho(x) = d(x, \Gamma)$ (distance de x à Γ) si $d(k, \Gamma) \leq \rho_0$, ρ_0 assez petit, et $\rho(x) = \rho_0$ si $d(x, \Gamma) > \rho_0$; on munit $\Xi^s(\Omega)$ de sa structure hilbertienne naturelle. En effet on a (4.1),1) d'après le Théor. 3.1 cité et (4.1)2) parce que $\mathfrak{D}(\Omega)$ est dense dans $\Xi^s(\Omega)$, (cf. [19] pour un cas analogue).

---

[15] $N_{\mathcal{C}}$ est fermé dans X_- puisque, $v \longrightarrow \mathcal{C}v$ est continue de X_- dans, par exemple, l'espace $\mathfrak{D}_-(\mathfrak{D}(\Gamma)^m)$.

On pourra prendre $\Xi(\Omega) = \bigcap_s \Xi^s(\Omega)$ si la question posée à la fin de 3.3, chap. 2 admet une réponse positive.

On désigne par $\Xi'(\Omega)$ le dual de $\Xi(\Omega)$.

4.2. - *Espace* Y_+:

$$Y_+ = \{ u \mid u \in \mathfrak{D}'_{+, M_k}(\mathfrak{D}'(\Omega)),\ Au + u' \in \mathfrak{D}'_{+, M_k}(\Xi'(\Omega)) \}, \tag{4.2}$$

On munit cet espace de la topologie localement convexe la moins fine rendant continues les applications $u \to u$ et $u \to Au + u'$ de Y_+ dans $\mathfrak{D}'_{+, M_k}(\mathfrak{D}'(\Omega))$ et $\mathfrak{D}'_{+, M_k}(\Xi'(\Omega))$ respectivement.

Pour éviter ici des difficultés topologiques, on suppose $\mathfrak{D}'_{+, M_k}(\mathfrak{D}'(\Omega))$ et $\mathfrak{D}'_{+, M_k}(\Xi'(\Omega))$ *munis de leur topologie de dual faible de* $\mathfrak{D}_{-, M_k}(\mathfrak{D}(\Omega))$ et $\mathfrak{D}_{-, M_k}(\Xi(\Omega))$ *respectivement* . Alors, si $u \to M(u)$ est une forme anti-linéaire continue sur Y_+, il existe $f \in \mathfrak{D}_{-, M_k}(\Omega))$ et $g \in \mathfrak{D}_{-, M_k}(\Xi(\Omega))$ tels que

$$M(u) = < f, \bar{u} > + < g, \overline{Au + u'} >. \tag{4.3}$$

Montrons la

PROPOSITION 4.1. - *Sous les hypothèses* (2.1), (2.2), (2.3), (2.4) *l'espace* $\mathfrak{D}(\mathfrak{D}(\bar{\Omega}))$ *est dense dans* Y_+.

DÉMONSTRATION (même principe que dans [20], p. 316).

Soit $u \to M(u)$ une forme anti-linéaire continue sur Y_+, telle que

$$M(\varphi) = 0 \quad \forall \varphi \in \mathfrak{D}(\mathfrak{D}(\bar{\Omega})).$$

On veut montrer que $M(u) = 0 \quad \forall u \in Y_+$.

On peut écrire M sous la forme (4.3); soient $\tilde{f}$ et $\tilde{g}$ les prolongements de f et g à $R^n_x \times R_t$ par 0 hors du cylindre Q.

Soit $\mathcal{A}$ un prolongement de A, à coefficients analytiques dans un voisinage convenable du cylindre, $\mathcal{A}$ étant elliptique dans ce voisinage.

Alors, $\forall \varphi \in \mathfrak{D}(R^{n+1})$, on a, par hypothèse

$$< \tilde{f}, \bar{\varphi} > + < \tilde{g}, \overline{\mathcal{A}\varphi + \varphi'} > = 0$$

donc

$$\tilde{f} + \mathcal{A}^* \tilde{g} - D_t \tilde{g} = 0$$

Mais alors ([8], [9]) $g(t)$ est *analytique* en x dans un voisinage K_t (dans R^n) de Γ(dépendant de t) [16]; or $\tilde{g}(t)$ est *nulle* dans le partie de K_t extérieure à Ω, donc $g(t)=0$ dans K_t, *donc* $g(t)$ *est nulle dans un voisinage de* Γ. Alors $g \in \mathfrak{D}_{-, M_k}(\mathfrak{D}(\Omega))$ et par conséquent

$$< g, \overline{Au + u'} > = < A^* g - g', \bar{u} >$$

et donc

$$M(u) = < f + A^* g - g', u > = 0. \qquad \text{c. q. f. d.}$$

4.3. - *Théorème de traces.*

Sous réserve d'une identification analogue à celle faite dans [20] p. 317-318 on a le

THÉORÈME 4.1. - *Sous les hypothèses* (2.1), (2.2), (2.3), (2.4), *l'application linéaire*

$$u \longrightarrow \gamma u = \{\gamma_0 u, \ldots, \gamma_{m-1} u\} \tag{4.4}$$

de $\mathfrak{D}(\mathfrak{D}(\bar{\Omega}))$ *dans* $\mathfrak{D}(\mathfrak{D}(\Gamma)^m)$ *se prolonge par continuité en une application linéaire continue, encore notée* $u \longrightarrow \gamma u$, *de* Y_+ *dans* $\# \mathfrak{D}'_{+, M_k}(\mathcal{H}'(\Gamma)^m)$ (*espace dual de* $\# \mathfrak{D}_{-, M_k}(\mathcal{H}(\Gamma)^m)$, muni de la topologie *faible*).

Par définition, γu sera la «trace» de u sur Γ.

DÉMONSTRATION. - Soit $u \in Y_+$ fixé; prenons $\psi \in \# \mathfrak{D}_{-, M_k}(\mathcal{H}(\Gamma)^m)$; d'après le Théorème 3.1, il existe $v = v(\psi)$ dans X_- tel que

$$\psi v = 0, \quad \mathcal{C} v = \psi. \tag{4.5}$$

Posons:

$$Z(\psi) = < u, \overline{A^* v - v'} > - < Au + u', \bar{v} > \tag{4.6}$$

le 1er (rep. 2eme) crochet désignant la dualité entre $\mathfrak{D}'_{+, M_k}(\mathfrak{D}'(\Omega))$ (resp. $\mathfrak{D}'_{+, M_k}(\Xi'(\Omega))$ et $\mathfrak{D}_{-, M_k}(\mathfrak{D}(\Omega))$ (resp. $\mathfrak{D}_{-, M_k}(\Xi(\Omega))$) (noter que $X_- \subset \mathfrak{D}_{-, M_k}(\Xi(\Omega))$).

Vérifions que $Z(\psi)$ ne dépend que de ψ. Soient v_1 et v_2 deux éléments

---

[16] On peut aussi utiliser le résultat (2.10) (cf. Chap. 4 pour la démonstration) pour obtenir l'analyticité de g en x; le résultat de KOTAKE-NARSIMHAN [13] est même ici *suffisant.*

de X_- satisfaisant à (4.5). Alors $v_1 - v_2 = w$ satisfait à

$$A^* w - w' = \varphi, \quad \varphi \in \mathcal{D}_{-,\, M_k}(\mathcal{D}(\Omega))$$

$$\gamma w, \quad \mathcal{C} w = 0.$$

Mais alors (comme dans [20], p. 318) w est *nulle* au voisinage de Γ de sorte que $w \in \mathcal{D}_{-,\, M_k}((\Omega))$. Alors

$$< u, \overline{A^* w - w'} > = < Au + u', \bar{w} > \text{ d'où le résultat.}$$

Vérifions que $\psi \to Z(\psi)$ est anti-linéaire sur $\# \mathcal{D}_{-,\, M_k}(\mathcal{H}(\Gamma)^m)$; soient ψ_1 et ψ_2 deux éléments de cet espace; on peut trouver v_1 et $v_2 \in X_-$ telles que

$$\mathcal{C} v_i = \psi_i, \quad i = 1, 2 \quad \text{et} \quad \mathcal{C}(v_1 + v_2) = \psi_1 + \psi_2$$

(il suffit de noter que dans la démonstration du Théorème 3.1 on peut prendre les *mêmes* $\mathcal{O}_n$ et la même fonction $\alpha(x, t)$ pour construire v_1 et v_2). D'où l'antilinéarité de Z d'après (4.6).

Montrons maintenant que Z est *continue*. Posons

$$\Phi(v) = < u, \overline{A^* v - D_t v} > - < u + D_t u, \bar{v} >;$$

la forme $v \to \Phi(v)$ est continue sur X_- et nulle sur $N_{\mathcal{C}}$ (cf. n. 3.2); donc la forme $v^\cdot \to \Phi^\cdot(v^\cdot) = \Phi(v)$, $v \in v^\cdot$, est continue sur $X^\cdot_-$ donc $\psi \to Z(\psi) = \Phi^\cdot((\mathcal{C}^\cdot)^{-1}\psi)$ est continue sur $\# \mathcal{D}_{-,\, M_k}(\mathcal{H}(\Gamma)^m)$

Donc

$$Z(\varphi) = < \tau u, \bar{\psi} >, \quad \tau u \in \# \mathcal{D}'_{+,\, M_k}(\mathcal{H}'(\Gamma)^m). \tag{4.7}$$

et $u \to \tau u$ est linéaire de Y_+ dans $\# \mathcal{D}'_{+,\, M_k}(\mathcal{H}'(\Gamma)^m)$.

Montrons que $u \to \tau u$ est continue pour les topologies *faibles*; pour cela, il faut montrer que, pour ψ fixé (dans $\# \mathcal{D}_{-,\, M_k}(\mathcal{H}(\Gamma)^m)$)

$$u \to < \tau u, \bar{\psi} > \text{ est continue sur } Y_+; \tag{4.8}$$

or *fixons* v avec (4.5); alors

$$< \tau u, \bar{\psi} > = < u, \overline{A^* v - v'} > - < Au + u', \bar{v} >$$

et (4.8) résulte de la *définition* de la topologie sur Y_+.

On verifie enfin, comme dans [20], p. 319, que $\tau u = \gamma u$ si $u \in \mathcal{D}(\mathcal{D}(\overline{\Omega}))$ ce qui achève la démonstration du théorème.

5. - Problèmes non homogènes.

5.1. - Par transposition du résultat du n. 2.1 on a ceci: *si* $L \in (X_-)'$, *il existe* u *unique dans* $\mathcal{D}'_{+, M_k}(\mathcal{D}'(\Omega))$ tel que

$$< u, \overline{A^* v - v'} > = L(\bar{v}), \quad \forall v \in X_- \tag{5.1}$$

et en outre

(5.2) *l'application* $L \longrightarrow u$ *est linéaire continue de* $(X_-)'$ *dans* $\mathcal{D}'_{+, M_k}(\mathcal{D}'(\Omega))$.

5.2. - *Choix de L.* - Soient f et g donnés avec

$$f \in \mathcal{D}'_{+, M_k}(\Xi'(\Omega)) \tag{5.3}$$

$$g \in \# \mathcal{D}'_{+, M_k}(\mathcal{H}'(\Gamma)^m). \tag{5.4}$$

On choisit

$$L(\bar{v}) = < f, \bar{v} > + < g, \overline{\mathcal{C} v} >, \tag{5.5}$$

le 1er (resp. 2eme) crochet désignant la dualité entre $\mathcal{D}'_{+, M_k}(\Xi'(\Omega))$ (resp. $\# \mathcal{D}'_{+, M_k}(\mathcal{H}'(\Gamma)^m)$) et $\mathcal{D}_{-, M_k}(\Xi(\Omega))$ (resp. $\# \mathcal{D}_{-, M_k}(\mathcal{H}(\Gamma)^m)$).

Alors L est bien dans $(X_-)'$ et l'application

$$f, g \longrightarrow L \tag{5.6}$$

est bilinéaire continue de $\mathcal{D}'_{+, M_k}(\Xi'(\Omega)) \times \# \mathcal{D}'_{+, M_k}(\mathcal{H}'(\Gamma)^m) \longrightarrow (X_-)'$ tous ces espaces étant munis de leur topologie faible de dual.

5.3. - On va déduire de là le

THÉORÈME 5.1. - *On suppose que* (2.1) (2-2), (2.3), (2.4) *ont lieu. Etant données* $f \in \mathcal{D}'_{+, M_k}(\Xi'(\Omega)$ *et* $g \in \# \mathcal{D}'_{+, M_k}(\mathcal{H}'(\Gamma)^m)$, *il existe* $u \in \mathcal{D}'_{+, M_k}(\mathcal{D}'(\Omega))$ *unique satisfaisant à*

$$Au + u' = f \tag{5.7}$$

$$\gamma u = g \quad \text{(au sens du théorème 4.1).} \tag{5.7}$$

En outre l'application $f, g \longrightarrow u$ *est continue, chaque espace étant muni de sa topologie faible de dual.*

Démonstration. - Compte tenu des remarques du point 5.2, tout ce qui reste à montrer est que si $u \in \mathfrak{D}'_{+, M_k}(\mathfrak{D}'(\Omega))$ est *la* solution de

$$< u, \overline{A^* v - v'} > = < f, \bar{v} > + < g, \overline{\mathfrak{C} v} >$$

alors u satisfait à (5.7) (5.8).

Que (5.7) ait lieu est immédiat à cause de (4.1), 2); (5.8) résulte alors de (5.7), et du Théorème 4.1 (où l'on a implicitement démontré que

$$< u, \overline{A^* v - v'} > - < Au + u', \bar{v} > = < \gamma u, \overline{\mathfrak{C} v} > \text{pour } u \in Y_+ \text{ et } v \in X_-).$$

5.4. - Notons pour terminer que le théorème de structure 9.2, chap. 1, *s'applique aux distributions f et u du Théorème* 5.1, *dans les exemples donnés an n.* 4.1 *pour* $\Xi'(\Omega)$.

En effet, il suffit de vérifier que $\mathfrak{D}^0(X')$ est *tonnelé* lorsque $X = \Xi'(\Omega)$ ou $\mathfrak{D}'(\Omega)$. Il suffit donc de vérifier que $\mathfrak{D}^0(\Xi(\Omega))$ ou $\mathfrak{D}^0(\mathfrak{D}(\Omega))$ est tonnelé; or ces espaces sont des limites inductives d'espaces des Banach ou $(\mathfrak{L}\mathfrak{F})$, d'où le résultat d'après [6], Cor. 2, p. 2.

Remarque 5.1. - Le théor. 5.1 est d'autant plus intéressant que l'espace $\Xi'(\Omega)$ est plus «grand» et donc que $\Xi(\Omega)$ est plus «petit» (cf. 4 1); nous ignorons s'il existe un $\Xi(\Omega)$ minimal.

Chapitre IV.

Remarques sur les opérateurs elliptiques et l'analyticité des fonctions - Applications.

1. - Position du problème.

Nous allons dans ce Chapitre démontrer entre autres la proposition (2.10), utilisée au chap. 3; en fait nous obtiendrons davantage une généralisation d'un théorème de Kotake-Narasimhan [13], theor. 1., qui donne une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction soit analytique dans un *ouvert* Ω de R^n; en ajoutant aux conditions de Kotake-Narasimhan des conditions convenables sur la frontière Γ de Ω (supposée analytique réelle), nous prouverons en fait l'analyticité de la fonction *dans tout* $\bar{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$.

Soit donc Ω un ouvert borné de R^n à frontière Γ variété analytique réelle de dimension $n-1$, Ω étant d'un seul coté de Γ.

THÉORÈME 1.1. - *Soit $\mathcal{A}$ un opérateur linéaire proprement elliptique au sens de* [1], *à coefficients analytiques dans $\bar{\Omega}$, d'ordre m, m, paire* (17). *Désignons par $\mathcal{A}^k$, $k=0, 1, 2, \ldots$, le k-ième itéré de $\mathcal{A}$ ($\mathcal{A}^0 u = u$). Dans ces hypothèses, si $u \in \mathfrak{D}(\bar{\Omega})$ et s'il existe deux constantes L et c telles que pour tout k et i entier ≥ 0*

$$\| \mathcal{A}^k u \|_{L^2(\Omega)} \leq c L^k (mk)!$$

$$\| \gamma_j(\mathcal{A}^k u) \|_{H^{m(1+i)-j-\frac{1}{2}}(\Gamma)} \leq c L^{k+i+1}(m(k+i+1))!$$

$$j = 0, 1, \ldots, \frac{m}{2} - 1 \quad (18),$$

alors u est une fonction analytique dans $\bar{\Omega}$.

La démonstration de théorème utilise essentiellement les idées de MORREY-NIREMBERG [24] et de KOTAKE-NARASIMHAN [13]. On peut se ramener par «cartes locales» et en utilisant aussi le théor. 1 de [13] à la démonstration du théorème 1.2 suivant (qui précise même le résultat précédent) et d'où l'on déduit la proposition (2.10 du chap. 3 (19).

Désignons par $(x, y) = (x_1, \ldots, x_{n-1}, y)$ le point générique de R^n et par $\Omega_r (r > 0)$, la demi-boule $\{(x, y) \mid x_1^2 + \ldots + x_{n-1}^2 + y^2 < r^2,\ y > 0\}$ et par Γ_r la partie de la frontière de Ω_r telle que $y = 0$.

Soit r_0 fixé, $0 < r_0 < 1$; et soit

$$\mathcal{A} u = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x, y) D^\alpha u$$

à coefficients $a_\alpha \in \mathcal{H}(\bar{\Omega}_{r_0})$, $\mathcal{A}$ étant proprement elliptique dans $\bar{\Omega}_{r_0}$. Alors

THÉORÈME 2.2 - *Soit $L > 0$ fixé; si $u \in \mathfrak{D}(\bar{\Omega}_{r_0})$ et s'il existe $c > 0$ (dependant de u) telle que pour tout k et i entier ≥ 0*

$$\| \mathcal{A}^k u \|_{L^2(\Omega_{r_0})} \leq c L^k (mk)! \tag{1.1}$$

$$\left(\sum_{j=0}^{m/2-1} \left\| \frac{\partial^j (\mathcal{A}^k u)}{\partial y^j} \Big|_{y=0} \right\|^2_{H^{m(1+i)-j-1/2}(\Gamma_r)} \right)^{\frac{1}{2}} \leq c L^{k+i+1} (m(k+i+1))!\,; \tag{1.2}$$

(17) Dans ce chapitre on remplace pour simplifier l'écriture $2m$ par m.

(18) $H^{s+1/2}(\Gamma)$, s entier ≥ 0 est l'espace des «traces» des fonctions de $H^{s+1}(\Omega)$.

(19) On notera que l'on *ne suppose pas* les $\gamma_j(\mathcal{A}^k u)$ nuls, mais de *normes «à croissance convenable»*.

alors il existe $r_* < r_0$, *dépendant de* L *et de* $\mathcal{A}$, *telle que* $u \in \mathcal{H}(\overline{\Omega}_{r_*})$; *et si* c *demeure dans un borné de* R^1, u *demeure dans un borné de* $\mathcal{H}(\overline{\Omega}_{r_*})$.

2. - Majoration des dérivées tangentielles.

2.1. - Dans ce numéro nous donnerons les majorations des derivées «tangentielles» c'est à dire par rapport aux variables x_i, de la fonction u. La démonstration suit celle du theor. 1 de [13] (n. 3 et 4); donc nous conserverons des notations très semblables à [13] et ne donnerons pas tous les détails techniques.

Si $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, α_i entiers ≥ 0, on pose $\alpha ! = \alpha_1 ! \ldots, \alpha_n !$

$$D = \frac{\partial \mid \alpha \mid}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_{n-1}^{\alpha_{n-1}} \partial y^{\alpha_n}}, \quad D_x^\alpha = D^\alpha \text{ si } \alpha_n = 0, \quad D_y^s = \frac{\partial^s}{\partial y^s}.$$

On introduit les seminormes, pour k entier ≥ 0

$$\| u \|_{k, \Omega_r} = \sum_{|\alpha| = k} \frac{k!}{\alpha!} \| D^\alpha \|_{L^2(\Omega_r)}$$

$$\| u \|_{x, k, \Omega_r} = \sum_{|\alpha| = k} \frac{k!}{\alpha!} \| D_x^\alpha u \|_{L^2(\Omega_r)}$$

$$||| u |||_{0, \Gamma_r} = \left(\sum_{j=0}^{m/2-1} \left\| \frac{\partial^j u}{\partial y^j} \bigg|_{x=0} \right\|^2_{H^{m-j-1/2}(\Gamma_r)} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$||| u |||_{k, \Gamma_r} = \sum_{|\alpha| = k} \frac{k!}{\alpha!} ||| D_x^\alpha u |||_{0, \Gamma_r}$$

LEMME 2.1. - *Pour k et k' entiers ≥ 0, on a*

$$\| u \|_{k+k', \Omega_r} = \sum_{|\alpha| = k} \frac{k!}{\alpha!} \| D^\alpha u \|_{k', \Omega_r} \tag{2.1}$$

$$\| u \|_{x, k+k', \Omega_r} = \sum_{|\alpha| = k} \frac{k!}{\alpha!} \| D_x^\alpha u \|_{x, k', \Omega_r} \tag{2.2}$$

Il suffit (cf. Lemma 3.1 de [14]) de noter que

$$\frac{(k+k')!}{\gamma!} = \sum_{\substack{|\alpha| = k, \, |\beta| = k' \\ \alpha + \beta = \gamma}} \frac{k!}{\alpha!} \frac{k'!}{\beta!}$$

LEMME 2.2. - *Soit q entier, $0 < q < m$, $r < r_0$; il existe une constante c_m (dépendant seulement de m et r_0) telle que pour tout $\varepsilon > 0$ et toute fonction $u \in \mathfrak{D}(\bar{\Omega}_{r_0})$ on ait*

$$(2,3) \qquad \| u \|_{q, \Omega_r} \leq \varepsilon \| u \|_{m, \Omega_r} + c_m \varepsilon^{-\frac{q}{m-q}} \| u \|_{0, \Omega_r}$$

$$(2\text{-}4) \qquad \| u \|_{x, q, \Omega_r} \leq \varepsilon \| u \|_{m, \Omega_r} + c_m \varepsilon^{-\frac{q}{m-q}} \| u \|_{0, \Omega_r}$$

$$(2.5) \qquad \| D_y^q u \|_{0, \Omega_r} \leq \varepsilon \| D_y^m u \|_{0, \Omega_r} + c_m \varepsilon^{-\frac{q}{m-q}} \| u \|_{0, \Omega_r}.$$

C'est l'analogue du lemma 3.3 [13] et il est bien connu: on peut le démontrer en prolongeant u dans R^n et en utilisant la transformation de FOURIER.

Par une démonstration analogue on peut obtenir aussi le lemme suivant, qui est également bien connu (cf. par ex. MORREY-NIREMBERG [24] p. 277).

LEMME 2.3. - *Soit $r < r_0$; pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $c_m(\varepsilon)$, dépendant seulement de m et ε, telle que pour tout $u \in \mathfrak{D}(\bar{\Omega}_{r_0})$ on ait*

$$(2.6) \qquad \sum_{t=1}^{m} \| D_y^{m-t} u \|_{x, t, \Omega_r} \leq \varepsilon \| D_y^m u \|_{0, \Omega_r} + c_m(\varepsilon) \| u \|_{x, m, \Omega_r}$$

REMARQUE 2.1. - Soit p entier ≥ 0. En appliquant (2.3) à $D^\alpha u$ avec $|\alpha| = pm$ et en sommant on obtient, pour $0 < q < m$,

$$(2.7) \qquad \| u \|_{pm+q, \Omega_r} \leq \varepsilon \| u \|_{(p+1), m, \Omega_r} + c_m \varepsilon^{\frac{q}{m-q}} \| u \|_{pm, \Omega_r}.$$

On obtient des inégalités analogues en appliquant (2.4), (2.5) et (2.6) au lieu de (2.3).

2.2. - LEMME 2.4. - *Sous les hypothèses faites sur l'opérateur $\mathcal{A}$, il existe deux constantes positives r_1 et c_1 $(r_1 < r_0)$ dépendant seulement de $\mathcal{A}$ (20) telles que si r et δ sont des nombres positifs, avec $\delta < r$, $r + \delta \leq r_1$*

(20) Plus précisément r_1 et c_1 dépendent de la constante d'ellipticité de $\mathcal{A}$, de la borne supérieure des modules des coefficients de $\mathcal{A}$ et du module de continuité des coefficients de la partie principale de $\mathcal{A}$ (cf. AGMON-DOUGLIS-NIRENBERG [1], théor. 15.1).

et $u \in \mathfrak{D}(\Omega_{r_0})$, *on ait*

$$\| u \|_{m, \Omega_r} \leq c_1 \{ \| \mathcal{A} u \|_{0, \Omega_{r+\delta}} + ||| u |||_{0, \Gamma_{r+\delta}} + \delta^{-m} \| u \|_{0, \Omega_{r+\delta}} \}. \tag{2.8}$$

En effet, grâce aux résultats sur la régularisation des solutions des problèmes elliptiques, il existe deux constantes r_1 et c_0 dépendant seulement de $\mathcal{A}$, avec $r_1 < r_0$ (cf. note de bas de page ([20])) telles que pour tout $v \in \mathfrak{D}(\overline{\Omega}_{r_0})$ et à support dans $\overline{\Omega}_{r_1}$ on ait

$$\| v \|_{m, \Omega_{r_1}} \leq c_0 \{ \| \mathcal{A} v \|_{0, \Omega_{r_1}} + ||| v |||_{0, \Gamma_{r_1}} + \| v \|_{0, \Omega_{r_1}} \}. \tag{2.9}$$

Soit alors $\rho(t)$ une fonction fixée, indéfiniment différentiable dans $[-\infty, +\infty]$, telle que $\rho(t) \equiv 1$ pour $t \leq 0$ et $\rho(t) \equiv 0$ pour $t \geq 1$. Pour tout r et δ positifs, avec $\delta < r$, $0 < r + \delta \leq r_1$, on construit la fonction

$$z(x, y) = \rho\left(\frac{\sqrt{x_1^2 + \ldots + x_{n-1}^2 + y^2} - r}{\delta}\right).$$

Il existe alors $c_\alpha > 0$, dépendant seulement de α, telle que

$$\sup_{\Omega_{r+\delta}} | D^\alpha z | \leq c_\alpha \delta^{-|\alpha|}.$$

En posant $v = zu$ dans (2.9), des calculs analogues à ceux de la démonstration du lemme 3.2 de [13] (cf. aussi [21 bis] teor. 13.1) donnent (2.8).

Lemme 2.5. - *Soit a une fonction analytique dans Ω_{r_0} satisfaisant à*

$$\sup_{\overline{\Omega}_{r_0}} | D^\alpha a | \leq \alpha! \; c_2^{|\alpha|+1} \qquad \forall \alpha \tag{2.20}$$

Désignons par $[a, D_x^\alpha] u$ le commutateur $[a, D_x^\alpha] u = a D_x^\alpha u - D_x^\alpha (a\, u)$. Alors pour tout $k \geq 0$ et $u \in \mathfrak{D}(\overline{\Omega}_{r_0})$ et $r \leq r_0$ on a

$$\sum_{|\alpha| = k} \frac{k!}{\alpha!} \| [a, D_x^\alpha] u \|_{0, \Omega_r} \leq k! \; c_3^k \sum_{p=0}^{k-1} (p!)^{-1} c_3^{-p} \; \| u \|_{x, p, \Omega_r}$$

avec $c_3 = n \; c_2$.

La démonstration est la même qu'au lemme 4.1 de [13].

Lemme 2.6. - *Soient r_1 et c_1 les constantes du lemme 2.4, r et δ positifs;*

il existe alors une constante c_4 *dépendant de* $\mathcal{A}$ *et de* ε [21] *telle que pour tout* k *et* $u \in \mathcal{D}(\overline{\Omega}_{r_0})$ *on ait*

$$\text{(2.11)} \qquad \| u \|_{x,(k+1)m,\Omega_r} \leq c_1 \{ \| \mathcal{A} u \|_{x,km,\Omega_{r+\delta}} + |\!|\!| u |\!|\!|_{km,\Gamma_{r+\delta}} +$$

$$+ \delta^{-m} \| u \|_{x,km,\Omega_{r+\delta}} + \varepsilon \| u \|_{x,(k+1)m,\Omega_{r+\delta}} +$$

$$+ ((k+1)m)!\, c_4^{k+1} \sum_{p=0}^{k} ((pm)!)^{-1} c_4^{-p} \| u \|_{x,pm,\Omega_{r+\delta}} \}$$

En fait en utilisant (2.2) et en appliquant le lemme 2.4 à $D_x^\alpha u$, on obtient

$$\| u \|_{x,(k+1)m,\Omega_r} \leq \sum_{|\alpha| = km} \frac{(km)!}{\alpha!} \| D_x^\alpha u \|_{m,\Omega_r} \leq$$

$$\leq c_1 \{ \| \mathcal{A} u \|_{x,km,\Omega_{r+\delta}} + |\!|\!| u |\!|\!|_{km,\Gamma_{r+\delta}} + \delta^{-m} \| u \|_{x,km,\Omega_{r+\delta}} +$$

$$+ \sum_{|\alpha| = km} \frac{(km)!}{\alpha!} \| [\mathcal{A}, D_x^\alpha] u \|_{0,\Omega_{r+\delta}} \}$$

Il suffit alors de majorer le terme

$$\sum_{|\alpha| = km} \frac{(km)!}{\alpha!} \| [\mathcal{A}, D_x^\alpha] u \|_{0,\Omega}$$

de façon toute à fait analogue à celle développée par KOTAKE-NARASIMHAN pour la démonstration du lemme 4.2 de [13] (formules (4.5) et (4.9)]; on utilisera les lemmes 2.5. et la remarque 2.1.

2.3. DÉFINITION. - *Soit* $\lambda > 0$, k *entier* ≥ 0, $R > 0$ *et* $\leq r_1$ (r_1 *constante du lemme* 2.4); *on pose*

$$\sigma_x^k(u, \lambda, R) = \frac{1}{(km)!\,\lambda^k} \sup_{R/2 \leq r < R} (R - r)^{km} \| u \|_{x,km,\Omega_r}$$

$$\psi^k(u, \lambda, R) = \frac{1}{(km)!\,\lambda^k} \sup_{R/2 \leq r < R} (R - r)^{km} |\!|\!| u |\!|\!|_{km,\Gamma_r}.$$

LEMME 2.7. - *Il existe une valeur* λ_1 *de* λ *dépendant de* $\mathcal{A}$ (*plus précisément* λ_1 *dépend continûment de* c_1 *et* c_2 *si les coefficients de* $\mathcal{A}$ *vérifient*

---

[21] Plus précisément si tous les coefficients de $\mathcal{A}$ vérifient (2.10), alors c_4 dépend continûment de c_2 et de ε.

tous (2.10)) *telle que pour tout k et $u \in \mathfrak{D}(\overline{\Omega}_{r_0})$ on ait, pour $R \leq r_1$ et $\lambda \geq \lambda_1$*

$$\sigma_x^{k+1}(u, \lambda, R) \leq \frac{1}{4}\,[(km+1) \ldots (km+m)]^{-1}\{\sigma_x^k(\mathcal{A}u, \lambda, R) + \tag{2.12}$$

$$+ \psi^k(u, \lambda, R)\} + \frac{1}{4}\sum_{p=0}^{k} \sigma_x^p(u, \lambda, R).$$

Multiplions (2.11) par $[((k+1)m)!]^{-1}\lambda^{-k-1}(R-r)^{(k+1)m}$ et prenons la borne supérieure pour $R/_2 \leq r < R$ en choisissant $\delta = \dfrac{R-r}{k+1}$. Au premier membre on obtient $\sigma_x^{k+1}(u, \lambda, R)$. Pour le deuxième membre les mêmes raisonnements que [13], démonstration du lemme 4.3, (avec la seule substitution de $\sigma^k(\mathcal{A}u, \lambda, R)$ par $\sigma_x^k(\mathcal{A}u, \lambda, R) + \psi^k(u, \lambda, R)$ et de $\sigma^p(u, \lambda, R)$ par $\sigma_x^p(u, \lambda; R)$) prouvent que l'on peut le majorer par le dernier membre de (2.12), si l'on prend λ_1 convenable (et on peut choisir λ_1 fonction continue de c_1 et c_2).

2.4. - On peut maintenant démontrer le

Théorème 2.1. - *Les hypothèses sont celles du Théorème* 1.2; *soient λ et R fixés comme au lemme* 2.7 *et soit $u \in \mathfrak{D}(\Omega_{r_0})$ vérifiant* (1.1) *et* (1.2); *alors pour k et i entiers ≥ 0, on a*

$$\sigma_x^k(\mathcal{A}^i u, \lambda, R) \leq (km+1) \ldots (km+im)\, 2c(L+2)^{k+i} \tag{2.14}$$

où si $i=0$ le deuxieme membre vaut, per convention $2c(L+2)^k$.

Démonstration. - Appliquons (2.12) à $\mathcal{A}^i u$, i entier ≥ 0;

$$\sigma_x^{k+1}(\mathcal{A}^i u, \lambda, R) \leq \frac{1}{4}[km+1 \ldots (km+m)]^{-1}\{\sigma_x^k(\mathcal{A}^{i+1}u, \lambda, R) + \tag{2.15}$$

$$+ \psi^k(\mathcal{A}^i u, \lambda, R)\} + \frac{1}{4}\sum_{p=0}^{k} \sigma_x^p(\mathcal{A}^i u, \lambda, R).$$

A cause de l'hypothèse (1.2) (en y échangeant k avec i) on peut toujours supposer (il suffit de prendre λ_1 suffisamment grand de façon que, par ex., $\dfrac{1}{\lambda_1^k}\dfrac{R^{km}}{2}(n-1)^k \leq 1$, pour tout $k \geq 0$) que:

$$\psi^k(\mathcal{A}^i u, \lambda, R) \leq (km+1) \ldots (km+im+m)\, 2c(L+2)^{k+i+1}. \tag{2.16}$$

Démontrons alors (2.14) par induction sur k. Pour $k=0$ et i *quelconque* (2.14) est vraie à cause de l'hypothèse (1.1). Supposons (2.14) vraie pour k fixé et i *quelconque*; alors de (2.15) et (2.16) on déduit

$$\sigma_x^{k+1}(\mathcal{A}^i u, \lambda, R) \leq \frac{1}{4}(km+1)\dots(km+im+m)4c(L+2)^{k+i+1}+$$

$$+\frac{1}{4}\sum_{p=0}^{k}(pm+1)\dots(pm+im)2c(L+2)^{p+i}\leq$$

$$\leq \frac{1}{2}(km+1)\dots(km+im+m)2c(L+2)^{k+i+1}+\frac{1}{4}(km+1)\dots(km+im)\cdot$$

$$\cdot 2c(L+2)^{k+i}\sum_{p=0}^{k}\frac{1}{L+2}^{k-p}\leq(km+1)\dots(km+im+m)2c(L+2)^{k+i+1}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)$$

et donc (2.14) est vraie aussi pour $k+1$. Et le théorème est démontré.

3. - Majoration des dérivées normales.

3.1. - Par utilisation de la formule de LEIBNIZ on a le

LEMME 3.1. - *Soit p et q entiers ≥ 0; on a*

$$\sum_{|\alpha|=p}\frac{p!}{\alpha!}|D_y^q D_x^\alpha(uv)|\leq\sum_{l=0}^{p}\sum_{h=0}^{q}\binom{p}{l}\binom{q}{h}\sum_{|\eta|=l}\frac{l!}{\eta!}|D_y^h D_x^\eta u|\cdot$$

$$\cdot\sum_{|\gamma|=p-l}\frac{(p-l)!}{\gamma!}|D_y^{q-h}D_x^\gamma v|.$$

On pose maintenant la définition suivante:

DÉFINITION. - *Pour k et q entiers ≥ 0, $\lambda>0$, $\Theta>0$, $R\leq r_1$*

$$\sigma^{k,q}(u,\lambda,\Theta,R)=\frac{1}{((k+q)m)!\,\lambda^{k+q}\Theta^k}\sup_{R/2\leq r<R}(R-r)^{(k+q)m}\|D_y^{qm}u\|_{x,km,\Omega_r}.$$

On a alors

$$\sigma^{k,0}(u,\lambda,\Theta,R)=\sigma_x^k(u,\lambda\Theta,R)\qquad\forall k. \tag{3.1}$$

Le but principal de ce numéro est la démonstration du théorème suivant:

THÉORÈME 3.1. - *Les hypothèses sont celles du théorème* 1.2. *Soit r_1 la constante du lemme* 2.4; *supposons que tous les coefficients de $\mathcal{A}$ vérifient* (2.10); *soit λ_1 la constante du lemme* 2.7; *et soit $u\in\mathcal{D}(\overline{\Omega}_{r_0})$ et verifient* (1.1) *et* (1.2); *alors il existe deux constantes positives λ_0 et $\Theta_0\geq 1$ dépendant* *continûment de* r_1, c_2 *et* λ_1 (*et donc dépendant seulement de* c_2 *et des éléments de* $\mathcal{A}$ *indiqués à la note* [20] *de bas de page*) *telles que pour* $\lambda \geq \lambda_0$, $\Theta \geq \Theta_0$, $R \leq r_1$ *on ait pour touts entiers positifs* k, q *et* i

$$\sigma^{k,\,q}(\mathcal{A}^i u,\ \lambda,\ \Theta,\ R) \leq (km + qm + 1) \ldots (km + qm + im) 2c\ (L+2)^{k+q+i} \tag{3.2}$$

où l'on convient que le deuxième membre se réduit pour $i = 0$ *à* $2c(L+2)^{k+q}$.

DÉMONSTRATION. - On peut supposer à cause de l'ellipticité de $\mathcal{A}$ que le coefficient de $D_y^m u$ dans $\mathcal{A}u$ est égal à 1. On a donc

$$\mathcal{A}u = D_y^m u + \sum_{t=1}^{m} \sum_{j=0}^{t} \sum_{|\alpha|=j} a_{t,\,j,\,\beta}(xy) D_y^{m-t} D_x^{\beta} u$$

et alors pour $q \geq 0$ entier et $|\alpha| = km$, k entier ≥ 0, on a

$$D_y^{m+qm} D_x^{\alpha} u = D_y^{qm} D_x^{\alpha}(\mathcal{A}u) - \sum_{t=1}^{m} \sum_{j=0}^{t} \sum_{|\beta|=j} D_y^{qm} D_x^{\alpha}(a_{t,\,j,\,\beta}(x,\ y)\, D_y^{m-t} D_x^{\beta} u).$$

En utilisant le lemme 3.1 on obtient:

$$\sum_{|\alpha|=km} \frac{(km)!}{\alpha!} \left| D_y^{m+qm} D_x^{\alpha} u \right| \leq \sum_{|\alpha|=km} \frac{(km)!}{\alpha!} \left| D_y^{qm} D_x^{\alpha}(\mathcal{A}u) \right| + \tag{3.3}$$

$$+ \sum_{l=0}^{km} \sum_{h=0}^{qm} \sum_{t=1}^{m} \sum_{j=0}^{t} \sum_{|\beta|=j} \binom{km}{l} \binom{qm}{h} \sum_{|\eta|=l} \frac{l!}{\eta!} \left| D_y^h D_x^{\eta} a_{t,\,j,\,\beta}(x,\ y) \right| \cdot$$

$$\cdot \sum_{|\gamma|=km-l} \frac{(km-l)!}{\gamma!} \left| D_y^{qm-h+m-t} D_x^{\gamma+\beta} u \right| \cdot \frac{j!\ \beta!}{j!\ \beta!} \leq$$

$$\leq \left(\text{on utilise } \frac{(km-l+j)!}{\mu!} = \sum_{|\beta|=j} \sum_{\substack{|\gamma|=km-l \\ \beta+\gamma=\mu}} \frac{j!(km-l)!}{\beta!\ \gamma!} \right)$$

$$\leq \sum_{|\alpha|=km} \frac{(km)!}{\alpha!} \left| D_y^{qm} D_x^{\alpha}(\mathcal{A}u) \right| + \sum_{t=0}^{km} \sum_{h=0}^{qm} \sum_{t=1}^{m} \sum_{j=0}^{t} \cdot$$

$$\cdot \sum_{|\mu|=km-l+j} \frac{(km-l+j)!}{\mu!} \left| D_y^{qm-h+m-t} D_x^{\mu} u \right| \cdot$$

$$\cdot \sum_{|\eta|=l} \sum_{|\beta|=j} \frac{\beta!\ l!}{j!\ \eta!} \left| D_y^h D_x^{\eta} a_{t,\,j,\,\beta}(x,\ y) \right|.$$

A cause de l'analyticité des $a_{t,j,\beta}$ on peut supposer qu'ils vérifient (2.10) et on a donc

$$(3.4) \qquad | D_y^h D_x^\eta a_{t,j,\beta}(x, y) | \leq h!\ \eta!\ c_2^{h+|\eta|+1}$$

et donc on a

$$(3.5) \qquad \sum_{|\eta|=l} \sum_{|\beta|=j} \frac{\beta!\ l!}{j!\ \eta!} | D_y D_x^\eta a_{t,j,\beta}(x, y) | \leq \sum_{|\eta|=l} \sum_{|\beta|=j} \frac{\beta!}{j!} l!\, h!\, c_2^{l+h+1}$$

$$\leq l!\ h!\ n^{j+l} c_2^{l+h+1}.$$

En utilisant (3.4) et (3.5) par intégration de (3.3) dans Ω_r on obtient

$$(3.6) \qquad \| D_y^{m+qm} u \|_{x,\, km,\, \Omega_r} \leq \| D_y^{qm} \mathcal{A} u \|_{x,\, km,\, \Omega_r} +$$

$$+ \sum_{l=0}^{km} \sum_{h=0}^{qm} \sum_{t=1}^{m} \sum_{j=0}^{t} \binom{km}{l} \binom{qm}{h} l!\, h!\ P^{l+h+1} \| D_y^{qm+m-h-t} u \|_{x,\, km+l+j,\, \Omega_r}$$

où P est une constante qui dépend seulement de c_2, n et m (et continûment de c_2).

En utilisant le lemme 2.2 (formule (2.4) avec $\varepsilon = 1$ et remarque 2.1) on a

$$\sum_{j=0}^{t} \| D_y^{qm+m-h-l} u \|_{x,\, km-l+j,\, \Omega_r} \leq t \| D_y^{qm+m-h-t} u \|_{x,\, km-l+t,\, \Omega_r} +$$

$$+ t\, c_m \| D_y^{qm+m-h-t} u \|_{x,\, km-l,\, \Omega_r} \leq$$

$$\leq \gamma_m \{ \| D_y^{qm+m-h-t} u \|_{x,\, km-l+t,\, \Omega_r} + \| D_y^{qm+m-h-t} u \|_{x,\, km-l,\, \Omega_r} \}$$

où γ_m est une constante qui depend seulement de m.

En utilisant alors encore le lemme 2.2 et le lemme 2.3 (et la remarque 2.1) on a pour $\varepsilon > 0$ arbitraire

$$\sum_{t=1}^{m} \sum_{j=0}^{t} \| D_y^{m+qm-h-t} u \|_{x,\, km-l+j,\, \Omega_r} \leq \varepsilon \gamma_m \| D_y^{m+qm-h} u \|_{x,\, km-l,\, \Omega_r} +$$

$$+ \gamma_m c_m(\varepsilon) \| D_y^{qm-h} u \|_{x,km+m-l,\, \Omega_r} + \varepsilon\, m \gamma_m \| D_y^{m+qm-h} u \|_{x,\, km-l,\, \Omega_r} +$$

$$+ \gamma_m c'_m(\varepsilon) \| D_y^{qm-h} u \|_{x,\, hm-l,\, \Omega_r}$$

où $c'_m(\varepsilon)$ dépend seulement de ε et de m. On a donc

$$(3.7) \qquad \| D_y^{m+qm} u \|_{x,\, km,\, \Omega_r} \leq \| D_y^{qm} \mathcal{A} u \|_{x,\, km,\, \Omega_r} +$$

$$+ \sum_{l=0}^{km} \sum_{h=0}^{qm} \binom{km}{l} \binom{qm}{h} l!\, h!\; P^{l+h+1} \gamma_m \{ (m+1)\varepsilon \, \| D_y^{m+qm-h} u \|_{x,\, km-l,\, \Omega_r} +$$

$$+ c_m(\varepsilon) \| D_y^{qm-h} u \|_{x,\, km+m-l,\, \Omega_r} + c'_m(\varepsilon) \| D_y^{qm-h} u \|_{x,\, km-l,\, \Omega_r} \}.$$

Utilisons maintenant un calcul de [13], p. 456, pour majorer les termes du type $\| \quad \|_{x,\, km-l,\, \Omega_r}$ $l = 0, \ldots, km$ avec une expression contenant seulements des termes du type $\| \quad \|_{x,\, pm,\, \Omega_r}$ $p = 0, \ldots, k$. En fait on a

$$(38) \qquad \sum_{l=0}^{km} \binom{km}{l} l!\; P^l \| v \|_{x,\, km-l,\, \Omega_r} = \| v \|_{x,\, km,\, \Omega_r} + \sum_{s=0}^{km-1} \frac{(km)!}{s!} \cdot$$

$$\cdot P^{km-s} \| v \|_{x,\, s,\, \Omega_r}; \quad \text{et. si} \quad s = pm + \sigma, \quad 0 \leq \sigma < m$$

$0 \leq p \leq k - l$, en utilisant le lemme 2.2 (remarque 2.1) on peut écrire:

$$(3.9) \qquad \| v \|_{x,\, pm+\sigma,\, \Omega_r} \leq \varepsilon' \| v \|_{x,\, (p+1)m,\, \Omega_r} + c_m \varepsilon'^{\,-\frac{\sigma}{m-\sigma}} \| v \|_{x,\, pm,\, \Omega_r}.$$

Prenons dans (3.9)

$$\varepsilon' = \frac{(pm+\sigma)!}{((p+1)m)!} P^{-(m-\sigma)}$$

alors

$$\varepsilon'^{\,-\frac{\sigma}{m-\sigma}} \leq m^m \frac{(pm+\sigma)!}{(pm)!} P^{\sigma}$$

et donc

$$(3.10) \qquad \frac{P^{-s}}{s!} \| v \|_{x,\, s,\, \Omega_r} \leq \frac{P^{-(p+1)m}}{((p+1)m)!} \| v \|_{x,\, (p+1)m,\, \Omega_r} +$$

$$+ c_m m^m \frac{P^{-pm}}{(pm)!} \| v \|_{x,\, pm,\, \Omega_r}.$$

Utilisons (3.10) dans (3.9); on a

$$(3.11)\qquad \sum_{l=0}^{km}\binom{km}{l}\, l!\; P^p \,\|\, v \,\|_{x,\, km-l,\, \Omega_r} \leq c''_m \sum_{p=0}^{k} \frac{(km)!}{(pm)!} P^{km-pm}\,\cdot$$

$$\cdot \,\|\, v \,\|_{x,\, pm,\, \Omega_r}$$

avec c''_m constante qui dépend seulement de m.

De façon analogue on a:

$$(3.12)\qquad \sum_{h=0}^{qm}\binom{qm}{h} h!\; P^h \,\|\, D_y^{qm-h} v \,\|_{0,\, \Omega_r} \leq c'''_m \sum_{s=0}^{q} \frac{(qm)!}{(sm)!} P^{qm-sm}\,\cdot$$

$$\cdot \,\|\, D_y^{sm} v \,\|_{0,\, \Omega_r}$$

avec c'''_m constante qui dépend seulement de m.

En utilisant (3.11) et (3.12), on déduit de (3.7)

$$(3.13)\qquad \|\, D_y^{m+qm} u \,\|_{x,\, km,\, \Omega_r} \leq \|\, D_y^{qm} \mathcal{A} u \,\|_{x,\, km,\, \Omega_r} +$$

$$+ \sum_{p=0}^{k} \sum_{s=0}^{q} d_m \frac{(km)!\;(qm)!}{(pm)!\;(sm)!} P^{(k-p+q-s)m+1} \{ \varepsilon \,\|\, D_y^{m+sm} u \,\|_{x, pm,\, \Omega_r} +$$

$$+ c_m(\varepsilon) \,\|\, D_y^{sm} u \,\|_{x,\, (p+1)m,\, \Omega_r} + c'_m(\varepsilon) \,\|\, D_y^{sm} u \,\|_{x,\, pm,\, \Omega_r} \}$$

où d_m dépend seulement de m.

Multiplions maintenant (3.14) par $\dfrac{(R-r)^{(k+q+1)m}}{((k+q+1)m!\;\; \lambda^{k+q+1}\, \Theta^k}$ et prenons la borne supérieure pour $\dfrac{R}{2} \leq r < R$, on a alors

$$(3.14)\qquad \sigma^{k,\, 1+q}(u,\, \lambda,\, \Theta,\, R) \leq \frac{1}{(km+qm+1)\,\ldots\,(km+qm+m)} \cdot \frac{1}{\lambda} \cdot \left(\frac{R}{2}\right)^m \cdot$$

$$\cdot\, \sigma^{k,\, q}(\mathcal{A} u,\, \lambda,\, \Theta,\, R) +$$

$$+ d_m \varepsilon \sum_{p=0}^{k} \sum_{s=0}^{q} \frac{P^{(k-p+q-s)m-h+1}}{\lambda^{k-p+q-s}\, \Theta^{k+p}} \left(\frac{R}{2}\right)^{(k-p+q-s)m} \cdot \sigma^{p,\, s+1}(u,\, \lambda,\, \Theta,\, R)$$

$$+ d_m c_m(\varepsilon) \sum_{p=0}^{k} \sum_{s=0}^{q} \frac{P^{(k-p+q-s)m+1}}{\lambda^{k-p+q-s}\; \Theta^{k-p-1}} \left(\frac{R}{2}\right)^{(k-p+q-s)m} \sigma^{p+1,s}(u,\, \lambda,\, \Theta,\, R)$$

$$+ d_m c'_m(\varepsilon) \sum_{p=0}^{k} \sum_{s=0}^{q} \frac{P^{(k-p+q-s)m+1}}{\lambda^{k-p+q-+s+1} \Theta^{k-p}} \left(\frac{R}{2}\right)^{(k-p+q-s+1)m} \sigma^{p,\, s}(u,\, \lambda,\, \Theta,\, R).$$

Enfin si on pose

$$\frac{R^m P^m}{\lambda\, \Theta 2^m} = \xi, \qquad \Theta\xi = \varphi$$

on a

$$\sigma^{k,\,1+q}(u,\ \lambda,\ \Theta,\ R) \leq \frac{1}{(km+qm+1)\,..\,(km+qm+m)}\,\frac{1}{\lambda}\,\cdot \tag{3.15}$$

$$\cdot \left(\frac{R}{2}\right)^m \sigma^{k,\,q}(\mathcal{A}u,\ \lambda,\ \Theta,\ R) +$$

$$+\ \varepsilon\, d_m P \sum_{q=0}^{k} \sum_{s=0}^{q} \xi^{k-p} \varphi^{q-s} \sigma^{p,\,s+1}(u,\ \lambda,\ \Theta,\ R) +$$

$$+\ c_m(\varepsilon)\, d_m \frac{P}{\Theta} \sum_{p=0}^{k} \sum_{s=0}^{q} \xi^{k-p} \varphi^{q-s} \sigma^{p+1,\,s}(u,\ \lambda,\ \Theta,\ R) +$$

$$+\ c'_m(\varepsilon)\, d_m \frac{PR^m}{\lambda 2^m} \sum_{p=0}^{k} \sum_{s=0}^{q} \xi^{k-p} \varphi^{q-s} \sigma^{p,\,s}(u,\ \lambda,\ \Theta,\ R).$$

Choisissons maintenant ε tel que

$$\varepsilon\, d_m P \leq \frac{1}{40} \tag{3.16}$$

et, pour ce choix de ε, prenons λ_0 et Θ_0 tels que

$$\left\{ \begin{aligned} & \lambda_0 \geq \lambda_1;\ \Theta_0 \geq 1;\ \frac{r_1^m}{\lambda_0 2^m} \leq \frac{1}{10},\ \frac{P r_1^m d_m c'_m(\varepsilon)}{2^m \lambda_0} \leq \frac{1}{40} \\ & d_m c_m(\varepsilon)\, \frac{P}{\Theta_0} \leq \frac{1}{40},\ \frac{r_1^m P^m}{2^m \lambda_0 \Theta_0} < \frac{1}{2},\ \frac{r_1^m P^m}{2^m \lambda_0} < \frac{1}{2}. \end{aligned} \right. \tag{3.17}$$

Alors si $\lambda \geq \lambda_0$, $\Theta \geq \Theta_0$, $R \leq r_1$ on déduit de (3.15), (3.16), (3.17):

$$\frac{1}{2}\sigma^{k,\,1+q}(u,\ \lambda,\ \Theta,\ R) \leq \left(1 - \frac{1}{40}\right) \sigma^{k,\,1+q}(u,\ \lambda,\ \Theta,\ R) \leq \tag{3.18}$$

$$\leq \frac{1}{10}\,\frac{\sigma^{k,\,q}(\mathcal{A}u,\ \lambda,\ \Theta,\ R)}{(km+qm+1)\,...\,(km+qm+m)} + \frac{1}{40}\sum_{p=0}^{k-1} \xi^{k-p} \sigma^{p,\,q+1}(u,\ \lambda,\ \Theta,\ R) +$$

$$+\frac{1}{40}\sum_{p=0}^{k}\sum_{s=0}^{q-1}\xi^{k-p}\varphi^{q-s}\sigma^{p,\,s+1}(u,\lambda,\Theta,R)+$$

$$+\frac{1}{40}\sum_{p=0}^{k}\sum_{s=0}^{q}\xi^{k-p}\varphi^{q-s}\{\sigma^{p+1,\,s}(u,\lambda,\Theta,R)+\sigma^{p,\,s}(u,\lambda,\Theta,R)\}$$

où, si $k=0$, la somme $\sum\limits_{p=0}^{k-1}$ doit être supprimée.

Appliquons (3.18) à $\mathcal{A}^i u$, i entier quelconque ≥ 0, on a

$$\frac{1}{2}\sigma^{k,\,1+q}(\mathcal{A}^i u,\lambda,\Theta,S)\leq\frac{1}{10}\cdot\frac{\sigma^{k,\,q}(\mathcal{A}^{i+1}u,\lambda,\Theta,R)}{(km+qm+1)\dots(km+qm+m)}+ \tag{3.19}$$

$$+\frac{1}{40}\sum_{p=0}^{k-1}\xi^{k-p}\sigma^{p,\,q+1}(\mathcal{A}^i u,\lambda,\Theta,R)+\frac{1}{40}\sum_{p=0}^{k}\sum_{s=0}^{q-1}\xi^{k-p}\varphi^{q-s}\sigma^{p,\,s+1}(\mathcal{A}^i u,\lambda,\Theta,R)$$

$$+\frac{1}{40}\sum_{p=0}^{k}\sum_{s=0}^{q}\xi^{k-p}\varphi^{q-s}\{\sigma^{p+1,\,s}(\mathcal{A}^i u,\lambda,\Theta,R)+\sigma^{p,\,s}(\mathcal{A}^i u,\lambda,\Theta,R)\}$$

avec la même convention qu'auparavant pour la somme $\sum\limits_{p=0}^{k-1}$.

Désignons par $p(q,i,k)$ *la propriété* (3.2) (pour les valeurs q, i, k du paramètre) et désignons par $P(q,i,k)$ la propriété $p(q',i',k')$, $0\leq q'\leq q$, $0\leq i'\leq i$, $0\leq k'\leq k$.

Ceci posé, nous allons vérifier à partir de (3.19) les implications suivantes:

(α) $\quad P(q,i+1,0)\cup P(q,i,1)\Rightarrow p(q+1,i,0)$

(β) $\quad$ si $k\geq 1$, $P(q,i+1,k)\cup P(q+1,i,k-1)\cup P(q,i,k+1)\Rightarrow$
$\Rightarrow p(q+1,i-k)$.

En effet on a, d'après (3.19)

$$\frac{1}{2}\sigma^{k,\,1+q}(\mathcal{A}^i u,\lambda,\Theta,R)\leq\frac{1}{10}\frac{(km+qm+1)\dots(km+qm+(i+1)m)}{(km+qm+1)\dots(km+qm+m)}2c(L+2)^{k+q+i+1}+$$

$$+\frac{1}{40}\sum_{p=0}^{k-1}\left(\frac{\xi}{L+2}\right)^{k-p}2\,c(L+2)^{k+q+i+1}(pm+(q+1)m+1\dots(pm+(q+1)m+im)+$$

$$+\frac{1}{40}\sum_{p=0}^{k}\sum_{s=0}^{q-1}\left(\frac{\xi}{L+2}\right)^{k-p}\left(\frac{\varphi}{L+2}\right)^{q-s}2c(L+2)^{k+q+i+1}(pm+(s+i)m+1)\dots$$

$$\dots(pm+(s+1)m+im)$$

$$+\frac{1}{40}\sum_{p=0}^{k}\sum_{s=0}^{q}\left(\frac{\xi}{L+2}\right)^{k-p}\left(\frac{\varphi}{L+2}\right)^{q-s}2c(L+2)^{k+q+i+1}\{((p+1)m+sm+1)\ldots$$

$$\ldots((p+1)m+sm+im)+(pm+sm+1)\ldots(pm+sm+im)\}$$

et alors puisque $\dfrac{\xi}{L+2}<\dfrac{1}{2}$ et $\dfrac{\varphi}{L+2}<\dfrac{1}{2}$ on trouve

$$\frac{1}{2}\sigma^{k,1+q}(\mathcal{A}^i u, \lambda, \Theta, R)\leq(km+(q+1)m+1)\ldots(km+(q+1)m+im)2cL^{k+q+i+1}$$

c'est à dire (32) est vraie aussi pour $\sigma^{k,1+q}(\mathcal{A}^i u, \lambda, \Theta, R)$. On va maintenant démontrer le théorème 3.1 par induction.

D'après le Théorème 2.1 et (3.1), puisque $\Theta_0\geq 1$, nous savons que $P(0, i, k)$ a lieu, $\forall i, k$.

Admettons $P(q', i, k)$, $q'\leq q$, $\forall i, k$ et montrons $P(q+1, i, k)$, $\forall i, k$.

D'après l'hypothèse de récurrence et (α), on a $P(q+1, i, 0)$, $\forall i$. Soit k fixé quelconque; admettons $P(q+1, i, k-1)$; ceci, joint à l'hypothèse de récurrence et (β), entraine $p(q+1, i, k)$; ceci démontre $P(q+1, i, k)$ et achève la démonstration du théorème.

4. - Démonstration de l'analyticité de u.

4.1. - Du théorème 3.1 on peut déduire le

COROLLAIRE 4.1. - *Il existe une constante N, dépendant continûment seulement de L, r_1, c_2 et λ_1 (et donc continûment et seulement de L, c_2 et des éléments de $\mathcal{A}$ indiqués à la note* [20] *en bas de page), telle que si on pose $r'=\dfrac{r_1}{2}$, on ait*

$$\| u \|_{p,\Omega_{r'}}\leq p!\ 2cN^p \qquad p=0, 1, 2, \ldots \tag{4.1}$$

En fait utilisons (3.2) avec $\lambda=\lambda_0$, $\Theta=\Theta_0$, $R=r_1$ et $i=0$; on a

$$\sigma^{k,q}(u, \lambda_0, \Theta_0, r_1)\leq 2c(L+2)^{k+q} \qquad \forall k \text{ et } q \text{ entiers } \geq 0$$

d'où par la définition de $\sigma^{k,q}(u, \lambda, \Theta, R)$

$$\| D_y^{qm} u \|_{x, km, \Omega_{r'}}\leq((k+q)m)!\,\lambda_0^{h+q}\Theta_0^k r'^{(k+q)m}2c(L+2)^{k+q} \tag{4.2}$$

$\leq((k+q)m)!\,2cM^{k+q}$ avec M constante dépendant continûment de λ_0, Θ_0, r', L et donc de r_1, c_2, λ_1 et L.

Soient maintenant t et h entiers quelconques ≥ 0; et supposons que $t = qm + s$ et $h = vm + j$, avec $0 \leq s < m$, $0 \leq j < m$, alors en utilisant le lemme 2.2 et la remarque 2.1 avec $\varepsilon = 1$ on a

$$\| D_y^t u \|_{x, h, \Omega_r'} \leq \| D^{(q+1)m} u \|_{x, h, \Omega_r} + c_m \| D_y^{qm} u \|_{x, h, \Omega_r'} \leq$$

$$\leq \| D_y^{(q+1)m} u \|_{x, (k+1)m, \Omega_r'} + c_m \| D_y^{(q+1)m} u \|_{x, km, \Omega_r'} +$$

$$+ c_m \| D_y^{qm} u \|_{x, (k+1)m, \Omega_r'} + c_m^2 \| D_y^{qm} u \|_{x, km, \Omega_r'}$$

et donc par (4.2) on a

$$\text{(4.3)} \qquad \| D^t_y u \|_{x, h, \Omega_r'} \leq ((k+1)m + (q+1)m)!\, 2c(1 + 2c_m + c_m^2) M^{k+q+2}$$

$$\leq (t + h + 2m)!\ 2c(1 + 2c_m + c_m^2) M^{k+q+2} \leq (t+h)!\, 2c\, M_1^{t+h} \text{ (22)}$$

avec M_1 constante qui dépend continûment de M.

Et enfin on obtient

$$\| u \|_{p, \Omega_r'} = \sum_{t=0}^{p} \sum_{|\beta| = p-t} \frac{p!}{t!\,\beta!} \| D_x^t D_x^\beta u \|_{0, \Omega_r'} =$$

$$= \sum_{t=0}^{p} \frac{p!}{t!\,(p-t)!} \sum_{|\beta| = p-t} \frac{(p-t)!}{\beta!} \| D_x (D^t_y u) \|_{0, \Omega_r'}$$

$$= \sum_{t=0}^{p} \binom{p}{t} \| D^t_y u \|_{x, p-t, \Omega_r'} \leq \sum_{t=0}^{p} \binom{p}{t} (t+p-t)!\ 2cM_l^{t+p-t} = p!\ 2c\,(2M_l)^p$$

d'où (4.1) avec $N = 2M_l$. c. q. f. d.

Utilisons maintenant le théorème de SOBOLEV à partir de (4.1): on obtient

$$\text{(4.4)} \qquad \sup_{\bar{\Omega}_{r'}} | D^\alpha u | \leq c^* c p!\ N_l^p \qquad | \alpha | = p, \quad p = 0, 1, \ldots$$

avec c^* constante fixe (dépendant de n) et N_1 constante dépendant de r' et

(22) On a ici utilisé le fait que $(v + w)! \leq v!\, w!\ 2^v 2^w$.

de N, coutinûment. Et alors u est analytique dans une demi-boule $\overline{\Omega}_{r_*}$ fermée, de rayon r_* dépendant de N_1 donc de r' et N, *donc seulement de* L *et de* $\mathcal{A}$. Et (4.4) nous montre aussi que, si c est fixé, u demeure dans un borné de $\mathcal{H}(\overline{\Omega}_{r_*})$.

5. - Applications. Nouveaux théorèmes de régularité pour opérateurs différentiels paraboliques.

5.1. - On va maintenant donner une nouvelle application du théorème 1.1 qui donne un théorème de «régularité», pour les opérateurs diffèrentiels paraboliques «concrets», démontré jusqu'à prèsent seulement, croyons nous, pour l'opérateur de la chaleur en deux variables $-\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial u}{\partial t}$ (c. HOLMGREN [14], GEVREY [10]).

THÉORÈME 5.1. - *Soit* A *l'opérateur donné par* (3.1) *du chap.* 2 *et supposons que les hypothèses* (2.1), (2.2), (2.3) *et* (2.4) *du chap.* 3 *soient valables: alors si* $v \in \mathcal{D}_+(\mathcal{D}(\overline{\Omega}))$, $\gamma v = 0$ *et* $Av + v' \in \mathcal{D}_{+, M_k}(\mathcal{H}(\overline{\Omega}))$ *on a*

$$v \in \mathcal{D}_{+, M_k}(\mathcal{H}(\overline{\Omega})). \tag{5.1}$$

DÉMONSTRATION. - Posons $Av + v' = \varphi$; alors il existe a tel que $\varphi \in \mathcal{D}^a_{+, M_k}(\mathcal{H}(\overline{\Omega}))$ et v est nulle pour $t < a$. Soit $b > a$ fixé quelconque; on a

$$Av = -v' + \varphi \qquad \text{dans} \quad \Omega \times [a, b] \tag{5.2}$$

$$\gamma_j v = 0 \qquad j = 0, 1, \ldots, m-1. \tag{5.3}$$

Dérivons par rapport à t (5.2); on a:

$$Av' = -v'' + \varphi'. \tag{5.4}$$

Appliquons l'opérateur A à (5.2); on a

$$A^2 v = -Av' + A\varphi. \tag{5.5}$$

Donc

$$A^2 v = v'' - \varphi' + A\varphi. \tag{5.6}$$

Et en général de façon analogue on a pour $k \geq 1$

$$A^k v = (-1)^k v^{(k)} + (-1)^{k-1} \varphi^{(k-1)} + (-1)^{k-2} A(\varphi^{(k-2)}) + \\ + (-1)^{k-3} A^2(\varphi^{(k-3)}) + \ldots + A^{k-1}\varphi. \tag{5.7}$$

Et donc aussi, grâce à (5.3)

$$\gamma_j(A^k v) = (-1)^{k-1}\gamma_j \varphi^{(k-1)} + (-1)^{k-2}\gamma_j(A(\varphi^{(k-2)}) + \ldots + \gamma_j(A^{k-1}\varphi). \tag{5.8}$$

Mais v est en particulier, d'après le théor. 3.1 du chap. 2, dans $\mathfrak{D}^{a}_{+, M_k}(L_2(\Omega))$ et donc il existe c et L telles que

$$\| v^{(k)}(t) \|_{L_2(\Omega)} \leq cL^k (2mk)! \qquad t \in [a, b], \quad \forall k. \tag{5.9}$$

En outre grâce au fait que les coefficients de A sont dans $\mathcal{H}(\overline{\Omega})$ et $\varphi \in \mathfrak{D}^{a}_{+, M_k}(\mathcal{H}(\overline{\Omega}))$, il existe c_1 et L_2 telles que

$$\| A^h(\varphi^{(k)}(t)) \|_{L^2(\Omega)} \leq c_1 L_1^{k+h}(2m(k+h))!, \quad \forall k, h, \; t \in [a, b] \tag{5.10}$$

$$\sum_{j=0}^{m-1} \| \gamma_j(A^h \varphi^{(k)}(t)) \|_{H^{2m(1+i)-j-1/2}(\Gamma)} \leq c_1 L_1^{k+h+i+1}(2m(k+h+i+1))! \qquad \forall k, h, i, \; t \in [a, b]. \tag{5.11}$$

Donc de (5.7), (5.9) et (5.10) on déduit

$$\begin{aligned} \| A^k v \|_{L^2(\Omega)} &\leq cL^k (2mk)! + c_1 L_1^{k-1}(2m(k-1))! + \\ &+ c_1 L_1^{k-1}(2m(k-1)! + \ldots + c_1 L^{k-1}(2m(k-1)! = \\ &= cL^k(2mk)! + kc_1 L_1^{k-1}(2m(k-1))! \leq c_* L_*^k (2mk)! \\ &\qquad \forall k, \; t \in [a, b]. \end{aligned} \tag{5.12}$$

c_* et L_* constantes dépendant de c, L, c_1 et L_1.

Et de façon analogue, de (5.8) et (5.11) on déduit

$$\| \gamma_j(A^k v) \|_{H^{2m(i+1)-j-1/2}(\Gamma)} \leq c_* L_*^{k+i+1}(2m(k+i+1))! \qquad \forall k, i, \; t \in [a, b]. \tag{5.13}$$

Et alors grâce aux théorèmes 1.1 et 1.2 de ce chapitre, $v(t)$ demeure dans un borné de $\mathcal{H}(\overline{\Omega})$ pour $t \in [a, b]$.

Mais alors puisque de (5.7) on déduit

$$| D_x^p D_t^k v(x, t) | \leq | D_x^p A^k v(x, t) | + | D_x^p D_t^{k-1} \varphi(x, t) | + | D_x^p A D_t^{k-2} \varphi(x, t) | + \ldots + | D_x^p A^{k-1} \varphi(x, t) |$$

on voit enfin, pour b fixé $> a$, qu'il existe des constantes c_1 et L_2 telles que

$$\begin{aligned} | D_x^p D_t^k v(x, t) | &\leq c_2 L^{|p|+k}(|p| + 2km)! \leq \\ &\leq c_2(2L_2)^{|p|}(2^{2m}L_2)^k \, |p|!(2km)!, \quad \forall p, k \text{ et } x \in \overline{\Omega}, \; t \in [a, b] \end{aligned} \tag{5.14}$$

et par conséquent, puisque b est quelconque $> a$, on a

$$v \in \mathfrak{D}_{+, M_k} \mathcal{H}(\overline{\Omega})) \qquad \text{c.q.f.d.}$$

On obtient donc en particulier, grâce aussi à [18], théorème 8.1 p. 121, que le problème

$$\left\{ \begin{array}{ll} \sum_{|p|, |q| \leq m} (-1)^{|p|} D^p (a_{p,q}(x) D^q u) + \dfrac{\partial u}{\partial t} = f(x, t) & \text{dans } Q \\ \gamma_j v = 0 & j = 0, \ldots, m-1 \text{ sur } \Sigma \end{array} \right.$$

admet pour chaque $f \in \mathfrak{D}_{+, M_k}(\mathcal{H}(\overline{\Omega}))$ une et une seule solution $u \in \mathfrak{D}_{+, M_k}(\mathcal{H}(\overline{\Omega}))$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] S. AGMON - A. DOUGLIS - L. NIRENBERG, *Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions.* «Comm. pure appl. math.», 12 (1959), p. 623-727.

[2] N. ARONSZAIN - A. N. MILGRAM, *Differential operators on Riemannian manifolds,* «Rend. Circ. Mat.», Palermo, 2 (1952), p. 1-61.

[3] C. BAIOCCHI, *Sui problemi ai limiti per le equazioni paraboliche del tipo del calore,* B.U.M.I. 29 (1964), pp. 407-422.

[4] A. BEURLING, *Quasi-analycity and general distributions,* «Lectures at Stanford University» (1961).

[5] N. BOURBAKI, *Espaces vectoriels topologiques,* Chap. I et II. Paris, Herman, 1953.

[6] — —, *Espaces vectoriels topologiques,* Chap. III et IV. Paris, Hermann, 1955.

[7] J. DIEUDONNÉ - L. SCHWARTZ, *La dualité dans les espaces $\mathfrak{F}$ et $\mathfrak{L}\mathfrak{F}$.* «Annales Institut Fourier t l. (1950) pp. 61-101.

[8] S. D. EIDELMAN, *Sur la solution fondamentale des systèmes paraboliques,* «Mat. Sbornik 38 (1956). p. 51-92.

[9] A. FRIEDMAN, *Classes of solutions of linear systems of partial differential equation of parabolic type,* «Duke Mah.» J. 24 (1957), p. 433-442.

[10] M. GEVREY, *Sur la nature analytique des solutions des équations aux dérivées partielles,* «Ann. Ecole Norm. Sup.» Paris, 35 (1918), 129-190.

[11] A. GROTHENDIECK, *Produits tensoriels topologiques,* Memoirs of the «Amer. Math. Soc.», 1955.

[12] KATO-TANABE, *On the abstract evolution equation,* Osaka Math. J. 14 (1963) p. 107-133.

[13] T. KOTAKE - M. S. NARASIMHAN, *Fractional powers of a linear elliptic operator* «Bull. Soc. Math. France». t. 90 (1962), pp. 449-471.

[14] E. HOLMGREN, *Sur l'équation de la propagation de la chaleur,* «Arkiv for Math. Ast. och. Fysik», t. 4, n. 18, (1909), p. 1-28.

[15] G. KÖTHE, *Topologische Lineare Raüme,* Springer, Berlin, 1960.

[16] — —, *Dualitat in der Funktionen-theorie*, J. reine angew, Math., 191 (1953), p. 30-49.

[17] J. LERAY-Y. OHYA, *Systèmes linéaires hyperboliques non stricts*, Séminaire Collège de France 1964.

[18] J. L. LIONS, *Equations différentielles opérationnelles*, «Springer, Grundlehren der Math. Wiss.», t. 111, 1961.

[19] J.L. LIONS - E. MAGENES, *Problèmes aux limites non homogènes*, (VII), «Annali di Mat. pura appl. t. 63 (1963) 201-224.

[20] — —, *Remarques sur les problèmes aux limites pour opérateurs paraboliques*, «C. R. Acad. Sc.», Paris, 251 (1960), 2118-2120.

[21] — —, *Sur certains aspects des problèmes aux limites non homogènes pour des opérateurs paraboliques*, «Ann. Sc. Norm. Sup.», Pisa, vol. 18 (1964), 303-344

[21 bis] E. MAGENES - G. STAMPACCHIA, *I problemi al contorno per le equazioni differenziali di tipo ellittico*, «Ann. Sc. Norm. Sup.», Pisa, t. XII (1958), 247-357.

[22] S. MANDELBROJT, *Séries adhérentes, régularisation des suites, Applications* - Gauthier Villars, Paris (1952).

[23] F. MANTOVANI - S. SPAGNOLO, *Funzionali analitici reali e funzioni armoniche*, «Annali Sc. Norm. Sup.», Pisa, t. XVIII (1964), p. 475-513.

[24] C. B. MORREY - L. NIRENBERG, *On the analyticity of the solutions of linear elliptic systems of partial differential equations*, Comm. pure appl math. 10 (1957), p, 271-290.

[25] C. ROUMIEU, *Sur quelques extensions de la notion de distributions*. «Ann. Sc. Ec. Norm. Sup.», 77 (1960), p. 47-121.

[26] L. SCHWARTZ, *Théorie des distributions*, I et II, Hermann, Paris, 1950-51.

[27] — —, *Espaces de fonctions différentiables à valeurs vectorielles*, «Journal d'Analyse Math.», vol. IV, 1954-55, 88-148.

[28] — —, *Théorie des distributions à valeurs vectorielles*, I, II, «Annales Institut Fourier» t. VII (1957), 1-141; t. VIII (1958) p. 1-209.

[29] J. SEBASTIAO e SILVA, *Su certe classi di spazi localmente convessi importanti per le applicazioni*, «Rend. di Mat. e sue appl.», vol. 14 (1955), p. 390-410.

[30] G. TALENTI, *Un problema di Cauchy*, «Ann. Sc. Norm. Sup.», Pisa, vol. 18 (1964), p. 165-186.

[31] — —, *Osservazioni sulla nota: Un problema di Cauchy*, à paraître aux «Ann. Sc. Norm. Sup.», Pisa (1964).

Note ajoutée à la correction des épreuves.

L'hypothèse (2.2) chap. 3, selon laquelle les coefficients a_{pq} sont indépendants de t, peut être remplacée par la condition

$$a_{pq} \in \mathcal{E}_{M_k}(\mathcal{H}(\overline{\Omega})), \qquad M_k = (2km)\,!$$

d'après un résultat de A. CAVALLUCCI, sur la régularisation des solutions des problèmes aux limites pour des équations quasi-elliptiques, qui vient de paraître aux Annali di Mat. pura e appl. sons le titre «Sulle proprietà differenziali delle soluzioni delle equazioni quasi ellittiche».